УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ КАЗАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
Том 152, кн. 1 Физико-математические науки *2010*

УДК 514.764.227+514.765+517.984.56+511.

СПЕКТР ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА СВЯЗНЫХ КОМПАКТНЫХ ПРОСТЫХ ГРУПП ЛИ РАНГА ОДИН И ДВА

В.М. Свиркин

Аннотация

Излагается алгоритм вычисления спектра лапласиана для вещественных и комплексных функций на связной компактной простой группе Ли с биинвариантной римановой метрикой. Указанный алгоритм используется для явного вычисления спектра лапласиана для компактных связных простых групп Ли ранга один и два.

Ключевые слова: оператор Лапласа, спектр, представление группы Ли, старший вес, форма Киллинга.

Введение

В работе [1] изучается спектр оператора Лапласа на гладких вещественных функциях, определенных на компактных однородных нормальных римановых многообразиях. Показано, что эту задачу можно свести к рассмотрению компактных односвязных (связных) простых групп Ли G с биинвариантной (то есть инвариантной относительно левых и правых сдвигов) римановой метрикой ν. В последнем случае на основе теорем 4.4 и 5.2 из [1], доказательство которых опирается на результаты теории линейных конечномерных представлений групп Ли, предлагается способ вычисления спектра лапласиана, который применяется в § 7 в [1] для вычисления спектра лапласиана на группе Ли $(SU(2),\nu)$, изометричной единичной евклидовой трехмерной сфере S^3.

В работе [2] приводится упрощение доказательства теоремы 4.4 из [1], а также в следствии 1.4 формулируется улучшенный алгоритм поиска спектра лапласиана на односвязной группе Ли G с метрикой ν. Применение этого алгоритма иллюстрируется в §§ 2–4 при вычислении спектра лапласиана групп Ли G ранга два. Улучшение алгоритма в основном заключалось в переходе к комплексному случаю при подсчете кратности собственного значения лапласиана.

В § 1 настоящей работы алгоритм поиска спектра лапласиана из [2] обобщается на неодносвязный случай, то есть рассматривается случай произвольной компактной связной простой группы Ли G. Сначала в предложении 1 доказывается совпадение спектров лапласиана в вещественном и комплексном случаях для любого компактного риманового многообразия класса C^∞. Далее с использованием предложения 1 и рассуждений § 1 [2] формулируются теоремы 1 и 2, являющиеся соответственно аналогами теорем 4.4 и 5.2 из [1] в комплексном случае. Из теорем 1 и 2 следует, что вычисление спектра лапласиана группы Ли G сводится к поиску множества старших весов $\Lambda^+(G)$ всех ее неприводимых комплексных представлений.

Поиск множества старших весов $\Lambda^+(G)$ сводится к поиску решетки $\Lambda(G)$ всех весов неприводимых комплексных представлений группы Ли G, которая называется характеристической решеткой группы Ли G. Характеристическая решетка подробно рассматривается в [3] и в добавлении А.Л. Онищика в книге [4]. В предложении 4 доказывается, что множества $\Lambda^+(G)$ и $\Lambda(G)$ задаются целочисленной решеткой I группы Ли G, определенной однозначно для группы Ли G с точностью до внутреннего автоморфизма. Далее формулируются основные свойства характеристической решетки $\Lambda(G)$, главными из которых являются следующие: характеристическая решетка $\Lambda(G)$ однозначно определяет группу Ли G с точностью до изоморфизма и соотношение (7) определяет все возможные характеристические решетки $\Lambda(G)$ для заданной алгебры Ли. Использование свойств характеристической решетки в качестве итога рассуждений в § 1 позволило сформулировать в следствии 5 алгоритм вычисления спектров лапласианов всех связных компактных простых групп Ли с фиксированной простой алгеброй Ли $\mathfrak{g}$ и биинвариантной римановой метрикой ν.

На основании следствия 5 в § 2 вычисляются спектры лапласианов всех связных компактных простых групп Ли ранга один: $\mathbf{SU(2)}$ и $\mathbf{SO(3)}$, а в §§ 3–5 с учетом результатов вычислений из статьи [2] задаются спектры лапласианов всех связных компактных простых групп Ли ранга два: $\mathbf{SU(3)}$ и $\mathbf{SU(3)}/C(\mathbf{SU(3)})$, $\mathbf{G_2}$, $\mathbf{Spin(5)}$ и $\mathbf{SO(5)}$.

1. План поиска спектра лапласиана связной компактной простой группы Ли

Рассмотрим связную компактную простую группу Ли G с биинвариантной римановой метрикой ν. Множество $\operatorname{Spec}(G,\nu)$ всех собственных значений оператора Лапласа – Бельтрами Δ на гладких вещественных функциях, определенных на (G,ν), с учетом кратности собственных значений, то есть размерности пространств соответствующих собственных функций, называется *спектром* оператора Лапласа. Некоторые общие понятия и результаты, относящиеся к оператору Лапласа – Бельтрами, его собственным значениям и собственным вещественным функциям на компактных римановых многообразиях класса C^∞, указаны в [1]. Лапласиан естественным образом обобщается на комплекснозначные функции. Рассмотрим комплексный случай подробней.

Пусть (N,ν) – компактное риманово многообразие класса C^∞ с метрическим тензором ν, f – комплекснозначная функция на (N,ν), вещественная $f_R := \operatorname{Re} f$ и мнимая $f_I := \operatorname{Im} f$ части которой являются вещественными функциями класса C^2. *Лапласиан* комплекснозначной функции f по определению равен комплекснозначной функции

$$\Delta f := \Delta f_R + i\Delta f_I. \tag{1}$$

Пусть $E_\lambda^{\mathbb{C}}$ и $E_\lambda^{\mathbb{R}}$ являются соответственно пространствами комплексных и вещественных собственных функций, отвечающих собственному числу λ. Из формулы (1) следует, что вещественные функции $g,h \in E_\lambda^{\mathbb{R}}$ задают комплекснозначную функцию $f = g+ih \in E_\lambda^{\mathbb{C}}$, и, наоборот, вследствие однозначности разложения комплекснозначной функции f на вещественную $g = \operatorname{Re} f$ и мнимую $h = \operatorname{Im} f$ части функция $f \in E_\lambda^{\mathbb{C}}$ отвечает двум вещественным функциям $g,h \in E_\lambda^{\mathbb{R}}$. Таким образом, множества собственных значений лапласиана для пространств вещественных и комплекснозначных функций совпадают и имеют место соотношения $E_\lambda^{\mathbb{C}} = E_\lambda^{\mathbb{R}} + iE_\lambda^{\mathbb{R}}$ и $\dim_{\mathbb{C}} E_\lambda^{\mathbb{C}} = \dim_{\mathbb{R}} E_\lambda^{\mathbb{R}}$. Получаем

Предложение 1. *Спектры лапласиана для пространств комплексных и вещественных функций на компактном римановом многообразии класса C^∞ совпадают.*

Вычисление кратности собственного значения, а значит, и самого спектра, лапласиана проще вести в комплексном случае, чем в вещественном. Поэтому при составлении плана поиска спектра лапласиана для связной компактной простой группы Ли G будем следовать ходу рассуждений § 1 в [2], опирающемуся на приводимые ниже аналоги теорем из [1], сформулированные в комплексном случае.

Далее l_g (соответственно r_g) обозначает отображение $l_g : h \in G \to gh \in G$ (соответственно $r_g : h \in G \to hg \in G$); dg – (инвариантная) вероятностная мера Хаара на G, пропорциональная мере объема μ_ν, определяемой римановой метрикой ν. Мера Хаара dg индуцирует инвариантное скалярное произведение в вещественном линейном пространстве $L^2(G, dg)$, которое естественным образом обобщается до инвариантного эрмитового скалярного произведения на комплексном линейном пространстве $L^2_{\mathbb{C}}(G, dg) := L^2(G, dg) + iL^2(G, dg)$. Из формулы (10) теоремы 30 в [5] следует, что размерность пространства матричных элементов M_c неприводимого комплексного представления c равна ${d_c}^2$, где d_c — размерность представления c. Повторяя ход доказательства теоремы 4.4 в [1] и заменяя неприводимые вещественные представления r на неприводимые комплексные представления c, получаем аналог указанной теоремы в комплексном случае.

Теорема 1. *Пусть G – компактная связная группа Ли с биинвариантной римановой метрикой ν, c – некоторое неприводимое комплексное представление группы G размерности d_c. Понимая c как некоторый гомоморфизм $c : G \to \mathrm{U}(d_c)$ групп Ли, можно утверждать, что все функции $c_{ij} : G \to c(g)_{ij}$; $i, j = 1, \dots, d_c$, являются линейно независимыми над $\mathbb{C}$ собственными функциями оператора Лапласа Δ на (G, ν) с одним и тем же собственным значением λ_c. Линейная оболочка M_c этих функций является прямой суммой d_c неприводимых пространств представления $\theta : g \in G \to \theta(g)$ группы G (где $\theta(g)$ сопоставляет каждой вещественной функции f на G функцию $\theta(g)(f) := f \circ l_{g^{-1}}$), ограничение которого на каждое из них эквивалентно c. Выбирая для некоторого представителя c каждого класса эквивалентности неприводимых комплексных представлений группы G некоторый ортонормированный относительно стандартного скалярного произведения $\langle \cdot, \cdot \rangle$ на $L^2_{\mathbb{C}}(G, dg)$ базис из ${d_c}^2$ комплекснозначных функций в M_c, получим полную в $L^2_{\mathbb{C}}(G, dg)$ ортонормированную систему (из собственных функций оператора Δ).*

Из теоремы 1 вытекает следствие, аналогичное следствию 1.1 из [2].

