

УДК 539.4

## ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ СПЛАВОВ С ПАМЯТЬЮ ФОРМЫ – МИКРОМЕХАНИКА, ФЕНОМЕНОЛОГИЯ, ТЕРМОДИНАМИКА

*А.А. Мовчан, Л.Г. Сильченко,  
С.А. Казарина, Тант Зин Аунг*

### Аннотация

Предложена модель нелинейного деформирования сплавов с памятью формы при термоупругих фазовых и структурных превращениях. Сформулирована система определяющих соотношений, адекватно описывающая такие свойства сплавов с памятью формы и характерные для этих материалов уникальные явления, как изменение упругих модулей при мартенситных превращениях, накопление деформаций прямого превращения, ориентированное превращение, монотонная память формы, мартенситная неупругость, сверхупругость, выделение и поглощение латентного тепла фазового перехода, диссипативные явления.

**Ключевые слова:** сплавы с памятью формы, определяющие соотношения, нелинейное деформирование, микромеханика, фазовые переходы, структурные превращения, термодинамика, латентное тепло, уравнение энергетического баланса.

### Введение

Термомеханическое поведение сплавов с памятью формы (СПФ) характеризуется целым рядом уникальных эффектов и явлений, связанных с происходящими в этих материалах термоупругими фазовыми и структурными превращениями [1]. Это эффект накопления деформаций прямого термоупругого фазового превращения, явление ориентированного превращения, монотонная, реверсивная и обратимая память формы, эффекты мартенситной неупругости и сверхупругости, аномальный объемный эффект реакции прямого мартенситного превращения, резкое изменение при фазовых переходах упругих модулей и внутреннего трения, выделение или поглощение достаточно больших количеств латентного тепла фазовых превращений, диссипативные явления.

Различные варианты феноменологических систем определяющих соотношений для СПФ предлагались в работах [2–13]. Эти модели различаются тем кругом характерных для СПФ явлений, которые они в состоянии достоверно описать. Например, явление ориентированного превращения из всех перечисленных моделей качественно правильно описывается лишь в модели [6–9]. Система определяющих соотношений для СПФ [6–9] обобщена на случай двухэтапных (мартенситно-ромбоздрических) термоупругих фазовых переходов [15] и использована для решения краевых задач о механическом поведении СПФ при фазовых переходах в [14, 16–19], а также для анализа потери устойчивости элементов из СПФ, вызванной термоупругими мартенситными превращениями в [20–25].

Недостатком определяющих соотношений, предложенных в [6–9, 15], является их линейность по отношению к напряжениям. В результате оказывается, что интенсивность деформации полного прямого превращения под действием постоянного

напряжения пропорциональна интенсивности этого напряжения, что для высоких напряжений противоречит экспериментальным данным. В то же время в рамках модели [6–9] компоненты деформаций являются экспоненциальными функциями параметра фазового состава, тогда как согласно экспериментальным данным эти зависимости должны быть линейными. При этом модель [6–9] не описывает явление мартенситной неупругости, которое имеет существенно нелинейный характер.

Температура является важнейшим параметром, управляющим механическим поведением сплавов с памятью формы. Однако определение температурного режима СПФ с помощью обычного уравнения теплопроводности приводит к существенным ошибкам. Проблема состоит в том, что три группы явлений, характерных для СПФ, а именно изменение фазового состава, изменение температуры и изменение напряженно-деформированного состояния, тесно связаны друг с другом и не могут поэтому анализироваться независимо. В результате возникает проблема построения связанного термодинамического замыкания системы механических определяющих соотношений для СПФ.

Простейший вариант моделирования специфического термомеханического поведения СПФ, учитывающий явления выделения и поглощения латентного тепла фазового перехода, состоит в добавлении в правую часть уравнения теплопроводности величины энтальпии фазового перехода, умноженной на скорость изменения объемной доли мартенситной фазы [26, с. 84]. Тем самым обеспечивается справедливость первого закона термодинамики, однако возникают вопросы с выполнением второго закона. Более сложные модели поведения СПФ на основе рациональной термодинамики формулировались в работах [10, 11, 27] и др. Широко распространен подход [10], в рамках которого скорость механической диссипации в СПФ считается пропорциональной скорости изменения объемной доли мартенситной фазы с постоянным коэффициентом, положительным для прямого превращения и отрицательным для обратного. Необходимо отметить, что какие-либо экспериментальные подтверждения этой гипотезы отсутствуют. При этом постулируется наличие в термодинамическом потенциале СПФ неаддитивной части, форма которой специально подбирается таким образом, чтобы из упомянутой выше гипотезы следовали известные определяющие соотношения для параметра фазового состава. Неаддитивная часть потенциала при таком подходе имеет различные формулировки не только для прямого и обратного мартенситного превращения, но и для различных циклов (полных и неполных) только прямого или только обратного превращения. Таким образом, термодинамический потенциал СПФ перестает быть функцией параметров состояния, а становится функционалом истории их изменения, что существенно усложняет модель.

Более обоснованным представляется подход [27], в рамках которого не принимается никаких априорных гипотез относительно скорости диссипации, а рассмотрение опирается лишь на проверенные в эксперименте механические определяющие соотношения для деформаций. Такое термодинамическое замыкание построено в [27] для модели линейного деформирования СПФ при фазовых превращениях [6–9].

Целью настоящей работы является формулировка модели нелинейного деформирования СПФ при фазовых и структурных превращениях, которая описывала бы широкий круг уникальных явлений, характерных для СПФ, и построение термодинамического замыкания этой модели, не опирающегося на априорные гипотезы относительно скорости механической диссипации.

### 1. Макроскопические явления, характерные для СПФ

Остановимся более подробно на некоторых из макроскопических явлений, характерных для СПФ. Если образец из поликристаллического СПФ, находящийся в высокотемпературном аустенитном состоянии охлаждается через интервал температур прямого мартенситного превращения под действием некоторого постоянного напряжения  $\sigma_{ij}$ , то в нем накапливается неупругая (фазовая) деформация  $\varepsilon_{ij}^{\text{ph}}$  прямого превращения, девиатор которой соосен девиатору приложенного напряжения и в процессе фазового перехода изменяется пропорционально параметру фазового состава (объемной доли мартенсита  $q$ ), а интенсивность  $\varepsilon_i^{\text{ph}}$ , соответствующая полному прямому превращению ( $q = 1$ ) является монотонно возрастающей функцией интенсивности напряжения  $\sigma_i$ . Для достаточно больших напряжений график зависимости  $\varepsilon_i^{\text{ph}}$  от  $\sigma_i$  приближается к горизонтальной асимптоте, соответствующей постоянному значению  $\varepsilon_i^{\text{ph}}$ .

