

УДК 532.546

ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОБ ЭВОЛЮЦИИ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ПУЗЫРЯ В ЛОТКЕ ХЕЛЕ-ШОУ

М.М. Алимов

Аннотация

В предположении, что поле течения вязкой жидкости в щелевом лотке определяется произвольными гидродинамическими особенностями на бесконечности и действием капиллярных сил на межфазной границе можно пренебречь, изучается процесс эволюции пузыря в однофазной постановке. Показано, что эллиптический пузырь эволюционирует, оставаясь эллипсом, тогда и только тогда, когда поле течения определяется произвольной комбинацией из источника, диполя и квадруполья на бесконечности. Построенное точное решение задачи общего вида содержит все известные частные случаи. Помимо этого выявлен и неизвестный ранее случай о снос эллиптического пузыря неизменной формы однородным в бесконечности потоком, когда пузырь ориентирован несимметрично относительно потока.

Ключевые слова: задача Хеле-Шоу, однофазная идеализированная постановка, эллиптический пузырь.

Введение

Идеализированная задача Хеле-Шоу является математической моделью процесса эволюции границы раздела двух вязких жидкостей в щелевом лотке в случае пренебрежимо малых капиллярных сил [1]. Задача об эволюции пузыря в безграничном лотке представляет собой частный случай, при котором размеры лотка во всех направлениях в плане много больше размера пузыря. Динамика такого процесса полностью определяется начальной конфигурацией пузыря и заданными особенностями течения вязкой жидкости на бесконечности, где возможна комбинация особенностей различного типа [2, 3]. Для отдельных особенностей течения на бесконечности: источника [4], диполя [5], квадруполья [6] – имеются точные решения задачи об эволюции пузыря эллиптической формы. Цель настоящей работы – найти максимально общий вид особенности течения в бесконечности, допускающий сохранение эллиптической формы пузыря.

1. Однофазная постановка задачи Хеле-Шоу

Течение вязкой жидкости в горизонтальном лотке Хеле-Шоу характеризуется законом Дарси $\mathbf{v} = -\nabla p$, который связывает скорость жидкости $\mathbf{v}(x, y, t)$ и распределение давления $p(x, y, t)$ в области $\Omega_z(t)$ лотка, занятой жидкостью. С учетом несжимаемости жидкости задача Хеле-Шоу об эволюции границы раздела воздуха и жидкости в однофазной постановке формулируется в виде [1]

$$\Omega_z(t) : \Delta p = 0, \quad \Gamma(t) : p = 0, \quad -\frac{\partial p}{\partial n} = u_n, \quad (1)$$

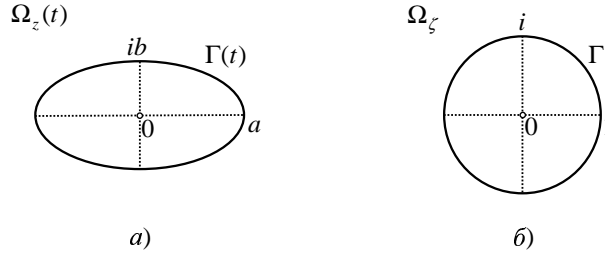


Рис. 1. Вид физической плоскости z (а) и вспомогательной плоскости ζ (б)

к которому необходимо еще добавить условия непроницаемости на заданных границах лотка, а также условие на бесконечности. Отметим, что на межфазной границе $\Gamma(t)$ выполняются два условия. Первое условие, динамическое, означает, что давление в области, занятой воздухом однородно, а действием капиллярных сил на межфазной границе пренебрегается. Второе условие, кинематическое, означает, что межфазная граница материальна и нормальные составляющие скорости частиц жидкости, принадлежащих границе, определяют нормальную скорость продвижения самой границы u_n .

Выполнение уравнения Лапласа (1) делает целесообразным введение комплексной физической плоскости $z = x + iy$ и комплексного потенциала течения жидкости $W(z, t) = \varphi(x, y, t) + i\psi(x, y, t)$, где $\varphi(x, y, t) = -p(x, y, t)$ – потенциал течения, а $\psi(x, y, t)$ – функция тока, гармонически сопряженная потенциалу $\varphi(x, y, t)$ [2]. Тогда скорость течения жидкости можно вычислить по формуле

$$\Omega_z(t) : \mathbf{v}(x, y, t) = \nabla\varphi \Leftrightarrow V(\bar{z}, t) = \frac{\partial \overline{W}}{\partial z}, \tag{2}$$

где $V(\bar{z}, t)$ – комплекснозначный аналог скорости $\mathbf{v}(x, y, t)$. Черта над объектом здесь и далее обозначает операцию комплексного сопряжения. Соответственно, условия на межфазной границе $\Gamma(t)$ можно записать в виде

$$\Gamma(t) : \varphi = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial n} = u_n. \tag{3}$$

Отметим, что комплексный потенциал течения $W(z, t)$ определяется с точностью до несущественной аддитивной функции времени. Поэтому нуль в правой части первого условия (3) может быть заменен на произвольную вещественную функцию времени [1, 5].

