УДК 519.6

МЕТОД РЕШЕНИЯ МОНОТОННЫХ СМЕШАННЫХ ВАРИАЦИОННЫХ НЕРАВЕНСТВ

И.В. Коннов, О.В. Пинягина

Аннотация

Для решения монотонного смешанного вариационного неравенства предлагается комбинированный метод регуляризации и спуска по интервальной (оценочной) функции. В предложенном методе и для построения регуляризованных задач, и для конструирования интервальной функции используется *одна и та же* равномерно выпуклая вспомогательная функция. Для решения регуляризованных задач используется метод спуска по интервальной функции с неточным линейным поиском.

Ключевые слова: смешанное вариационное неравенство, интервальная функция, метод спуска, равномерно выпуклая функция.

Введение

Пусть U – непустое замкнутое выпуклое множество в пространстве R^n, $G : U \to R^n$ – непрерывно дифференцируемое отображение, $f : R^n \to R$ – выпуклая функция. Смешанное вариационное неравенство определяется следующим образом.

Задача 1. Найти элемент $u^* \in U$ такой, что

$$\langle G(u^*), u - u^* \rangle + f(u) - f(u^*) \geq 0 \quad \forall u \in U.$$

Множество решений задачи 1 обозначим через U^*.

Один из известных подходов к решению вариационных неравенств и равновесных задач состоит в сведении их к задаче минимизации так называемой интервальной (или оценочной) функции (напр., [1]). Обычно для сходимости итерационных методов спуска по интервальной функции требуются условия сильной монотонности (см., например, [1, 2]). Это ограничение может быть преодолено с помощью регуляризации Тихонова – Браудера (см. [3–5]), а именно: используется комбинация методов регуляризации и спуска (см. [6–8]). С другой стороны, для многих задач удобно выбирать регуляризирующие добавки, которые не обязательно являются квадратическими, поскольку это позволяет добиться лучшей аппроксимации исходной задачи последовательностью возмущенных задач, а также лучших дифференциальных свойств возмущенных задач (см., например, [9, 10]). В настоящей работе и для построения регуляризованных задач, и для конструирования интервальной функции используется *одна и та же* равномерно выпуклая вспомогательная функция и предлагается метод спуска для довольно широкого класса нестрого монотонных смешанных вариационных неравенств.

1. Регуляризация для монотонных смешанных вариационных неравенств

Напомним некоторые свойства монотонности отображений (см., например, [11–13]). Отображение $G : R^n \to R^n$ называется

(i) *монотонным*, если для всех $u, v \in R^n$ выполняется неравенство

$$\langle G(u) - G(v), u - v \rangle \geq 0;$$

(ii) *строго монотонным*, если для всех $u, v \in R^n, u \neq v$ выполняется неравенство

$$\langle G(u) - G(v), u - v \rangle > 0;$$

(iii) *сильно монотонным с константой* τ, если для всех $u, v \in R^n$ выполняется неравенство

$$\langle G(u) - G(v), u - v \rangle \geq \tau \|u - v\|^2;$$

(iv) *равномерно монотонным* с функцией θ, если для всех $u, v \in R^n$ выполняется неравенство

$$\langle G(u) - G(v), u - v \rangle \geq \theta(\|u - v\|)\|u - v\|,$$

где $\theta : R \to R$ – непрерывная возрастающая функция такая, что $\theta(0) = 0$.

По аналогии, функцию $\psi : R^n \to R$ будем называть равномерно выпуклой с функцией θ, если для всех $u, v \in R^n$ выполняется неравенство

$$\alpha\psi(u) + (1 - \alpha)\psi(v) - 0.5\alpha(1 - \alpha)\theta(\|v - u\|)\|v - u\| \geq \psi(\alpha u + (1 - \alpha)v),$$

где $\alpha \in [0, 1]$, $\theta : R \to R$ – непрерывная возрастающая функция такая, что $\theta(0) = 0$. Отметим, что данное определение соответствует известному определению равномерно выпуклой функции (см., например, [14, с. 218]), где используется функция $\eta(t) = 0.5t\theta(t)$.