Следствие 1. *В обозначениях теоремы 1 получаем, что кратность собственного значения λ равна*

$$\sum_{c:\lambda_c=\lambda} {d_c}^2,$$

где c пробегает все классы эквивалентности неприводимых комплексных представлений группы Ли G, отвечающих собственному числу λ.

Прежде чем сформулировать теорему, которая предоставляет способ вычисления λ_c и d_c через старший вес представления c, аналог теоремы 5.2 [1] для комплексного случая, изложим необходимые для дальнейшего сведения и рассуждения из § 5 [1].

На основании п. 11 § 3 гл. III и п. 1 § 6 гл. III книги [6] приведем распространение предложения 5.1 и предшествующих ему рассуждений из [1] на комплексный случай.

Предложение 2. *Для всякой группы Ли G существует соответствие между неприводимыми линейными комплексными (вещественными) представлениями r группы Ли G и неприводимыми линейными комплексными (вещественными) представлениями ρ ее касательной алгебры Ли $\mathfrak{g}$, заданное формулой $\rho = dr(e)$. Если группа Ли G односвязна, то указанное соответствие является взаимнооднозначным.*

Из предложения 2 следует, что рассмотрение неприводимых представлений группы Ли G сводится к рассмотрению соответствующих неприводимых представлений ее алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

Определение 1. Билинейная (симметричная) форма k_ρ на алгебре Ли $\mathfrak{g}$, заданная формулой:

$$k_\rho(u,v) = \operatorname{trace}(\rho(u)\rho(v)), \quad u,v \in \mathfrak{g},$$

называется *формой, ассоциированной с представлением* ρ. Форма k_{ad}, где $\mathrm{ad}(u)(v) := [u,v]$ – присоединенное представление алгебры Ли $\mathfrak{g}$, называется *формой Киллинга алгебры Ли* $\mathfrak{g}$.

Замечание 1. Связная компактная группа Ли G проста тогда и только тогда, когда алгебра Ли $\mathfrak{g}$ проста, что эквивалентно неприводимости присоединенного представления ad. При этом для любого неприводимого ненулевого представления ρ алгебры Ли $\mathfrak{g}$, форма k_ρ отрицательно определена и пропорциональна скалярному произведению ν.

Опуская детали, скажем, что алгебра Ли $\mathfrak{g}$ определяет *систему корней* Γ как некоторое подмножество дуального пространства $\mathfrak{t}(\mathbb{R})^*$ к вещественной форме $\mathfrak{t}(\mathbb{R})$ подалгебры Картана $\mathfrak{t}$ комплексной оболочки $\mathfrak{k}$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Определяются подсистемы $\Gamma^+ \subset \Gamma$ *положительных корней* и $\Pi = \{\alpha_1,\ldots,\alpha_l\} \subset \Gamma^+$ положительных (линейно независимых) *простых корней.* Пара $(\mathfrak{t}(\mathbb{R}), (\cdot,\cdot))$ является вещественным евклидовым пространством, где $(\cdot,\cdot) :=\ := k_{\mathrm{ad}}\big|_{\mathfrak{t}(\mathbb{R})}$ – ограничение формы Киллинга k_{ad} алгебры Ли $\mathfrak{g}$ на подпространство $\mathfrak{t}(\mathbb{R})$. Сохраняя то же обозначение, форму $(\cdot,\cdot)$ можно перенести на дуальное пространство $\mathfrak{t}(\mathbb{R})^*$. Более подробная информация о системе корней и весов алгебры Ли содержится в § 5 [1] или § 1 [2], а также в книге [7].

Определим функцию $\{\cdot,\cdot\}$ следующим образом:

$$\{\beta,\alpha\} := \frac{2\,(\alpha,\beta)}{(\alpha,\alpha)}$$

для $\alpha \neq 0$, $\beta \in \mathfrak{t}(\mathbb{R})^*$. Известно, что если α и $\beta \in \Gamma$, то $\{\beta,\alpha\} \in \mathbb{Z}$. *Фундаментальные веса* $\varpi_1,\ldots,\varpi_l$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ определяются однозначно следующими соотношениями:

$$\{\varpi_i,\alpha_j\} = \delta_{ij}, \text{ где } \delta_{ij} - \text{ символ Кронекера}, 1 \le i,j \le l. \tag{2}$$

Значение старшего веса для теории линейных представлений видно из следующих результатов Э. Картана (см. [8])

Предложение 3. *Множества весов* $\Lambda(\mathfrak{g})$ *и старших весов* $\Lambda^+(\mathfrak{g})$ *всех неприводимых комплексных представлений комплексной оболочки* $\mathfrak{k}$ *простой алгебры Ли* $\mathfrak{g}$ *с фундаментальными весами* $\varpi_1,\ldots,\varpi_l$ *задаются следующим образом:*

$$\Lambda(\mathfrak{g}) = \Big\{\Lambda \in \mathfrak{t}(\mathbb{R})^* \;\Big|\; \Lambda = \sum_{i=1}^{l} \Lambda_i \varpi_i, \text{ где } \Lambda_i \in \mathbb{Z}\Big\}, \tag{3}$$

$$\Lambda^+(\mathfrak{g}) = \Big\{\Lambda \in \mathfrak{t}(\mathbb{R})^* \;\Big|\; \Lambda = \sum_{i=1}^{l} \Lambda_i \varpi_i, \text{ где } \Lambda_i \in \mathbb{Z} \text{ и } \Lambda_i \ge 0\Big\}.$$

При этом неприводимое комплексное представление алгебры Ли $\mathfrak{k}$ *с точностью до эквивалентности определяется своим старшим весом* $\Lambda \in \Lambda^+(\mathfrak{g})$.

Вследствие формулы (2) множества $\Lambda(\mathfrak{g})$ и $\Lambda^+(\mathfrak{g})$ можно задать посредством отображения $\{\cdot,\cdot\}$:

$$\Lambda(\mathfrak{g}) = \{\Lambda \in \mathfrak{t}(\mathbb{R})^* \mid \{\Lambda, \alpha_i\} \in \mathbb{Z},\ \text{где } 1 \le i \le l\},$$

$$\Lambda^+(\mathfrak{g}) = \{\Lambda \in \mathfrak{t}(\mathbb{R})^* \mid \{\Lambda, \alpha_i\} \in \mathbb{Z} \text{ и } \{\Lambda, \alpha_i\} \ge 0,\ \text{где } 1 \le i \le l\}.$$

На основании предложений 2 и 3 и предложения 1.3 из [2]

Следствие 2. *Пусть G и G_1 – связные компактные группы Ли с простой алгеброй Ли $\mathfrak{g}$, при этом группа Ли G_1 является односвязной. Пусть, далее, $\Lambda(\mathfrak{g})$, $\Lambda(G)$ и $\Lambda(G_1)$ ($\Lambda^+(\mathfrak{g})$, $\Lambda^+(G)$ и $\Lambda^+(G_1)$) – множества (старших) весов всех неприводимых комплексных представлений комплексной оболочки алгебры Ли $\mathfrak{g}$, групп Ли G и G_1 соответственно. Тогда выполняются следующие соотношения:*

$$\Lambda(G_1) = \Lambda(\mathfrak{g}) \quad \text{и} \quad \Lambda(G) \subseteq \Lambda(\mathfrak{g}),$$

$$\Lambda^+(G_1) = \Lambda^+(\mathfrak{g}) \quad \text{и} \quad \Lambda^+(G) \subseteq \Lambda^+(\mathfrak{g}).$$

Переформулируем теорему 5.2 из [1] для комплексного случая, исходя из предложений 1, 2 и предложения 1.4 из [2], а также из равенства собственных значений лапласиана, отвечающих неприводимым комплексному и вещественному представлениям группы Ли с одним и тем же старшим весом.

Теорема 2. *Предположим, что биинвариантная риманова метрика ν на связной компактной простой группе Ли G с алгеброй Ли $\mathfrak{g}$ и множеством старших весов $\Lambda^+(G)$ определяется скалярным произведением $\nu(e) = -k_{\mathrm{ad}}$ (минус формой Киллинга) на $\mathfrak{g}$. Пусть старшему весу $\Lambda \in \Lambda^+(G)$ отвечает неприводимое комплексное линейное представление $c : G \to \mathrm{GL}(d(\Lambda+\beta), \mathbb{C})$ группы Ли G с собственным значением $\lambda(\Lambda)$ лапласиана Δ на (G, ν). Тогда имеют место равенства*

$$\lambda(\Lambda) = -[(\Lambda+\beta, \Lambda+\beta) - (\beta, \beta)], \tag{4}$$

$$d(\Lambda+\beta) = \dim_{\mathbb{C}} c = \prod_{\alpha \in \Gamma^+} \frac{(\Lambda+\beta, \alpha)}{(\beta, \alpha)}, \tag{5}$$

где

$$\beta = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Gamma^+} \alpha.$$

Если $\nu(e) = -\gamma k_{\mathrm{ad}}$, то все числа в формуле (4) нужно умножить на $1/\gamma$, а все остальное оставить без изменений.