Ограничимся в дальнейшем случае безграничного лотка (см. рис. 1, а). Тогда к условиям (3) надо добавить только условие для комплексного потенциала течения $W(z, t)$ на бесконечности. В общем случае его можно сформулировать в виде линейной комбинации источника и полиполей [2, 3]

$$|z| \rightarrow \infty : W(z, t) \approx \frac{Q(t)}{2\pi} \ln z + \sum_{k=1}^K m_k(t) z^k. \tag{4}$$

Здесь $Q(t)$ – вещественная функция времени, обозначающая суммарный расход жидкости, отбираемой ($Q > 0$) или нагнетаемой ($Q < 0$) на бесконечности; $m_k(t)$, $k = 1, \dots, K$, – комплекснозначные функций времени, обозначающие моменты полиполей на бесконечности.

Отметим, что обращение в бесконечность скорости течения жидкости $\overline{\partial W / \partial z}$ при $|z| \rightarrow \infty$ является следствием идеализации – предположения о безграничности

лотка. При переходе к реальному лотку большого, но конечного размера создать определенное течение Хеле-Шоу с потенциалом, отвечающим поведению (4), можно вполне конечными скоростями отбора или нагнетания жидкости по периферии лотка.

2. Уравнение Полубариновой-Галина для решений параметризованного вида

Основным инструментом анализа нестационарных краевых задач Хеле-Шоу в однофазной постановке является граничное эволюционное уравнение Полубариновой-Галина [7–9]. Для его получения целесообразно ввести вспомогательную плоскость комплексного переменного ζ , в которой области $\Omega_z(t)$ отвечает область Ω_ζ канонического вида – внешность единичного круга $|\zeta| > 1$ (см. рис. 1, б). Эволюционирующей межфазной границе $\Gamma(t)$ в каждый момент времени t отвечает окружность $|\zeta| = 1$ в плоскости ζ . Конформное отображение $\Omega_\zeta \rightarrow \Omega_z(t)$ реализует аналитическая функция $g(\zeta, t)$

$$z = g(\zeta, t), \quad \frac{\partial g}{\partial \zeta} \neq 0, \infty, \quad \zeta \in \bar{\Omega}_\zeta, \quad (5)$$

которую можно нормировать следующим образом [10]

$$|\zeta| \rightarrow \infty : |g(\zeta, t)| \rightarrow \infty, \quad \arg \left(\frac{\partial g}{\partial \zeta} \right) \rightarrow 0. \quad (6)$$

Известно, что краевая задача Хеле-Шоу (3), (4) сводится к граничному эволюционному уравнению Полубариновой-Галина общего вида [9, 11]

$$\zeta = e^{i\sigma} : \operatorname{Re} \left\{ \overline{\left(\frac{\partial g}{\partial t} \right)} \zeta \frac{\partial g}{\partial \zeta} \right\} = \operatorname{Re} \left\{ \zeta \frac{\partial W}{\partial \zeta} \right\}. \quad (7)$$

Уточним вид правой части в рассматриваемом нами случае. Поведение (4) на бесконечности функции $W(z, t)$ позволяет оценить поведение на бесконечности функции $W(\zeta, t)$:

$$|\zeta| \rightarrow \infty : W(\zeta, t) \approx \frac{Q(t)}{2\pi} \ln \zeta + \sum_{j=1}^K C_j(t) \zeta^j, \quad (8)$$

где значения коэффициентов ряда $C_k(t)$ определяются коэффициентами $m_k(t)$, $k = 1, \dots, K$ и поведением в бесконечности функции $g(\zeta, t)$. Тогда, учитывая условие $\operatorname{Re} W = 0$ на границе круга $\zeta = e^{i\sigma}$, вытекающее из (3), можно полностью восстановить вид функции $W(\zeta, t)$ [12]:

$$W(\zeta, t) = \frac{Q(t)}{2\pi} \ln \zeta + \sum_{j=1}^K [C_j(t) \zeta^j - \bar{C}_j(t) \zeta^{-j}] \quad (9)$$

и найти вид правой части уравнения Полубариновой-Галина (7)

$$\operatorname{Re} \left\{ \zeta \frac{\partial W}{\partial \zeta} \right\} = \zeta \frac{\partial W}{\partial \zeta} = \frac{Q(t)}{2\pi} + \sum_{j=1}^K j [C_j(t) \zeta^j + \bar{C}_j(t) \zeta^{-j}]. \quad (10)$$

В отличие от рассмотренного ранее случая единственной особенности на бесконечности – источника [13], когда правая часть уравнения (7) является заданной

константой $Q(t)/(2\pi)$, здесь правая часть выражается через коэффициенты $C_k(t)$, которые зависят от поведения искомой функции $g(\zeta, t)$ в бесконечности.

Для конструктивного анализа задачи (7), (10) зададимся определенным параметрическим представлением функции $g(\zeta, t)$, более узким по сравнению с используемым в работе [13]:

$$g(\zeta, t) = \sum_{n=0}^N B_n(t) \zeta^{1-n}, \quad (11)$$

где $B_0(t)$ – вещественная и положительно определенная функция времени ввиду нормировки (6), а $B_n(t)$, $n = 1, \dots, N$, – комплекснозначные функции времени. Таким образом, эволюция межфазной границы определяется вектором неизвестных $\{B_n(t), n = 0, \dots, N\}$ параметрического представления (11).