Для равномерно выпуклой функции также выполняется неравенство

$$\psi(v) - \psi(u) \geq \langle \nabla\psi(u), v - u \rangle + 0.5\theta(\|v - u\|)\,\|v - u\| \tag{1}$$

(см., например, [14, с. 221]). Кроме того, дифференцируемая функция ψ равномерно выпукла с функцией θ тогда и только тогда, когда ее градиент равномерно монотонен с функцией θ.

В дальнейшем будем использовать следующие предположения для задачи 1.

(A1) *Множество решений задачи U^* непусто.*

(A2) *Отображение G монотонно.*

Для того чтобы применить регуляризацию Тихонова – Браудера, выберем вспомогательную функцию $\varphi : R^n \to R$, которая обладает следующими свойствами:

(B1) *φ равномерно выпукла с функцией θ и дифференцируема на R^n.*

Рассмотрим возмущенную задачу:

Задача 2. Найти точку $u^\varepsilon \in U$ такую, что

$$\langle G(u^\varepsilon) + \varepsilon\nabla\varphi(u^\varepsilon), v - u^\varepsilon \rangle + f(v) - f(u^\varepsilon) \geq 0 \quad \forall v \in U. \tag{2}$$

где ε – положительный параметр регуляризации.

Множество решений задачи 2 будем обозначать через U^ε.

В этих условиях задача 2 имеет единственное решение.

Предложение 1. *Пусть выполнены предположения* (A2) *и* (B1). *Тогда задача 2 имеет единственное решение.*

Доказательство предложения аналогично приведенному в [15].

Решения задачи 2 при $\varepsilon \to 0$ представляют собой аппроксимацию множества решений задачи 1. Это свойство известно как регуляризация Тихонова – Браудера (см. [3–5], а также [16]).

Предложение 2. *Пусть выполнены предположения* (A1), (A2) *и* (B1). *Тогда любая последовательность* $\{u^{\varepsilon_k}\}$ *при* $\{\varepsilon_k\} \searrow 0$ *сходится к точке* $u_n^* \in U^*$ *такой, что*

$$\min_{u \in U^*} \to \varphi(u). \tag{3}$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы 2.1 из [10].

Таким образом, мы можем использовать общую схему регуляризации для решения исходной монотонной задачи.

2. Интервальная функция для регуляризованной задачи

Для определения интервальной (оценочной) функции будем использовать ту же самую равномерно выпуклую вспомогательную функцию, что и для построения регуляризованных задач.

Определим функцию:

$$\mu_\varepsilon(u) = \max_{v \in U} \Phi_\varepsilon(u, v) = \Phi_\varepsilon(u, v_\varepsilon(u)), \tag{4}$$

где

$$\Phi_\varepsilon(u, v) = -\langle G(u) + \varepsilon \nabla\varphi(u), v - u \rangle - f(v) + f(u) - \varepsilon[\varphi(v) - \varphi(u) - \langle \nabla\varphi(u), v - u \rangle],$$

или после упрощения

$$\Phi_\varepsilon(u, v) = -\langle G(u), v - u \rangle - f(v) + f(u) - \varepsilon[\varphi(v) - \varphi(u)].$$

Заметим, что точка $v_\varepsilon(u)$ всегда существует и является единственным решением задачи (4), поскольку $\Phi_\varepsilon(u, \cdot)$ – равномерно вогнутая функция.

Известно, что задача 2 эквивалентна следующей задаче (см. [1, Prop. 1.3], [17, Prop. 2.2.2]):

Задача 3. Найти точку $u^\varepsilon \in U$ такую, что

$$\langle G(u^\varepsilon), v - u^\varepsilon \rangle + \varepsilon[\varphi(v) - \varphi(u^\varepsilon)] + f(v) - f(u^\varepsilon) \geq 0 \quad \forall v \in U,$$

где $\varepsilon > 0$.

Для нее μ_ε представляет собой так называемую прямую интервальную функцию (primal gap function). Методы, основанные на использовании этой функции, для смешанного вариационного неравенства изучены в [18] в предположении сильной выпуклости функции φ.

Условия оптимальности для задачи в (4) можно сформулировать следующим образом.

