УДК 524.8

# ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ ДЛЯ СКАЛЯРНОГО ПОЛЯ В ОДНОРОДНЫХ ИЗОТРОПНЫХ КОСМОЛОГИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ И РОЖДЕНИЕ ЧАСТИЦ

*Ю.В. Павлов*

**Аннотация**

Представлен обзор точных решений для скалярного поля в задаче о рождении частиц в однородных изотропных космологических моделях.

**Ключевые слова:** скалярное поле, точные решения, рождение частиц.

---

## 1. Скалярное поле в однородном изотропном пространстве

Теория рождения частиц активно развивается с 70-х годов прошлого столетия и может иметь актуальные приложения к космологии и астрофизике [1]. В настоящей статье дан обзор случаев, допускающих точные решения задачи о рождении скалярных частиц в однородных изотропных космологических моделях. Используется система единиц, в которой $\hbar = c = 1$.

Рассмотрим комплексное скалярное поле $\varphi(x)$ массы $m$ с уравнением движения

$$(\nabla^i \nabla_i + m^2 + \xi R)\, \varphi(x) = 0, \tag{1}$$

где $\nabla_i$ – ковариантные производные в $N$-мерном пространстве-времени с метрикой $g_{ik}$, $g = \det(g_{ik})$, $R$ – скалярная кривизна, $\xi = \mathrm{const}$. Значение $\xi = \xi_c = (N-2)/[\,4\,(N-1)]$ соответствует конформной связи с кривизной ($\xi_c = 1/6$ при $N = 4$). Уравнение (1) конформно инвариантно, если $m = 0$ и $\xi = \xi_c$.

Для однородного изотропного пространства-времени с метрикой вида

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)\, dl^2 = a^2(\eta)\, (d\eta^2 - dl^2), \tag{2}$$

где $dl^2$ – метрика $(N-1)$-мерного пространства постоянной кривизны $K = 0, \pm 1$, полная система решений уравнения (1) может быть найдена в форме

$$\varphi(x) = a^{-(N-2)/2}(\eta)\, g_\lambda(\eta) \Phi_J(\mathbf{x}), \tag{3}$$

где

$$g_\lambda''(\eta) + \omega^2(\eta)\, g_\lambda(\eta) = 0, \tag{4}$$

$$\omega^2(\eta) = \big(m^2 + (\xi - \xi_c) R\big)\, a^2(\eta) + \lambda^2, \quad \Delta_{N-1} \Phi_J(\mathbf{x}) = -\left[\lambda^2 - \left(\frac{N-2}{2}\right)^2 K\right] \Phi_J(\mathbf{x}), \tag{5}$$

$J$ – набор индексов (квантовых чисел), нумерующих собственные функции оператора Лапласа – Бельтрами $\Delta_{N-1}$ в $(N-1)$-мерном пространстве.

В соответствии с методом диагонализации гамильтониана [1] функции $g_\lambda(\eta)$ должны удовлетворять следующим начальным условиям [2]:

$$g_\lambda'(\eta_0) = i\, \omega(\eta_0)\, g_\lambda(\eta_0), \quad |g_\lambda(\eta_0)| = \omega^{-1/2}(\eta_0). \tag{6}$$

Если квантованное скалярное поле находится в вакуумном состоянии для момента времени $\eta_0$, то плотность числа пар частиц, рожденных к моменту времени $\eta$, может быть вычислена (для $N=4$ и $K=0,-1$) по формуле [1]

$$n(\eta)=\frac{1}{2\pi^2 a^3}\int\limits_0^\infty S_\lambda(\eta)\,\lambda^2\,d\lambda, \quad S_\lambda(\eta)=\left|g'_\lambda(\eta)-i\omega\,g_\lambda(\eta)\right|^2/\,(4\omega). \tag{7}$$

Как показано в [2], $S_\lambda \sim \lambda^{-6}$ и интеграл в (7) сходится.