3. Конструктивный анализ уравнения Полубариновой-Галина

Для построения решений уравнения (7) используется как метод моментов [6, 14], так и метод функции Шварца [9, 15]. Воспользуемся последним методом, с оговоркой, что саму функцию Шварца вводить не будем, а ограничимся только введением оператора P , действие которого сводится к операции сопряжения по параметрам функции и замене ее аргумента ζ на ζ^{-1} [9, 11]:

$$\zeta = e^{i\sigma} : \overline{g(\zeta, t)} = P[g(\zeta, t)]. \quad (12)$$

В результате уравнение Полубариновой-Галина (7) с учетом (10) можно представить в виде

$$P \left[\frac{\partial g}{\partial t} \right] \zeta \frac{\partial g}{\partial \zeta} + P \left\{ P \left[\frac{\partial g}{\partial t} \right] \zeta \frac{\partial g}{\partial \zeta} \right\} = \frac{Q(t)}{\pi} + 2 \sum_{j=1}^K j [C_j(t) \zeta^j + \overline{C_j(t)} \zeta^{-j}], \quad (13)$$

где $\zeta = e^{i\sigma}$. Далее используем основную идею метода функции Шварца – распространим действие этого уравнения с границы $\Gamma : |\zeta| = 1$ в плоскости ζ на всю плоскость. Учитывая параметрическое представление (11), получим эволюционное уравнение для вектора неизвестных $\{B_n(t), n = 0, \dots, N\}$

$$\begin{aligned} \left(\sum_{n=0}^N \dot{B}_n \zeta^n \right) \sum_{n=0}^N (1-n) B_n \zeta^{-n} + \left(\sum_{n=0}^N \dot{B}_n \zeta^{-n} \right) \sum_{n=0}^N (1-n) \overline{B}_n \zeta^n = \\ = \frac{Q}{\pi} + 2 \sum_{j=1}^K j [C_j \zeta^j + \overline{C}_j \zeta^{-j}], \quad (14) \end{aligned}$$

где точки над переменными обозначают производные по времени. Поскольку в правой части уравнения стоит не константа, а полином по степеням ζ , непосредственно использовать теорему Лиувилля аналогично работам [11, 13] нельзя. Целесообразнее использовать простые соображения симметрии уравнения (14) по положительным и отрицательным степеням ζ .

Приравняем сомножители при одинаковых степенях ζ слева и справа, в результате чего получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно вектора неизвестных $\{B_n(t), n = 0, \dots, N\}$. На первый взгляд представляется, что полученная система будет переопределена, поскольку число неизвестных равно $N + 1$, а число уравнений составляет $2N + 1$. На самом деле независимых уравнений в системе будет равно $N + 1$ по числу, скажем, неотрицательных степеней ζ , а оставшиеся N будут выполняться автоматически в силу инвариантности

уравнения Полубариновой-Галина относительно преобразования P [11]. Необходимым условием существования такого решения, очевидно, является неравенство $K \leq N$.

Заметим, что полученное таким образом математическое решение задачи может оказаться нефизичным, поскольку сингулярности отображающей функции $g(\zeta, t)$, а точнее, нули производной $\partial g/\partial \zeta$, могут попасть в замыкание области Ω_ζ , в результате чего область $\Omega(t)$ окажется неоднolistной. Однако в начальный момент времени $t = 0$ всегда есть возможность подобрать значения параметров $\{B_n(0), n = 0, \dots, N\}$ так, чтобы нули производной $\partial g/\partial \zeta$ лежали вне замыкания области Ω_ζ . Далее они будут оставаться вне этого замыкания либо всегда, либо по непрерывности еще некоторое время до момента t_* развала классического решения задачи, когда один из нулей производной $\partial g/\partial \zeta$ коснется границы $\zeta = e^{i\sigma}$ [16]. В этот момент на межфазной границе $\Gamma(t)$ образуется заострение, в котором скорость течения обращается в бесконечность, аналогично решению для кардиоиды [7].

Предложенный метод эффективен для любого конечного N , однако объем выкладок быстро растет с ростом N . Далее более подробно проанализируем достаточно простой и содержательный случай $N = 2$.

4. Общее решение уравнения (14) в случае $N = 2$

Под *общим* решением задачи понимается решение, полученное при максимально произвольном виде особенности на бесконечности, в данном случае при $K = 2$, и произвольном виде функций, отвечающих моментам $Q(t)$, $m_1(t)$, $m_2(t)$ соответствующих полиполей. Заметим, что после установления этого факта нельзя получить общее решение как суперпозицию частных решений [4–6], поскольку задача Хеле-Шоу нелинейна в силу наличия нестационарной свободной границы. Воспользуемся методикой разд. 3.

