УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ КАЗАНСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

Том 152, кн. 3 Физико-математические науки *2010*

УДК 535.2

ЭФФЕКТИВНЫЙ ГАМИЛЬТОНИАН АТОМНО-ФОТОННОГО КЛАСТЕРА В РЕЗОНАНСНОМ КОГЕРЕНТНОМ ПОЛЕ

А.М. Башаров

Аннотация

Получены эффективные гамильтониан, оператор дипольного момента и уравнения Блоха для описания когерентных переходных явлений, вызванных резонансным взаимодействием импульса классической электромагнитной волны с атомно-фотонным кластером, локализованном в микрорезонаторе. В качестве демонстрации применения развитой теории рассмотрена оптическая нутация в искусственной среде одинаковых атомно-фотонных кластеров.

Ключевые слова: атомно-фотонный кластер, полиномиальная алгебра, оператор Казимира, микрорезонатор, уравнения Линдблада, модель Тависа – Каммингса.

Введение

В работе [1] рассмотрено спонтанное излучение атомов, локализованных в одномодовом резонаторе, и показано, что в случае комбинационного резонанса атомов с полем микрорезонаторной моды и внешним квантованным широкополосным электромагнитным полем (термостатом) можно говорить о едином образовании – атомно-фотонном кластере. Кинетическое уравнение, описывающее излучение атомно-фотонного кластера, имеет стандартный вид Линдблада, в котором образующие алгебры угловых моментов, возникающие в случае описания спонтанного излучения обычных двухуровневых атомов, заменены на образующие полиномиальной алгебры третьего порядка. На состояниях атомно-фотонного кластера реализуются неприводимые представления полиномиальной алгебры третьего порядка, а ее коммутационные соотношения и операторы Казимира определяют своеобразие спонтанного излучения атомно-фотонного кластера.

В настоящей статье рассматривается описание атомов и фотонов в микрорезонаторе в поле резонансной когерентной волны в условиях комбинационного резонанса, аналогичного рассмотренному в работе [1] для квантованного широкополосного электромагнитного поля. Показано, что эффективные гамильтониан и дипольный момент атомов и фотонов микрорезонатора в поле когерентной волны также выражаются через образующие той же самой полиномиальной алгебры третьего порядка, что и в работе [1]. Тем самым доказано, что и в задачах нелинейной оптики, как и в случае спонтанного распада, атомы и фотоны микрорезонатора в условиях комбинационного резонанса с участием кванта микрорезонаторной моды и внешней электромагнитной волны выступают как единое образование – атомно-фотонный кластер, а возникающая полиномиальная алгебра третьего порядка является алгеброй динамической симметрии задач с участием атомно-фотонного кластера при указанных здесь и в работе [1] резонансных условиях. Показано, что в определенной области параметров атома эффективные гамильтониан, дипольный момент и кинетические уравнения атомно-фотонного кластера в поле когерентной волны в условиях комбинационного резонанса получаются из аналогичных величин для обычного двухуровнего атома в когерентном поле при однофотонном резонансе путем замены образующих алгебры углового момента на образующие полиномиальной алгебры (как и в случае уравнения Линдблада для атомно-фотонного кластера [1]).

Понятие полиномиальной алгебры введено в работах В.П. Карасева [2, 3] и очень грубо полиномиальные алгебры можно рассматривать как бесконечномерное обобщение алгебры осцилляторов и алгебры углового момента, адекватное для описания кластерных состояний из спинов и бозонов [2–4]. Настоящая работа и [1] демонстрируют это утверждение для нового класса задач нелинейной и квантовой оптики.

1. Постановка задачи

Пусть имеется одмодовый микрорезонатор, в котором содержатся:

1. Одинаковые неподвижные частицы (атомы, молекулы, квантовые точки и т. п.), описываемые гамильтонианом

$$H_a^{(i)} = \sum_j E_j |E_j\rangle^{(i)} \langle E_j|^{(i)}, \quad \sum_j |E_j\rangle^{(i)} \langle E_j|^{(i)} = 1^{(i)}, \quad \langle E_j|^{(i)} E_k\rangle^{(i)} = \delta_{jk},$$

так что гамильтониан всей атомной подсистемы является прямой суммой гамильтонианов отдельных атомов:

$$H_a = \sum_{i=1}^{N_a} H_a^{(i)}.$$

Верхний индекс у векторов состояний и операторов отмечает пространство состояний i-го атома.

2. Фотоны микрорезонаторной моды частоты ω_c, характеризуемые операторами рождения c^+ и уничтожения c. Потерями на зеркалах, наличием других мод пренебрегаем. Гамильтониан фотонной подсистемы микрорезонатора таков:

$$H = \hbar \omega_c N,$$

где $[N, c] = -c,\ [N, c^+] = c^+,\ [c, c^+] = 1,\ N = c^+ c$.