В случае прямого превращения отожженных образцов в отсутствие напряжений накопление деформации формоизменения не наблюдается, имеет место лишь небольшое изменение объема, носящее для мартенситных превращений в никелиде титана аномальный характер (при охлаждении объем увеличивается).

При изотермическом нагружении СПФ, находящемся в состоянии хаотического (сдвойникового) мартенсита, происходит раздвойникование мартенситных элементов, увеличение степени их ориентированности (структурное превращение), сопровождающееся ростом неупругой деформации (явление мартенситной неупругости). Процессы роста деформаций прямого превращения и мартенситной неупругости тесно связаны друг с другом, поскольку имеют общий источник – кристаллографическую деформацию фазового превращения, которая ограничивает сверху суммарную фазово-структурную деформацию СПФ. Эту связь необходимо учитывать при построении системы определяющих соотношений для СПФ.

Еще более подчеркивает связь явлений прямого превращения и мартенситной неупругости тот факт, что при нагреве через интервал температур обратного мартенситного превращения образцов, испытавших каждое из этих явлений, наблюдается монотонное уменьшение ранее накопленных деформаций (явление монотонной памяти формы).

Пусть неполное прямое превращение производилось под действием некоторого напряжения  $\sigma_{ij}$ , после чего напряжение было снято. При продолжении охлаждения и соответствующего прямого превращения в отсутствие напряжений наблюдается рост деформаций «в сторону» ранее приложенного напряжения после его снятия, причем скорость роста деформаций существенно снижается по сравнению со случаем прямого превращения под действием напряжения (явление ориентированного превращения).

### 2. Микромеханика процессов деформирования СПФ при фазовых и структурных превращениях

Прямое термоупругое фазовое превращение в СПФ типа никелида титана происходит при охлаждении или росте напряжений и представляет собой на микроуровне переход от высокотемпературной аустенитной фазы, имеющей симметричную объемно-центрированную кубическую решетку типа  $B2$ , к низкотемпературной мартенситной фазе, имеющей моноклинную решетку с искажениями типа  $B19'$  [28]. Обратное фазовое превращение  $B19' \rightarrow B2$  происходит при нагреве или разгрузке. Удобно ввести понятие элементарного объема СПФ, представляющего собой в аустенитном состоянии прямоугольный параллелепипед, состоящий из четырех половин кубических ячеек, имеющих общее ребро, и переходящий

при прямом превращении в параллелепипед с измененными величинами ребер и четырьмя двугранными углами, отличными от  $\pi/2$ . Такой переход связан с деформацией («собственной деформацией фазового превращения», «деформации Бейна»), сводящейся в основном к формоизменению (изменение объема не превышает доли процента, а интенсивность деформаций для никелида титана составляет около 10%).

Важнейшим свойством прямого термоупругого превращения на микроуровне является его многовариантность – элементарный высокосимметричный объем аустенитной фазы может перейти в элементарный низкосимметричный объем мартенситной фазы в 12 различных направлениях. Тензоры деформаций, соответствующие этим преобразованиям, имеют одинаковые компоненты, но в различных системах координат, связанных с кристаллографическими осями исходной аустенитной структуры. Если учесть еще разориентировку кристаллографических осей различных зерен, входящих в представительный объем поликристаллического СПФ, то получается достаточно плотное множество различных направлений собственной деформации перехода. Поэтому мартенсит может находиться в различных структурных состояниях, обладающих одним и тем же типом кристаллической решетки, но различающихся степенью ориентированности низкосимметричных элементов. Все множество этих структурных состояний ограничивается, с одной стороны, полностью хаотическим, сдвойникованным мартенситом, в котором все направления равновероятны, а с другой – гипотетическим для поликристаллического СПФ состоянием полностью ориентированного мартенсита, в котором все низкосимметричные элементы имеют одинаковую ориентацию («раздвойникованный мартенсит»).

Полностью хаотический мартенсит может быть получен при прямом термоупругом фазовом превращении в отсутствие внешних макроскопических напряжений и ориентированных микронапряжений. Этот переход не сопровождается макроскопической деформацией формоизменения (микродеформации формоизменения по-разному ориентированных мартенситных элементарных объемов взаимно уничтожаются). Изотермическое нагружение такого мартенсита монотонно возрастающим напряжением приводит к его раздвойникованию и росту степени его ориентированности. Происходит структурное превращение, сопровождающееся развитием макроскопических деформаций формоизменения, то есть явление мартенситной неупругости.

Помимо элементарных объемов в мартенситной фазе наблюдаются мезоскопические образования, состоящие из достаточно большого количества одинаково ориентированных и примыкающих друг к другу элементарных объемов («мартенситные пластины», «иглы» и т. д.). Считается, что прямое термоупругое фазовое превращение сводится к двум одновременно происходящим процессам зарождения и развития таких мезоскопических элементов, а обратное превращение представляет собой их уменьшение, вплоть до полного исчезновения, происходящее путем отсоединения от них и перехода в аустенитное состояние элементарных мартенситных объемов.

В [29] обоснована необходимость учета для описания процесса зарождения мезоскопических элементов новой фазы при прямом мартенситном превращении и их раздвойникования, (переориентации) при структурном переходе не только макроскопических напряжений, но и случайным образом распределенных по представительному объему СПФ микронапряжений. Функции распределения микронапряжений в аустенитной и мартенситной фазах считаются, вообще говоря, различными.

В рамках одномерной модели нелинейного деформирования СПФ возможны положительная, отрицательная и нейтральная (сдвойникованная) ориентации мартенситного мезоэлемента. При прямом превращении зарождается положительно

ориентированный мезоэлемент, если действующее локальное напряжение, равное сумме приложенного макронапряжения и случайным образом распределенного микронапряжения, превосходит некоторое пороговое значение  $\sigma_1 > 0$ , характерное для аустенитного состояния материала. Если локальное напряжение меньше порогового напряжения, взятого со знаком минус, то зарождается отрицательно ориентированный мартенситный мезоэлемент. Во всех остальных случаях зарождаются нейтральные мезоэлементы.

В процессе развития мартенситных мезоэлементов ориентация входящих в их состав элементарных объемов не изменяется. Предполагается, что приращение объема элемента новой фазы в процессе прямого или обратного термоупругого фазового превращения пропорционально текущему значению этого объема с коэффициентом пропорциональности, одинаковым в данной точке процесса для всех элементов представительного объема СПФ.