Для $N = 2$ отображающая функция $z = g(\zeta, t)$ представляется в виде

$$g(\zeta, t) = B_0(t)\zeta + B_1(t) + \frac{B_2(t)}{\zeta}, \quad (15)$$

где $B_0(t)$ – вещественная и положительно определенная, а $B_1(t)$, $B_2(t)$ – вообще говоря, комплекснозначные функции времени. Какими бы ни были эти функции, в плоскости z контур $\Gamma(t)$, отвечающий окружности $\zeta = e^{i\sigma}$, всегда будет оставаться эллипсом. Чтобы убедиться в этом, введем обозначение

$$\beta(t) = \frac{1}{2} \arg B_2(t) \quad (16)$$

и, выбрав $\sigma \in [0, 2\pi]$ в качестве параметра, найдем параметрическое уравнение контура $\Gamma(t)$:

$$\forall t \quad \Gamma(t) : X(\sigma) + iY(\sigma) = B_1(t) + e^{i\beta(t)} \{ [B_0(t) + |B_2(t)|] \cos[\sigma - \beta(t)] + i [B_0(t) - |B_2(t)|] \sin[\sigma - \beta(t)] \}. \quad (17)$$

Очевидно, что это – уравнение эллипса, геометрический центр которого лежит в точке $Z_C(t) = B_1(t)$, большая полуось величины $a(t) = B_0(t) + |B_2(t)| > 0$ составляет с осью x угол $\beta(t) \in [-\pi/2, \pi/2]$, а величина малой полуоси равна $b(t) = B_0(t) - |B_2(t)|$. При этом условие

$$|B_2(t)| < B_0(t) \quad (18)$$

фактически является условием однолистности области $\Omega(t)$, обеспечивающим отсутствие нулей производной $\partial g/\partial \zeta$ в замыкании области Ω_ζ . Можно также найти выражение для эксцентриситета эллипса

$$\varepsilon(t) = \sqrt{1 - \frac{b^2(t)}{a^2(t)}} = 2 \left(\left| \frac{B_0(t)}{B_2(t)} \right|^{1/2} + \left| \frac{B_2(t)}{B_0(t)} \right|^{1/2} \right)^{-1}. \quad (19)$$

Без потери общности можно принять $B_1(0) = 0$ и $\arg B_2(0) = 2\beta(0) = 0$. Это означает, что геометрический центр эллипса и ориентация его большой полуоси в начальный момент времени выбираются за начало системы координат x, y и направление оси x соответственно.

Согласно формуле (4) поведение течения в бесконечности определяется комбинацией из источника мощности $Q(t)$, диполя и квадруполья, ориентацию и интенсивность которых определяют моменты $m_1(t)$ и $m_2(t)$:

$$|z| \rightarrow \infty : W(z, t) \approx \frac{Q(t)}{2\pi} \ln z + m_1(t)z + m_2(t)z^2. \quad (20)$$

Подставляя сюда формулу (15), легко найдем вид коэффициентов $C_k(t)$:

$$C_1(t) = [m_1(t) + 2m_2(t)B_1(t)] B_0(t), \quad C_2(t) = m_2(t)B_0^2(t), \quad (21)$$

определяющих поведение функции $W(\zeta, t)$ в бесконечности (см. формулу (8)) и вид самой функции (см. формулу (9)).

В результате уравнение Полубариновой-Галина (14) примет вид

$$\begin{aligned} \left(\dot{B}_0 + \dot{\bar{B}}_1 \zeta + \dot{\bar{B}}_2 \zeta^2 \right) \left[B_0 - \frac{B_2}{\zeta^2} \right] + \left(\dot{B}_0 + \frac{\dot{B}_1}{\zeta} + \frac{\dot{B}_2}{\zeta^2} \right) \left[B_0 - \bar{B}_2 \zeta^2 \right] = \\ = \frac{Q}{\pi} + 2 \left[C_1 \zeta + \frac{\bar{C}_1}{\zeta} \right] + 4 \left[C_2 \zeta^2 + \frac{\bar{C}_2}{\zeta^2} \right]. \end{aligned} \quad (22)$$

Выписывая коэффициенты при одинаковых неотрицательных степенях ζ в левой и правой частях уравнения (22) и приравнявая их, получим систему трех обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{\bar{B}}_2(t)B_0(t) - \dot{B}_0(t)\bar{B}_2(t) = 4C_2(t), \quad \dot{\bar{B}}_1(t)B_0(t) - \dot{B}_1(t)\bar{B}_2(t) = 2C_1(t), \\ 2\dot{B}_0(t)B_0(t) - \dot{\bar{B}}_2(t)B_2(t) - \dot{B}_2(t)\bar{B}_2(t) = Q(t)/\pi. \end{aligned}$$

После подстановки вместо $C_k(t)$ выражений (21) и элементарных преобразований система приводится к такому виду:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[\frac{\bar{B}_2(t)}{B_0(t)} \right] = 4m_2(t), \quad \frac{d}{dt} [B_0^2(t) - |B_2(t)|^2] = \frac{Q(t)}{\pi}, \\ \frac{d}{dt} \left[\bar{B}_1(t) - \frac{B_1(t)\bar{B}_2(t)}{B_0(t)} \right] = 2m_1(t). \end{aligned}$$