Пусть с атомно-фотонной системой, локализованной в микрорезонаторе, электродипольным образом взаимодействует внешнее классическое электромагнитное поле с напряженностью электрического поля

$$E = \mathcal{E} e^{i(\vec{\kappa}\,\vec{r} - \nu t)} + \text{к.с.},$$

с несущей частотой ν, волновым вектором $\vec{\kappa}$ и медленно меняющейся по сравнению с $e^{i(\vec{\kappa}\,\vec{r} - \nu t)}$ амплитудой $\mathcal{E}$. Операторы взаимодействия атомов с когерентным электромагнитным полем и фотонами микрорезонаторной моды представлены обычными выражениями (g – константа связи, d_{kj} – матричный элемент оператора дипольного момента атома d)

$$V_{\text{coh}} = -E \sum_{i,kj} d_{kj} |E_k\rangle^{(i)} \langle E_j|^{(i)}, \quad V_c = g(c^+ + c) \sum_{i,kj} d_{kj} |E_k\rangle^{(i)} \langle E_j|^{(i)}.$$

Рассматриваемые электромагнитные поля находятся в условиях комбинационного резонанса с атомным переходом $E_1 \to E_0$:

$$(E_1 - E_0)/\hbar \equiv \omega_0 \approx \nu - \omega_c, \tag{1}$$

причем ни микрорезонаторная мода, ни внешние электромагнитные поля, не находятся в резонансе с каким-либо оптически разрешенным переходом атома с участием уровней $|E_0\rangle$ или $|E_1\rangle$. Отсутствуют также другие двухфотонные резонансы с участием внешних полей, микрорезонаторной моды и рассмотренных энергетических уровней частицы. Энергетические атомные уровни $|E_0\rangle$ и $|E_1\rangle$ будем также называть резонансными – они находятся в комбинационном резонансе с рассматриваемыми полями, так что переход $E_1 \to E_0$ является оптически запрещенным ($d_{10} = 0$). Тогда гамильтониан рассматриваемой системы состоит из гамильтониана ансамбля изолированных атомов H_a, гамильтониана локализованной фотонной моды H_c, оператора взаимодействия атомов и фотонов микрорезонаторной моды V_c и оператора взаимодействия атома с классическим когерентным полем V_{coh}:

$$H = H_a + H_c + V_c + V_{\mathrm{coh}}. \tag{2}$$

Вектор состояния всей системы $|\Psi\rangle$ или ее матрица плотности ρ удовлетворяют обычным квантовомеханическим уравнениям

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\Psi\rangle = H|\Psi\rangle, \quad i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\rho = [H, \rho] \tag{3}$$

с гамильтонианом (2).

Далее необходимо унитарно преобразовать вектор состояния системы $|\Psi\rangle$ и гамильтониан (2) согласно [5], чтобы получить эффективный гамильтониан системы и уравнения Блоха, замкнутые относительно резонансных уровней. Эти преобразования осуществляются стандартным образом и выражаются уравнениями:

$$|\widetilde{\Psi}\rangle = U|\Psi\rangle, \quad \widetilde{\rho} = U\rho U^+, \quad \widetilde{H} = UHU^+ - i\hbar U\frac{\partial}{\partial t}U^+. \tag{4}$$

Эффективный гамильтониан определяет эволюцию преобразованного вектора состояния (или матрицы плотности) атомов и фотонов микрорезонатора

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\widetilde{\Psi}\rangle = \widetilde{H}|\widetilde{\Psi}\rangle, \quad i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\widetilde{\rho} = [\widetilde{H}, \widetilde{\rho}], \tag{5}$$

и, далее, поляризацию атомов микрорезонатора P

$$P = N_a\langle\Psi|d|\Psi\rangle = N_a \,\mathrm{Tr}\,(\rho d) = N_a\langle\widetilde{\Psi}|D|\widetilde{\Psi}\rangle = N_a \,\mathrm{Tr}\,(\widetilde{\rho} D),$$

где $D = U\,dU^+$ – эффективный оператор дипольного момента атомов микрорезонатора, N_a – число атомов микрорезонатора. Матрица плотности атомно-фотонной системы микрорезонатора считается нормированной $\mathrm{Tr}\,(\rho) = \mathrm{Tr}\,(\widetilde{\rho}) = 1$.