Заметим, что уравнение (4) с помощью подстановки $g(\eta)=\exp z(\eta)$ сводится к следующему уравнению относительно функции $v(\eta)\equiv z'(\eta)$

$$v'(\eta)+v^2(\eta)+\omega^2(\eta)=0, \tag{8}$$

являющемуся одним из уравнений Риккати общего типа, решения которого, как правило, не могут быть выражены в конечном виде через элементарные функции. Поэтому число масштабных факторов $a(\eta)$, допускающих точные решения, относительно невелико. В случаях, когда точное решение все же может быть найдено, оно выражается, как правило, через специальные функции: гипергеометрические, функции Бесселя и т. д.

## 2. Точные решения в космологических моделях с $p=w\varepsilon$

Уравнения Эйнштейна

$$R_{ik}-\frac{1}{2}g_{ik}R=-8\pi G T_{ik}, \tag{9}$$

с тензором энергии-импульса фоновой материи $T^i_k=\mathrm{diag}\,(\varepsilon,-p,\ldots,-p)$ в метрике (2) принимают вид

$$\frac{c^2+K}{a^2}=\frac{16\pi G\,\varepsilon}{(N-1)(N-2)}, \quad -\frac{1}{a^2}\Big[\,c'+\frac{N-3}{2}\left(c^2+K\right)\Big]=\frac{8\pi G p}{N-2}, \tag{10}$$

где штрих обозначает производную по «конформному» времени $\eta$ и $c\equiv a'/a$.

Из (10) следует, что для $p=w\varepsilon$, где $w=\mathrm{const}$, плотность энергии фонового вещества изменяется по закону $\varepsilon \sim a^{-(1+w)(N-1)}$, то есть уменьшается с ростом $a$ при $w>-1$, постоянна при $w=-1$ и возрастает с увеличением $a$ при $w<-1$.

При $K=0$ и $w>-(N-3)/(N-1)$ из (10) получим

$$a=a_0\,t^q=a_1\eta^\beta, \quad q=\frac{2}{(N-1)(w+1)}, \quad \beta=\frac{q}{1-q}, \quad q\in(0,1).$$

Выражение для числа пар частиц $N_a(t)=n(t)a^3(t)$, рожденных в объеме $a^3(t)$ к моменту времени $t$, в рассматриваемом интервале $q$ удобно записать в виде

$$N_a(t)=b^{(0)}_q(t)\cdot\left(\frac{a(t_C)}{t_C}\right)^{N-1},$$

где $t_C=1/m$ – комптоновское время. Тогда $b^{(0)}_q(t)/(1-q)^{N-1}$ – коэффициент пропорциональности между количеством рожденных пар частиц и числом причинно несвязанных областей $N_c(t)=((1-q)\,a(t)/t)^{N-1}$ в комптоновский момент времени после Большого взрыва. При $0<q<1$ коэффициент $b^{(0)}_q(t)$ при $mt\gg 1$ не зависит от времени. В данном интервале $q$ следующие два случая допускают точные решения уравнений для скалярного поля.

**2.1. Точное решение для** $a(t) = a_0\sqrt{t} = a_1\eta$**.** Модель с таким масштабным фактором является исключительно важной с точки зрения приложений, так как при $K = 0$ в четырехмерном пространстве-времени она соответствует радиационно-доминированной вселенной. Начальные условия для скалярного поля с конформной связью с кривизной могут быть поставлены при $\eta \to 0$, то есть вблизи сингулярности $a = 0$,

$$|g_\lambda(0)| = 1/\sqrt{\lambda}, \quad g'_\lambda(0) = i\lambda g_\lambda(0). \tag{11}$$

Решение уравнения (4) с условиями (11) может быть записано в форме [3]:

$$g_\lambda(t) = \frac{e^{i(mt+\alpha_0)}}{\sqrt{\lambda}} \left[\Phi\Big(\frac{1}{4} - \frac{i}{2}\delta^2, \frac{1}{2}; -i2mt\Big) + i2\delta\sqrt{mt}\, \Phi\Big(\frac{3}{4} - \frac{i}{2}\delta^2, \frac{3}{2}; -i2mt\Big)\right], \tag{12}$$

