УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ КАЗАНСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
Том 153, кн. 1 Физико-математические науки *2011*

УДК 517.9

НЕРАВЕНСТВА ТИПА ХАРДИ ДЛЯ СПЕЦИАЛЬНОГО СЕМЕЙСТВА НЕВЫПУКЛЫХ ОБЛАСТЕЙ

А.М. Тухватуллина

Аннотация

В работе для специального семейства невыпуклых областей получены вариационные неравенства типа Харди, которые являются аналогами неравенств для выпуклых областей, представленных ранее в статьях M. Hoffmann-Ostenhof, T. Hoffmann-Ostenhof, A. Laptev "A geometrical version of Hardy's inequality" (J. Funct. Anal. – 2002. – No 189. – P. 539–548) и J. Tidblom "A geometrical version of Hardy's inequality for $W_0^{1,p}(\Omega)$" (Proc. Amer. Math. Soc. – 2004. – No 132. – P. 2265–2271). Нами предложено также достаточное условие регулярности для многомерных областей, которое используется для доказательства неравенств типа Харди. В качестве примеров представлены неравенства типа Харди для конкретных невыпуклых областей в двумерном и трехмерном пространствах.

Ключевые слова: неравенства типа Харди, выпуклые области, регулярные области.

Введение

Вариационные неравенства являются одним из важнейших инструментов решения задач математической физики. В настоящей работе мы рассматриваем вариационные неравенства типа Харди. Исследованию и доказательству неравенств типа Харди и их модификаций посвящено множество научных работ, в частности недавние статьи Ф.Г. Авхадиева, К.-Й. Виртса, Х. Брэзиса, М. Маркуса, Е. Дэвиса, М. Хоффманн-Остенхоф, Т. Хоффманн-Остенхоф, А. Лаптева, Ж. Тидблома (см. [1–8]).

Неравенство типа Харди, доказанное М. Хоффманн-Остенхоф, Т. Хоффманн-Остенхоф и Ари Лаптевым в статье [7], для произвольной области $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ $(n\geq 2)$ и произвольной функции $u\in H_0^1(\Omega)$ имеет вид:

$$\int\limits_{\Omega}|\nabla u(x)|^2\,dx\geq\frac{n}{4}\int\limits_{\Omega}\int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}}\frac{d\omega(\nu)}{\rho_\nu^2(x)}|u(x)|^2\,dx+\frac{n^{(n-2)/n}s_{n-1}^{2/n}}{4|\Omega|^{2/n}}\int\limits_{\Omega}|u(x)|^2\,dx, \qquad (1)$$

где $|\Omega|$ – мера области Ω, $\rho_\nu(x)$ – расстояние от точки $x\in\Omega$ до границы области Ω по направлению вектора $\nu\in\mathbb{S}^{n-1}$, s_{n-1} есть площадь поверхности единичной сферы $\mathbb{S}^{n-1}$ в пространстве $\mathbb{R}^n$: $s_{n-1}=|\mathbb{S}^{n-1}|$, $d\mathbb{S}^{n-1}(\nu)$ – элемент площади поверхности единичной сферы $\mathbb{S}^{n-1}$, $d\omega(\nu)=\dfrac{d\mathbb{S}^{n-1}(\nu)}{s_{n-1}}$.

В [7] доказано также, что в случае выпуклой области $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ неравенство может быть существенно упрощено, а именно: (1) можно записать в виде

$$\int\limits_{\Omega}|\nabla u(x)|^2\,dx\geq\frac{1}{4}\int\limits_{\Omega}\frac{|u(x)|^2}{\delta^2(x)}\,dx+\frac{n^{(n-2)/n}s_{n-1}^{2/n}}{4|\Omega|^{2/n}}\int\limits_{\Omega}|u(x)|^2\,dx, \qquad (2)$$

где $\delta(x)=\operatorname{dist}(x,\partial\Omega)$.