Предложение 3. *Пусть выполняются условия* (A2) *и* (B1) *и пусть* u *– некоторая точка из* U. *Тогда* $v_\varepsilon(u)$ *является решением задачи в* (4) *в том и только том случае, когда выполняется условие*

$$\langle G(u) + \varepsilon \nabla\varphi(v_\varepsilon(u)), z - v_\varepsilon(u) \rangle + f(z) - f(v_\varepsilon(u)) \geq 0 \quad \forall z \in U. \tag{5}$$

Доказательство предложения аналогично приведенному в [19].

Определенная в (4) функция μ_ε будет использоваться в качестве интервальной для задачи 2. Заметим, что по определению эта функция всегда неотрицательна (так как $\Phi_\varepsilon(u, u) = 0$). Докажем ее основные свойства.

Предложение 4. *Пусть выполняются условия* (A2) *и* (B1)*. Тогда для любой точки* $u \in U$ *:*

1) $\mu_\varepsilon(u) \geq 0.5\varepsilon\theta(\|u - v_\varepsilon(u)\|)\|u - v_\varepsilon(u)\|$ *;*
2) *следующие утверждения эквивалентны:*
   (*i*) $\mu_\varepsilon(u) = 0$ *,*
   (*ii*) $u = v_\varepsilon(u)$ *,*
   (*iii*) $u \in U^\varepsilon$ *.*

Доказательство. Используя соотношение (5) при $z = u$ получим:

$$\langle G(u) + \varepsilon\nabla\varphi(v_\varepsilon(u)), u - v_\varepsilon(u)\rangle + f(u) - f(v_\varepsilon(u)) \geq 0.$$

Прибавим к обеим частям неравенства $\varepsilon[\varphi(u) - \varphi(v_\varepsilon(u))]$. Тогда, учитывая что функция φ равномерно выпукла, в силу (1) имеем:

$$\mu_\varepsilon(u) = \Phi_\varepsilon(u, v_\varepsilon(u)) = \langle G(u), u - v_\varepsilon(u)\rangle + f(u) - f(v_\varepsilon(u)) + \varepsilon[\varphi(u) - \varphi(v_\varepsilon(u))] \geq$$

$$\geq \varepsilon[\varphi(u) - \varphi(v_\varepsilon(u)) - \langle\nabla\varphi(v_\varepsilon(u)), u - v_\varepsilon(u)\rangle] \geq 0.5\varepsilon\theta(\|u - v_\varepsilon(u)\|)\|u - v_\varepsilon(u)\|,$$

то есть утверждение 1) справедливо. Используя только что полученное утверждение, из $\mu_\varepsilon(u) = 0$ имеем, что $u = v_\varepsilon(u)$, следовательно, (i) $\Rightarrow$ (ii). Обратное соотношение (ii) $\Rightarrow$ (i) очевидно в силу определения функции μ_ε. Далее, при $u = v_\varepsilon(u)$ соотношение (5) принимает вид

$$\langle G(u) + \varepsilon\nabla\varphi(u), v - u\rangle + f(v) - f(u) \geq 0 \quad \forall v \in U,$$

откуда следует $u \in U^\varepsilon$, то есть (ii) $\Rightarrow$ (iii). Наконец, пусть $u \in U^\varepsilon$, но $u \neq v_\varepsilon(u)$. Тогда из соотношения (5) при $z = u$ имеем

$$\langle G(u), v_\varepsilon(u) - u\rangle + f(v_\varepsilon(u)) - f(u) + \varepsilon[\varphi(v_\varepsilon(u) - \varphi(u)] \leq$$

$$\leq -0.5\varepsilon\theta(\|u - v_\varepsilon(u)\|)\|u - v_\varepsilon(u)\| < 0;$$

получили противоречие. Следовательно, соотношение (iii) $\Rightarrow$ (ii) также справедливо, что завершает доказательство. □

Доказанные свойства функции μ_ε, то есть неотрицательность на допустимом множестве и равенство нулю на множестве решений, показывают, что μ_ε может служить интервальной функцией для задачи 2. Отсюда, в частности, следует, что исходная задача 2 эквивалентна задаче условной минимизации

$$\min_{u \in U} \longrightarrow \mu_\varepsilon(u). \tag{6}$$

Однако выпуклость функции μ_ε не гарантируется, и данная задача может иметь, в принципе, локальные минимумы, отличные от глобальных. Поэтому было бы удобнее заменить эту задачу на ее условия стационарности, которые будут сформулированы в следующем параграфе.