Процессы зарождения и развития элементов новой фазы при прямом превращении связаны друг с другом тем условием, что сумма приращения объема мартенсита за счет зарождения мезоэлементов и за счет их развития равна приращению объемной доли мартенситной фазы в рассматриваемом процессе.

На очередном этапе структурного превращения при увеличении действующего напряжения от  $\sigma$  до  $\sigma + d\sigma$  происходит переориентация (раздвойникование) нейтрального мезоэлемента и его превращение в положительно ориентированный мезоэлемент, если до увеличения внешних напряжений локальное напряжение было меньше порогового значения  $\sigma_2 > 0$ , характерного для мартенситного состояния СПФ, а после увеличения напряжений на  $d\sigma$  локальное напряжение стало больше  $\sigma_2$ . В том же процессе допускается переход отрицательно ориентированных мезоэлементов в нейтральные, если до увеличения напряжений локальное напряжение было меньше взятого со знаком минус порогового напряжения  $\sigma_2$ , а после увеличения оно стало больше  $-\sigma_2$ . Симметричные предположения делаются относительно процесса роста модуля отрицательного макроскопического напряжения.

### 3. Допущения, лежащие в основе термодинамического замыкания модели

В качестве параметров состояния рассматриваются: напряжения  $\sigma_{ij}$ , температура  $T$ , объемная доля мартенситной фазы  $q$  и девиатор фазово-структурной деформации  $\varepsilon_{ij}^{phst}$ . Предполагается, что потенциал Гиббса СПФ, получаемый из свободной энергии преобразованием Лежандра с использованием тензора термоупругой деформации, является аддитивной суммой упругих выражений потенциалов Гиббса различных фаз с весами, равными их объемным долям. Исходя из первого и второго законов термодинамики с учетом закона Фурье для вектора теплового потока формулируется неравенство механической диссипации, левая часть которого является линейной формой относительно скоростей изменения параметров состояния. В случае обратимых процессов, не сопровождающихся фазовыми и структурными переходами, коэффициенты этой формы при скоростях  $\dot{\sigma}_{ij}$  и  $\dot{T}$  должны быть равны нулю, из чего получаются известные определяющие соотношения для упругих деформаций и энтропии. Значения упругих модулей двухфазного материала выражаются через их значения для каждой из фаз с помощью осреднения по Рейсу, что является следствием гипотезы об аддитивности потенциала Гиббса. Предположение об аддитивности свободной энергии приводит к аналогичным формулам, но соответствующим осреднению по Фойгхту [17].

Предполагается, что полученные таким образом выражения для упругих деформаций и энтропии справедливы для любых процессов, в том числе и необратимых. В результате левая часть неравенства механической диссипации существенно

упрощается. В частности, для случая фазовых переходов в отсутствие напряжений условие выполнения диссипативного неравенства принимает известную форму

$$M_s^0 \leq T^* \leq A_s^0, \quad (1)$$

где  $T^* = \Delta U_0 / \Delta S_0$  – температура термодинамического равновесия фаз,  $\Delta U_0$ ,  $\Delta S_0$  – объемные плотности энтальпии и энтропии фазового перехода при отсчетной температуре,  $M_s^0$ ,  $A_s^0$  – температуры начала прямого и обратного мартенситного превращений в отсутствие напряжений. Это соотношение может выполняться лишь для СПФ с широким гистерезисом, для которых  $M_s^0 \leq A_s^0$ . Поэтому приведенная система определяющих соотношений описывает поведение именно таких СПФ. Способ распространения данного подхода на СПФ с узким гистерезисом описан в [30]. В общем случае наличия напряжений выражение (1) является необходимым условием выполнения диссипативного неравенства. Однако удается получить такие выражения для характерных температур фазовых переходов при наличии напряжений  $M_s^\sigma$ ,  $A_s^\sigma$ , при которых необходимое условие выполнения диссипативного неравенства (1) становится достаточным для произвольных термомеханических процессов. Полученные зависимости характерных температур фазовых переходов от действующих напряжений не противоречат экспериментальным данным.

Из первого и второго законов термодинамики с учетом найденного выражения для механической диссипации получено связанное уравнение энергетического баланса для СПФ, которое учитывает не только выделение и поглощение латентного тепла фазовых переходов, но и диссипативные явления, связанные как с фазовыми, так и со структурными превращениями.

#### 4. Определяющие соотношения для СПФ

С использованием сформулированных выше положений в [29] построена объединенная одномерная модель нелинейного деформирования СПФ при фазовых и структурных превращениях, в рамках которой приращение фазовых деформаций зависит от интегральной функции распределения микронапряжений в аустенитном состоянии, а приращение структурной деформации определяется дифференциальной плотностью распределения микронапряжений в мартенситном состоянии. Можно предложить феноменологическое обобщение одномерной микромеханической модели на трехмерный случай, приводящее к следующим соотношениям:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^{\text{phst}} + \varepsilon_{ij}^T, \quad \varepsilon_{ij}^{e'} = \frac{\sigma'_{ij}}{2G}, \quad \varepsilon_{kk}^e = \frac{\sigma_{kk}}{K}, \quad (2)$$

$$\frac{1}{G(q)} = \frac{q}{G_M} + \frac{1-q}{G_A}, \quad \frac{1}{K(q)} = \frac{q}{K_M} + \frac{1-q}{K_A},$$

$$\varepsilon_{ij}^{\text{phst}} = \varepsilon_0 q \delta_{ij} + \varepsilon_{ij}^{\text{phst}'}, \quad d\varepsilon_{ij}^{\text{phst}'} = d\varepsilon_{ij}^{\text{ph}'} + d\varepsilon_{ij}^{\text{st}'}, \quad \varepsilon_{ij}^T = \alpha(T - T_0)\delta_{ij},$$

$$q = \varphi(t), \quad \varphi(t) = \frac{1}{2}(1 - \cos(\pi t)) \quad 0 \leq t \leq 1,$$

$$\varphi(t) = 0 \quad t \leq 0, \quad \varphi(t) = 1 \quad t \geq 1,$$

$$t = \frac{M_s^\sigma - T}{M_s^0 - M_f^0}, \quad M_s^\sigma = M_s^0 + \frac{\omega_{ij}^+ \sigma'_{ij} + Z(\sigma_{ij})}{\Delta S_0} + \frac{\sigma_{kk} \varepsilon_0}{3\Delta S_0}, \quad (3)$$