2. Эффективные гамильтониан и оператор дипольного момента

Если представить унитарный оператор U через эрмитовый оператор

$$U = e^{-iS}, \quad S^+ = S,$$

то преобразованный гамильтониан $\widetilde{H}$ можно разложить в ряд по S, используя формулу Бейкера–Хаусдорфа:

$$\widetilde{H} = e^{-iS}He^{iS} - i\hbar e^{-iS}\frac{\partial}{\partial t}e^{iS} = H - i[S, H] - \frac{1}{2}[S, [S, H]] - \cdots - i\hbar e^{-iS}\frac{\partial}{\partial t}e^{iS}, \tag{6}$$

Далее можно представить оператор S и преобразованный гамильтониан $\widetilde{H}$ в виде рядов по константам взаимодействия

$$S = S^{(10)} + S^{(01)} + S^{(20)} + \cdots, \quad \widetilde{H} = \widetilde{H}^{(00)} + \widetilde{H}^{(10)} + \widetilde{H}^{(01)} + \widetilde{H}^{(11)} + \widetilde{H}^{(20)} + \cdots \tag{7}$$

Здесь и далее через $S^{(nm)}$ и $\widetilde{H}^{(nm)}$ обозначены слагаемые, имеющие n-й порядок по константе взаимодействия атомов с микрорезонаторной модой (левый верхний индекс) и m-й порядок по взаимодействию с классическим когерентным полем (правый верхний индекс). В учете резонансного взаимодействия с классическим когерентным полем и состоит главное отличие разложения (7) и последующих от аналогичных в работе [1]. Другое отличие состоит в том, что ранее использовалась двухуровневая модель атома, а в настоящей работе учитываются все атомные уровни. Подставляя (7) в разложение (6) и приравнивая выражения одного порядка, получаем уравнения, совпадающие по виду с уравнениями (10)–(15) работы [1], в которых $H_\Gamma = 0$ и $V_\Gamma = V_{\rm coh}$. Полагая $\widetilde{H}^{(01)} = 0$ и $\widetilde{H}^{(10)} = 0$, получаем следующие выражения:

$$S^{(10)} = -igc \sum_{i,kj} \frac{d_{kj}}{\hbar(\omega_{jk} + \omega_c)} |E_k\rangle^{(i)} \langle E_j|^{(i)} + \text{э.с.},$$

$$S^{(01)} = -i \sum_{i,kj} \Big(\frac{\mathcal{E} e^{i(\vec\kappa\,\vec r - \nu t)}}{\hbar(\omega_{kj} - \nu)} + \frac{\mathcal{E}^* e^{-i(\vec\kappa\,\vec r - \nu t)}}{\hbar(\omega_{kj} + \nu)} \Big) d_{kj} |E_k\rangle^{(i)} \langle E_j|^{(i)} + \text{э.с.},$$

где $\omega_{kj} = (E_k - E_j)/\hbar = -\omega_{jk}$. По формулам

$$\widetilde{H}^{(00)} = H_a + H_c, \quad \widetilde{H}^{(11)} = -(i/2)[S^{(01)}, V_c]' - (i/2)[S^{(10)}, V_{\rm coh}]',$$

$$\widetilde{H}^{(20)} = -(i/2)[S^{(10)}, V_c]', \quad \widetilde{H}^{(02)} = -(i/2)[S^{(01)}, V_{\rm coh}]',$$

определяются основные слагаемые эффективного гамильтониана:

$$H^{eff} = \widetilde{H}^{(00)} + \widetilde{H}^{(11)} + \widetilde{H}^{(20)} + \widetilde{H}^{(02)}. \tag{8}$$

Штрих у коммутаторов означает отсутствие слагаемых, имеющих в представлении взаимодействия быстро осциллирующие множители: диагональные матричные элементы $H^{\rm eff}$ не содержат быстро осциллирующих множителей, тогда как недиагональные матричные элементы $H^{\rm eff}$ содержат только слагаемые, операторно-временная часть которых имеет вид: $|E_1\rangle\langle E_0|\, c^+ \exp(-i\nu t)$ или $|E_0\rangle\langle E_1|\, c \exp(i\nu t)$.

Несложные, но громоздкие вычисления приводят к выражениям

$$\widetilde{H}^{(11)} = gc^+ \sum_i |E_1\rangle\langle E_0|^{(i)} \mathcal{E} e^{i(\vec\kappa\,\vec r - \nu t)} \Pi_{10}(-\omega_c) + \text{э.с.},$$

$$\widetilde{H}^{(02)} = |\mathcal{E}|^2 \sum_{i,k} \Pi_k(\nu) |E_k\rangle\langle E_k|^{(i)},$$

$$\widetilde{H}^{(20)} = g^2 \sum_{i,jk} |E_k\rangle\langle E_k|^{(i)} \frac{|d_{kj}|^2}{\hbar(\omega_{kj} - \omega_c)} + g^2 c^+ c \sum_{i,k} |E_k\rangle\langle E_k|^{(i)} \Pi_k(\omega_c),$$

где введены параметры [5]

$$\Pi_k(\nu) = \sum_{k'} \frac{|d_{kk'}|^2}{\hbar} \left(\frac{1}{\omega_{kk'} + \nu} + \frac{1}{\omega_{kk'} - \nu} \right),$$

$$\Pi_{nm}(\nu) = \sum_k \frac{d_{nk} d_{km}}{\hbar} \left(\frac{1}{\omega_{kn} + \nu} + \frac{1}{\omega_{km} - \nu} \right) = -\Pi^*_{mn}(-\nu).$$

В силу условия резонанса (1) для резонансных атомных энергетических уровней $|E_0\rangle$ и $|E_1\rangle$ справедливы соотношения $\Pi_{10}(\nu) = \Pi_{10}(-\omega_c)$.