Впоследствии Ж. Тидблом в [8] распространил неравенство (2) на случай выпуклых областей $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ и функций $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ $(p > 1)$:

$$\int\limits_{\Omega} |\nabla u(x)|^p \, dx \geq c_p \int\limits_{\Omega} \frac{|u(x)|^p}{\delta^p(x)} \, dx + \frac{\alpha(p,n)}{|\Omega|^{p/n}} \int\limits_{\Omega} |u(x)|^p \, dx, \tag{3}$$

где

$$c_p = \left(\frac{p-1}{p}\right)^p, \quad \alpha(p,n) = \frac{(p-1)^{p+1}}{p^{\,p}} \left(\frac{s_{n-1}}{n}\right)^{p/n} \frac{\sqrt{\pi}\, \Gamma(\frac{n+p}{2})}{\Gamma(\frac{p+1}{2})\, \Gamma(\frac{n}{2})}.$$

Сопоставив неравенства (1) и (2), мы задались вопросом, существуют ли невыпуклые области, для которых справедливы аналоги неравенства (2), доказанного в [7] для выпуклых областей. В настоящей работе мы даем положительный ответ на поставленный вопрос и представляем специальный класс невыпуклых областей, для которых существуют аналоги неравенства (2).

1. Достаточное условие регулярности многомерных областей и его применение в неравенствах типа Харди

Предварительно введем необходимые нам определения и обозначения. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Следуя Е.Б. Дэвису (см. [9]) определим функцию $\tau_\nu(x)$ как расстояние между точкой $x \in \Omega$ и ближайшей точкой, принадлежащей границе $\partial\Omega$, по направлению вектора $\nu \in \mathbb{S}^{n-1}$:

$$\tau_\nu(x) = \min\{s > 0 : \, x + s\nu \notin \Omega\}.$$

Введем также $\rho_\nu(x)$ – расстояние до границы по направлению ν, диаметр $D_\nu(x)$ вдоль направления ν и $\delta_0(\Omega)$ – внутренний радиус области Ω следующим образом:

$$\rho_\nu(x) = \min\{\tau_\nu(x), \tau_{-\nu}(x)\}, \quad D_\nu(x) = \tau_\nu(x) + \tau_{-\nu}(x), \quad \delta_0(\Omega) = \sup_{x\in\Omega} \delta(x).$$

Определим псевдодистанцию $m(x)$ от точки x до границы области Ω (см. [9]):

$$\frac{1}{m^2(x)} = \frac{1}{|\mathbb{S}^{n-1}|} \int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{d\mathbb{S}^{n-1}(\nu)}{\tau_\nu^2(x)}.$$

Пусть $a \in \partial\Omega, \; r > 0$. Определим область $\widetilde{\Omega}(a,r)$:

$$\widetilde{\Omega}(a,r) = \{y \notin \Omega : \, |y-a| < r\}.$$

Граничную точку a области Ω назовем регулярной граничной точкой области Ω, если для нее выполняется условие:

$$\exists \, x \in \Omega : \, |x-a| = \operatorname{dist}(x, \partial\Omega).$$

Множество всех регулярных граничных точек области Ω обозначим через $\widetilde{\partial\Omega}$.

Следуя [9], введем понятие регулярной области в пространстве $\mathbb{R}^n$. Будем говорить, что область $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – регулярная область, если существует конечная константа c такая, что

$$\delta(x) \leq m(x) \leq c\delta(x) \qquad \forall x \in \Omega.$$

Для двумерных областей Е.Б. Дэвис привел достаточное условие регулярности области (см. [9]):

Область $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ регулярна, если существует константа $c_1 > 0$ такая, что

$$|\{y \notin \Omega : |y-a| < r\}| \geq 2c_1\, r^2 \quad \forall\, a \in \partial\Omega, \quad \forall\, r > 0.$$

Мы несколько ослабляем достаточное условие регулярности Дэвиса и обобщаем его на случай многомерных областей. Впоследствии это условие и полученные нами оценки константы регулярности c используются для формулировки и доказательства неравенств типа Харди для невыпуклых регулярных областей.

Теорема 1. *Если существует положительная константа $\widetilde{c}$ такая, что*

$$|\widetilde{\Omega}(a,r)| = \mathrm{mes}\left(\widetilde{\Omega}(a,r)\right) \geq \widetilde{c}r^n \quad \forall\, a \in \partial\widetilde{\Omega}, \quad \forall\, r:\, 0 < r \leq \delta_0(\Omega),$$

то область $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ регулярна.

Доказательство. Выберем произвольную внутреннюю точку x области Ω. Пусть

$$r = \delta(x) = |x-a|$$

для некоторой точки $a \in \partial\widetilde{\Omega}$. Очевидно, при таком выборе радиуса r будут выполняться ограничения: $0 < r \leq \delta_0(\Omega)$.