$$d\varepsilon_{ij}^{\text{st}'} = \frac{3}{2} \rho \frac{\sigma'_{ij}}{\sigma_i} q p_2(\sigma_i) d\sigma_i \quad d\sigma_i > 0, \quad d\varepsilon_{ij}^{\text{st}'} = 0, \quad d\sigma_i \leq 0, \quad (4)$$

$$d\varepsilon_{ij}^{\text{ph}} = \omega_{ij}^+ dq, \quad \omega_{ij}^+ = \frac{3}{2} \rho \frac{\sigma'_{ij}}{\sigma_i} (1 - a_0 q) F_1(\sigma_i) + a_0 \varepsilon_{ij}^{\text{phst} \prime}, \quad dq > 0, \quad (5)$$

$$t = 1 + \frac{A_s^\sigma - T}{A_f^0 - A_s^0}, \quad A_s^\sigma = A_s^0 + \frac{\omega_{ij}^- \sigma'_{ij} + Z(\sigma_{ij})}{\Delta S_0} + \frac{\sigma_{kk} \varepsilon_0}{3 \Delta S_0}, \quad (6)$$

$$d\varepsilon_{ij}^{\text{phst}} = \omega_{ij}^- dq, \quad \omega_{ij}^- = \frac{\varepsilon_{ij}^{\text{phst}}}{q}, \quad dq < 0, \quad (7)$$

$$6Z(\sigma_{ij}) = \frac{\sigma_{kk}^2 \Delta K}{K_A K_M} + \frac{\sigma_i^2 \Delta G}{G_A G_M}, \quad \Delta K = K_A - K_M, \quad \Delta G = G_A - G_M,$$

$$k_q \Delta T = C_\sigma \dot{T} + T \alpha \dot{\sigma}_{kk} - (\Delta U_0 + \sigma_{kk} \varepsilon_0 / 3 + \omega_{ij} \sigma'_{ij}) \dot{q} - \rho q p(\sigma_i) \sigma_i \dot{\sigma}_i. \quad (8)$$

В (2)  $\varepsilon_{ij}$ ,  $\varepsilon_{ij}^e$ ,  $\varepsilon_{ij}^T$ ,  $\varepsilon_{ij}^{\text{phst}}$  – полная, упругая, температурная и фазово-структурная деформации;  $d\varepsilon_{ij}^{\text{ph}}$ ,  $d\varepsilon_{ij}^{\text{st}}$  – приращения этой деформации за счет фазового и структурного переходов,  $\sigma_{ij}$ ,  $\sigma_i$  – тензор и интенсивность напряжений, штрихом обозначаются компоненты девиаторов;  $K$ ,  $G$ ,  $K_M$ ,  $K_A$ ,  $G_M$ ,  $G_A$  – утроенный объемный и сдвиговой модули и их значения в мартенситном и аустенитном состоянии;  $\alpha$ ,  $T_0$  – коэффициент температурного расширения и отсчетная температура;  $\varepsilon_0 > 0$  – деформация объемного эффекта реакции прямого мартенситного превращения,  $q$  – объемная доля мартенситной фазы,  $M_f^0$ ,  $A_f^0$  – температуры окончания соответственно прямого и обратного превращения в отсутствие напряжений (верхний индекс нуль); те же символы с верхним индексом  $\sigma$  соответствуют наличию напряжений;  $F_1(\sigma_i)$ ,  $p_2(\sigma_i)$  – интегральная функция распределения интенсивности микронапряжений в аустенитном фазовом состоянии и плотность распределения интенсивности микронапряжений в мартенситном фазовом состоянии;  $k_q$ ,  $C_\sigma$  – коэффициент теплопроводности и теплоемкость при постоянном напряжении. Уравнения (3)–(5) описывают прямое фазовое и (или) структурное превращение, уравнения (6), (7) – обратное превращение, соотношение (8) есть связанное уравнение энергетического баланса, полученное из первого и второго законов термодинамики. Выше изложен частный вариант системы определяющих уравнений, соответствующий равным нулю значениям пороговых напряжений.

### 5. Описание явления прямого превращения, мартенситной неупругости и монотонной памяти формы

Ниже рассматривается класс активных процессов прямого превращения и (или) мартенситной неупругости, происходящих при условии  $dq \geq 0$ ,  $d\sigma_i \geq 0$ . В этом случае уравнение для фазово-структурной деформации принимает вид

$$d\varepsilon_{ij}^{\text{phst} \prime} = \frac{3}{2} \rho \frac{\sigma'_{ij}}{\sigma_i} (F_1(\sigma_i)(1 - a_0 q) dq + q p_2(\sigma_i) d\sigma_i) + a_0 \varepsilon_{ij}^{\text{phst} \prime} dq. \quad (9)$$

Соотношение (9) по заданной истории изменения  $\sigma'_{ij}$  и  $q$  позволяет определить историю изменения компонент  $\varepsilon_{ij}^{\text{phst} \prime}$ . В случае если функции распределения микронапряжений для аустенитного и мартенситного состояния СПФ совпадают:

$$F_1(\sigma_i) = F_2(\sigma_i) = F(\sigma_i), \quad p_2(\sigma_i) = F'(\sigma_i), \quad (10)$$

то соотношение (9) можно представить в форме

$$dS_{ij} = a_0 S_{ij} dq - \frac{3}{2} \rho q F(\sigma_i) d(\sigma'_{ij} / \sigma_i), \quad (11)$$

$$S_{ij} = \varepsilon_{ij}^{\text{phst}'}, - \frac{3}{2} \rho \frac{\sigma'_{ij}}{\sigma_i} q F(\sigma_i).$$

Далее рассматриваются такие активные процессы, для которых  $\sigma'_{ij}/\sigma_i = \lambda_{ij} = \text{const}$ , то есть компоненты девиатора напряжений меняются пропорционально одному параметру. В этом случае для каждой пары индексов  $i, j$  (9) является уравнением Пфаффа [32] относительно неизвестной функции  $\varepsilon_{ij}^{\text{phst}'}$  и независимых переменных  $q$  и  $\sigma_i$ . Для этого уравнения легко проверяется выполнение условий интегрируемости

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{ij}^{\text{phst}'}}{\partial q \partial \sigma_i} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{ij}^{\text{phst}'}}{\partial \sigma_i \partial q}. \quad (12)$$