где $\Phi(a, b; z)$ – вырожденная гипергеометрическая функция Куммера, $\delta \equiv \equiv \lambda/(ma(t_C))$ имеет смысл физического импульса в комптоновский $t_C = 1/m$ момент времени в единицах $m$, $\alpha_0$ – произвольная вещественная постоянная. Представление (12) через функции параболического цилиндра дано в [4]. Асимптотическое значение $b^{(0)}_{1/2} \approx 5.3 \cdot 10^{-4}$ [4].

**2.2. Точное решение для** $a(t) = a_0\, t^{1/3} = a_1\sqrt{\eta}$**.** Модель с таким масштабным фактором при $K = 0$ и $N = 4$ – это вселенная с предельно жестким $p = \varepsilon$ уравнением состояния. Решение уравнения (4) с $\xi = \xi_c$ и начальными условиями (11) при таком масштабном факторе [3, 4] есть

$$g_\lambda(t) = \frac{\pi\delta^2 e^{i\alpha_0}}{\sqrt{3\lambda}} \sqrt{(mt)^{2/3} + \delta^2} \Big[ C_1(\delta)\, J_{1/3}\Big(\big((mt)^{2/3} + \delta^2\big)^{3/2}\Big) + \\ + C_2(\delta)\, J_{-1/3}\Big(\big((mt)^{2/3} + \delta^2\big)^{3/2}\Big)\Big], \tag{13}$$

где $J_\nu(x)$ – функции Бесселя,

$$C_1(\delta) = J_{2/3}\left(\delta^3\right) + iJ_{-1/3}\left(\delta^3\right), \quad C_2(\delta) = J_{-2/3}\left(\delta^3\right) - iJ_{1/3}\left(\delta^3\right), \quad \delta \equiv \frac{\lambda}{ma(t_C)}.$$

Асимптотическое значение $b^{(0)}_{1/3} \approx 8.1 \cdot 10^{-4}$ [3].

**2.3. Точное решение для** $a(t) \sim t$**.** При $w = -(N-3)/(N-1)$ из уравнений Эйнштейна (10) следует, что $a = a_0 t = a_1 e^{a_0\eta}$. Если $a_0 = 1$ и $K = -1$, то $\varepsilon = 0$, и метрика (2) с таким масштабным фактором является плоской, а соответствующие координаты $x^k$ описывают часть пространства Минковского (см. в [5, § 113]). Четырехмерное гиперболическое пространство-время с $a(t) = t$ известно как вселенная Милна.

В метрике (2) с $a = a_0 t$ решение уравнения (4) с $\xi = \xi_c$ и начальными условиями (6), заданными при $mt \to 0$, имеет вид

$$g_\lambda(t) = \frac{\sqrt{\lambda}}{a_0}\, \Gamma\left(\frac{i\lambda}{a_0}\right)\, J_{i\lambda/a_0}(mt)\, e^{i\alpha_0},$$

где $\Gamma(z)$ – гамма-функция, $\alpha_0$ – произвольная вещественная постоянная. Независимо от $a_0$ и $K$ асимптотическое при $mt \gg 1$ значение плотности рожденных квазичастиц для $N = 4$ равно $n(t) \approx m/(512\pi t^2)$. Таким образом, отличный от нуля результат имеет место даже для вселенной Милна, где гравитационное поле отсутствует и рождения реальных частиц происходить не должно!

Действительно, пространственно-временной анализ рождения частиц с помощью корреляционной функции, проведенный в [6], показывает, что соответствующая корреляционная функция пары рожденных частиц экспоненциально мала на расстояниях, превышающих комптоновскую длину волны частицы. Это свидетельствует о том, что рожденные квазичастицы в данном случае представляют собой виртуальные пары с характерной длиной корреляции $1/m$.