Введем множества

$$S_{\widetilde{\Omega}(a,r)} = \{\nu \in \mathbb{S}^{n-1} :\, x + s\nu \in \widetilde{\Omega}(a,r) \quad \text{для некоторого } s > 0\},$$

$$\Lambda_{\widetilde{\Omega}(a,r)} = \{y = |y|\nu \in \mathbb{R}^n :\, r < |y| < 2r,\ \nu \in S_{\widetilde{\Omega}(a,r)}\}.$$

Из геометрических соображений ясно, что тогда

$$r < s < 2r, \quad |\widetilde{\Omega}(a,r)| \leq |\Lambda_{\widetilde{\Omega}(a,r)}|.$$

Мера указанной области $\Lambda_{\widetilde{\Omega}(a,r)}$ есть

$$|\Lambda_{\widetilde{\Omega}(a,r)}| = \int_r^{2r} \rho^{n-1}\, d\rho \int_{S_{\widetilde{\Omega}(a,r)}} d\mathbb{S}^{n-1}(\nu) = \frac{(2^n-1)r^n}{n}\, |\widetilde{S}^{n-1}|,$$

где $|\widetilde{S}^{n-1}| = \int_{S_{\widetilde{\Omega}(a,r)}} d\mathbb{S}^{n-1}(\nu)$ – площадь поверхности $S_{\widetilde{\Omega}(a,r)}$.

Следовательно,

$$\frac{(2^n-1)r^n}{n}\, |\widetilde{S}^{n-1}| \geq |\widetilde{\Omega}(a,r)| \geq \widetilde{c}r^n,$$

а значит,

$$|\widetilde{S}^{n-1}| \geq \frac{n\widetilde{c}}{2^n-1}.$$

Тогда

$$\frac{1}{m^2(x)} = \frac{1}{|\mathbb{S}^{n-1}|} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{d\mathbb{S}^{n-1}(\nu)}{\tau_\nu^2(x)} \geq \frac{1}{|\mathbb{S}^{n-1}|} \int_{S_{\widetilde{\Omega}(a,r)}} \frac{d\mathbb{S}^{n-1}(\nu)}{\tau_\nu^2(x)} >$$

$$> \frac{1}{|\mathbb{S}^{n-1}|} \int_{S_{\widetilde{\Omega}(a,r)}} \frac{d\mathbb{S}^{n-1}(\nu)}{4\delta^2(x)} = \frac{|\widetilde{S}^{n-1}|}{4|\mathbb{S}^{n-1}|\delta^2(x)} \geq \frac{\widetilde{c}\, n}{4\delta^2(x)|\mathbb{S}^{n-1}|(2^n-1)}.$$

Здесь мы воспользовались определением $\tau_\nu(x)$ и неравенством $s < 2r$.

Таким образом, существует константа

$$c = 2\left(\frac{|\mathbb{S}^{n-1}|(2^n-1)}{\widetilde{c}n}\right)^{1/2} : \ m(x) \le c\delta(x).$$

В двумерном и трехмерном случаях получим соответственно:

$$c = 2\left(\frac{3\pi}{\widetilde{c}}\right)^{1/2}, \quad c = 4\left(\frac{7\pi}{3\widetilde{c}}\right)^{1/2}.$$

Неравенство $\delta(x) \le m(x)$ следует из простой цепочки соотношений:

$$\frac{1}{m^2(x)} = \frac{1}{|\mathbb{S}^{n-1}|}\int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{d\mathbb{S}^{n-1}(\nu)}{\tau_\nu^2(x)} \le \frac{1}{|\mathbb{S}^{n-1}|}\int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{d\mathbb{S}^{n-1}(\nu)}{\delta^2(x)} = \frac{1}{\delta^2(x)}.$$

Итак, мы доказали, что

$$\exists\, c < +\infty : \ \delta(x) \le m(x) \le c\delta(x) \qquad \forall x \in \Omega.$$

Следовательно, Ω – регулярная область. □

Используя доказанное нами достаточное условие регулярности области, несложно построить примеры невыпуклых регулярных областей.