3. Непрерывность и стационарность

Лемма 1. *Если условия* (A2) *и* (B1) *выполняются, то отображение* $u \mapsto v_\varepsilon(u)$ *непрерывно.*

Доказательство. Выберем произвольные точки $u', u'' \in U$ и обозначим $v' = v_\varepsilon(u'), v'' = v_\varepsilon(u'')$. Тогда в силу (5) имеем при $z = v''$ и $z = v'$ соответственно

$$\langle G(u') + \varepsilon \nabla \varphi(v'), v'' - v' \rangle + f(v'') - f(v') \geq 0,$$

$$\langle G(u'') + \varepsilon \nabla \varphi(v''), v' - v'' \rangle + f(v') - f(v'') \geq 0.$$

Сложив эти неравенства, получим

$$\langle G(u') - G(u''), v'' - v' \rangle + \varepsilon \langle \nabla \varphi(v') - \nabla \varphi(v''), v'' - v' \rangle \geq 0.$$

Поскольку функция φ равномерно выпукла, отсюда имеем:

$$\|G(u') - G(u'')\| \, \|v' - v''\| \geq \varepsilon \theta(\|v' - v''\|) \|v' - v''\|,$$

Следовательно, $\|G(u') - G(u'')\| \geq \varepsilon \theta(\|v' - v''\|)$, и в силу непрерывности отображения G отображение $u \mapsto v_\varepsilon(u)$ также непрерывно, что и требовалось доказать. □

Из леммы 1 и формулы (4), в частности, следует, что функция μ_ε непрерывна на U.

Лемма 2. *Пусть выполняются условия* (A2) *и* (B1)*. Тогда функция* μ_ε *имеет производную в любой точке* $u \in U$ *по любому направлению* $d \in R^n$*, причем*

$$\mu'_\varepsilon(u; d) = f'(u; d) - \langle \nabla G(u)^T [v_\varepsilon(u) - u] - G(u) - \varepsilon \nabla \varphi(u), d \rangle.$$

Доказательство. Выберем произвольно вектор $d \in R^n$. Учитывая свойство непрерывности отображения $u \mapsto v_\varepsilon(u)$ и определение функции μ_ε, получаем, что в данных условиях можно применить теорему 3.4 из [20, глава 1] о дифференцировании функции максимума, откуда следует, что функция μ_ε дифференцируема по направлениям в любой точке $u \in U$ и

$$\mu'_\varepsilon(u; d) = f'(u; d) - \langle \nabla G(u)^T [v_\varepsilon(u) - u] - G(u) - \varepsilon \nabla \varphi(u), d \rangle.$$

□

Покажем, что если точка u не является решением задачи 2, то вектор $d = v_\varepsilon(u) - u$ представляет собой направление убывания для функции μ_ε в точке u.

Лемма 3. *Пусть выполняются условия* (A2) *и* (B1). *Тогда для любого* $u \in U$ *выполняется неравенство*

$$\mu'_\varepsilon(u; v_\varepsilon(u) - u) \leq -\varepsilon \theta(\|v_\varepsilon(u) - u\|) \, \|v_\varepsilon(u) - u\|.$$

Доказательство. Выберем любую точку $u \in U$. Согласно лемме 2

$$\mu'_\varepsilon(u; v_\varepsilon(u) - u) = f'(u; v_\varepsilon(u) - u) - \langle \nabla G(u)^T [v_\varepsilon(u) - u] - G(u) - \varepsilon \nabla \varphi(u), v_\varepsilon(u) - u \rangle.$$

С другой стороны, в силу предложения 3, полагая в (5) $z = u$, имеем:

$$0 \leq \langle G(u) + \varepsilon \nabla \varphi(v_\varepsilon(u)), u - v_\varepsilon(u) \rangle + f(u) - f(v_\varepsilon(u)).$$