Очевидно, все уравнения этой системы пригодны к прямому интегрированию, в результате которого найдем искомые функции $B_k(t)$:

$$B_0(t) = \sqrt{\frac{F_0(t)}{1 - |F_2(t)|^2}}, \quad B_1(t) = \frac{F_1(t)\bar{F}_2(t) + \bar{F}_1(t)}{1 - |F_2(t)|^2}, \quad \frac{B_2(t)}{B_0(t)} = \bar{F}_2(t). \quad (23)$$

Здесь были использованы обозначения

$$F_0(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^t Q(t) dt + B_0^2(0) - B_2^2(0),$$

$$F_1(t) = 2 \int_0^t m_1(t) dt, \quad F_2(t) = 4 \int_0^t m_2(t) dt + \frac{B_2(0)}{B_0(0)},$$
(24)

причем $F_0(t)$, очевидно, всегда вещественно, а $F_1(t)$, $F_2(t)$, вообще говоря, комплекснозначны.

Отметим следующие важные свойства найденного общего решения (15), (20), (23), (24) однофазной задачи Хеле-Шоу в случае $N = 2$.

1. Изменение площади эллипса определяется только законом изменения мощности $Q(t)$ источника (стока) на бесконечности

$$\pi a(t)b(t) - \pi a(0)b(0) = \int_0^t Q(t) dt,$$
(25)

что согласуется с соображениями материального баланса.

2. Момент $m_1(t)$ диполя на бесконечности в физической плоскости оказывает влияние только на положение геометрического центра эллипса $Z_C(t) = B_1(t)$.

3. Изменение ориентации главных осей эллипса (см. формулу (15)) и его эксцентриситета (см. формулу (16)) определяется только моментом $m_2(t)$ квадруполь на бесконечности в физической плоскости.

4. При фиксированной мощности момента $m_2(t)$ решение задачи существует только для конечных времен $t \in [0, t_*)$, как и в случае наличия отдельного квадруполь на бесконечности [6]. Действительно, из третьей формулы (19) следует, что величина $|F_2(t)|$ достигает значения 1 за конечное время, которое обозначается как t_* . В этот момент эксцентриситет эллипса достигает значения 1, что соответствует пределу $a(t) \rightarrow \infty$, $b(t) \rightarrow 0$. Если момент $m_1(t)$ при этом отличен от нуля, то $|B_1(t)| \rightarrow \infty$, то есть геометрический центр эллипса также уходит на бесконечность.

5. Анализ решения в частных случаях

Рассмотрим простейшие частные случаи найденного общего решения для $N = 2$, отличающиеся типом особенности на бесконечности.

5.1. Источник. На бесконечности в физической плоскости задается только источник интенсивности $Q(t)$, то есть $m_1(t) = m_2(t) = 0$. Решение полностью соответствует решению [4]: эллиптический пузырь растет самоподобно, то есть без изменения эксцентриситета и положения геометрического центра.

5.2. Диполь постоянной мощности. На бесконечности в физической плоскости задается только диполь, момент которого фиксирован, то есть $m_1(t) = m_1^0$, $Q(t) = m_2(t) = 0$. Тогда из всех $F_k(t)$ только $F_1(t)$ будет линейной функцией времени, остальные будут вещественными константами

$$F_1(t) = 2m_1^0 t, \quad F_0 = B_0^2(0) - B_2^2(0), \quad F_2 = B_2(0)/B_0(0).$$

Соответственно, из всех $B_k(t)$ линейной функцией времени будет только $B_1(t) = Ut$, остальные будут совпадать со своими начальными значениями. Через U обозначена скорость поступательного движения пузыря

$$U = 2B_0(0) \frac{m_1^o B_2(0) + \overline{m_1^o} B_0(0)}{B_0^2(0) - B_2^2(0)}. \quad (26)$$

Далее, используя формулы (21), найдем коэффициенты $C_k(t)$:

$$C_1 = m_1^o B_0(0), \quad C_2 = 0.$$

В результате восстанавливается вид комплексного потенциала

$$W(\zeta) = B_0(0) \left(m_1^o \zeta - \frac{\overline{m_1^o}}{\zeta} \right) \quad (27)$$

и отображающей функции $z = g(\zeta, t)$

$$g(\zeta, t) = B_0(0)\zeta + \frac{B_2(0)}{\zeta} + Ut, \quad (28)$$

что позволяет восстановить поле течения в физической плоскости. Решение, очевидно, стационарно, поскольку вся эволюция эллипса сводится к поступательному движению с неизменной скоростью U без какого-либо изменения формы. При этом можно выделить два характерных случая в зависимости от того, совпадают ли направления скорости потока на бесконечности $|z| \rightarrow \infty$: $(dW/dz) \rightarrow \overline{m_1^o}$ и одной из главных осей эллипса. Если они совпадают, то согласно формуле (26) направление поступательного движения эллипса U также будет совпадать с направлением этой главной оси, а величина $|U|$ будет связана с отношением полуосей эллипса формулой $a/b = |U/m_1^o| - 1$. Этот случай полностью соответствует решению [5].