Пример 1. В двумерном пространстве рассмотрим область Ω – концентрическое кольцо, образованное двумя окружностями радиусов R_1, R_2 ($R_2 < R_1$). Покажем, что в случае $R_2 \ge \dfrac{R_1}{5}$ область Ω будет регулярной. Заметим, что при невыполнении этого условия величину $|\widetilde{\Omega}(a,r)|$ не удастся оценить снизу через r^2 для всех точек $a \in \widetilde{\partial\Omega}$ и произвольного $r > 0$.

При $R_2 \ge \dfrac{R_1}{5}$ ясно, что $\delta_0(\Omega) = \dfrac{R_1 - R_2}{2} \le 2R_2$.

Рассмотрим произвольную граничную точку a, лежащую на окружности радиуса R_2. При $r \le 2R_2$ круги радиуса r с центром в точке a будут пересекать окружность радиуса R_2 либо в двух точках (при $r < 2R_2$) (соединив каждую из этих двух точек пересечения с точкой a, мы получим некоторый угол α с вершиной в точке a: $0 < \alpha < \pi$), либо в одной точке (при $r = 2R_2$).

Пусть сначала $r \le 2R_2$ и $0 < \alpha < \pi/2$. $\widetilde{\Omega}(a,r)$ состоит из сектора круга радиуса r, соответствующего центральному углу α, и двух одинаковых сегментов круга радиуса R_2. Несложные вычисления дадут нам точное значение величины $|\widetilde{\Omega}(a,r)|$:

$$|\widetilde{\Omega}(a,r)| = \frac{r^2}{4}\left(2\alpha + \frac{\pi - \alpha}{\cos^2(\alpha/2)} - 2\operatorname{tg}(\alpha/2)\right),$$

которое в силу возрастания функции

$$Y(\alpha) = \left(2\alpha + \frac{\pi - \alpha}{\cos^2(\alpha/2)} - 2\operatorname{tg}(\alpha/2)\right)$$

при $0 < \alpha < \pi/2$ приведет нас к неулучшаемой оценке:

$$\widetilde{\Omega}(a,r) \ge \frac{\pi r^2}{4}.$$

В случае $r < 2R_2$ и $\pi/2 \le \alpha < \pi$ оценим величину $\widetilde{\Omega}(a,r)$ через площадь сектора круга радиуса r, соответствующего центральному углу $\alpha > \pi/2$:

$$\widetilde{\Omega}(a,r) \ge \frac{\pi r^2}{4}.$$

При $r = 2R_2$ круг пересечет окружность радиуса R_2 лишь в одной точке, и $\widetilde{\Omega}(a,r)$ есть круг радиуса R_2,

$$|\widetilde{\Omega}(a,r)| = \pi R_2^2 = \frac{\pi r^2}{4}\ .$$

Для граничных точек, лежащих на окружности радиуса R_1, очевидно, имеем

$$|\widetilde{\Omega}(a,r)| \ge \frac{\pi r^2}{2}\ .$$

Таким образом, область Ω регулярна, так как

$$|\widetilde{\Omega}(a,r)| \ge \frac{\pi r^2}{4} = \widetilde{c}\, r^2 \quad \forall\, a \in \widetilde{\partial\Omega}, \quad \forall r:\, 0 < r \le \delta_0(\Omega), \quad \widetilde{c} = \frac{\pi}{4},$$

причем константа $\widetilde{c}$ из достаточного условия регулярности (теорема 1) является точной.

Пример 2. В трехмерном пространстве рассмотрим область Ω – шар с удаленным из него шаровым сектором. Рассмотрим соответствующий данному шаровому сектору конус. Пусть α – плоский угол между образующими конуса, который получается при рассмотрении центрального сечения конуса, $0 < \alpha < \pi$, R – радиус шара, $0 < R < \infty$. Для любого $r:\, 0 < r \le \delta_0(\Omega) = R/2$ оценим объем области $\widetilde{\Omega}(a,r)$ для точек a, принадлежащих множеству регулярных граничных точек $\widetilde{\partial\Omega}$ области Ω:

1) если a – центр шара, тогда, очевидно, область $\widetilde{\Omega}(a,r)$ есть шаровой сектор, соответствующий шару радиуса r, следовательно,

$$|\widetilde{\Omega}(a,r)| = \frac{4}{3}\pi r^3 \sin^2(\alpha/4);$$

2) если a – точка, лежащая на поверхности области Ω в месте выреза шарового сектора, то

$$|\widetilde{\Omega}(a,r)| \ge \frac{4}{3}\pi r^3 \sin^2(\alpha/4);$$

3) если a – точка, лежащая на поверхности области Ω (за исключением точек из пункта 2), тогда объем области $\widetilde{\Omega}(a,r)$ будет не меньше объема полушара радиуса r, то есть

$$|\Omega(a)| \ge \frac{2}{3}\pi r^3.$$

Обобщая полученные результаты, получим точную оценку:

$$|\widetilde{\Omega}(a,r)| \ge \frac{4\pi}{3} r^3 \sin^2(\alpha/4) = \widetilde{c}\, r^3 \quad \forall a \in \partial\Omega, \quad \widetilde{c} = \frac{4\pi}{3}\sin^2(\alpha/4).$$

Следовательно, Ω – регулярная область.

Нетрудно показать, что всякая выпуклая область $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ является регулярной областью.

Действительно,

$$\frac{1}{m^2(x)} = \frac{1}{|\mathbb{S}^{n-1}|}\int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{d\mathbb{S}^{n-1}(\nu)}{\tau_\nu^2(x)} = \frac{1}{2|\mathbb{S}^{n-1}|}\left(\int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{d\mathbb{S}^{n-1}(\nu)}{\tau_\nu^2(x)} + \int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{d\mathbb{S}^{n-1}(\nu)}{\tau_{-\nu}^2(x)}\right) =$$

$$= \frac{1}{2|\mathbb{S}^{n-1}|}\int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{d\mathbb{S}^{n-1}(\nu)}{\min^2\{\tau_\nu(x), \tau_{-\nu}(x)\}} = \frac{1}{2|\mathbb{S}^{n-1}|}\int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{d\mathbb{S}^{n-1}(\nu)}{\rho_\nu^2(x)} = \frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{d\omega(\nu)}{\rho_\nu^2(x)}.$$

Исходя из определения величин $\rho_\nu(x)$, $\delta(x)$ и их геометрической интерпретации, для точек выпуклых областей несложно вывести неравенство:

$$\int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{d\omega(\nu)}{\rho_\nu^2(x)} \geq \frac{1}{n}\frac{1}{\delta^2(x)},$$

$x \in \Omega$, Ω – выпуклая в $\mathbb{R}^n$ область. Следовательно,

$$\frac{1}{m^2(x)} \geq \frac{1}{2n}\frac{1}{\delta^2(x)},$$

или

$$m(x) \leq \sqrt{2n}\delta(x).$$

Таким образом, всякая выпуклая область $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ является регулярной с константой $c = \sqrt{2n}$.

Как будет показано в следующей теореме, класс невыпуклых регулярных областей является специальным классом невыпуклых областей, для которого нам удалось получить аналоги неравенства (2), доказанного в [7] для выпуклых областей.

Теорема 2. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – произвольная регулярная область с константой регулярности c, $u \in H_0^1(\Omega)$ – произвольная функция. Тогда справедливо неравенство:*

$$\int\limits_\Omega |\nabla u(x)|^2\,dx \geq \frac{n}{2c^2}\int\limits_\Omega \frac{|u(x)|^2}{\delta^2(x)}\,dx + \frac{n^{(n-2)/n}s_{n-1}^{2/n}}{4|\Omega|^{2/n}}\int\limits_\Omega |u(x)|^2\,dx.$$

Доказательство. Как известно из работы [7], для произвольной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ и произвольной функции $u \in H_0^1(\Omega)$ справедливо неравенство:

$$\int\limits_\Omega |\nabla u(x)|^2\,dx \geq \frac{n}{4}\int\limits_\Omega\int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{d\omega(\nu)}{\rho_\nu^2(x)}|u(x)|^2\,dx + \frac{n^{(n-2)/n}s_{n-1}^{2/n}}{4}\int\limits_\Omega \frac{|u(x)|^2}{|\Omega_x|^{2/n}}\,dx.$$

Если $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – регулярная область с константой c, то из рассуждений, проведенных выше, мы получим:

$$\int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{d\omega(\nu)}{\rho_\nu^2(x)} = \frac{2}{m^2(x)} \geq \frac{2}{c^2\delta^2(x)}.$$