Складывая эти соотношения, получим:

$$\mu'_\varepsilon(u; v_\varepsilon(u) - u) \leq f'(u; v_\varepsilon(u) - u) + f(u) - f(v_\varepsilon(u)) - \\ - \langle \nabla G(u)^T [v_\varepsilon(u) - u] + \varepsilon [\nabla \varphi(v_\varepsilon(u)) - \nabla \varphi(u)], v_\varepsilon(u) - u \rangle.$$

Для любой точки u из множества U сумма первых трех слагаемых в правой части неравенства неположительна вследствие выпуклости функции f, поэтому в силу предположений (A2) и (B1) о монотонности отображения G и равномерной выпуклости функции φ получаем утверждение леммы. □

Итак, решение задачи (4) позволяет получить направление убывания функции μ_ε в любой точке $u \in U \backslash U^\varepsilon$.

Сформулируем необходимое и достаточное условие оптимальности для задачи (6).

Теорема 1 (Условие стационарности). *Пусть выполняются условия* (A2) *и* (B1). *Тогда*

$$\mu'_\varepsilon(u; v-u) \geq 0 \quad \forall v \in U \Longleftrightarrow u \in U^\varepsilon.$$

Доказательство. То, что решение задачи 2 и эквивалентной ей задачи (6) должно удовлетворять условию неотрицательности производной по любому направлению в этой точке, является очевидным. Предположим теперь, что

$$\mu'_\varepsilon(u; v-u) \geq 0 \quad \forall v \in U.$$

Тогда из леммы 3 следует: $-\theta(\|u - v_\varepsilon(u)\|)\|u - v_\varepsilon(u)\| \geq 0$, что выполняется только если $u = v_\varepsilon(u)$. Согласно предложению 4 получим: $u \in U^\varepsilon$. □

Итак, любая стационарная точка задачи (6) дает решение исходной задачи 2, поэтому для отыскания решения можно использовать соответствующие итеративные методы минимизации с учетом негладкости функции μ_ε.

4. Метод спуска

На основе результатов предыдущего раздела можно предложить следующий метод для задачи 2.

Метод 1.

Шаг 0. Выберем произвольно точку $u^0 \in U$, непрерывно возрастающую функцию $\eta : R \to R$ такую, что $\eta(0) = 0$, и число $\gamma \in (0,1)$. Положим $k = 0$.

Шаг 1. Вычислим $\mu_\varepsilon(u^k)$ и $v_\varepsilon(u^k)$ по формуле

$$\mu_\varepsilon(u^k) = \max_{v \in U} \Phi_\varepsilon(u^k, v) = \Phi_\varepsilon(u^k, v_\varepsilon(u^k)).$$

Если $\mu_\varepsilon(u^k) = 0$, то u^k является решением задачи 2, процесс решения останавливается.

Шаг 2. Положим $d^k = v_\varepsilon(u^k) - u^k$. Находим m как наименьшее целое неотрицательное число такое, что

$$\mu_\varepsilon(u^k + \gamma^m d^k) - \mu_\varepsilon(u^k) \leq -\gamma^m \eta(\|d^k\|)\|d^k\|, \tag{7}$$

положим $\lambda_k = \gamma^m$, $u^{k+1} = u^k + \lambda_k d^k$, заменим k на $k+1$ и перейдем к шагу 1.

Нам понадобится также следующая оценка точности приближений.

Теорема 2. *Пусть выполняются предположения* (A2) *и* (B1). *Тогда верна следующая оценка:*

$$0.5\varepsilon\theta(\|u - u^\varepsilon\|)\|u - u^\varepsilon\| \leq \mu_\varepsilon(u) \quad \forall u \in U, \tag{8}$$

где $u^\varepsilon \in U^\varepsilon$.