Вместе с тем возможен и другой случай, когда направление скорости потока на бесконечности не совпадает ни с одной из главных осей эллипса, то есть $\text{Re } m_1^o \neq 0$, $\text{Im } m_1^o \neq 0$. Тогда с учетом формулы (26) направление комплекснозначного вектора U поступательного движения эллипса будет промежуточным между направлением скорости потока на бесконечности и направлением главной оси. В качестве иллюстрации к такому случаю возьмем

$$B_0(0) = 1, \quad B_2(0) = 0.5, \quad m_1^o = e^{-i\pi/4}, \quad (29)$$

так что эллиптический пузырь характеризуется полуосями $a = 1.5$, $b = 0.5$, а набегающий поток на бесконечности составляет угол $\pi/4$ с осью x . Используя формулы (26)–(28), найдем скорость поступательного движения пузыря

$$U = \frac{3+i}{0.75\sqrt{2}}, \quad |U| = \frac{\sqrt{5}}{0.75} \approx 2.98$$

и потенциал $W(z, t)$ течения жидкости

$$W(\zeta) = e^{-i\pi/4} \left(\zeta - \frac{i}{\zeta} \right), \quad z - Ut = \zeta + \frac{1}{2\zeta}.$$

Линии тока течения Хеле-Шоу, отвечающего заданным условиям (29), приведены на рис. 2.

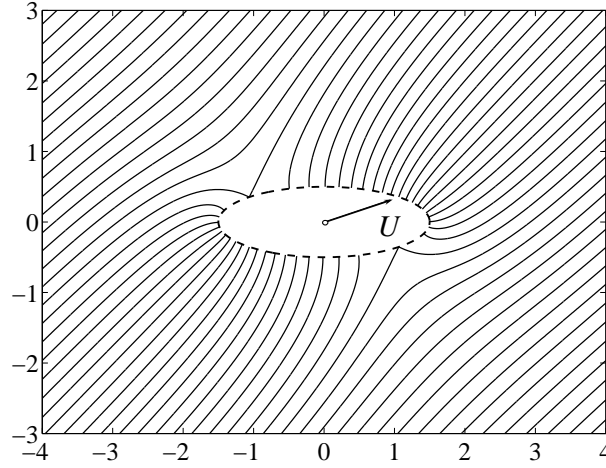


Рис. 2. Линии тока вокруг эллиптического пузыря, несимметрично ориентированного относительно потока на бесконечности

5.3. Квадруполь постоянной мощности. На бесконечности в физической плоскости задается только квадруполь, момент которого – фиксированная комплексная константа, то есть $m_2(t) = m_2^0$, $Q(t) = m_1(t) = 0$. Анализ такого частного случая имеет смысл, поскольку в [6] был рассмотрен только очень узкий случай, когда момент квадруполь – вещественная константа.

Используя формулы (23), (24), найдем вид всех $F_k(t)$ и B_k :

$$F_0 = B_0^2(0) - B_2^2(0), \quad F_1 = 0, \quad F_2(t) = 4m_2^0 t + \frac{B_2(0)}{B_0(0)}, \quad (30)$$

$$B_0(t) = \sqrt{\frac{B_0^2(0) - B_2^2(0)}{1 - |F_2^2(t)|}}, \quad B_1 = 0, \quad B_2(t) = \overline{F_2(t)} B_0(t). \quad (31)$$

Далее, используя формулы (21), найдем коэффициенты $C_k(t)$:

$$C_1 = 0, \quad C_2(t) = m_2^0 B_0^2(t).$$

В результате восстанавливается вид комплексного потенциала $W(\zeta, t)$ и отображающей функции $z = g(\zeta, t)$:

$$W(\zeta, t) = m_2^0 B_0^2(t) \zeta^2 - \frac{\overline{m_2^0} \overline{B_0^2(t)}}{\zeta^2}, \quad g(\zeta, t) = B_0(t) \zeta + \frac{B_2(t)}{\zeta}. \quad (32)$$

В частности, легко установить, как эволюционируют полуоси эллипса

$$a(t) = [1 + |F_2(t)|] \sqrt{\frac{F_0}{1 - |F_2^2(t)|}}, \quad b(t) = [1 - |F_2(t)|] \sqrt{\frac{F_0}{1 - |F_2^2(t)|}}.$$

Первое очевидное следствие – геометрический центр пузыря всегда будет неподвижен, поскольку $U = B_1'(t) = 0$. Далее, площадь эллиптического пузыря в соответствии со свойством 1 остается неизменной. В то же время полуоси эллипса меняются по величине, причем с разной скоростью. Выписывая формулы для эксцентриситета $\varepsilon(t)$ и угла $\beta(t)$:

$$\varepsilon(t) = \frac{2}{|F_2(t)|^{-1/2} + |F_2(t)|^{1/2}}, \quad \beta(t) = -0.5 \arg F_2(t),$$