Следовательно,

$$\int\limits_\Omega |\nabla u(x)|^2\,dx \geq \frac{n}{2c^2}\int\limits_\Omega \frac{|u(x)|^2}{\delta^2(x)}\,dx + \frac{n^{(n-2)/n}s_{n-1}^{2/n}}{4}\int\limits_\Omega \frac{|u(x)|^2}{|\Omega_x|^{2/n}}\,dx,$$

или
$$\int\limits_{\Omega} |\nabla u(x)|^2\,dx \geq \frac{n}{2c^2}\int\limits_{\Omega}\frac{|u(x)|^2}{\delta^2(x)}\,dx + \frac{n^{(n-2)/n}s_{n-1}^{2/n}}{4|\Omega|^{2/n}}\int\limits_{\Omega}|u(x)|^2\,dx.$$

Теорема доказана. □

В случаях $n=2, n=3$ наше неравенство существенно упростится:
$$\int\limits_{\Omega} |\nabla u(x)|^2\,dx \geq \frac{1}{c^2}\int\limits_{\Omega}\frac{|u(x)|^2}{\delta^2(x)}\,dx + \frac{\pi}{2|\Omega|}\int\limits_{\Omega}|u(x)|^2\,dx$$

для произвольной регулярной с константой c области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ и произвольной функции $u \in H_0^1(\Omega)$, и
$$\int\limits_{\Omega} |\nabla u(x)|^2\,dx \geq \frac{3}{2c^2}\int\limits_{\Omega}\frac{|u(x)|^2}{\delta^2(x)}\,dx + \left[\frac{3\pi^2}{4|\Omega|^2}\right]^{1/3}\int\limits_{\Omega}|u(x)|^2\,dx$$

для произвольной регулярной с константой c области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ и произвольной функции $u \in H_0^1(\Omega)$.

Для концентрического кольца из примера 1 и для шара с вырезанным сектором из примера 2 соответственно получим неравенства:
$$\int\limits_{\Omega} |\nabla u(x)|^2\,dx \geq \frac{1}{48}\int\limits_{\Omega}\frac{|u(x)|^2}{\delta^2(x)}\,dx + \frac{1}{2(R_1^2-R_2^2)}\int\limits_{\Omega}|u(x)|^2\,dx,$$
$$\int\limits_{\Omega} |\nabla u(x)|^2\,dx \geq \frac{3\sin^2(\alpha/4)}{56}\int\limits_{\Omega}\frac{|u(x)|^2}{\delta^2(x)}\,dx + \left[\frac{3\pi^2}{4|\Omega|^2}\right]^{1/3}\int\limits_{\Omega}|u(x)|^2\,dx,$$

где $|\Omega| = \dfrac{4}{3}\pi R^3\cos^2(\alpha/4)$.

2. Неравенства типа Харди для невыпуклых регулярных областей и функций из пространства $W_0^{1,p}$

Обратимся теперь к неравенствам типа Харди, полученным Ж. Тидбломом в [8], которые обобщают результаты М. Хоффанн-Остенхоф, Т. Хоффманн-Остенхоф и А. Лаптева на случай функций из пространства $W_0^{1,p}(\Omega)$ для произвольного $p>1$.

Для произвольной области $\Omega\subset\mathbb{R}^n$, функции $u\in W_0^{1,p}(\Omega)$ неравенство типа Харди (см. [8]) выглядит следующим образом:
$$\int\limits_{\Omega} |\nabla u(x)|^p\,dx \geq \frac{c_p\sqrt{\pi}\Gamma\left(\dfrac{n+p}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{p+1}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)}\int\limits_{\Omega}\int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}}\frac{|u(x)|^p}{\rho_\nu^p(x)}d\omega(\nu)\,dx + \frac{\alpha(p,n)}{|\Omega|^{p/n}}\int\limits_{\Omega}|u(x)|^p\,dx, \quad (4)$$

где
$$c_p = \left(\frac{p-1}{p}\right)^p, \quad \alpha(p,n) = \frac{(p-1)^{p+1}}{p^{\,p}}\left(\frac{s_{n-1}}{n}\right)^{p/n}\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\dfrac{n+p}{2})}{\Gamma(\dfrac{p+1}{2})\,\Gamma(\dfrac{n}{2})}.$$

Ж. Тидблом также доказал, что для выпуклых областей $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ и функций $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ $(p>1)$ неравенство (4) может быть существенно упрощено:

$$\int\limits_{\Omega} |\nabla u(x)|^p\,dx \ge c_p \int\limits_{\Omega} \frac{|u(x)|^p}{\delta^p(x)}\,dx + \frac{\alpha(p,n)}{|\Omega|^{p/n}} \int\limits_{\Omega} |u(x)|^p\,dx. \tag{5}$$

Для невыпуклых областей неравенств, аналогичных неравенству (5), в литературе мы не нашли. Получим их для невыпуклых регулярных областей. Предварительно докажем вспомогательную теорему.