Из теоремы 2 и следствия 1 получаем

Следствие 3. *В обозначениях теоремы 2 кратность собственного значения λ лапласиана Δ на (G, ν) равна*

$$\sigma(\lambda) = \sum_{\Lambda\colon \lambda(\Lambda) = \lambda} \prod_{\alpha \in \Gamma^+} \left(\frac{(\Lambda+\beta, \alpha)}{(\beta, \alpha)} \right)^2, \tag{6}$$

где Λ пробегает все элементы множества $\Lambda^+(G)$, отвечающие собственному числу λ.

Из теорем 1 и 2 следует, что вычисление спектра лапласиана связной компактной группы Ли G сводится к поиску множества старших весов $\Lambda^+(G)$ всех ее неприводимых комплексных представлений. Согласно предложению 2 в односвязном случае множество $\Lambda^+(G)$ совпадает с множеством $\Lambda^+(\mathfrak{g})$, которое определяется системой корней группы Ли G через фундаментальные веса; в произвольном случае $\Lambda^+(G)$ является лишь некоторым подмножеством множества $\Lambda^+(\mathfrak{g})$, причем, как будет показано ниже, множество $\Lambda^+(G)$ совпадает с $\Lambda^+(\mathfrak{g})$ только в односвязном случае и определяет группу G с точностью до изоморфизма.

Пусть $\mathfrak{k}$ – комплексная оболочка алгебры Ли $\mathfrak{g}$ группы Ли G. Тогда для присоединенного представления $\mathrm{ad} : \mathfrak{k} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{k})$ разложение в прямую сумму весовых подпространств (см. § 1 [2]) имеет вид: $\mathfrak{k} = V_0 \bigoplus\limits_{\alpha\in\Gamma} V_\alpha$. Из определения подпространства V_0 следует, что оно является абелевой, в частности, нильпотентной подалгеброй алгебры Ли $\mathfrak{k}$, совпадающей со своим нормализатором. Таким образом, V_0 является подалгеброй Картана. Для удобства будем обозначать V_0 через $\mathfrak{t}$. Подалгебра $\mathfrak{t}$ является *максимальной* абелевой подалгеброй алгебры Ли $\mathfrak{k}$, то есть такой, которая не содержится ни в какой большей абелевой подалгебре. Вследствие того, что связная компактная абелева группа Ли является тором (п. 2.20 [4]), вещественная форма $\mathfrak{t}(\mathbb{R})$ подалгебры Картана $\mathfrak{t}$, как максимальная абелева подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{g}$, при экспоненциальном отображении exp группы Ли G переходит в *максимальный тор* T группы Ли G, то есть такой тор, который является подгруппой группы Ли G и не содержится ни в какой ее большей подгруппе, являющейся тором. При таком построении тора T непосредственно получаем равенство $\mathfrak{t}(\mathbb{R}) = L(T)$, где $L(T)$ – касательное пространство тора в единице. Максимальные торы подробно рассматриваются в главе 4 [4]. В частности, в п. 4.23 [4] доказывается, что любые два максимальных тора T и T_1 сопряжены посредством некоторого внутреннего автоморфизма, то есть существует такой элемент $x \in G$, что $T_1 = xTx^{-1}$. Отсюда вытекает следующее замечание.

Замечание 2. Любая конструкция, кажущаяся зависимой от выбора максимального тора (подалгебры Картана), на самом деле с точностью до внутреннего автоморфизма группы Ли G (алгебры Ли $\mathfrak{g}$) не зависит от этого выбора.

Определение 2. Пусть подалгебре Картана $\mathfrak{t}$ соответствует максимальный тор T группы Ли G с касательным пространством $L(T) = \mathfrak{t}(\mathbb{R})$ в единице. Тогда *целочисленной решеткой* I в пространстве $L(T)$ называется множество $\exp\big|^{-1}_{L(T)}(e)$, где e – единица группы, $\exp\big|_{L(T)} : L(T) \to T$ – сужение экспоненциального отображения exp на пространство $L(T)$.

Из замечания 2 следует, что целочисленная решетка I определена однозначно для группы Ли G с точностью до внутреннего автоморфизма.

Используя свойства экспоненциального отображения exp группы Ли G, получаем равенство $\exp(L(T)) = T$, из которого следует, что сужение $\exp\big|_{L(T)}$ экспоненциального отображения на пространство $L(T)$ совпадает с каноническим отображением p тора T. Из свойств отображения p вытекает, что в пространстве $L(T)$ размерности l можно ввести базис $v_1, \ldots, v_l$, при котором $L(T) \cong \mathbb{R}^l$, $T \cong \mathbb{T}^l = \mathbb{R}^l/\mathbb{Z}^l$, и вектор x с координатами $(x_1, \ldots, x_l)$ в введенном базисе, где $x_i \in \mathbb{R}$, $1 \le i \le l$, при отображении p переходит в элемент $p(x)$ тора $\mathbb{T}^l$, где $p(x) = (x_1 \bmod 1, \ldots, x_l \bmod 1)$. Таким образом, целочисленная решетка I в базисе $v_1, \ldots, v_l$ совпадает с целочисленной решеткой $\mathbb{Z}^l$ пространства $\mathbb{R}^l$. Как следствие, целочисленная решетка I является *решеткой* с базисом $v_1, \ldots, v_l$, то есть свободной абелевой (аддитивной) подгруппой в пространстве $L(T)$, порожденной векторами $v_1, \ldots, v_l$. Из п. 6.33 [4] и п. 10 [3, с. 13] получаем

Предложение 4. *Целочисленная решетка I, отвечающая некоторому максимальному тору группы Ли G, с базисом $v_1, \ldots, v_l$ и подмножество $I^+ \subset I$ всех* *линейных комбинаций вида* $\sum\limits_{i=1}^{l} n_i v_i$, *где* $n_i \in \mathbb{Z}$ *и* $n_i \geq 0$ *при* $i = 1, \ldots, l$, *задают множества весов* $\Lambda(G)$ *и старших весов* $\Lambda^{+}(G)$ *группы Ли* G *соответственно следующими равенствами*

$$\Lambda(G) = \{\omega \in \mathfrak{t}(\mathbb{R})^* \mid \omega(v) \in \mathbb{Z}\ , \textit{ для всех } v \in I\}\,,$$

$$\Lambda^{+}(G) = \big\{\omega \in \mathfrak{t}(\mathbb{R})^* \mid \omega(v) \in \mathbb{Z} \textit{ и } \omega(v) \geq 0\ , \textit{ для всех } v \in I^{+}\big\}\,.$$

Корректность данного выше определения обосновывается замечанием 2, формулой (8) из [2] и инвариантностью скалярного произведения $(\cdot,\cdot)$ относительно внутренних автоморфизмов группы.

Из предложения 4 следует, что множество $\Lambda(G)$ является решеткой и что поиск множества $\Lambda^{+}(G)$ сводится к поиску решетки $\Lambda(G)$. Множество весов $\Lambda(G)$ называется также *характеристической решеткой* группы Ли G. Характеристическая решетка подробно рассматривается в [3] и в добавлении А.Л. Онищика в книге [4]. Приведем основные результаты о характеристической решетке $\Lambda(G)$ (см. [4]).

Определение 3. Пусть E – евклидово пространство. Наряду со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$ будем рассматривать в E функцию $\{\cdot,\cdot\}$, линейную лишь по первому аргументу и заданную формулой

$$\{\beta,\alpha\} = \frac{2\,(\beta,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}, \quad \text{где } \beta,\alpha \in E.$$

Системой корней в E называется пара (Γ, E) (кратко Γ), обладающая следующими свойствами:

1) Γ является конечным подмножеством E и $0 \notin \Gamma$;

2) если $\alpha \in \Gamma$, то $-\alpha \in \Gamma$, но $c\alpha \notin \Gamma$ для любых $c \in \mathbb{R}$, $c \neq \pm 1$;

3) если $\alpha \in \Gamma$ и $P_\alpha = \{\beta \in E \mid (\beta,\alpha) = 0\}$, то отражение φ_α в гиперплоскости P_α переводит Γ в себя;

4) $\{\beta,\alpha\} \in \mathbb{Z}$ для любых $\beta,\alpha \in \Gamma$.

Примером является описанная выше система корней $(\Gamma,\ \mathfrak{t}(\mathbb{R})^*)$ группы Ли G со скалярным произведением $(\cdot,\cdot) = k_{\mathfrak{t}(\mathbb{R})^*}$, индуцированным формой Киллинга.