Доказательство. По определению функции μ_ε в силу монотонности отображения G и равномерной выпуклости функции φ получаем

$$\mu_\varepsilon(u) \geq \Phi_\varepsilon(u, u^\varepsilon) = -\langle G(u), u^\varepsilon - u\rangle - f(u^\varepsilon) + f(u) - \varepsilon[\varphi(u^\varepsilon) - \varphi(u)] \geq$$

$$\geq \langle G(u^\varepsilon) + \varepsilon\nabla\varphi(u^\varepsilon), u - u^\varepsilon\rangle + f(u) - f(u^\varepsilon) +$$

$$+ \varepsilon[\varphi(u) - \varphi(u^\varepsilon) - \langle\nabla\varphi(u^\varepsilon), u - u^\varepsilon\rangle] \geq 0.5\varepsilon\theta(\|u - u^\varepsilon\|)\|u - u^\varepsilon\|,$$

что и требовалось доказать. □

Введем обозначение:

$$S_\varepsilon(u) = \{v \in U \mid \mu_\varepsilon(v) \le \mu_\varepsilon(u)\} \quad \forall u \in U.$$

Следствие 1. *Пусть выполняются предположения* (A2) *и* (B1). *Тогда лебегово множество* $S_\varepsilon(u)$ *для любого* $u \in U$ *является ограниченным.*

Доказательство сходимости метода в основном следует методике работы [19].

Теорема 3. *Пусть выполняются предположения* (A2) *и* (B1). *Если*

$$\eta(x) < \varepsilon\theta(x) \quad \forall x > 0$$

и метод спуска строит бесконечную последовательность $\{u^k\}$, *то она сходится к единственному решению задачи 2.*

Доказательство. Докажем сначала конечность процедуры поиска по критерию (7). Предположим, что эта процедура бесконечна, то есть

$$\mu'_\varepsilon(u^k; d^k) = \lim_{k\to\infty} \gamma^{-m}\left(\mu_\varepsilon(u^k + \gamma^m d^k) - \mu_\varepsilon(u^k)\right) \ge -\eta(\|d^k\|)\|d^k\|.$$

С другой стороны, в силу леммы 3

$$\mu'_\varepsilon(u^k; d^k) \le -\varepsilon\theta(\|d^k\|)\,\|d^k\|.$$

Следовательно, $\eta(\|d^k\|)\|d^k\| \ge \varepsilon\theta(\|d^k\|)\|d^k\|$, а это выполняется только при $d^k = 0$, что невозможно по построению алгоритма. Таким образом, процедура линейного поиска конечна и $\lambda_k > 0$ для всех k. В силу (7) и неотрицательности μ_ε на U последовательность $\mu_\varepsilon(u^k)$ монотонно убывает и ограничена снизу, то есть

$$\lim_{k\to\infty} \mu_\varepsilon(u^k) = C \ge 0.$$

Кроме того, согласно следствию 5.1 итерационная последовательность $\{u^k\}$ ограничена и имеет предельные точки, поэтому в силу леммы 1 последовательность $\{d^k\}$ также ограничена и имеет предельные точки.

Предположим, что $\lim\limits_{k\to\infty} d^k \ne 0$. Тогда в силу (7) найдется бесконечная последовательность номеров $\{k_s\}$, такая что $\liminf\limits_{s\to\infty} \|d^{k_s}\| \ge C' > 0$ и $\lim\limits_{k\to\infty} \lambda_k = 0$, поэтому

$$\mu_\varepsilon(u^{k_s} + (\lambda_{k_s}/\gamma)d^{k_s}) - \mu_\varepsilon(u^{k_s}) > -\eta(\|d^{k_s}\|)\,\|d^{k_s}\|.$$

Откуда, используя теорему о среднем (например, теорему 3.1 из [20, глава 1]), имеем:

$$\mu'_\varepsilon(u^{k_s} + \xi_{k_s}(\lambda_{k_s}/\gamma)d^{k_s}; d^{k_s}) > -\eta(\|d^{k_s}\|)\,\|d^{k_s}\|$$

для некоторого $\xi_{k_s} \in (0,1)$. Учитывая лемму 2, получим:

$$\begin{aligned} f'(u^{k_s} &+ \xi_{k_s}(\lambda_{k_s}/\gamma)d^{k_s}; d^{k_s}) - \\ &- \langle \nabla G(u^{k_s} + \xi_{k_s}(\lambda_{k_s}/\gamma)^T d^{k_s})d^{k_s} - G(u^{k_s} + \xi_{k_s}(\lambda_{k_s}/\gamma)d^{k_s}) - \\ &\qquad - \varepsilon\varphi(u^{k_s} + \xi_{k_s}(\lambda_{k_s}/\gamma)d^{k_s}), d^{k_s}\rangle > -\eta(\|d^{k_s}\|)\|d^{k_s}\|. \end{aligned}$$