Отметим, что оператор $\widetilde{H}^{(11)}$ описывает резонансные переходы в системе локализованных атомов и фотонов под действием внешнего когерентного поля напряженности $E = \mathcal{E}e^{i(\overrightarrow{\kappa}\,\overrightarrow{r}-\nu t)} +$ к.с. Оператор $\widetilde{H}^{(02)}$ отвечает сдвигу энергетических уровней в силу высокочастотного эффекта Штарка во внешнем классическом когерентном электромагнитном поле. Этот же эффект в поле локализованной фотонной моды описывают слагаемые $\widetilde{H}^{(20)}$, содержащие параметр Π_k. Слагаемые в операторе $\widetilde{H}^{(20)}$, не содержащие параметры Π_k, соответствуют лэмбовскому сдвигу энергетических уровней.

Преобразованные уравнение Шредингера и уравнение для матрицы плотности (5) с эффективным гамильтонианом (8) для резонансных атомных энергетических уровней $|E_0\rangle$ и $|E_1\rangle$ имеют замкнутую форму. Это позволяет для рассматриваемой задачи записать эффективный гамильтониан, отвечающий резонансному условию (1), в виде

$$H^{(\text{eff})} = H_{\text{cl}} + H_{\text{cl}}^{\text{St}} + V_{\text{cl-coh}}, \tag{9}$$

где $H_{\text{cl}} = H'_a + H'_c + H^{(\text{St})}$ – гамильтониан локализованного в микрорезонаторе кластера из атомов и фотонов, $V_{\text{cl-coh}}$ - оператор взаимодействия атомно-фотонного кластера с классическим когерентным электромагнитным полем, $H_{\text{cl}}^{\text{St}}$ – оператор штарковского сдвига уровней атомно-фотонного кластера.

Гамильтониан H_{cl} локализованного в микрорезонаторе кластера из атомов и фотонов определяется операторами:

– гамильтонианом «изолированных» атомов (диагонального вида)

$$H'_a = \hbar\omega'_0 R_3$$

с частотой перехода между уровнями $|E_0\rangle$ и $|E_1\rangle$, учитывающей лэмбовские сдвиги

$$\omega'_0 = \omega_0 + g^2 \sum_j \left(\frac{|d_{1j}|^2}{\hbar^2(\omega_{1j} - \omega_c)} - \frac{|d_{0j}|^2}{\hbar^2(\omega_{0j} - \omega_c)}\right);$$

– гамильтонианом локализованных фотонов (диагонального вида)

$$H'_c = \hbar\omega'_c N$$

с частотой локализованной моды

$$\omega'_c = \omega_c + g^2(\Pi_0(\omega_c) + \Pi_1(\omega_c)/2;$$

– оператором штарковского взаимодействия фотонной и атомной подсистем атомно-фотонного кластера (диагонального вида)

$$H^{(\text{St})} = \hbar\Pi^{(\text{St})} N R_3, \quad \Pi^{(St)} = g^2(\Pi_1(\omega_c) - \Pi_0(\omega_c)).$$

Взаимодействие атомно-фотонного кластера с внешним когерентным полем представляется операторами:

$$V_{\text{cl-coh}} = gc^+ R_+ \mathcal{E}e^{i(\vec{\kappa}\,\vec{r}-\nu t)}\Pi_{10}(-\omega_c) + \text{э.с.}, \quad H_{\text{cl}}^{\text{St}} = |\mathcal{E}|^2(\Pi_1(\nu) - \Pi_0(\nu))R_3.$$

Наконец введены стандартные образующие $su(2)$-алгебры, описывающие резонансные переходы в атомной подсистеме

$$R_3 = \frac{1}{2}\sum_i |E_1\rangle\langle E_1|^{(i)} - \frac{1}{2}\sum_i |E_0\rangle\langle E_0|^{(i)}, \quad R_+ = \sum_i |E_1\rangle\langle E_0|^{(i)}, \quad R_- = \sum_i |E_0\rangle\langle E_1|^{(i)}$$

с коммутационными соотношениями $[R_+, R_-] = 2R_3$, $[R_3, R_\pm] = \pm R_\pm$.