Действительно,

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{ij}^{\text{phst}'}}{\partial q \partial \sigma_i} = \frac{\partial}{\partial \sigma_i} \left( \frac{3}{2} \rho \lambda_{ij} F_1(\sigma_i) (1 - a_0 q) + a_0 \varepsilon_{ij}^{\text{phst}'} \right) = \frac{3}{2} \rho \lambda_{ij} F_1'(\sigma_i),$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{ij}^{\text{phst}'}}{\partial \sigma_i \partial q} = \frac{\partial}{\partial q} \left( \frac{3}{2} \rho \lambda_{ij} q F_2'(\sigma_i) \right) = \frac{3}{2} \rho \lambda_{ij} F_2'(\sigma_i),$$

и в силу (10) выполняется (12). При выполнении условий (12) для заданных значений  $\lambda_{ij}$  каждому начальному условию

$$\varepsilon_{ij}^{\text{phst}'}(q_0, \sigma_{ij}^0) = \varepsilon_{ij}^0 \quad (13)$$

соответствует единственное решение уравнения (9), которое можно получить из (11) при условии  $d(\sigma'_{ij}/\sigma_i) = 0$ . Это решение имеет вид:

$$S_{ij} = S_{ij}^0 \exp(a_0(q - q_0)), \quad (14)$$

где  $S_{ij}^0$  – начальное значение  $S_{ij}$ , соответствующее точке  $q = q_0$ , или

$$\varepsilon_{ij}^{\text{phst}'} = \frac{3}{2} \rho \frac{\sigma'_{ij}}{\sigma_i} q F(\sigma_i) + \left( \varepsilon_{ij}^0 - \frac{3}{2} \rho \frac{\sigma_{ij}^0}{\sigma_i^0} q^0 F(\sigma_i^0) \right) \exp(a_0(q - q_0)). \quad (15)$$

Необходимо отметить, что зависимость (15) представляет собой конечное соотношение, следуя которому компоненты девиатора фазово-структурной деформации в рассматриваемом классе процессов зависят лишь от начальной и конечной точек процесса и не зависят от истории изменения параметров  $q, \sigma_i$  между этими точками.

Пусть для величин, входящих в начальное условие (13), выполняется соотношение  $\varepsilon_{ij}^0 = 3\rho\lambda_{ij}qF(\sigma_i^0)/2$ . В этом случае решение (15) существенно упрощается:

$$\varepsilon_{ij}^{\text{phst}'} = \frac{3}{2} \rho \frac{\sigma'_{ij}}{\sigma_i} q F(\sigma_i). \quad (16)$$

Более того для каждой пары индексов  $i, j$  в пространстве с координатами  $(q, \sigma_i, \varepsilon_{ij}^{\text{phst}'})$  имеется поверхность (16), обладающая тем свойством, что если решение (15) имеет хотя бы одну общую точку с этой поверхностью, то оно все принадлежит этой поверхности.

В результате оказывается, что для весьма широкого круга процессов, включающих в себя прямое термоупругое превращение из полностью аустенитного состояния под действием постоянных или монотонно и пропорционально возрастающих



напряжений или изотермическое пропорциональное нагружение как в мартенситном (мартенситная неупругость), так и в начально аустенитном (вызванное ростом напряжений прямое превращение) состояниях, справедливы единые конечные соотношения между напряжениями, деформациями и параметром фазового состава (16), которые по аналогии с деформационной теорией пластичности можно квалифицировать как деформационную теорию поведения СПФ. Необходимо отметить, что зависимости (16) справедливы также и в рамках модели с различными функциями распределения микронапряжений в аустенитном и мартенситном состояниях, но только по отношению к процессам прямого превращения из полностью аустенитного состояния под действием постоянных напряжений.

Для рассматриваемого класса процессов существенно упрощается формула для  $\omega_{ij}^+$  (5) и выражение для  $M_s^\sigma$  (3):

$$\omega_{ij}^+ = \frac{3}{2} \rho \frac{\sigma'_{ij}}{\sigma_i} F(\sigma_i), \quad M_s^\sigma = M_s^0 + \frac{\sigma_i F(\sigma_i) + Z(\sigma_{ij}) + \varepsilon_0 \sigma_{kk} / 3}{\Delta S_0}. \quad (17)$$

Умножая равенство (16) само на себя и сворачивая результат по обоим индексам для интенсивности деформаций полного прямого превращения ( $q = 1$ ), имеем

$$\varepsilon_i^{\text{phst}} = \rho F(\sigma_i). \quad (18)$$

В силу свойств интегральных функций распределения (неотрицательность, монотонное возрастание, асимптотическое стремление к единице на бесконечности) соотношение (18) качественно правильно описывает все перечисленные выше нелинейные свойства зависимости интенсивности деформаций, накопленных при полном прямом превращении под действием постоянных напряжений от интенсивности этих напряжений. Кроме того, согласно (16) в таких процессах компоненты тензоров неупругих деформаций являются линейными функциями параметра фазового состава  $q$ . Таким образом, предлагаемая модель нелинейного деформирования исправляет все отмеченные выше недостатки линейной модели [6–9].

В случае если начальная точка процесса не принадлежит поверхности (16), то и все решение будет отличаться от (16). Интересно отметить, что разница между рассматриваемым решением и решением (16), определяемая как интенсивность  $S_i = \sqrt{3S_{ij}S_{ij}/2}$  тензора  $S_{ij}$ , изменяется согласно (14) в соответствии с зависимостью  $S_i = S_i^0 \exp(a_0(q - q_0))$ , то есть при  $a_0 > 0$  ограниченно растет с ростом  $q$  при  $q \in [q_0, 1]$ . По заданному  $\varepsilon > 0$  всегда можно подобрать такое  $\delta > 0$ , что при начальном отклонении от процесса (16), меньшим  $\delta$ , для всех  $q \in [q_0, 1]$  отклонение полученного решения от (16) будет меньше  $\varepsilon$ . Таким образом, решение (16) будет устойчивым по начальным данным для ограниченного интервала изменения  $q$ .

Если функции распределения микронапряжений в аустенитном и мартенситном состояниях СПФ совпадают, то в силу упомянутого выше положения об активных процессах пропорционального изменения компонент девиатора напряжений зависимость (18) справедлива для произвольного сочетания прямых фазовых и структурных превращений в СПФ. Но тогда в силу (18) интенсивность суммарной неупругой деформации ограничена сверху величиной  $\rho$ , коррелирующей с интенсивностью кристаллографической деформации фазового перехода.