Переходя к пределу при $k_s \to \infty$ и выбирая, если необходимо, подпоследовательность, получим с учетом непрерывности G, φ и f, что

$$f'(\widetilde{u}; \widetilde{d}) - \langle \nabla G(\widetilde{u})^T \widetilde{d} - G(\widetilde{u}) - \varepsilon\nabla\varphi(\widetilde{u}), \widetilde{d}\rangle \ge -\eta(\|\widetilde{d}\|)\,\|\widetilde{d}\|,$$

где $\widetilde{u}$ и $\widetilde{d}$ – соответствующие предельные точки последовательностей $\{u^{k_s}\}$ и $\{d^{k_s}\}$. Но из леммы 3 следует, что $\eta(\|\widetilde{d}\|)\|\widetilde{d}\| \geq \varepsilon\theta(\|\widetilde{d}\|)\|\widetilde{d}\|$, что возможно только при $\widetilde{d} = 0$. Получили противоречие, поскольку $\|\widetilde{d}\| \geq C' > 0$.

Следовательно, $\lim\limits_{k\to\infty} d^k = 0$. Пусть $\widetilde{u}$ – любая предельная точка последовательности u^k. Тогда следует $v_\varepsilon(\widetilde{u}) = \widetilde{u}$. Согласно предложению 3 это означает, что $\widetilde{u} = u^\varepsilon$, где u^ε – единственное решение задачи 2. Таким образом,

$$\lim_{k\to\infty} u^k = u^\varepsilon,$$

и теорема доказана. □

Представим теперь метод решения исходной монотонной негладкой задачи 1.

Метод 2.

Шаг 0. Выберем произвольную точку $z^0 \in U$, число $\delta > 0$ и последовательность положительных чисел $\{\varepsilon_i\} \searrow 0$. Положим $i = 1$.

Шаг 1. Применим метод 1 при $y^0 = z^{i-1}$, $\varepsilon = \varepsilon_i$, и будем строить последовательность $\{y^k\}$ до тех пор, пока не выполнится условие

$$\mu_\varepsilon(y^k) \leq \varepsilon^{1+\delta}. \tag{9}$$

Шаг 2. Положим $z^i = y^k$, заменим i на $i+1$ и перейдем к шагу 1.

Теорема 4. *Пусть выполняются предположения* (A1), (A2), (B1) *и последовательность* $\{z^i\}$ *построена методом 2. Тогда:*

(*i*) *каждая* i*-я итерация метода является конечной;*

(*ii*) *последовательность* $\{z^i\}$ *сходится к точке* $u_n^* \in U^*$ *такой, что выполняется условие* (3).

Доказательство. Прежде всего отметим, что поскольку $\mu_{\varepsilon_i}(y^k) \to 0$ при $k \to \infty$, то из пункта 1 предложения 4 мы получим, что $\|y^k - v_{\varepsilon_i}(y^k)\| \to 0$ при $k \to \infty$. Значит, неравенство (9) будет выполнено после конечного числа итераций метода 1. Таким образом, утверждение (i) доказано. Теперь, комбинируя (8) и (9), получим:

$$0.5\theta(\|z^i - u^{\varepsilon_i}\|)\|z^i - u^{\varepsilon_i}\| \leq \varepsilon_i^\delta,$$

где u^{ε_i} является решением задачи 2 при $\varepsilon = \varepsilon_i$, отсюда $\|z^i - u^{\varepsilon_i}\| \to 0$ при $i \to \infty$. Кроме того, выполняется неравенство

$$\|z^i - u_n^*\| \leq \|z^i - u^{\varepsilon_i}\| + \|u^{\varepsilon_i} - u_n^*\|.$$

По теореме 2 имеем, что $\lim\limits_{i\to\infty} u^{\varepsilon_i} = u_n^*$, поэтому утверждение (ii) также верно. □

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 10-01-00629).

Summary

I.V. Konnov, O.V. Pinyagina. Solution Method for Monotone Mixed Variational Inequalities.