Гамильтониан атомно-фотонного кластера $H_{\rm cl}$ определяется образующими двух различных алгебр: алгебры осцилляторов (или Гейзенберга – Вейля) – c, c^+ и N – и алгебры углового момента – R_-, R_+ и R_3. Это результат использованной стандартной схемы квантования и для решения задачи это неудобно. Следуя [1–4], выразим гамильтониан через новые операторы, которые позволят короче и нагляднее представить исходный гамильтониан. Вид операторов $V_{\text{cl-coh}}$ и $H'_a + H'_c$ подсказывает, что удобно ввести новые операторы X_0, $X_\pm$ по формулам:

$$X_- = cR_-, \quad X_+ = c^+R_+, \quad X_0 = (R_3 + N)/2. \tag{10}$$

При этом операторы X_-, X_+ и X_0 оказываются образующими полиномиальной алгебры третьего порядка с коммутационными соотношениями

$$[X_0, X_\pm] = \pm X_\pm, \quad [X_-, X_+] = p_n(X_0 + 1) - p_n(X_0) \tag{11}$$

и характеристическим полиномом

$$X_+X_- = p_n(X_0) = c_0 \prod_{i=1}^{n} (X_0 - q_i) \tag{12}$$

третьего порядка ($n = 3$) с параметрами

$$c_0 = -1, \quad q_1 = (r - X)/2, \quad q_2 = (X - 3r)/2, \quad q_3 = (X + r)/2 + 1. \tag{13}$$

Операторы

$$X = N - R_3 + r, \quad R^2 = R_+R_- + R_3^2 - R_3 = R_-R_+ + R_3^2 + R_3$$

являются операторами Казимира рассматриваемой полиномиальной алгебры, причем на неприводимом представлении собственные значения оператора X неотрицательны, а оператора R^3 равны $r(r + 1)$. Будем называть описанную полиномиальную алгебру полиномиальной алгеброй атомно-фотонного кластера, поскольку образующие этой полиномиальной алгебры и ее операторы Казимира полностью определяют эффективный гамильтониан атомно-фотонного кластера:

$$H_{cl} = \hbar(\omega'_0 + \omega'_c)X_0 + \hbar(\omega'_0 - \omega'_c)(r - X)/2 + \hbar\Pi^{(\mathrm{St})}(X_0^2 - (r - X)^2/4),$$

$$V_{\text{cl-coh}} = gX_+\mathcal{E}e^{i(\vec{\kappa}\vec{r} - \nu t)}\Pi_{10}(-\omega_c) + \text{э.с.},$$

$$H_{\rm cl}^{\rm St} = |\mathcal{E}|^2(\Pi_1(\nu) - \Pi_0(\nu))(X_0 - X/2 + r/2).$$

В рассматриваемом случае атомно-фотонного кластера полиномиальная алгебра совпала с полиномиальной алгеброй, возникающей в задаче Тависа – Каммингса [6], хотя в модели Тависа – Каммингса реализуется одноквантовый резонанс локализованной фотонной моды с атомным переходом, тогда как у нас выполнено условие двухквантового комбинационного резонанса (1). Кроме того, при учете взаимодействия атомов и/или фотонов микрорезонатора с любыми внешними полями в модели Тависа – Каммингса гамильтониан задачи нельзя выразить только через образующие полиномиальной алгебры.

Для вычисления поляризации среды воспользуемся формулой Бейкера – Хаусдорфа для оператора эффективного дипольного момента и ограничимся первым порядком разложения по константам связи:

$$D \approx \sum_{i,kj} d_{kj}|E_k\rangle\langle E_j|^{(i)} - i\sum_{i,kj}(S^{(01)} + S^{(10)})d_{kj}|E_k\rangle\langle E_j|^{(i)} + $$

$$+ \ i\sum_{i,kj} d_{kj}|E_k\rangle\langle E_j|^{(i)}(S^{(01)} + S^{(10)}). \tag{14}$$

Нерезонансная поляризация среды определяется слагаемыми

$$D \approx -i \sum_{i,k,j} S^{(01)} d_{kj} |E_k\rangle\langle E_j|^{(i)} + i \sum_{i,k,j} d_{kj} |E_k\rangle\langle E_j|^{(i)} S^{(10)},$$

$$P_{\text{nonres}} = 4\pi \chi^{(1)'} E, \quad \chi^{(1)'} = -\frac{1}{4\pi} \operatorname{Tr}(\widetilde{\rho} \sum_{i,k\neq 0,1} \Pi_k(\nu) |E_k\rangle\langle E_k|^{(i)}).$$