**2.4. Пространство-время де Ситтера** – это четырехмерное пространство-время постоянной кривизны. Оно является решением уравнений Эйнштейна в пустом пространстве с космологической постоянной и обладает 10-параметрической группой симметрии $O(4,1)$, если скалярная кривизна $R>0$ (пространство де Ситтера 1-го рода), или $O(3,2)$, если $R<0$ (пространство де Ситтера 2-го рода).

Выбирая специальным образом системы координат в пространстве де Ситтера, его метрику можно записать, например, в виде (2) с масштабными факторами 1)–3) для пространства де Ситтера 1-го рода и 4) для пространства де Ситтера 2-го рода:

$$1)\ \ a_1\, e^{Ht} = \frac{-1}{H\eta}, \quad 2)\ \ \frac{\operatorname{ch} Ht}{H} = \frac{1}{H \sin\eta},$$

$$3)\ \ \frac{\operatorname{sh} Ht}{H} = \frac{-1}{H \operatorname{sh}\eta}, \quad 4)\ \ \frac{\cos Ht}{H} = \frac{1}{H \operatorname{ch}\eta}.$$

Во всех этих случаях уравнение для скалярного поля (4) имеет точное решение. В случае 1), $t\in(-\infty,+\infty)\ \Leftrightarrow\ \eta\in(-\infty,0)$, решение уравнения (4) с условиями (6) при $\eta_0\to-\infty$ имеет вид

$$g_\lambda(\eta) = \sqrt{-\frac{\pi\eta}{2}}\, e^{\frac{\pi}{2}\operatorname{Im}\nu} H_\nu^{(2)}(-\lambda\eta)\, e^{i\alpha_0}, \quad \nu = \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{m^2+(\xi-\xi_c)R}{H^2}},$$

где $H_\nu^{(2)}(z)$ – функция Ханкеля, $\alpha_0$ – произвольная вещественная постоянная.

Как показано в [7] методом пространственно-временной корреляционной функции, при $m^2 \ge (\xi_c-\xi)R$ рождающиеся пары квазичастиц следует интерпретировать как пары виртуальных частиц. Отсутствие рождения реальных частиц в пространстве де Ситтера подтверждается локальным характером вакуумного тензора энергии-импульса и равенством нулю мнимой части эффективного лагранжиана [1].

В случаях 2)–4), а также для аналогичных масштабных факторов, но с заменой $\eta\to\gamma\eta,\ \gamma=\mathrm{const}$, решение может быть выражено через гипергеометрические функции (см. в [1, § 9.5]). При $\gamma\ne1$ подобные масштабные факторы уже не описывают пространство де Ситтера. Так, например, пространство-время с масштабным фактором $a(\eta)=1/(H\operatorname{ch}\gamma\eta)=\sin(\gamma Ht)/H$ эволюционирует между двумя сингулярностями.

**2.5. Рождение частиц в космологии с фантомной материей.** При $w<-1$ точное решение уравнения (4) существует для значения $w=-(N+1)/(N-1)$ $(w=-5/3$ при $N=4)$. Масштабный фактор метрики в этом случае есть $a=a_0/(-t)=a_1/\sqrt{-\eta}$. При $t\to-0$ имеется сингулярность Большого разрыва. Решение уравнения (4), удовлетворяющее условиям (6) при $\eta_0\to-\infty$, имеет вид

$$g_\lambda(\eta) = -2i\eta\sqrt{\lambda}\, \exp\Bigl(-\frac{\pi m^2 a_1^2}{4\lambda} + i(\lambda\eta+\alpha_0)\Bigr)\, \Psi\Bigl(1+\frac{i m^2 a_1^2}{2\lambda}\,,2\,;-2i\lambda\eta\Bigr),$$

где $\Psi(a,\, b;\, z)$ – вырожденная гипергеометрическая функция Трикоми, $\alpha_0$ – произвольная вещественная постоянная. Для плотности числа рожденных частиц в $N=4$ при $t\to -0$ можно получить получим (см. [8]) $n=m^3/24\pi^2$. Несмотря на то что общее число рожденных частиц $N_a(t)=n(t)a^3(t)$ в лагранжевом объеме $a^3(t)$ неограниченно возрастает при $t\to -0$, их обратным влиянием на метрику пространства-времени, как показано в [8], можно пренебречь.