In this article, we propose a method, which combines the techniques of regularization and descent over a gap (merit) function, for solving a monotone mixed variational inequality. The *same* uniformly convex auxiliary function is used for the construction of both regularized problems and gap functions. To solve the regularized problems, we apply the method of descent over a gap function with inexact line search.

Key words: mixed variational inequality, gap function, descent method, uniformly convex function.

Литература

1. *Patriksson M.* Nonlinear programming and variational inequality problems: a unified approach. – Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Acad. Publ., 1999, – 348 p.
2. *Konnov I.V., Pinyagina O.V.* D-gap functions for a class of equilibrium problems in Banach spaces // Comput. Methods Appl. Math. – 2003. – V. 3. – P. 274–286.
3. *Тихонов А.Н.* О решении некорректно поставленных задач и методе регуляризации // Докл. АН СССР. – 1963. – Т. 151, № 3. – С. 501–504.
4. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1974. – 224 с.
5. *Browder F.E.* Existence and approximation of solutions of nonlinear variational inequalities // Proc. Natl. Acad. Sci. USA. – 1966. – V. 56. – P. 1080–1086.
6. *Konnov I.V., Kum S.* Descent methods for mixed variational inequalities in a Hilbert space // Nonlinear Anal. Theory, Meth. Appl. – 2001. – V. 47. – P. 561–572.
7. *Konnov I.V., Kum S., Lee G.M.* On convergence of descent methods for variational inequalities in a Hilbert space // Math. Meth. Oper. Res. – 2002. – V. 55. – P. 371–382.
8. *Konnov I.V., Pinyagina O.V.* D-gap functions and descent methods for a class of monotone equilibrium problems // Lobachevskii J. Math. – 2003. – V. 13. – P. 57–65.
9. *Kaplan A., Tichatschke R.* Auxiliary problem principle and the approximation of variational inequalities with non-symmetric multi-valued operators // CMS Conf. Proc. – 2000. – V. 27. – P. 185–209.
10. *Pinyagina O.V., Ali M.S.S.* Descent method for monotone mixed variational inequalities // Calcolo. – 2008. – V. 45. – P. 1–15.
11. *Байокки К., Капело А.* Вариационные и квазивариационные неравенства. Приложения к задачам со свободной границей. – М.: Наука, 1988. – 448 с.
12. *Blum E., Oettli W.* From optimization and variational inequalities to equilibrium problems // The Math. Student. – 1994. –V .63. – P. 123–145.
13. *Konnov I.V.* Combined relaxation methods for variational inequalities. – Berlin: Springer-Verlag, 2001. – 181 p.
14. *Васильев Ф.П.* Численные методы решения экстремальных задач. – М.: Наука, 1988. – 549 с.
15. *Chadli O., Konnov I.V., Yao J.C.* Descent method for equilibrium problems in a Banach space // Comp. Math. Appl. – V. 48. – 2004. – P. 609–616.
16. *Бакушинский А.Б., Гончарский А.В.* Итерационные методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1989. – 128 с.
17. *Panagiotopoulos P.D.* Inequality problems in mechanics and applications. – Boston: Birkhauser, 1985.
18. *Konnov I.V.* Iterative solution methods for mixed equilibrium problems and variational inequalities with non-smooth functions // Game Theory: Strategies, Equilibria, and Theorems / Ed. by I.N. Haugen and A.S. Nilsen. – Hauppauge: NOVA, 2008. – Chapter 4. – P. 117–160.
19. *Коннов И.В.* Метод спуска с неточным линейным поиском для смешанных вариационных неравенств. // Изв. вузов. Матем. – 2009. – №8. – С. 37–44.

20. *Демьянов В.Ф., Рубинов А.И.* Основы негладкого анализа и квазидифференциальное исчисление. – М.: Наука, 1990.– 432 с.

Поступила в редакцию
16.06.10

Коннов Игорь Васильевич – доктор физико-математических наук, профессор кафедры системного анализа и информационных технологий Казанского (Приволжского) федерального университета.

E-mail: *Igor.Konnov@ksu.ru*

Пинягина Ольга Владиславовна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры экономической кибернетики Казанского (Приволжского) федерального университета.

E-mail: *Olga.Piniaguina@ksu.ru*