Выражение для линейной восприимчивости $\chi^{(1)'}$ (штрих означает отсутствие слагаемых, определяемых матричными элементами $\widetilde{\rho}$ с участием резонансных уровней $|E_0\rangle$ и $|E_1\rangle$), вообще говоря, не сводится к стандартному выражению для невзаимодействующих между собой атомов: $\chi^{(1)'} = -\frac{N_a'}{4\pi} \operatorname{Tr}(\sum_{k\neq 0,1} \widetilde{\rho}^{(1)}_{kk} \Pi_k(\nu))$ ($\widetilde{\rho}^{(1)}_{kk}$ – диагональные матричные элементы одноатомной матрицы плотности [5], N_a' – число нерезонансных атомов), поскольку состояния атомов на уровнях $|E_0\rangle$ и $|E_1\rangle$ перепутаны как между собой, так и с фотонной подсистемой.

Поляризация атомно-фотонного кластера определяется эффективным оператором дипольного момента кластера (14) с операторами $S^{(01)}$, $S^{(10)}$ и проекционными операторами только на атомные состояния $|E_0\rangle$ и $|E_1\rangle$. В поле волнового пакета с несущей частотой ν в условиях (1) поляризация атомно-фотонного кластера наводится как на частоте внешнего поля ν, так и на комбинационных частотах 2ν и $\nu \pm \omega_0$. Появляется также квазистатическая поляризация. Для исследования класса когерентных переходных эффектов достаточно ограничиться рассмотрением поляризации атомно-фотонного кластера на частоте внешнего поля $P_{\text{cl}}(\nu)$. Эта поляризация дается выражением

$$P_{cl}(\nu) = \frac{1}{2}(N_a' - N_a)\left[\Pi_0(\nu) + \Pi_1(\nu)E + (\Pi_0(\nu) - \Pi_1(\nu)\right] \operatorname{Tr}(\widetilde{\rho} R_3)E + \operatorname{Tr}(\widetilde{\rho} D_{\text{cl}}),$$

$$D_{\text{cl}} = -g\Pi_{01}(\omega_c)X_- - g\Pi_{10}(-\omega_c)X_+. \tag{15}$$

Третьим слагаемым в квадратных скобках будем пренебрегать, полагая величину $(\Pi_1(\nu) - \Pi_0(\nu))$ малой:

$$|\Pi_{10}(-\omega_c)| \gg |\Pi_1(\nu) - \Pi_0(\nu)|. \tag{16}$$

Такая ситуация возможна при наличии в атоме квазирезонансного уровня $|E_q\rangle$, такого, что дипольный переход $E_q \to E_1$ «сильнее» перехода $E_q \to E_0$, то есть $|d_{1q}| \gg |d_{0q}|$. Тогда можно ожидать, что будут справедливы неравенства $|\Pi_1(\omega_c)| \gg |\Pi_{10}(-\omega_c)| \gg |\Pi_0(\nu)|$ в силу соотношения между дипольными моментами и $|\Pi_{10}(-\omega_c)| \gg |\Pi_1(\nu)|$ в силу отсутствия соответствующего квазирезонансного уровня. Подчеркнем, что при учете этого слагаемого поляризация атомно-фотонного кластера по-прежнему выражается через образующие полиномиальной алгебры атомно-фотонного кластера, поскольку $R_3 = X_0 - (r - X)/2$ на неприводимом представлении.

Окончательно, переопределяя P_{nonres} и $P_{\text{cl}}(\nu)$, имеем следующее выражение для поляризации $P(\nu)$ системы на частоте ν в поле классической электромагнитной волны $E = \mathcal{E} e^{i(\vec{\kappa}\,\vec{r} - \nu t)} +$ к.с.:

$$P(\nu) = P_{\text{nonres}}(\nu) + P_{\text{cl}}(\nu), \tag{17}$$

$$P_{\text{nonres}}(\nu) = 4\pi \chi^{(1)} E, \quad P_{\text{cl}}(\nu) = \operatorname{Tr}(\widetilde{\rho} D_{cl}).$$

Линейную восприимчивость

$$\chi^{(1)} = -\frac{1}{4\pi} \operatorname{Tr}(\widetilde{\rho} \sum_{i,k\neq 0,1} \Pi_k(\nu) |E_k\rangle\langle E_k|^{(i)}) + \frac{1}{8\pi}(N_a' - N_a)(\Pi_0(\nu) + \Pi_1(\nu))$$

будем рассматривать как параметр теории.