## 3. Точные решения в космологических моделях с $p/\varepsilon \neq \mathrm{const}$

Приведем краткий обзор масштабных факторов, допускающих точные решения уравнения для скалярного поля (4). Решения для метрик с

$$a(\eta)=A+B\,\mathrm{th}\,\gamma\eta, \qquad a(\eta)=\sqrt{A+B\,\mathrm{th}\,\gamma\eta}, \quad A,\ B,\ \gamma=\mathrm{const}$$

выражаются через гипергеометрические функции (см. [1, § 9.5], [9, § 3.4] ).

Метрика с масштабным фактором $a(\eta)=\sqrt{a\eta^2+b\eta}$ в четырехмерном пространстве-времени при $\eta\ll b/a$ соответствует предельно жесткому уравнению состояния $p=\varepsilon$. При $\eta\gg b/a$ $(K=0)$ такой масштабный фактор соответствует радиационно-доминированной вселенной $p=\varepsilon/3$. Решение уравнения (4) с $\xi=\xi_c$ для такого масштабного фактора может быть выражено через вырожденную гипергеометрическую функцию Куммера.

Однородная изотропная метрика с масштабным фактором

$$a(\eta)=a_1\,\mathrm{tg}\,\gamma\eta=a_1\sqrt{\exp\left(\frac{2\gamma t}{a_1}\right)-1}, \quad \eta\in\left(0,\,\frac{\pi}{2\gamma}\right), \quad t\in(0,\,+\infty)$$

при малых временах описывает радиационно-доминированную вселенную $a(t)\approx\sqrt{2\gamma a_1 t}$, при больших временах – вселенную де Ситтера $a(t)\approx a_1\exp\gamma t/a_1$. Решение уравнения (4) для скалярного поля с конформной связью и начальными условиями при $\eta\to 0$ выражается через гипергеометрическую функцию $F(a,\, b,\, c;\, z)$:

$$g(\eta)=\frac{e^{i\alpha_0}}{\sqrt{\lambda}}(\cos\gamma\eta)^{\left(1+\sqrt{1-4m^2a_1^2/\gamma^2}\right)/2}\left[F\Big(\alpha,\beta,\frac{1}{2};\sin^2\gamma\eta\Big)+i\frac{\lambda}{\gamma}\sin\gamma\eta\times\right.$$
$$\left.\times F\Big(\alpha+\frac{1}{2},\beta+\frac{1}{2},\frac{3}{2};\sin^2\gamma\eta\Big)\right], \quad (14)$$

где

$$\alpha,\beta=\frac{1}{4}\left[1+\sqrt{1-\frac{4m^2a_1^2}{\gamma^2}}\pm\frac{2}{\gamma}\sqrt{\lambda^2-m^2a_1^2}\right].$$

Заметим, что если найдено общее решение уравнения (4) для скалярного поля, конформно связанного с кривизной в метрике с масштабным фактором $a(\eta)$, то из него переопределением $\lambda$ может быть получено и общее решение для масштабного фактора $\tilde{a}=\sqrt{a^2(\eta)+b^2}$, где $b=\mathrm{const}$. Для примера рассмотрим модель с масштабным фактором

$$a(\eta)=\sqrt{a_1^2\eta^2+b^2}, \quad -\infty<\eta<\infty, \quad (15)$$

которая в асимптотических областях $\eta\to\pm\infty$ соответствует (при $N=4$) радиационно-доминированной космологии. Пространство сжимается до минимального масштабного фактора $a(0)=b$, «отражается» и вновь расширяется. Решение уравнения (4) с начальными условиями (6), определяемыми требованием