Пусть (Γ, E) – система корней и $\alpha_1, \ldots, \alpha_l$ – ее простые корни, тогда система (Γ, E) задает две замкнутые подгруппы $\Lambda_0(\Gamma)$ и $\Lambda_1(\Gamma)$ группы E относительно операции сложения: $\Lambda_0(\Gamma)$ – подгруппа, порожденная системой Γ, то есть

$$\Lambda_0(\Gamma) = \Big\{\beta \in E \;\Big|\; \beta = \sum_{j=1}^{l} n_j \alpha_j, \text{ где } n_j \in \mathbb{Z}\Big\},$$

$\Lambda_1(\Gamma)$ – подгруппа, являющаяся дуальной к системе Γ относительно функции $\{\cdot,\cdot\}$:

$$\Lambda_1(\Gamma) = \{\beta \in E \mid \{\beta,\alpha_j\} \in \mathbb{Z}, \text{где } j = 1, \ldots, l\}\,.$$

Согласно свойству 4) определения 3 верно включение $\Lambda_0(\Gamma) \subseteq \Lambda_1(\Gamma)$. Из определения подгруппы $\Lambda_0(\Gamma)$ непосредственно следует, что $\Lambda_0(\Gamma)$ является решеткой с базисом, состоящим из простых корней. Простые корни компактной полупростой группы Ли G составляют базис в пространстве $\mathfrak{t}(\mathbb{R})^*$ (см. п. 12 [3, с. 15]). Поэтому в случае связной компактной полупростой группы Ли G из формулы (3) получаем, что $\Lambda_1(\Gamma) = \Lambda(\mathfrak{g})$ и $\Lambda_1(\Gamma)$ является решеткой с базисом, состоящим из фундаментальных весов $\varpi_1, \ldots, \varpi_l$.

Решетки $\Lambda_0(\Gamma)$, $\Lambda(G)$ и подгруппа $\Lambda_1(\Gamma)$ обладают важными свойствами (см. [4, с. 134]), представленными в следующем утверждении.

Предложение 5. *Пусть G – связная компактная группа Ли. Тогда решетка $\Lambda(G)$ связана с решеткой $\Lambda_0(\Gamma)$ и подгруппой $\Lambda_1(\Gamma)$ следующими соотношениями:*

$$\Lambda_0(\Gamma) \subseteq \Lambda(G) \subseteq \Lambda_1(\Gamma), \tag{7}$$

причем в этой цепочке аддитивных подгрупп группы $\mathfrak{t}(\mathbb{R})^*$ каждая предыдущая является подгруппой следующей, при этом

$$\Lambda_1(\Gamma)/\Lambda(G) \cong \pi_1(G), \quad \Lambda(G)/\Lambda_0(\Gamma) \cong C(G),$$

где $\pi_1(G)$ – фундаментальная группа, а $C(G)$ – центр группы Ли G

Утверждение о том, что характеристическая решетка $\Lambda(G)$ любой связной компактной группы Ли G с системой корней Γ удовлетворяет соотношению (7), можно обратить. Для более точной формулировки обратного утверждения введем понятие изоморфизма системы корней.

Определение 4. Пусть $(\Gamma_1,\ E_1)$ и $(\Gamma_2,\ E_2)$ – две системы корней. *Изоморфизмом* систем $(\Gamma_1,\ E_1)$ и $(\Gamma_2,\ E_2)$ называется линейный изоморфизм $\varphi : E_1 \to E_2$, отображающий Γ_1 в Γ_2 и удовлетворяющий условию $\{\varphi(\alpha), \varphi(\beta)\} = \{\alpha, \beta\}$, где $\alpha, \beta \in \Gamma_1$.

Основная теорема классификации связных компактных групп Ли формулируется следующим образом.

Теорема 3 [4, теорема 1 с. 134]. *Пусть G_1 и G_2 – связные компактные группы Ли, T_1 и T_2 – их максимальные торы, $E_1 = L(T_1)^*$, $E_2 = L(T_2)^*$. Для всякого изоморфизма $\varphi : E_1 \to E_2$ систем корней (Γ_1, E_1) и (Γ_2, E_2), удовлетворяющих условию: $\varphi(\Lambda(G_1)) = \Lambda(G_2)$, существует такой изоморфизм $\Phi : G_1 \to G_2$ групп Ли G_1 и G_2, переводящий T_1 в T_2, что $\Phi'|_{L(T)} = \varphi^{*-1}$.*

Далее, для любой системы корней (Γ, E) и любой решетки Λ максимального ранга в E, удовлетворяющей условию $\Lambda_0(\Gamma) \subseteq \Lambda \subseteq \Lambda_1(\Gamma)$, существуют связная компактная группа Ли G, максимальный тор $T \subset G$ и изоморфизм $\varphi : E \to L(T)^*$ систем корней Γ и $\Gamma(G)$, для которого $\varphi(\Lambda) = \Lambda(G)$.

Рассмотрим семейство связных компактных полупростых групп Ли с алгеброй Ли $\mathfrak{g}$. Вследствие теоремы 3 это семейство с точностью до изоморфизма групп Ли совпадает с семейством всех возможных решеток максимального ранга, удовлетворяющих соотношению (7). Таким образом, основную роль в классификации полупростых групп с заданной алгеброй Ли играет максимальная фундаментальная группа $\Lambda_1(\Gamma)/\Lambda_0(\Gamma)$. Приведем из добавления А.Л. Онищика в книге [4] все максимальные фундаментальные группы для простых неабелевых алгебр Ли:

Тип Γ	A_l	B_l, C_l, E_7	D_{2s}	D_{2s+1}	E_6	E_8, F_4, G_2
$\Lambda_1(\Gamma)/\Lambda_0(\Gamma)$	$\mathbb{Z}_l$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_4$	$\mathbb{Z}_3$	0

Из теоремы 3 и предложения 5 получаем

Следствие 4. *Пусть максимальная фундаментальная группа $\Lambda_1(\Gamma)/\Lambda_0(\Gamma)$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ имеет простой порядок. Тогда семейство неизоморфных связных компактных групп Ли с алгеброй Ли $\mathfrak{g}$ состоит из двух групп: односвязной группы Ли G_1 с центром $\Lambda_1(\Gamma)/\Lambda_0(\Gamma)$ и решеткой весов $\Lambda_1(\Gamma)$, совпадающей с решеткой весов алгебры Ли $\Lambda(\mathfrak{g})$, и группы Ли G_0 без центра с фундаментальной группой $\Lambda_1(\Gamma)/\Lambda_0(\Gamma)$ и решеткой весов $\Lambda_0(\Gamma)$.*

Замечание 3. Из таблицы максимальных фундаментальных групп, приведенной выше, получаем, что следствие 4 применимо к алгебрам Ли со следующими типами систем корней: сериям B_l и C_l, A_p, где p – простое число, и ко всем исключительным алгебрам Ли.

Вследствие того, что корни алгебры Ли являются весами присоединенного представления и старшинство веса определяется порядком, описанным, например, в п. 12 [3, с. 15], получаем, что старшим весом присоединенного представления ad комплексной оболочки простой алгебры Ли $\mathfrak{g}$ является максимальный по высоте (сумме компонент разложения на простые корни) корень, обозначаемый в книге [7] как $\widetilde{\alpha}$. На основании приведенных выше рассуждений и теорем 2, 3, а также следствия 3 и предложения 5 сформулируем правило вычисления спектров лапласианов всех связных компактных простых групп Ли G с фиксированной алгеброй Ли $\mathfrak{g}$, предполагая использование табл. I–IX [7] (в которых ρ обозначает вектор β).

Следствие 5. *Для вычисления спектров лапласианов всех связных компактных простых групп Ли с простой алгеброй Ли* $\mathfrak{g}$ *и биинвариантной римановой метрикой* ν *с условием* $\nu(e) = -\gamma k_{\mathrm{ad}}$ *нужно выполнить следующие действия:*

1) *вычислить выражение* $b := \langle\widetilde{\alpha}+\beta, \widetilde{\alpha}+\beta\rangle - \langle\beta,\beta\rangle$, *предполагая, что относительно скалярного произведения* $\langle\cdot,\cdot\rangle$ (*на* $\mathfrak{t}(\mathbb{R})$) *векторы* ε_i *из соответствующей таблицы книги* [7] *взаимно ортогональны и единичны, где* $\widetilde{\alpha}$ – *старший* (*максимальный*) *корень;*

2) *взять скалярное произведение* $(\cdot,\cdot) = \dfrac{1}{b}\langle\cdot,\cdot\rangle$;

3) *найти фундаментальные веса* $\varpi_1,\dots,\varpi_l$ *алгебры Ли* $\mathfrak{g}$ (*если* $\mathfrak{g}$ *имеет ранг* l) *по соответствующей таблице из* [7];

4) *для каждого старшего веса* $\Lambda \in \Lambda^+(\mathfrak{g})$, *то есть для каждого* $\Lambda = \sum\limits_{j=1}^{l}\Lambda_j\varpi_j$, *где* $\Lambda_j \in \mathbb{Z}$ *и* $\Lambda_j \geq 0$ *при* $j = 1,\dots,l$, *найти собственное число* $\lambda(\Lambda)$ *оператора Лапласа, отвечающее старшему весу* Λ, *по формуле* (4), *деленной на* γ, *и размерность* $d(\Lambda+\beta)$ *неприводимого комплексного представления комплексной оболочки алгебры Ли* $\mathfrak{g}$ *со старшим весом* Λ, *применяя формулу* (5);