3. Пример применения развитой теории. Оптическая нутация

Пусть полупространство $z \geq 0$ заполнено одинаковыми микрорезонаторами без фотонов и одним и тем же количеством атомов внутри каждого. На полупространство в направлении оси z подается импульс когерентного классического электромагнитного поля частоты ν, которая удовлетворяет условию резонанса (1). В объеме порядка длины волны помещается достаточное количество атомно-фотонных кластеров и их плотность равна $n_{\rm cl}$. Считаем, что амплитуда напряженности электромагнитной волны имеет прямоугольную форму:

$$\mathcal{E} = 0, \quad t < 0, \quad \mathcal{E} = a, \quad t \geq 0,$$

а ее значение достаточной, чтобы пренебречь спонтанным распадом атомно-фотонного кластера. Поэтому динамика атомно-фотонного кластера в поле классической электромагнитной волны описывается уравнением Шредингера:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\widetilde{\Psi}\rangle = (H_{\rm cl} + H_{\rm cl}^{\rm St} + V_{\text{cl-coh}})|\widetilde{\Psi}\rangle.$$

Воспользуемся неприводимым представлением для образующих полиномиальной алгебры в случае соотношения для операторов Казимира $X > 2r$, $N_a = 2r$ (см. [1], формула (28)). Для простоты и определенности полагаем, что в начальный момент времени $t = 0$ состояние атомно-фотонного кластера описывается собственным вектором $|-r\rangle$ оператора $\widetilde{R}_3$ ($\widetilde{r} = r$). Тогда для амплитуд вероятности C_m, $|\widetilde{\Psi}\rangle = \sum\limits_{m=-r}^{r} C_m|m\rangle$, имеем уравнения

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}C_m = \langle m|(H_{\rm cl} + H_{\rm cl}^{\rm St} + V_{\text{cl-coh}})\sum_{m'=-r}^{r} C'_m|m'\rangle,$$

в которых удобно перейти к медленно меняющимся переменным

$$C_m = \overline{C}_m \exp(-i\nu m t - i\omega'_c(X - r)t + im\vec{\kappa}\,\vec{r}).$$

Тогда получим

$$\frac{d}{dt}\,\overline{C}_m = i2\delta m\overline{C}_m - i\Pi^{(\rm St)}m^2\,\overline{C}_m - \\ - \; i\,\overline{C}_{m-1}\Lambda\langle m|X_+|m-1\rangle - i\,\overline{C}_{m+1}\Lambda^*\langle m|X_-|m+1\rangle, \quad (18)$$

где использованы обозначения для перенормированной отстройки δ от резонанса $2\delta = \nu - (\omega'_0 + \omega'_c) - \Pi^{(\rm St)}(X - r)$ и частоты Раби $\Lambda = ga\Pi_{10}(-\omega_c)\hbar^{-1}$.

Поляризация среды атомно-фотонных кластеров определяется выражением

$$P = n_{\rm cl}\sum_{m=-r}^{r} g\Pi_{01}(\omega_c)\,C_m^*\,C_{m+1}\langle m|X_-|m+1\rangle + \\ + \; n_{\rm cl}\sum_{m=-r}^{r} g\Pi_{10}(-\omega_c)\,C_m^*\,C_{m-1}\langle m|X_+|m-1\rangle,$$

или в медленных амплитудах

$$P = -\exp(i\vec{\kappa}\,\vec{r} - i\nu t)n_{\rm cl}\sum_{m=-r}^{r} g\Pi_{01}(\omega_c)\,\overline{C}_m^*\,\overline{C}_{m+1}\langle m|X_-|m+1\rangle + \text{к.с.} \equiv \\ \equiv \; \mathcal{P}\exp(i\vec{\kappa}\,\vec{r} - i\nu t) + \text{к.с.} \quad (19)$$

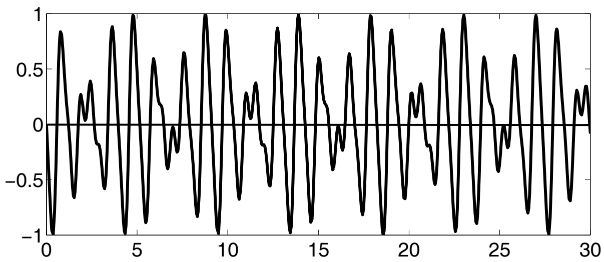

Рис. 1. Оптическая нутация на атомно-фотонном кластере: поведение трехуровневых атомов в отсутствие расстройки и штарковского сдвига; время (по оси абсцисс) задано в относительных единицах

Медленно меняющаяся амплитуда ε электрического поля сигнала отклика в некоторой точке z среды представляется формулой [5]

$$\varepsilon = 2\pi i\kappa z\mathcal{P},$$

причем интенсивность суммарного сигнала, усредненная по периоду быстрых колебаний, определяется [5]

$$I = \frac{ca^2}{2\pi}\left(1 + 2\frac{\operatorname{Re}\varepsilon}{a}\right). \qquad (20)$$

Основным отличием оптической нутации на ансамбле атомно-фотонных кластеров от оптической нутации в среде двухуровневых атомов является наличие модуляции оптической нутации. Модуляция различна для кластеров с разными значениями r и X операторов Казимира. К тому же она дополнительно зависит как от перенормированной отстройки δ, так и от параметра штарковского взаимодействия $\Pi^{(\mathrm{St})}$. На рис. 1 представлен график отнормированной вещественной части ε амплитуды, определяющей интенсивность волны по формуле (20). Предположено, что атомно-фотонные кластеры среды имеют по три атома и $\delta = \Pi^{(St)} = 0$. Напомним, что нутационные колебания в случае двухуровневых атомов в аналогичных условиях представляются синусоидальной функцией [5].