Теорема 3. *Для каждой точки x, принадлежащей регулярной с константой c области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, верно неравенство:*

$$\int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{d\omega(\nu)}{\rho_\nu^p(x)} \ge \frac{2^{p/2}}{m^p(x)}.$$

Доказательство. Имеем

$$\int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{d\omega(\nu)}{\rho_\nu^2(x)} \le \left(\int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{d\omega(\nu)}{\rho_\nu^p(x)} \right)^{2/p} \left(\int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} d\omega(\nu) \right)^{1-2/p} = \left(\int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{d\omega(\nu)}{\rho_\nu^p(x)} \right)^{2/p},$$

то есть

$$\int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{d\omega(\nu)}{\rho_\nu^p(x)} \ge \left(\int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{d\omega(\nu)}{\rho_\nu^2(x)} \right)^{p/2}.$$

Поэтому

$$\frac{1}{m^p(x)} = \left(\frac{1}{m^2(x)}\right)^{p/2} = \left(\int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{d\omega(\nu)}{\tau_\nu^2(x)} \right)^{p/2} = \left(\frac{1}{|\mathbb{S}^{n-1}|} \int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{d\mathbb{S}^{n-1}(\nu)}{\tau_\nu^2(x)} \right)^{p/2} =$$

$$= \left(\frac{1}{2|\mathbb{S}^{n-1}|} \int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{d\mathbb{S}^{n-1}(\nu)}{\tau_\nu^2(x)} + \frac{1}{2|\mathbb{S}^{n-1}|} \int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{d\mathbb{S}^{n-1}(\nu)}{\tau_{-\nu}^2(x)} \right)^{p/2} = \left(\frac{1}{2|\mathbb{S}^{n-1}|} \int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{d\mathbb{S}^{n-1}(\nu)}{\rho_\nu^2(x)} \right)^{p/2} =$$

$$= \left(\frac{1}{2} \int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{d\omega(\nu)}{\rho_\nu^2(x)} \right)^{p/2} \le \frac{1}{2^{p/2}} \int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{d\omega(\nu)}{\rho_\nu^p(x)}.$$

Получили требуемое. □

Используя теорему 3, легко приходим к следующему результату:

Теорема 4. *Для произвольной регулярной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ с константой регулярности c, функции $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ $(p>1)$ справедливо неравенство:*

$$\int\limits_{\Omega} |\nabla u(x)|^p\,dx \ge \frac{c_p\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{n+p}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \times$$

$$\times \left(\frac{2^{p/2}}{c^p} \int\limits_{\Omega} \frac{|u(x)|^p}{\delta^p(x)}\,dx + (p-1)\left(\frac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{|\Omega| n}\right)^{p/n} \int\limits_{\Omega} |u(x)|^p\,dx \right).$$

Доказательство. Действительно, для каждой точки x регулярной области Ω справедливо неравенство:

$$m(x) \leq c\delta(x),$$

где c – константа регулярности данной области, следовательно,

$$\int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{d\omega(\nu)}{\rho_\nu^p(x)} \geq \frac{2^{p/2}}{m^p(x)} \geq \frac{2^{p/2}}{c^p\delta^p(x)}.$$

□

В случае плоской регулярной области Ω с константой регулярности c и функции $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ получим следующее неравенство:

$$\int\limits_\Omega |\nabla u(x)|^p\,dx \geq \frac{c_p\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\dfrac{p}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\dfrac{p+1}{2}\right)} \times$$

$$\times\left(\frac{2^{p/2}}{c^p}\int\limits_\Omega \frac{|u(x)|^p}{\delta^p(x)}\,dx + (p-1)\left(\frac{\pi}{|\Omega|}\right)^{p/2}\int\limits_\Omega |u(x)|^p\,dx\right).$$