При  $a_0 = 0$  аналогичное положение можно доказать для более общего случая активных процессов, в которых условие пропорциональности изменения компонент девиатора напряжений не соблюдается. Для общего случая различных функций распределения микронапряжений в аустенитном и мартенситном состояниях СПФ из (9) можно получить

$$d\varepsilon_{ij}^{\text{phst}'} = \frac{3}{2} \rho \frac{\sigma'_{ij}}{\sigma_i} ((F_1(\sigma_i) - F_2(\sigma_i))dq + d(qF_2(\sigma_i))). \quad (19)$$

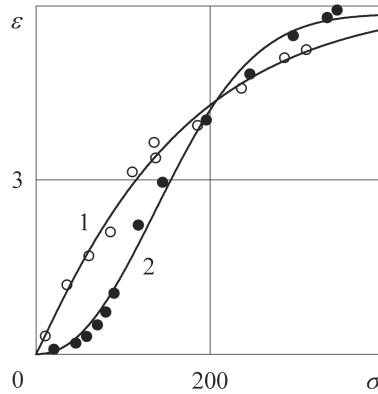


Рис. 1

Умножая (19) само на себя и сворачивая по обоим индексам, для дифференциала длины дуги фазово-структурного деформирования находим:

$$dL = \sqrt{2d\varepsilon_{ij}^{\text{phst}}d\varepsilon_{ij}^{\text{phst}}/3} = dL_1 + dL_2,$$

$$dL_1 = \rho(F_1(\sigma_i) - F_2(\sigma_i))dq, \quad dL_2 = \rho d(qF_2(\sigma_i)).$$

В силу свойств функций распределения  $|dL_1| \leq \rho dq$ ,  $dL_2 \leq \rho dq$ , откуда следует оценка  $L \leq 2\rho$ . Однако интенсивность деформаций не может превосходить длину дуги деформирования. Следовательно  $\varepsilon_i^{\text{phst}} \leq 2\rho$ . В случае одинаковых функций распределения получается требуемая более точная оценка  $\varepsilon_i^{\text{phst}} \leq \rho$ .

Таким образом, для достаточно широкого класса процессов выполняется сформулированное выше условие ограниченности суммарной (фазово-структурной) деформации.

В рамках тех же предположений оказывается, что диаграмма мартенситной неупругости и диаграмма полного прямого превращения в координатах интенсивность напряжений – интенсивность деформаций записываются в виде одной и той же формулы (18). Следовательно, эти диаграммы должны совпадать. Для некоторых материалов [31] такое совпадение действительно имеет место. Однако в ряде случаев наблюдается существенное различие этих диаграмм, особенно для малых напряжений, для которых интенсивность деформаций прямого превращения существенно превышает интенсивность деформаций мартенситной неупругости. Этот факт иллюстрируется на рис. 1, на котором приведены экспериментальные данные для образцов из равноатомного никелида титана, отожженных при температуре  $450^\circ\text{C}$  в течение 30 мин.

Светлыми кружками обозначены экспериментальные данные по прямому превращению, темными кружками – по мартенситной неупругости. В последнем случае для описания механического поведения СПФ необходимо применять модель с различными функциями распределения микронапряжений для аустенитного и мартенситного состояний. В частности, возможно использование распределения Вейбулла  $F(\sigma_i) = \Phi(\sigma_i/\sigma_0)$ , где  $\Phi(x) = 1 - \exp(-x^\alpha)$  с различными значениями параметров  $\sigma_0$  и  $\alpha$  для аустенитного и мартенситного состояний. Кривые на рис. 1 построены именно для такого распределения, причем методом наименьших квадратов определены следующие значения параметров: для кривой 1 (прямое превращение)  $\rho = 0.061$ ,  $\sigma_0 = 165$ ,  $\alpha = 1.06$ ; для кривой 2 (мартенситная неупругость)  $\rho = 0.059$ ,  $\sigma_0 = 180$  МПа,  $\alpha = 2.22$ . Как видно, значения  $\rho$ , найденные из опытов по прямому превращению и мартенситной неупругости, оказались в пределах

разброса экспериментальных данных неразличимы. Наибольшие различия получились для константы  $\alpha$ . Ее двукратное увеличение при переходе от прямого превращения к мартенситной неупругости как раз и обеспечивает наблюдаемую в эксперименте разницу формы соответствующих диаграмм.

Изменение фазово-структурных деформаций при обратном превращении описывается в рамках рассматриваемой модели соотношением (7). Интегрируя это уравнение при начальном условии  $\varepsilon_{ij}^{\text{phst}'}(q_0) = \varepsilon_{ij}^0$ , получаем соотношение  $\varepsilon_{ij}^{\text{phst}'} = \varepsilon_{ij}^0 q/q_0$ , следуя которому фазово-структурная деформация при обратном превращении уменьшается пропорционально  $q$ . Таким образом, в рамках данной модели описывается явление монотонной памяти формы.

## 6. Описание явления ориентированного превращения

Пусть прямое превращение для  $0 \leq q \leq q_1 < 1$  происходило под действием постоянного напряжения  $\sigma_{ij}^1$ , после чего напряжение было снято и для  $q_1 < q \leq 1$  прямое превращение завершалось в отсутствие напряжений. Первый этап процесса удовлетворяет всем условиям, для которых выше было установлено положение об активных процессах прямого превращения и (или) структурного перехода. Поэтому компоненты девиатора фазово-структурной деформации в конце первого этапа и интенсивность этой деформации равны

$$\varepsilon_{ij}^{\text{phst}'}(q_1) = \frac{3}{2} \rho \frac{\sigma_{ij}^1}{\sigma_i^1} F(\sigma_i^1) q_1, \quad \varepsilon_i^{\text{phst}}(q_1) = \rho F(\sigma_i^1) q_1. \quad (20)$$

Уравнение (9) для второго этапа процесса, когда  $\sigma_{ij} = \sigma_i = 0$ , при условии  $F(0) = 0$  принимает вид

$$d\varepsilon_{ij}^{\text{phst}'} = a_0 \varepsilon_{ij}^{\text{phst}'} dq. \quad (21)$$

Решение (21) при начальном условии (20) и интенсивность соответствующей деформации равны

$$\varepsilon_{ij}^{\text{phst}'} = \frac{3}{2} \rho \frac{\sigma_{ij}^1}{\sigma_i^1} q_1 F(\sigma_i^1) \exp(a_0(q - q_1)), \quad \varepsilon_i^{\text{phst}} = \rho F(\sigma_i^1) q_1 \exp(a_0(q - q_1)). \quad (22)$$