Заключение

Продемонстрированное в предыдущем разделе различие одного из основных когерентных переходных процессов – оптической нутации – в случаях атомно-фотонного кластера (в отсутствие штарковского взаимодействия между фотонной и атомной подсистемами) и обычных двухуровневых атомов обусловлено лишь разницей в коммутационных соотношениях для образующих полиномиальной алгебры (11) и алгебры $su(2)$. Если в гамильтониане атомно-фотонного кластера (9), уравнениях Блоха (18), поляризации среды (19) произвести при $\Pi^{(\mathrm{St})} = 0$ замены

$$X_0 \to R_3, \quad X_\pm \to R_\pm,$$

то получим гамильтониан, уравнения Блоха и поляризацию обычных двухуровневых атомов в резонансном когерентном поле, причем находящихся в условиях однофотонного резонанса, тогда как атомы атомно-фотонного кластера находятся при комбинационном (двухквантовом) резонансе. Такое замечательное совпадение получается лишь при определенных параметрах (16) и $\Pi^{(\mathrm{St})} = 0$. В общем случае динамика атомно-фотонного кластера также полностью определяется полиномиальной алгеброй атомно-фотонного кластера, но такой аналогии с двухуровневыми атомами нет. Развитый в статье математический аппарат не только обосновывает введение атомно-фотонного кластера как элементарного излучателя, но и дает адекватную основу для анализа самых различных эффектов нелинейной оптика с участием атомно-фотонных кластеров. При этом вследствие специфики коммутационных соотношений полиномиальной алгебры в теории взаимодействия атомно-фотонного кластера с резонансными электромагнитными полями появляется дополнительный параметр, связанный с оператором Казимира X. В результате динамика атомно-фотонного кластера во внешнем резонансном когерентном электромагнитном поле характеризуется большим разнообразием.

Автор выражает благодарность профессору В.В. Самарцеву за приглашение прочитать лекцию на XIII Международной молодежной научной школе «Когерентная оптика и оптическая спектроскопия», часть которой легла в основу настоящей статьи.

Summary

A.M. Basharov. Effective Hamiltonian of Atom-Photon Cluster in a Resonant Coherent Field.

The effective Hamiltonian, dipole moment operator and Bloch equations have been obtained for describing coherent transients produced by the resonant interaction of classical electromagnetic wave with atoms and photons localized in microcavity. Optical nutation in an artificial medium of identical atom-photon clusters has been considered as an example of application of the developed theory.

Key words: atom-photon cluster, polynomial algebra, Casimir operator, microcavity, Lindblad equations, Tavis – Cummings model.

Литература

1. *Башаров А.М.* Уравнения Линдблада в образующих полиномиальной алгебры для описания излучения атомно-фотонного кластера // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. – 2009. – Т. 151, кн. 1. – С. 33–42.
2. *Карасев В.П.* Полиномиальные деформации алгебры Ли $sl(2)$ в задачах квантовой оптики // Теор. и матем. физика. – 1993. – Т. 95, № 1. – С. 3–19.
3. *Karassiov V.P.* G-invariant polynomial extensions of Lie algebras in quantum many-body physics // J. Phys. A: Math. Gen. – 1994. – V. 27, No 1. – P. 153–165.
4. *Башаров А.М.* Теория сверхизлучения в резонаторе как пример применения полиномиальных алгебр // XII Междунар. молод. науч. шк. «Когерентная оптика и оптическая спектроскопия»: Сб. ст. – Казань: Казан. гос. ун-т, 2009. – В. 12. – С. 34-42.
5. *Maimistov A.I., Basharov A.M.* Nonlinear optical waves. – Dordrecht: Kluwer Academic, 1999. – XIII+650 p.
6. *Vadeiko I.P., Miroshnichenko G.P., Rybin A.V., Timonen J.* An algebraic approach to the Tavis – Cummings problem // Phys. Rev. A. – 2003. – V. 67, No 5. – P. 053808-1–053808-12.

Поступила в редакцию
18.01.10

Башаров Асхат Масхудович – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник лаборатории нелинейной оптики РНЦ «Курчатовский институт», г. Москва.

E-mail: *basharov@gmail.com*