5) *для каждой решетки* $\Lambda(G)$, *удовлетворяющей соотношению* $\Lambda_0(\Gamma) \subseteq \Lambda(G) \subseteq \Lambda_1(\Gamma)$, *где* $\Lambda_0(\Gamma)$ *и* $\Lambda_1(\Gamma)$ – *решетки, порожденные простыми корнями и фундаментальными весами, найденные в п.* 1) *и п.* 3) *соответственно,* G – *группа Ли с алгеброй Ли* $\mathfrak{g}$, *соответствующая характеристической решетке* $\Lambda(G)$, *выполнить следующие три пункта;*

6) *найти множество старших весов* $\Lambda^+(G) = \Lambda(G)\cap\Lambda^+(\mathfrak{g})$, *задав его через фундаментальные веса* $\varpi_1,\dots,\varpi_l$;

7) *для каждого старшего веса* $\Lambda \in \Lambda^+(G)$ *найти из п.* 4) *собственное число* $\lambda(\Lambda)$ *и размерность* $d(\Lambda+\beta)$ *неприводимого комплексного представления, отвечающих весу* Λ;

8) *найти кратность каждого собственного значения* λ, *применяя формулу* (6), *получив таким образом спектр* $\mathrm{Spec}\,(G(\Lambda),\nu)$ *группы Ли* G, *отвечающей характеристической решетке* $\Lambda(G)$.

Таким образом, получаем все спектры $\mathrm{Spec}\,(G,\nu)$ *групп Ли* G *с алгеброй Ли* $\mathfrak{g}$ *и метрикой* ν.

Замечание 4. В формулах (5) и (6), применяемых в п. 4) и п. 8) следствия 5, вместо $(\cdot,\cdot)$ можно использовать любое пропорциональное ему скалярное произведение, в частности $\langle\cdot,\cdot\rangle$ из п. 1) следствия 5.

Ниже, используя следствие 5, найдем спектры лапласиана всех связных компактных простых групп Ли ранга один: $\mathbf{SU(2)}$, $\mathbf{SO(3)}$ и ранга два: $\mathbf{SU(3)}$, $\mathbf{G_2}$, $\mathbf{Spin(5)}$, $\mathbf{SU(3)}/C(\mathbf{SU(3)})$, $\mathbf{SO(5)}$. В случае ранга два будем опираться на результаты вычислений из статьи [2] для односвязных групп Ли.

2. Вычисление спектра лапласиана групп $\mathbf{SU(2)}$ и $\mathbf{SO(3)}$

Группам Ли $\mathbf{SU(2)}$ и $\mathbf{SO(3)}$ соответствует алгебра Ли $\mathbf{su(2)}$ с системой корней A_1. Применяем табл. I из книги [7]. Единственным простым корнем является форма $\alpha_1 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$, при этом $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 0$. Из последнего равенства получаем $\alpha_1 = \widetilde{\alpha} = 2\varepsilon_1$ и $\beta = \dfrac{1}{2}\alpha_1 = \varepsilon_1$.

1) $b = \langle \widetilde{\alpha} + \beta, \widetilde{\alpha} + \beta\rangle - \langle \beta, \beta\rangle = 8\,\langle \beta, \beta\rangle = 8$.

2) $(\cdot,\cdot) = \dfrac{1}{8}\,\langle \cdot,\cdot\rangle$.

3) Единственным фундаментальным весом является форма $\varpi_1 = \dfrac{1}{2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) = \varepsilon_1$.

4) Пусть $\Lambda = \Lambda_1\varpi_1 \in \Lambda^+(\mathbf{su(2)})$, где $\Lambda_1 \in \mathbb{Z}$ и $\Lambda_1 \geq 0$; тогда $\Lambda + \beta = (\Lambda_1 + 1)\varpi_1 = \nu\varpi_1$, где $\nu = \Lambda_1 + 1$ и $\nu \in \mathbb{N}$. Найдем собственное число $\lambda(\Lambda)$, отвечающее старшему весу Λ, разделив на γ правую часть формулы (4):

$$\lambda(\Lambda) = -\frac{1}{\gamma}\left[(\Lambda + \beta, \Lambda + \beta) - (\beta, \beta)\right] = -\frac{1}{\gamma}\left[(\nu\varpi_1, \nu\varpi_1) - (\varpi_1, \varpi_1)\right] = -\frac{1}{8\gamma}(\nu^2 - 1).$$

Теперь вычислим размерность $d(\Lambda+\beta)$ неприводимого комплексного представления, отвечающего старшему весу Λ, по формуле (5):

$$d(\Lambda + \beta) = \frac{(\nu\varpi_1, 2\varpi_1)}{(\varpi_1, 2\varpi_1)} = \nu.$$

5) Указанные выше простой корень α_1 и фундаментальный вес ϖ_1 алгебры Ли $\mathbf{su(2)}$ задают соответственно решетки $\Lambda_0(A_1)$ и $\Lambda_1(A_1)$ следующим образом:

$$\Lambda_0(A_1) = \{\Psi_1\alpha_1 \mid \Psi_1 \in \mathbb{Z}\} = \{2\Psi_1\varpi_1 \mid \Psi_1 \in \mathbb{Z}\}, \tag{8}$$

$$\Lambda_1(A_1) = \{\Lambda_1\varpi_1 \mid \Lambda_1 \in \mathbb{Z}\}. \tag{9}$$

Получаем, что максимальная фундаментальная группа алгебры Ли $\mathbf{su(2)}$ равна $\Lambda_1(A_1)/\Lambda_0(A_1) \cong \mathbb{Z}_2$, то есть имеет простой порядок, поэтому решеток $\Lambda(G)$, удовлетворяющих соотношению (7), существует всего две: $\Lambda_0(A_1)$ и $\Lambda_1(A_1)$. На основании предложения 5 решетке $\Lambda_1(A_1)$ соответствует односвязная группа Ли с алгеброй Ли $\mathbf{su(2)}$, то есть группа Ли $\mathbf{SU(2)}$, а решетке $\Lambda_0(A_1)$ – неодносвязная группа Ли с алгеброй Ли $\mathbf{su(2)}$, то есть группа Ли $\mathbf{SO(3)}$.

а) Приведем формулы, задающие спектр лапласиана группы Ли $\mathbf{SU(2)}$.

6а) Из формулы (9) получаем множество старших весов группы Ли $\mathbf{SU(2)}$

$$\Lambda^+(\mathbf{SU(2)}) = \{\Lambda_1\varpi_1 \mid \Lambda_1 \in \mathbb{Z} \text{ и } \Lambda_1 \geq 0\}.$$

7а) Пусть $\Lambda = \Lambda_1\varpi_1 \in \Lambda^+(\mathbf{SU(2)})$, тогда из п. 4) получаем:

$$\lambda(\Lambda) = -\frac{1}{8\gamma}(\nu^2 - 1), \tag{10}$$

$$d(\Lambda + \beta) = \nu, \tag{11}$$

где $\nu = \Lambda_1 + 1$, $\nu \in \mathbb{N}$.

8а) Применяя формулу (6) и результаты предыдущего пункта, получаем кратность собственного значения λ:

$$\sigma(\lambda) = \sum_{\substack{\nu^2 = 1 - 8\gamma\lambda;\\ \nu \in \mathbb{N}}} \nu^2 = 1 - 8\gamma\lambda.$$

Наименьшее по модулю ненулевое собственное значение лапласиана равно $-\dfrac{3}{8\gamma}$ и соответствует неприводимому комплексному представлению группы Ли $\mathbf{SU(2)}$ со старшим весом ϖ_1. Размерность этого представления равна 2. Кратность собственного значения $-\dfrac{3}{8\gamma}$ равна $1+\dfrac{24\gamma}{8\gamma}=4$.

б) Приведем формулы, задающие спектр лапласиана группы Ли $\mathbf{SO(3)}$.

6б) Из формулы (8) получаем множество старших весов группы Ли $\mathbf{SO(3)}$

$$\Lambda^+(\mathbf{SO(3)}) = \{2\Psi_1\varpi_1 \mid \Psi_1 \in \mathbb{Z} \text{ и } \Psi_1 \geq 0\}.$$

7б) Пусть $\Lambda = 2\Psi_1\varpi_1 \in \Lambda^+(\mathbf{SU(2)})$, тогда из п. 4) собственное число $\lambda(\Lambda)$ и размерность $d(\Lambda+\beta)$ вычисляются по формулам (10) и (11) соответственно, где $\nu = 2\Psi_1+1$, $\nu\in\mathbb{N}$ и $\nu\equiv 1(\mathrm{mod}\ 2)$.