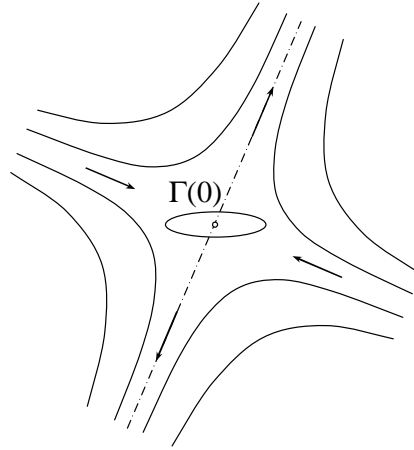


Рис. 3. Ориентация момента квадруполь на бесконечности относительно эллипса $\Gamma(0)$

видим, что изменение со временем $|F_2(t)|$ приводит к изменению эксцентриситета эллипса, а изменение $\arg F_2(t)$ – к изменению ориентации главных осей эллипса. Из третьей формулы (24) следует, что $\arg F_2(t) \rightarrow \arg m_2^o$ при $t \rightarrow \infty$. Поэтому главные оси, изначально ориентированные вдоль координатных осей, со временем эволюционируют, так что $\beta(t) \rightarrow \beta_\infty = -0.5 \arg m_2^o$. Однако в соответствии со свойством 4 решение задачи существует только до конечного момента времени t_* , когда $|F_2(t_*)|$ обращается в 1. Поэтому предельная величина угла $\beta(t)$ составляет не β_∞ , а $\beta_* = -0.5 \arg F_2(t_*)$.

В качестве иллюстрации случая квадруполь на бесконечности возьмем

$$B_0(0) = 1, \quad B_2(0) = 0.5, \quad m_2^o = \sqrt{2} e^{-i(3\pi/4)}, \quad (33)$$

так что в начальный момент времени эллиптический пузырь характеризуется полуосями $a = 1.5$, $b = 0.5$, а общая схема течения соответствует рис. 3. Непосредственно из формул (30) получим

$$F_0 = 0.75, \quad F_1 = 0, \quad F_2(t) = 0.5 - 4t(1 + i),$$

откуда, в частности, следует

$$\forall t > 0: |F_2(t)|^2 = (32t^2 - 4t + 0.25) > 0.$$

Тогда из формул (31) найдем

$$B_0(t) = \sqrt{\frac{0.75}{0.75 + 4t - 32t^2}}, \quad B_1 = 0, \quad B_2(t) = B_0(t) [0.5 + 4t(i - 1)],$$

и далее легко определяются большие полуоси эллипса и угол наклона его большей полуоси к оси x

$$a(t) = [1 + |F_2(t)|] B_0(t), \quad b(t) = [1 - |F_2(t)|] B_0(t), \quad \beta(t) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left(\frac{1 - 8t}{8t} \right).$$

Наконец, полагая величину $|F_2(t)|$ равной 1, найдем предельное время $t_* = (1 + \sqrt{7})/16 \approx 0.228$ и величину предельного угла

$$\beta_*(t_*) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left(\frac{0.5 - 4t_*}{4t_*} \right) \approx 0.997.$$

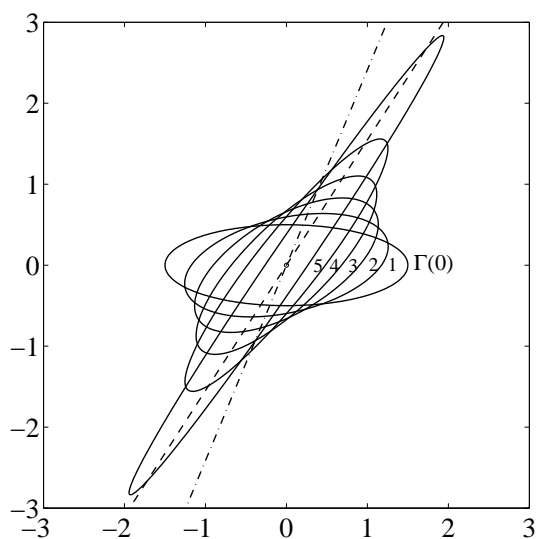


Рис. 4. Эволюция эллиптического пузыря, отвечающая заданным условиям (33), с шагом по времени $\Delta t = 0.041$

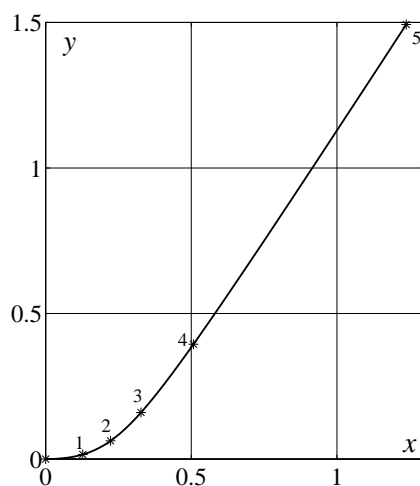


Рис. 5. Траектория центра эллипса в плоскости z для частного случая, рассмотренного в п. 5.4

На рис. 4 представлена эволюция эллиптического пузыря, отвечающая заданным условиям (33), с шагом по времени $\Delta t = 0.041$ и последним расчетным временем $t = 0.205$ (номер шага указан справа от соответствующей кривой). Штрих-пунктирная линия показывает направление $\beta(0)$, определяющее ориентацию квадрупольа на бесконечности. Штриховая линия показывает предельное направление β_* .