Согласно (22) при  $a_0 > 0$  интенсивность фазово-структурной деформации на втором этапе действительно растет в отсутствие напряжений с ростом  $q$ . Из (22) и (20) для увеличения деформаций за счет явления прямого превращения  $\Delta\varepsilon$  можно получить

$$\Delta\varepsilon(\sigma_i^1, q_1) = \varepsilon_i^{\text{phst}}(1) - \varepsilon_i^{\text{phst}}(q_1) = \rho F(\sigma_i^1) q_1 (\exp(a_0(1 - q_1)) - 1). \quad (23)$$

Согласно (23) при фиксированном значении  $q_1$  величина  $\Delta\varepsilon$  растет с ростом интенсивности напряжений  $\sigma_i^1$ , которые были приложены на первом этапе процесса. В то же время зависимость  $\Delta\varepsilon$  от значения  $q = q_1$ , при котором снимается нагрузка, является немонотонной.  $\Delta\varepsilon(\sigma_i^1, 0) = \Delta\varepsilon(\sigma_i^1, 1) = 0$ , а в точке  $q_1 \in (0, 1)$  величина  $\Delta\varepsilon$  достигает максимального значения. Такое поведение соответствует экспериментальным данным [33].

## 7. Описание явления сверхупругости

Пусть образец из СПФ изотермически монотонно нагружается, причем компоненты девиатора напряжений меняются пропорционально одному параметру. Температура нагружения  $T_0$  удовлетворяет условию  $T_0 > A_f$ , то есть материал первоначально находится в полностью аустенитном состоянии. Для упрощения

выкладок в данном разделе пренебрегается малыми слагаемыми  $Z(\sigma_{ij})$  и  $\sigma_{kk}\varepsilon_0/3$  по сравнению с  $\omega_{ij}^{\pm}\sigma'_{ij}$  в формулах (17) и (6) для  $M_s^\sigma$  и  $A_s^\sigma$ .

Исходя из приведенной выше системы определяющих соотношений можно заключить, что при возрастании интенсивности напряжений от нуля до значения  $\sigma_s^{\text{ph}}$ , являющегося корнем уравнения  $\rho\sigma_s^{\text{ph}}F(\sigma_s^{\text{ph}}) = \Delta S_0(T_0 - M_s^0)$ , будет происходить упругое нагружение с аустенитными значениями модулей. Дальнейший рост интенсивности напряжений до значения  $\sigma_f^{\text{ph}}$ , являющегося корнем уравнения  $\rho\sigma_f^{\text{ph}}F(\sigma_f^{\text{ph}}) = \Delta S_0(T_0 - M_f^0)$ , приводит к одновременному развитию двух процессов: прямого мартенситного превращения и переориентации образовавшегося мартенсита, причем оба процесса связаны с ростом напряжений. Пользуясь тем, что рассматриваемое термомеханическое нагружение удовлетворяет установленному выше положению об активных процессах пропорционального изменения компонент девиатора напряжений, для интенсивности фазово-структурных деформаций получаем

$$\varepsilon_i^{\text{phst}} = \frac{1}{2}\rho F(\sigma_i)(1 - \cos(\pi t)), \quad t = \frac{(M_s^0 - T_0)\Delta S_0 + \rho\sigma_i F(\sigma_i)}{\Delta S_0(M_s^0 - M_f^0)}. \quad (24)$$

Согласно (24) интенсивность деформаций будет возрастать с ростом интенсивности напряжений, как это и наблюдается в соответствующих экспериментах.

Пусть после достижения интенсивностью напряжений значения  $\sigma_f^{\text{ph}}$ , то есть после завершения полного прямого превращения, происходит разгрузка. При уменьшении интенсивности напряжений от значения  $\sigma_f^{\text{ph}}$  до величины  $\sigma_s^- = (T_0 - A_s^0)\Delta S_0 / (\rho F(\sigma_f^{\text{ph}}))$  будет происходить упругая разгрузка с мартенситными значениями модулей. При дальнейшем уменьшении  $\sigma_i$  от  $\sigma_s^-$  до величины  $\sigma_f^- = (T_0 - A_f^0)\Delta S_0 / (\rho F(\sigma_f^{\text{ph}}))$  начнется вызванное уменьшением напряжений обратное превращение и соответствующее падение интенсивности деформаций согласно зависимости

$$\varepsilon_i^{\text{ph}} = \frac{1}{2}\rho F(\sigma_i)(1 - \cos(\pi t)), \quad t = \frac{(A_f^0 - T_0)\Delta S_0 + \rho\sigma_i F(\sigma_f^{\text{ph}})}{\Delta S_0(A_f^0 - A_s^0)}.$$

Дальнейшее падение напряжений до нуля приведет к упругой разгрузке с аустенитными значениями упругих модулей. Таким образом, предлагаемая модель качественно правильно описывает явление сверхупругости.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 08-01-00535).

### Summary

*A.A. Movchan, L.G. Silchenko, S.A. Kazarina, Thant Zin Aung.* Shape Memory Alloys Constitutive Relations – Micromechanics, Phenomenology, Thermodynamics.

A model of shape memory alloys nonlinear straining at thermoelastic phase and structural transitions is proposed. The formulated system of constitutive relations adequately describes such properties and unique phenomena of shape memory alloys as the change of elastic modules at the martensitic transitions, direct transformation strain accumulation, oriented transition, monotonic shape memory, martensitic unelasticity, superelasticity, latent heat release and absorption at the phase transitions, and the dissipative phenomena.

**Key words:** shape memory alloy, constitutive relations, nonlinear deformation, micromechanics, phase transitions, structural transitions, thermodynamics, latent heat, energy balance equation.