8б) Применяя формулу (6) и результаты предыдущего пункта, получаем кратность собственного значения λ:

$$\sigma(\lambda) = \sum_{\substack{\nu^2=1-8\gamma\lambda;\\ \nu\in\mathbb{N},\ \nu\equiv 1(\mathrm{mod}\ 2)}} \nu^2 = 1-8\gamma\lambda.$$

Наименьшее по модулю ненулевое собственное значение лапласиана равно $-\dfrac{1}{\gamma}$ и соответствует присоединенному представлению группы Ли $\mathbf{SO(3)}$ со старшим весом $2\varpi_1$. Размерность этого представления равна 3. Кратность собственного значения $-\dfrac{1}{\gamma}$ равна $1+\dfrac{8\gamma}{\gamma}=9$.

3. Вычисление спектра лапласиана групп $\mathbf{SU(3)}$ и $\mathbf{SU(3)}/C(\mathbf{SU(3)})$

Группам Ли $\mathbf{SU(3)}$ и $\mathbf{SU(3)}/C(\mathbf{SU(3)})$ соответствует алгебра Ли $\mathbf{su(3)}$ с системой корней A_2. Применяем табл. I из книги [7]. Простыми корнями являются формы $\{\alpha_1=\varepsilon_1-\varepsilon_2, \alpha_2=\varepsilon_2-\varepsilon_3\}$, при этом $\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3=0$.

Приведем результаты вычислений в первых четырех пунктах, взятые из § 2 [2].

1) $b=6$.

2) $(\cdot,\cdot) = \dfrac{1}{6}\langle\cdot,\cdot\rangle$.

3) Фундаментальные веса имеют вид: $\{\varpi_1 = \dfrac{1}{3}(2\varepsilon_1-\varepsilon_2-\varepsilon_3), \varpi_2 = \dfrac{1}{3}(\varepsilon_1+\varepsilon_2 - 2\varepsilon_3)\}$.

4) Пусть $\Lambda = \Lambda_1\varpi_1+\Lambda_2\varpi_2 \in \Lambda^+(\mathbf{su(3)})$, где $\Lambda_1,\ \Lambda_2\in\mathbb{Z}$ и $\Lambda_1,\ \Lambda_2\geq 0$, тогда $\Lambda+\beta = \nu_1\varpi_1+\nu_2\varpi_2$, где $\nu_1=\Lambda_1+1$, $\nu_2=\Lambda_2+1$ и $\nu_1,\ \nu_2\in\mathbb{N}$. Собственное число $\lambda(\Lambda)$, отвечающее старшему весу Λ, равно

$$\lambda(\Lambda) = -\frac{1}{9\gamma}\Big[(\nu_1^2+\nu_1\nu_2+\nu_2^2)-3\Big]. \tag{12}$$

Размерность $d(\Lambda+\beta)$ неприводимого комплексного представления, отвечающего старшему весу Λ, равна

$$d(\Lambda+\beta) = \frac{1}{2!}\nu_1\nu_2(\nu_1+\nu_2). \tag{13}$$

5) Указанные выше простые корни и фундаментальные веса алгебры Ли $\mathbf{su(3)}$ задают соответственно решетки $\Lambda_0(A_2)$ и $\Lambda_1(A_2)$, определенные следующим образом:

$$\Lambda_0(A_2) = \{\Psi_1\alpha_1+\Psi_2\alpha_2 \mid \Psi_1,\Psi_2\in\mathbb{Z}\},$$

$$\Lambda_1(A_2) = \{\Lambda_1\varpi_1 + \Lambda_2\varpi_2 \mid \Lambda_1, \Lambda_2 \in \mathbb{Z}\}. \tag{14}$$

После замены переменных $\{\Psi_1 = 2\Omega_1 + \Omega_2,\ \Psi_2 = \Omega_1 + \Omega_2\}$ и выражения корней через фундаментальные веса $\{\alpha_1 = 2\varpi_1 - \varpi_2, \alpha_2 = 2\varpi_2 - \varpi_1\}$ решетка $\Lambda_0(A_2)$ приобретает следующий вид:

$$\Lambda_0(A_2) = \{3\Omega_1\varpi_1 + \Omega_2(\varpi_1 + \varpi_2) \mid \Omega_1, \Omega_2 \in \mathbb{Z}\}. \tag{15}$$

Определим решетку $\Lambda_1(A_2)$ в базисе $\{\varpi_1, \varpi_1 + \varpi_2\}$ посредством замены переменных $\{\Lambda_1 = \Omega_1 + \Omega_2,\ \Lambda_2 = \Omega_2\}$:

$$\Lambda_1(A_2) = \{\Omega_1\varpi_1 + \Omega_2(\varpi_1 + \varpi_2) \mid \Omega_1, \Omega_2 \in \mathbb{Z}\}. \tag{16}$$

Из формул (15) и (16) следует, что максимальная фундаментальная группа алгебры Ли $\mathbf{su(3)}$ равна $\Lambda_1(A_2)/\Lambda_0(A_2) \cong \mathbb{Z}_3$, то есть имеет простой порядок, поэтому решеток $\Lambda(G)$, удовлетворяющих соотношению (7), существует всего две: $\Lambda_0(A_2)$ и $\Lambda_1(A_2)$. На основании предложения 5 решетке $\Lambda_1(A_2)$ соответствует односвязная группа Ли с алгеброй Ли $\mathbf{su(3)}$, то есть группа Ли $\mathbf{SU(3)}$, а решетке $\Lambda_0(A_1)$ – группа Ли с нулевым центром и алгеброй Ли $\mathbf{su(3)}$, то есть группа Ли $\mathbf{SU(3)}/C(\mathbf{SU(3)})$.

а) Приведем формулы, задающие спектр лапласиана группы Ли $\mathbf{SU(3)}$.

6а) Из формулы (14) получаем множество старших весов группы Ли $\mathbf{SU(3)}$

$$\Lambda^+(\mathbf{SU(3)}) = \{\Lambda_1\varpi_1 + \Lambda_2\varpi_2 \mid \Lambda_1, \Lambda_2 \in \mathbb{Z} \text{ и } \Lambda_1 \geq 0, \Lambda_2 \geq 0\}.$$

7а) Пусть $\Lambda = \Lambda_1\varpi_1 + \Lambda_2\varpi_2 \in \Lambda^+(\mathbf{SU(3)})$, тогда из п. 4) собственное число $\lambda(\Lambda)$ и размерность $d(\Lambda + \beta)$ вычисляются по формулам (12) и (13) соответственно, где $\nu_1 = \Lambda_1 + 1,\ \nu_2 = \Lambda_2 + 1,\ \nu_1, \nu_2 \in \mathbb{N}$.

8а) Применяя формулу (6) и результаты предыдущего пункта, получаем кратность собственного значения λ:

$$\sigma(\lambda) = \sum_{\substack{\nu^2+\nu\eta+\eta^2=3-9\gamma\lambda;\\ \nu,\eta\in\mathbb{N}}} \frac{1}{(2!)^2}\big[\nu\eta(\nu+\eta)\big]^2.$$

В § 2 статьи [2] при подсчете наименьшего по модулю ненулевого собственного значения лапласиана была допущена ошибка, оно равно $-\dfrac{4}{9\gamma}$ и соответствует неприводимым комплексным представлениям группы Ли $\mathbf{SU(3)}$ со старшими весами ϖ_1 и ϖ_2. Размерности этих представлений равны 3. Следовательно, кратность собственного значения $-\dfrac{4}{9\gamma}$ равна $3^2 + 3^2 = 18$.

б) Приведем формулы, задающие спектр лапласиана группы Ли $\mathbf{SU(3)}/C(\mathbf{SU(3)})$.

6б) Из формулы (15) получаем множество старших весов рассматриваемой группы Ли

$$\Lambda^+(\mathbf{SU(3)}/C(\mathbf{SU(3)})) = \{(3\Omega_1 + \Omega_2)\varpi_1 + \Omega_2\varpi_2 \mid \Omega_1, \Omega_2 \in \mathbb{Z} \text{ и } \Omega_1 \geq 0, \Omega_2 \geq 0\}.$$

7б) Пусть $\Lambda = (3\Omega_1 + \Omega_2)\varpi_1 + \Omega_2\varpi_2 \in \Lambda^+(\mathbf{SU(3)}/C(\mathbf{SU(3)}))$, тогда из п. 4) собственное число $\lambda(\Lambda)$ и размерность $d(\Lambda + \beta)$ вычисляются по формулам (12) и (13) соответственно, где $\nu_1 = 3\Omega_1 + \Omega_2 + 1,\ \nu_2 = \Omega_2 + 1,\ \nu_1, \nu_2 \in \mathbb{N},\ \nu_1 \geq \nu_2$ и $\nu_1 - \nu_2 \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 3)$.