Если Ω – концентрическое кольцо, то, очевидно, имеем:

$$\int\limits_\Omega |\nabla u(x)|^p\,dx \geq \frac{c_p\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\dfrac{p}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\dfrac{p+1}{2}\right)}\left(\frac{1}{24^{p/2}}\int\limits_\Omega \frac{|u(x)|^p}{\delta^p(x)}\,dx + \frac{(p-1)}{(R_1^2-R_2^2)^{p/2}}\int\limits_\Omega |u(x)|^p\,dx\right).$$

Для регулярной с константой c трехмерной области Ω и функции $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ верно неравенство:

$$\int\limits_\Omega |\nabla u(x)|^p\,dx \geq c_p(p+1)\left[\frac{2^{p/2}}{c^p}\int\limits_\Omega \frac{|u(x)|^p}{\delta^p(x)}\,dx + (p-1)\left(\frac{4\pi}{3|\Omega|}\right)^{p/3}\int\limits_\Omega |u(x)|^p\,dx\right].$$

В случае шара с вырезанным сектором (пример 2), очевидно, получим:

$$\int\limits_\Omega |\nabla u(x)|^p\,dx \geq c_p(p+1)\left[\frac{\sin^p(\alpha/4)}{14^{p/2}}\int\limits_\Omega \frac{|u(x)|^p}{\delta^p(x)}\,dx + (p-1)\left(\frac{4\pi}{3|\Omega|}\right)^{p/3}\int\limits_\Omega |u(x)|^p\,dx\right],$$

величина $|\Omega|$ была определена выше.

Выражаю благодарность своему научному руководителю профессору Фариту Габидиновичу Авхадиеву.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации (госконтракт № 02.740.11.0193) и Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 11-01-00762а).

Summary

A.M. Tukhvatullina. Hardy Type Inequalities for a Special Family of Non-Convex Domains.

In this work, we obtain Hardy type inequalities that involve the distance to the boundary and the volume of a domain for a special family of non-convex domains. These inequalities are analogues of the inequalities for convex domains proved by M. Hoffmann-Ostenhof, T. Hoffmann-Ostenhof, A. Laptev, and J. Tidblom. To prove Hardy type inequalities, we propose a sufficient condition of regularity for multidimensional domains. Hardy type inequalities for certain non-convex domains in two- and three-dimensional spaces are used as an example.

Key words: Hardy type inequalities, convex domains, regular domains.

Литература

1. *Авхадиев Ф.Г.* Неравенства для интегральных характеристик областей. – Казань: Казан. гос. ун-т, 2006. – 140 с.
2. *Авхадиев Ф.Г.* Неравенства типа Харди в плоских и пространственных открытых множествах // Труды Матем. ин-та им. В.А. Стеклова. – 2006. – Т. 255. – С. 8–18.
3. *Avkhadiev F.G.* Hardy type inequalities in higher dimensions with explicit estimate of constants // Lobachevskii J. Math. – 2006. – V. 21. – P. 3–31.
4. *Avkhadiev F.G., Wirths K.-J.* Unified Poincaré and Hardy inequalities with sharp constants for convex domains // Z. Angew. Math. Mech. 87. – 2007. – H. 8–9. – P. 632–642.
5. *Brezis H., Marcus M.* Hardy's inequalities revisited // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4). – 19978. – V. 25, No 1–2. – P. 217–237.
6. *Davies E.B.* A review of Hardy inequalities // The Maz'ya anniversary Collection, V. 2. Oper. Theory Adv. Appl. – 1999. – V. 110. – P. 55–67.
7. *Hoffmann-Ostenhof M., Hoffmann-Ostenhof T., Laptev A.* A geometrical version of Hardy's inequality // J. Funct. Anal. – 2002. – V. 189, No 2. – P. 539–548.
8. *Tidblom J.* A geometrical version of Hardy's inequality for $W_0^{1,p}(\Omega)$ // Proc. Amer. Math. Soc. – 2004. – V. 132, No 8. – P. 2265–2271.
9. *Davies E.B.* Spectral Theory and Differential Operators // Cambridge Studies in Advanced Mathematics. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1995. – V. 42. – 186 p.

Поступила в редакцию
17.01.11

Тухватуллина Алина Михайловна – аспирант Казанского (Приволжского) федерального университета, лаборант-исследователь Научно-образовательного центра КФУ «Экстремальные задачи комплексного анализа и математической физики».

E-mail: *kzn.alina@gmail.com*