## Литература

1. *Лихачев В.А., Кузьмин С.Л., Каменцева Э.П.* Эффект памяти формы. – Л.: Изд-во ЛГУ, 1987. – 216 с.
2. *Волков А.Е., Лихачев В.А., Разов А.И.* Механика пластичности материалов с фазовыми превращениями // Вестн. ЛГУ. – 1984. – Т. 19, Вып. 4. – С. 30–37.
3. *Абдрахманов С.А.* Деформации материалов с памятью формы при термосиловом воздействии. – Бишкек: ИЛИМ, 1991. – 117 с.
4. *Liang C., Rogers C.A.* One dimensional thermomechanical constitutive relations for shape memory materials // J. Intell. Mater. Syst. Struct. – 1990. – V. 1, No 2. – P. 207–234.
5. *Такака К.А.* A phenomenological description on thermomechanical behavior of shape memory alloys // J. Pressure Vessel Technol. Trans ASME. – 1990. – V. 112, No 2. – P. 158–193.
6. *Мовчан А.А.* Микромеханический подход к описанию процессов деформирования и накопления повреждений при сложном напряженном состоянии // IV Симпозиум «Прочность материалов и элементов конструкций при сложном напряженном состоянии». – Киев, 1992. – С. 45–46.
7. *Мовчан А.А.* Микромеханические определяющие уравнения для сплавов с памятью формы // Проблемы машиностроения и надежности машин. – 1994. – № 6. – С. 47–53.
8. *Мовчан А.А.* Микромеханический подход к описанию деформации мартенситных превращений в сплавах с памятью формы // Изв. РАН. МТТ. – 1995. – № 1. – С. 197–205.
9. *Мовчан А.А.* Выбор аппроксимации диаграммы перехода и модели исчезновения кристаллов мартенсита для сплавов с памятью формы // ПМТФ. – 1995. – № 2. – С. 173–181.
10. *Boyd J.G., Lagoudas D.C.* A thermodynamic constitutive model for shape memory materials. Part 1. The monolithic shape memory alloy // Int. J. Plast. – 1996. – V. 12, No 6. – P. 805–842.
11. *Leclercq S., Lexcellent C.* A general macroscopic description of the thermomechanical behavior of shape memory alloys // J. Mech. Phys. Solids. – 1996. – V. 44, No 6. – P. 953–980.
12. *Волков А.Е., Сахаров В.Ю.* Термомеханическая макромодель сплавов с эффектом памяти формы // Изв. РАН. Сер. физ. – 2003. – Т. 67, № 6. – С. 845–851.
13. *Auricchio F., Sacco E.* A temperature dependent beam for shape memory alloys: constitutive modeling, finite element implementation and numerical simulations // Comput. Meth. Appl. Mech. Eng. – 1999. – No 174. – P. 171–190.
14. *Мовчан А.А.* Некоторые проявления способности к ориентированному превращению для сплавов с памятью формы // ПМТФ. – 1996. – Т. 37, № 6. – С. 181–189.
15. *Мовчан А.А., Шельмагин П.В., Казарина С.А.* Определяющие уравнения для двухэтапных термоупругих фазовых превращений // ПМТФ. – 2001. – Т. 42, № 5. – С. 152–160.
16. *Мовчан А.А.* Аналитическое решение задач о прямом и обратном превращении для сплавов с памятью формы // Изв. РАН. МТТ. – 1996. – № 4. – С. 136–144.
17. *Мовчан А.А.* Учет переменной упругих модулей и влияния напряжений на фазовый состав в сплавах с памятью формы // Изв. РАН. МТТ. – 1998. – № 1. – С. 79–90.

18. Мовчан А.А. Исследование эффектов связности в задачах изгиба балок из сплава с памятью формы // ПМТФ. – 1998. – Т. 3, № 1. – С. 87–97.
19. Мовчан А.А. Кручение призматических стержней из сплавов с памятью формы // Изв. РАН. МТТ. – 2000. – № 6. – С. 143–154.
20. Мовчан А.А., Сильченко Л.Г. Устойчивость стержня, претерпевающего прямое и обратное мартенситные превращения под действием сжимающих напряжений // ПМТФ. – 2003. – Т. 44, № 3. – С. 169–178.
21. Мовчан А.А., Сильченко Л.Г. Устойчивость пластины из сплава с памятью формы при прямом термоупругом превращении // ПММ. – 2004. – Т. 68, Вып. 1. – С. 60–72.
22. Мовчан А.А., Сильченко Л.Г. Анализ устойчивости при прямом термоупругом превращении под действием сжимающих напряжений // Изв. РАН. МТТ. – 2004. – № 2. – С. 132–144.
23. Мовчан А.А., Сильченко Л.Г. Аналитическое решение связной задачи об устойчивости пластины из сплава с памятью формы при обратном мартенситном превращении // Изв. РАН. МТТ. – 2004. – № 5. – С. 153–167.
24. Мовчан А.А., Сильченко Л.Г. Устойчивость круглой пластины из сплава с памятью формы при прямом мартенситном превращении // ПММ. – 2006. – Т. 70, Вып. 5. – С. 869–881.
25. Мовчан А.А., Сильченко Л.Г. Потеря устойчивости круглой пластины из сплава с памятью формы, вызванная обратным термоупругим мартенситным превращением // Изв. РАН. МТТ. – 2008. – № 1. – С. 117–130.
26. Лизачев В.А., Малинин В.Г. Структурно-аналитическая теория прочности. – СПб.: Наука, 1993. – 471 с.
27. Мовчан А.А., Ньюнт Со. Термодинамическое описание поведения сплавов с памятью формы с помощью аддитивного потенциала Гиббса // ПМТФ. – 2006. – Т. 47, № 4. – С. 98–103.
28. Клопотов А.А., Марченко Е.С., Матюнин А.Н., Козлов Э.В. Деформация Бейна при термоупругих мартенситных превращениях в интерметаллидах на основе никелида титана // Изв. РАН. Сер. физ. – 2008. – Т. 72, № 8. – С. 1098–1101.
29. Мовчан А.А., Мовчан И.А. Модель нелинейного деформирования сплавов с памятью формы в активных процессах прямого превращения и структурного перехода // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2008. – Т. 14, № 1. – С. 75–87.
30. Мовчан А.А., Мишустин И.В. Анализ неаддитивных добавок к потенциалу Гиббса сплава с памятью формы // Изв. РАН. Сер. физ. – 2006. – Т. 70, № 9. – С. 1388–1395.
31. Wu X.D., Sun G.J., Wu J.S. The nonlinear relationship between transformation strain and applied stress for nitinol // Mater. Lett. – 2003. – V. 57. – P. 1334–1338.
32. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.; Л.: Гостехиздат, 1952. – 232 с.
33. Беляев С.П., Волков А.Е., Ермолаев В.А. и др. Материалы с эффектом памяти формы: Справ. изд. / Под ред. В.А. Лихачева. – СПб.: Изд-во НИИХ СПбГУ, 1998. – 374 с.

Поступила в редакцию  
30.03.10

**Мовчан Андрей Александрович** – доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник Института прикладной механики РАН, г. Москва.

E-mail: *movchan47@mail.ru*

**Сильченко Леонид Георгиевич** – доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Института прикладной механики РАН, г. Москва.

E-mail: *sileger@mail.ru*

**Казарина Светлана Александровна** – кандидат технических наук, старший научный сотрудник Института прикладной механики РАН, г. Москва.

E-mail: *svetlans@mail.ru*

**Аунг Тант Зин** – аспирант Московского авиационного института.