8б) Применяя формулу (6) и результаты предыдущего пункта, получаем кратность собственного значения λ:

$$\sigma(\lambda) = \sum_{\substack{\nu^2+\nu\eta+\eta^2=3-9\gamma\lambda;\\ \nu,\eta\in\mathbb{N},\,\nu\geq\eta,\,\nu-\eta\equiv 0(\mathrm{mod}\ 3)}} \frac{1}{(2!)^2}\big[\nu\eta(\nu+\eta)\big]^2. \tag{17}$$

Сделав замену переменных $\{\nu = \xi + 2\psi,\ \eta = \xi - \psi\}$, получаем:

$$\sigma(\lambda) = \sum_{\substack{\xi^2+\xi\psi+\psi^2=1-3\gamma\lambda;\\ \xi\in\mathbb{N},\,\psi\in\mathbb{N}\cup\{0\},\,\xi>\psi}} \frac{1}{(2!)^2}\big[(\xi+2\psi)(\xi-\psi)(2\xi+\psi)\big]^2. \tag{18}$$

Нетрудно проверить, что несмотря на то что определитель матрицы замены переменных ν,η на переменные ξ,ψ равен -3, условия на ν,η в формуле (17) равносильны условиям на ξ, ψ в формуле (18).

Наименьшее по модулю ненулевое собственное значение лапласиана равно $-\dfrac{1}{\gamma}$ и соответствует присоединенному представлению группы Ли $\mathbf{SU(3)}/C(\mathbf{SU(3)})$ со старшим весом $\varpi_1 + \varpi_2$. Размерность этого представления равна 8. Следовательно, кратность собственного значения $-\dfrac{1}{\gamma}$ равна $8^2 = 64$.

4. Вычисление спектра лапласиана группы $\mathbf{G_2}$

Группе Ли $\mathbf{G_2}$ соответствует алгебра Ли $\mathfrak{g}_2$ с системой корней G_2. Применяем табл. IX из книги [7]. Простыми корнями являются формы $\{\alpha_1 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2, \alpha_2 = -2\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3\}$, при этом $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 0$.

Приведем результаты вычислений в первых четырех пунктах, взятые из § 4 [2].

1) $b = 24$.

2) $(\cdot,\cdot) = \dfrac{1}{24}\langle\cdot,\cdot\rangle$.

3) Фундаментальные веса имеют вид: $\{\varpi_1 = -\varepsilon_2 + \varepsilon_3, \varpi_2 = -\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + 2\varepsilon_3\}$.

4) Пусть $\Lambda = \Lambda_1\varpi_1 + \Lambda_2\varpi_2 \in \Lambda^+(\mathfrak{g}_2)$, где $\Lambda_1,\Lambda_2 \in \mathbb{Z}$ и $\Lambda_1,\Lambda_2 \geq 0$. Вместо ϖ_2 будем использовать $\omega = \varpi_2 - \varpi_1$, тогда $\Lambda + \beta = \nu_1\varpi_1 + \nu_2\omega$, где $\nu_1 = \Lambda_1 + \Lambda_2 + 2$, $\nu_2 = \Lambda_2 + 1$, $\nu_1, \nu_2 \in \mathbb{N}$, $\nu_1 > \nu_2$. Собственное число $\lambda(\Lambda)$, отвечающее старшему весу Λ, равно

$$\lambda(\Lambda) = -\frac{1}{12\gamma}\Big[(\nu_1^2 + \nu_1\nu_2 + \nu_2^2) - 7\Big]. \tag{19}$$

Размерность $d(\Lambda+\beta)$ неприводимого комплексного представления, отвечающего старшему весу Λ, равна

$$d(\Lambda+\beta) = \frac{1}{5!}\nu_1\nu_2(\nu_1+\nu_2)(\nu_1-\nu_2)(\nu_1+2\nu_2)(2\nu_1+\nu_2). \tag{20}$$

5) Указанные выше простые корни и фундаментальные веса алгебры Ли $\mathfrak{g}_2$ задают решетки $\Lambda_0(G_2)$ и $\Lambda_1(G_2)$ соответственно, выразив корни через фундаментальные веса $\{\alpha_1 = 2\varpi_1 - \varpi_2,\ \alpha_2 = 2\varpi_2 - 3\varpi_1\}$, получим

$$\Lambda_0(G_2) = \{\,(2\Psi_1 - \Psi_2)\varpi_1 + (2\Psi_2 - 3\Psi_1)\varpi_2 \mid \Psi_1,\Psi_2 \in \mathbb{Z}\},$$

$$\Lambda_1(G_2) = \{\Lambda_1\varpi_1 + \Lambda_2\varpi_2 \mid \Lambda_1,\Lambda_2 \in \mathbb{Z}\}. \tag{21}$$

Пусть θ – это линейное преобразование $\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, заданное следующим образом: $(\Psi_1,\Psi_2) \to (2\Psi_1 - \Psi_2, 2\Psi_2 - 3\Psi_1)$. Тогда вследствие того, что θ задается целочисленной матрицей с единичным определителем, θ является изоморфизмом решетки $\mathbb{Z}^2$ на себя. Поэтому $\Lambda_0(G) = \Lambda_1(G_2)$, решетка $\Lambda(G)$, удовлетворяющая соотношению (7), единственна и совпадает с $\Lambda_1(G_2)$. Из предложения 5 следует, что существует единственная группа Ли $G = \mathbf{G_2}$ с алгеброй Ли $\mathfrak{g}_2$, причем она односвязна.

Таким образом, нужно вычислить спектр только для группы $\mathbf{G_2}$ с характеристической решеткой $\Lambda_1(G_2)$.

6) Из формулы (21) получаем множество старших весов группы Ли $\mathbf{G_2}$

$$\Lambda^+(\mathbf{G_2}) = \{\Lambda_1\varpi_1 + \Lambda_2\varpi_2 \mid \Lambda_1, \Lambda_2 \in \mathbb{Z} \text{ и } \Lambda_1 \geq 0, \Lambda_2 \geq 0\,\}.$$

7) Пусть $\Lambda = \Lambda_1\varpi_1 + \Lambda_2\varpi_2 \in \Lambda^+(\mathbf{G_2})$, тогда из п. 4) собственное число $\lambda(\Lambda)$ и размерность $d(\Lambda+\beta)$ вычисляются по формулам (19) и (20) соответственно, где $\nu_1 = \Lambda_1 + \Lambda_2 + 2$, $\nu_2 = \Lambda_2 + 1$, $\nu_1, \nu_2 \in \mathbb{N}$, $\nu_1 > \nu_2$.

8) Применяя формулу (6) и результаты предыдущего пункта, получаем кратность собственного значения λ:

$$\sigma(\lambda) = \frac{1}{(5!)^2} \sum_{\substack{\nu^2+\nu\eta+\eta^2=7-12\gamma\lambda;\\ \nu,\eta\in\mathbb{N},\eta>\nu}} \big[\nu\eta(\nu+\eta)(\eta-\nu)(\nu+2\eta)(2\nu+\eta)\big]^2.$$

Наименьшее по модулю ненулевое собственное значение лапласиана равно $-\dfrac{1}{2\gamma}$ и соответствует неприводимому комплексному представлению группы Ли $\mathbf{G_2}$ со старшим весом ϖ_1. Размерность этого представления равна 7. Следовательно, кратность собственного значения $-\dfrac{1}{2\gamma}$ равна $7^2 = 49$.

5. Вычисление спектра лапласиана групп $\mathbf{Spin(5)}$ и $\mathbf{SO(5)}$

Группам Ли $\mathbf{Spin(5)}$ и $\mathbf{SO(5)}$ соответствует алгебра Ли $\mathbf{so(5)}$ с системой корней B_2. Применяем табл. II из книги [7]. Простыми корнями являются формы $\{\alpha_1 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2, \alpha_2 = \varepsilon_2\}$.

Приведем результаты вычислений в первых четырех пунктах, взятые из § 3 [2].

1) $b = 6$.

2) $(\cdot,\cdot) = \dfrac{1}{6}\langle\cdot,\cdot\rangle$.

3) Фундаментальные веса имеют вид: $\{\varpi_1 = \varepsilon_1, \varpi_2 = \dfrac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\}$.

4) Пусть $\Lambda = \Lambda_1\varpi_1 + \Lambda_2\varpi_2 \in \Lambda^+(\mathbf{so(5)})$, где $\Lambda_1, \Lambda_2 \in \mathbb{Z}$ и $\Lambda_1, \Lambda_2 \geq 0$. Вместо ϖ_1 будем использовать $\omega = \varpi_1 - \varpi_2$, тогда $\Lambda + \beta = \nu_1\omega + \nu_2\varpi_2$, где $\nu_1 = \Lambda_1 + 1$, $\nu_2 = \Lambda_1 + \Lambda_2 + 2$, $\nu_1, \nu_2 \in \mathbb{N}$, $\nu_2 > \nu_1$. Собственное число $\lambda(\Lambda)$, отвечающее старшему весу Λ, равно

$$\lambda(\Lambda) = -\frac{1}{12\gamma}(\nu_1^2 + \nu_2^2 - 5). \tag{22}$$

Размерность $d(\Lambda+\beta)$ неприводимого комплексного представления, отвечающего старшему весу Λ, равна

$$d(\Lambda+\beta) = \frac{1}{3!}\nu_1\nu_2(\nu_2 - \nu_1)(\nu_1 + \nu_2). \tag{23}$$