5.4. Совокупность квадрупольа и дипольа постоянной мощности.

Пусть вдобавок к условиям (33) на бесконечности в физической плоскости помимо квадрупольа задан и диполь постоянной интенсивности $m_1^o = 1$. Тогда отличие от случая, рассмотренного в п. 5.3, касается только величин $F_1(t)$ и $B_1(t)$.

В соответствии с формулами (23), (24) найдем

$$F_1(t) = 2t, \quad B_1(t) = 2t \frac{1 + \overline{F}_2(t)}{1 - |F_2(t)|^2}.$$

Следовательно, эволюция формы эллипса будет той же самой, что и в п. 5.3, но помимо этого геометрический центр эллипса не останется в начале координат, а будет перемещаться. В частности, если форма эллипса меняется в соответствии с рис. 4, то его центр описывает в плоскости z кривую, представленную на рис. 5, где звездочками с номером шага по времени отмечено положение центра на этот момент времени.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 08-01-00548а).

Summary

M.M. Alimov. General Solution of the One-Phase Hele-Shaw Problem for Elliptic Bubble.

In the general case of several multipole we study one-phase Hele-Shaw flow with a moving boundary when surface tension effect is negligible. We find the explicit solution with nonstationary elliptic shape of the bubble for case when Hele-Shaw flow is produced by any combination of sink, dipole and quadropole at infinity. This general solution includes all known particular cases. In the particular case of a dipole at infinity we find new explicit solution with stationary elliptic shape of the bubble that is not symmetrical with respect to the flow.

Key words: one-phase Hele-Shaw problem, elliptic bubble.

Литература

1. *Saffman P.G., Taylor G.I.* The penetration of a fluid into a porous medium or Hele-Shaw cell containing a more viscous liquid // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. – 1958. – V. 245, No 1242. – P. 312–329.
2. *Lamb H.* Hydrodynamics. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1932 = Ламб Г. Гидродинамика. – М.; Л.: Гостехиздат, 1947. – 928 с.
3. *Batchelor G.K.* An Introduction to Fluid Dynamics. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1970 = *Бэтчелор Дж.* Введение в динамику жидкости. – М.: Мир, 1973. – 760 с.
4. *Howison S.D.* Bubble growth in porous media and Hele-Shaw cells // Proc. Roy. Soc. Edinburgh. Ser. A. – 1986. – V. 102, No 1-2. – P. 141–148.
5. *Taylor G.I., Saffman P.G.* A note on the motion of bubbles in a Hele-Shaw cell and porous medium // Quart. J. Mech. Appl. Math. – 1959. – V. 12. – P. 265–279.
6. *Entov V.M., Etingof P.I., Kleinbock D. Ya.* Hele-Shaw flows with a free boundary produced by multipoles // Europ. J. Appl. Math. – 1993. – V. 4, No 2. – P. 97–120.
7. *Полубаритова-Кочина П.Я.* К вопросу о перемещении контура нефтеносности // Докл. АН СССР. – 1945. – Т. 47, № 4. – С. 254–257.
8. *Галли Л.А.* Неустановившаяся фильтрация со свободной границей // Докл. АН СССР. – 1945. – Т. 47, № 4. – С. 250–253.
9. *Howison S.D.* Complex variable methods in Hele-Shaw moving boundary problems // Europ. J. Appl. Math. – 1992. – V. 3, No 3. – P. 209–224.
10. *Лаверентьев М.А., Шабат Б.В.* Методы теории функции комплексного переменного. – М.: Наука, 1973. – 736 с.

11. *Алимов М.М.* Общее решение задачи Хеле-Шоу для течений в канале // ПММ. – 2006. – Т. 70, Вып. 3. – С. 384–399.
12. *Birkhoff G., Zarantonello E.* Jets, wakes and cavities. – N. Y.: Acad. Press, 1957 = *Биркгоф Г., Сарантонелло Э.* Струи, следы и каверны. – М.: Мир, 1964. – 466 с.
13. *Алимов М.М.* Рост пузыря в ячейке Хеле-Шоу // Изв. РАН. МЖГ. – 2007. – № 2. – С. 133–147.
14. *Richardson S.* Hele-Shaw flows with a free boundary produced by injection of fluid into a narrow channel // J. Fluid Mech. – 1972. – V. 56. – P. 609–618.
15. *Davis P.J.* The Schwarz Function and its Applications. – Washington: Math. Assoc. of America, 1974. – 228 p.
16. *Howison S.D.* Fingering in Hele-Shaw cells // J. Fluid Mech. – 1986. – V. 167. – P. 439–453.

Поступила в редакцию
25.12.09

Алимов Марс Мясумович – кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник НИИ математики и механики им. Н.Г. Чеботарева Казанского государственного университета.

E-mail: *Mars.Alimov@ksu.ru*