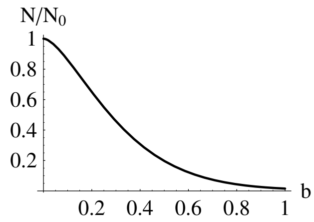


Рис. 1. Отношение числа рожденных частиц в модели (15) с параметром $b$ по отношению к радиационно-доминированному случаю ($b = 0$)

диагональности гамильтониана в момент времени $\eta = 0$, подобно (12) и имеет вид

$$g_\lambda(\eta) = \frac{\exp i\left(\alpha_0 + m a_1 \eta^2/2\right)}{\left(\lambda^2 + m^2 b^2\right)^{1/4}} \left[ \Phi\left(\frac{1}{4} - \frac{i}{2}\,\delta^2,\, \frac{1}{2}\,; -i m a_1 \eta^2\right) + \right.$$
$$\left. + \, i\eta\sqrt{\lambda^2 + m^2 b^2}\;\Phi\left(\frac{3}{4} - \frac{i}{2}\,\delta^2,\, \frac{3}{2}\,; -i m a_1 \eta^2\right)\right], \quad (16)$$

где

$$\delta^2 = \frac{\lambda^2 + m^2 b^2}{2 m a_1}.$$

Влияние параметра $b$ на интенсивность рождения частиц для случая $m = 1$, $a = 1/2$ показано на рис. 1. Видно, что при $b \to 0$ число рожденных частиц стремится к известному результату для $b = 0$. Это дополнительно указывает на возможность постановки начальных условий (6) при $b = 0, \eta \to 0$, то есть в сингулярности для радиационно-доминированной модели.

**Summary**

*Yu.V. Pavlov.* Exact Solutions for a Scalar Field in Homogeneous Isotropic Cosmological Models, and Particle Creation.

The article presents a review of exact solutions for a scalar field in the problem of particle creation in homogeneous isotropic cosmological models.

**Key words:** scalar field, exact solutions, particle creation.

**Литература**

1. *Гриб А.А., Мамаев С.Г., Мостепаненко В.М.* Вакуумные квантовые эффекты в сильных полях. – М.: Энергоатомиздат, 1988. – 288 с.

2. *Павлов Ю.В.* Неконформное скалярное поле в однородном изотропном пространстве и метод диагонализации гамильтониана // Теор. и матем. физика. – 2001. – Т. 126, № 1. – С. 115–124.

3. *Павлов Ю.В.* Рождение частиц в космологии: Точные решения // Квантовая теория и космология: Сб. ст., посв. 70-летию проф. А.А. Гриба / Под ред. В.Ю. Дорофеева, Ю.В. Павлова. – СПб.: Изд-во Лаборатории им. А.А.Фридмана, 2009. – С. 158–171.

4. *Мамаев С.Г., Мостепаненко В.М., Старобинский А.А.* Рождение частиц из вакуума вблизи однородной изотропной сингулярности // Журн. эксперим. и теор. физики. – 1976. – Т. 70. – С. 1577–1591.

5. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теория поля. – М.: Наука, 1988. – 510 с.

6. *Мамаев С.Г., Трунов Н.Н.* Пространственно-временное описание рождения частиц в гравитационном и электромагнитном полях // Ядерная физика. – 1983. – Т. 37. – С. 1603–1612.

7. *Pavlov Yu.V.* Space-time description of scalar particle creation by a homogeneous isotropic gravitational field // Grav. Cosmol. – 2008. – V. 14, No 4. – P. 314–320.

8. *Pavlov Yu.V.* On particles creation and renormalization in a cosmological model with a Big Rip // Grav. Cosmol. – 2009. – V. 15, No 4. – P. 341–344.

9. *Биррелл Н., Девис П.* Квантованные поля в искривленном пространстве-времени. – М.: Мир, 1984. – 356 с.

Поступила в редакцию
19.06.11

**Павлов Юрий Викторович** – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Института проблем машиноведения РАН, г. Санкт-Петербург.

E-mail: *yuri.pavlov@mail.ru*