5) Указанные выше простые корни и фундаментальные веса алгебры Ли $\mathbf{so(5)}$ задают решетки $\Lambda_0(B_2)$ и $\Lambda_1(B_2)$ соответственно следующим образом:

$$\Lambda_0(B_2) = \{\Psi_1\alpha_1 + \Psi_2\alpha_2 \mid \Psi_1, \Psi_2 \in \mathbb{Z}\}, \quad \Lambda_1(B_2) = \{\Lambda_1\varpi_1 + \Lambda_2\varpi_2 \mid \Lambda_1, \Lambda_2 \in \mathbb{Z}\}. \tag{24}$$

После замены переменных $\{\Psi_1 = \Omega_1 + \Omega_2,\ \Psi_2 = \Omega_1 + 2\Omega_2\}$ и выражения корней через фундаментальные веса $\{\alpha_1 = 2\varpi_1 - 2\varpi_2,\ \alpha_2 = 2\varpi_2 - \varpi_1\}$ решетка $\Lambda_0(B_2)$ приобретает следующий вид:

$$\Lambda_0(B_2) = \{\Omega_1\varpi_1 + 2\Omega_2\varpi_2 \mid \Omega_1, \Omega_2 \in \mathbb{Z}\}. \tag{25}$$

Из формул (24) и (25) следует, что максимальная фундаментальная группа алгебры Ли $\mathbf{so(5)}$ равна $\Lambda_1(B_2)/\Lambda_0(B_2) \cong \mathbb{Z}_2$, то есть имеет простой порядок, поэтому решеток $\Lambda(G)$, удовлетворяющих соотношению (7), существует всего две: $\Lambda_0(B_2)$ и $\Lambda_1(B_2)$. На основании предложения 5 решетке $\Lambda_1(B_2)$ соответствует односвязная группа Ли с алгеброй Ли $\mathbf{so(5)}$, то есть группа Ли $\mathbf{Spin(5)}$, а решетке $\Lambda_0(B_2)$ – неодносвязная группа Ли с алгеброй Ли $\mathbf{so(5)}$, то есть группа Ли $\mathbf{SO(5)}$.

а) Приведем формулы, задающие спектр лапласиана группы Ли $\mathbf{Spin(5)}$.

6а) Из формулы (24) получаем множество старших весов группы Ли $\mathbf{Spin(5)}$

$$\Lambda^+(\mathbf{Spin(5)}) = \{\Lambda_1\varpi_1 + \Lambda_2\varpi_2 \mid \Lambda_1, \Lambda_2 \in \mathbb{Z} \text{ и } \Lambda_1 \geq 0, \Lambda_2 \geq 0\}.$$

7а) Пусть $\Lambda = \Lambda_1\varpi_1 + \Lambda_2\varpi_2 \in \Lambda^+(\mathbf{Spin(5)})$, тогда из п. 4) собственное число $\lambda(\Lambda)$ и размерность $d(\Lambda+\beta)$ вычисляются по формулам (22) и (23) соответственно, где $\nu_1 = \Lambda_1 + 1,\ \nu_2 = \Lambda_1 + \Lambda_2 + 2,\ \nu_1, \nu_2 \in \mathbb{N}$ и $\nu_2 > \nu_1$.

8а) Применяя формулу (6) и результаты предыдущего пункта, получаем кратность собственного значения λ:

$$\sigma(\lambda) = \frac{1}{(3!)^2} \sum_{\substack{\xi^2+\eta^2=5-12\gamma\lambda;\\ \xi,\eta\in\mathbb{N},\ \xi>\eta}} \big[\xi\eta(\xi-\eta)(\xi+\eta)\big]^2.$$

Наименьшее по модулю ненулевое собственное значение лапласиана равно $-\dfrac{5}{12\gamma}$ и соответствует неприводимому комплексному представлению группы Ли $\mathbf{Spin(5)}$ со старшим весом ϖ_2. Размерность этого представления равны 4. Следовательно, кратность собственного значения $-\dfrac{5}{12\gamma}$ равна $4^2 = 16$.

б) Приведем формулы, задающие спектр лапласиана группы Ли $\mathbf{SO(5)}$.

6б) Из формулы (25) получаем множество старших весов группы Ли $\mathbf{SO(5)}$

$$\Lambda^+(\mathbf{SO(5)}) = \{\Omega_1\varpi_1 + 2\Omega_2\varpi_2 \mid \Omega_1, \Omega_2 \in \mathbb{Z} \text{ и } \Omega_1 \geq 0, \Omega_2 \geq 0\}.$$

7б) Пусть $\Lambda = \Omega_1\varpi_1 + 2\Omega_2\varpi_2 \in \Lambda^+(\mathbf{SO(5)})$, тогда из п. 4) собственное число $\lambda(\Lambda)$ и размерность $d(\Lambda+\beta)$ вычисляются по формулам (22) и (23) соответственно, где $\nu_1 = \Omega_1 + 1,\ \nu_2 = \Omega_1 + 2\Omega_2 + 2,\ \nu_1, \nu_2 \in \mathbb{N},\ \nu_2 > \nu_1$ и $\nu_2 - \nu_1 \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 2)$.

8б) Применяя формулу (6) и результаты предыдущего пункта, получаем кратность собственного значения λ:

$$\sigma(\lambda) = \frac{1}{(3!)^2} \sum_{\substack{\xi^2+\eta^2=5-12\gamma\lambda;\\ \xi,\eta\in\mathbb{N},\ \xi>\eta,\ \xi-\eta\equiv 1(\mathrm{mod}\ 2)}} \big[\xi\eta(\xi-\eta)(\xi+\eta)\big]^2. \tag{26}$$

Наименьшее по модулю ненулевое собственное значение лапласиана равно $-\dfrac{2}{3\gamma}$ и соответствует неприводимому комплексному представлению группы Ли $\mathbf{SO(5)}$ со старшим весом ϖ_1. Размерность этого представления равна 5. Следовательно, кратность собственного значения $-\dfrac{2}{3\gamma}$ равна $5^2 = 25$.

Замечание 5. Может показаться, что задание спектра лапласиана посредством следствия 5 полностью решает задачу о поиске спектра лапласиана, что имело место, например, в § 2 в случае групп Ли $\mathbf{SU(2)}$ и $\mathbf{SO(3)}$. Более глубокий анализ показывает, что в остальных случаях это не так (подробнее см. § 6 [2]). Некоторые вопросы, такие, как является ли указанное число собственным значением лапласиана и сколько старших весов отвечают одному и тому же собственному значению лапласиана, удалось решить для односвязных простых групп Ли ранга два в статье [2] с помощью теории бинарных квадратичных форм с целыми коэффициентами (и натуральными аргументами) и теории чисел. Тем же способом это можно сделать в случае неодносвязной группы Ли $\mathbf{SU(3)}/C(\mathbf{SU(3)})$, пользуясь формулой (18). В случае неодносвязной группы Ли $\mathbf{SO(5)}$ ответы на эти вопросы получить существенно сложнее из-за дополнительного ограничения на аргументы канонической бинарной квадратичной формы $\xi^2+\eta^2$ в формуле (26), имеющего вид нетривиального сравнения $\xi-\eta\equiv 1(\mathrm{mod}\ 2)$.

Автор выражает благодарность научному руководителю, профессору Валерию Николаевичу Берестовскому за внимание и ценные замечания при написании настоящей статьи.

Summary

V.M. Svirkin. The Laplace Operator Spectrum on Connected Compact Simple Rank One and Two Lie Groups.

In the paper we suggest an algorithm for calculation of the Laplace operator spectrum for real-valued and complex-valued functions defined on a connected compact simple Lie group with a bi-invariant Riemannian metric. By means of the algorithm an explicit calculation of the spectrum is given for all connected compact simple Lie groups of rank one and two.

Key words: Laplace operator, spectrum, Lie group representation, highest weight, Killing form.

Литература

1. *Берестовский В.Н., Свиркин В.М.* Оператор Лапласа на однородных нормальных римановых многообразиях // Матем. труды. – 2009. – Т. 12, № 2. – С. 3–40.
2. *Берестовский В.Н., Свиркин В.М.* Спектр оператора Лапласа на компактных односвязных простых группах Ли ранга два // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2009. – Т. 151, № 4. – С. 15–35.
3. *Дынкин Е.Б., Онищик А.Л.* Компактные группы Ли в целом // Усп. матем. наук. – 1955. – Т. 10, № 4(66) – С. 3–74.
4. *Адамс Дж.* Лекции по группам Ли. – М.: Наука, 1979. – 144 с.
5. *Понтрягин Л.С.* Непрерывные группы. – М.: Наука, 1973. – 520 с.
6. *Бурбаки Н.* Группы и алгебры Ли. Главы I–III. – М.: Мир, 1976. – 496 с.
7. *Бурбаки Н.* Группы и алгебры Ли. Главы IV–VI. – М.: Мир, 1972. – 334 с.
8. *Cartan E.* Les groupes projectifs qui ne laissent invariante aucune multiplicity plane // Bull. Soc. Math. – 1913. – V. 41 – P. 53–94.

Поступила в редакцию
25.01.10

Свиркин Виктор Михайлович – аспирант Омского филиала Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН.

E-mail: *v_ svirkin@mail.ru*