УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ КАЗАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
Том 152, кн. 1 Физико-математические науки *2010*

УДК 519.958

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ОБ ИЗГИБНЫХ И ПОПЕРЕЧНО-СДВИГОВЫХ ФОРМАХ ПОТЕРИ УСТОЙЧИВОСТИ И СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ОРТОТРОПНОЙ ПЛАСТИНЫ С НЕЗАКРЕПЛЕННЫМИ КРАЯМИ

В.Н. Паймушин, Т.В. Полякова

Аннотация

Рассматриваются линеаризованные задачи об упругой устойчивости ортотропной прямоугольной пластины с незакрепленными краями, которая находится под действием погонных сил неизменных направлений, вызывающих в пластине или одностороннее и двустороннее сжатие, или чистый сдвиг. Для постановки задач используются известные уравнения уточненной теории пластин типа Тимошенко, учитывающей поперечные сдвиги. На базе двойных тригонометрических базисных функций построены такие аналитические решения указанных задач, которые удовлетворяют всем статическим граничным условиям. В зависимости от структуры построенных решений для удовлетворения уравнениям возмущенного равновесия пластины составляются и соответствующие уравнения метода Бубнова, исходя из которых определяются бифуркационные значения действующих сил и окончательно выявляются соответствующие им формы потери устойчивости. На основе предложенного метода найдены аналитические решения задачи и о малых свободных колебаниях пластины с незакрепленными краями.

Ключевые слова: линеаризованная задача устойчивости, прямоугольная пластина, двустороннее сжатие, чистый сдвиг, изгибные и поперечно-сдвиговые формы потери устойчивости, свободные колебания, незакрепленные края, тригонометрические базисные функции, аналитические решения, метод Бубнова.

Введение

Точные аналитические решения тех или иных задач механики деформируемых твердых тел (в частности, тонкостенных элементов конструкций в виде пластин и оболочек) известны лишь для некоторых частных видов граничных условий. Решений в виде конечных аналитических формул для элементов конструкций с незакрепленными краями в литературе, по-видимому, не имеется. Метод их построения для задач о плоских формах свободных колебаний прямоугольной ортотропной пластины с незакрепленными краями был предложен в работе [1]. Он основан на использовании двойных тригонометрических функций в качестве базисных и представлении решения в виде такой суммы линейно независимых частных решений, каждое из которых удовлетворяет граничным условиям задачи или при их подчинении некоторым равенствам, вытекающим из граничных условий, или без наложения на них каких-либо условий. Завершающий этап построения решения задачи требует их удовлетворения уравнениям движения пластины в форме уравнений метода Бубнова, структура которых зависит от структуры построенных решений. Дальнейшее развитие предложенного метода, связанное с построением решения задач о плоских формах потери устойчивости (ФПУ) прямоугольной пластины с незакрепленными краями, находящейся в условиях двухстороннего растяжения-сжатия, а также о пространственных формах свободных колебаний прямоугольного параллелепипеда с незакрепленными гранями, было дано в работах [2, 3]. В настоящей статье на его основе построены аналитические решения задач об изгибно-сдвиговых и поперечно-сдвиговых ФПУ, а также о свободных колебаниях пластины указанного выше вида, которые дополняют полученные ранее [1–3] результаты.

1. Постановка задачи устойчивости

Рассмотрим прямоугольную пластину со сторонами a, b и толщиной h, ограниченную координатными линиями $x = 0$, $x = 0$ и $y = 0$, $y = b$ прямоугольной декартовой системы координат. Будем считать материал пластины ортотропным с осями ортотропии, совпадающими с осями выбранной системы координат. На кромках $x = 0$, $x = a$ и $y = 0$, $y = b$ заданы соответственно погонные сжимающие усилия p и q, а также погонные касательные усилия τ неизменных направлений («мертвые» [4] силы). При таком виде нагружения в пластине формируется плоское напряженное состояние как в невозмущенном, так и в возмущенном состояниях равновесия. Поэтому для изгибных форм потери устойчивости в рамках уточненной модели С.П. Тимошенко имеют место следующие линеаризованные уравнения возмущенного равновесия [5]

$$\begin{gathered} f_1 = \frac{\partial M_{11}}{\partial x} + \frac{\partial M_{12}}{\partial y} - T_{13} = 0, \quad f_2 = \frac{\partial M_{12}}{\partial x} + \frac{\partial M_{22}}{\partial y} - T_{23} = 0, \\ f_3 = \frac{\partial T_{13}}{\partial x} + \frac{\partial T_{23}}{\partial y} + T^0_{11}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + T^0_{22}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2\,T^0_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y} = 0, \end{gathered} \tag{1.1}$$

где при рассматриваемом виде нагружения $T^0_{11} = -p$, $T^0_{22} = -q$, $T^0_{12} = \tau$, а перерезывающие усилия T_{13}, T_{23} и моменты M_{11}, M_{22}, M_{12} с функциями перемещений w, γ_1, γ_2 связаны соотношениями упругости

$$M_{11} = D_{11}\Big(\frac{\partial \gamma_1}{\partial x} + \nu_{21}\frac{\partial \gamma_2}{\partial y}\Big),\ M_{22} = D_{22}\Big(\frac{\partial \gamma_2}{\partial y} + \nu_{12}\frac{\partial \gamma_1}{\partial x}\Big),$$

$$M_{12} = D_{12}\Big(\frac{\partial \gamma_1}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_2}{\partial x}\Big),\ T_{13} = B_{13}\Big(\frac{\partial w}{\partial x} + \gamma_1\Big),\ T_{23} = B_{23}\Big(\frac{\partial w}{\partial y} + \gamma_2\Big),$$

$D_{11} = E_1 h^3/\big[\,12\,(1-\nu_{12}\,\nu_{21})\big]$, $D_{22} = E_2 h^3/\big[\,12\,(1-\nu_{12}\,\nu_{21})\big]$, $D_{12} = G_{12}\,h^3/12$, $B_{13} = h\,G_{13}$, $B_{23} = h\,G_{23}$, $E_1\,\nu_{21} = E_2\,\nu_{12}$.

Если ввести в рассмотрение безразмерные определяющие параметры

$$g_1 = D_{11}/D_{12}, \quad g_2 = D_{22}/D_{12} \tag{1.2}$$

и параметры внешней нагрузки

$$t^0_1 = p/B_{13}, \quad t^0_2 = q/B_{23}, \quad t^0_{12} = \tau/B_{13}, \quad t^0_{21} = \tau/B_{23}, \tag{1.3}$$

а также обозначения

$$\widetilde{B}_{13} = B_{13}/D_{12} = 12\,G_{13}/\big(G_{12}\,h^2\big), \quad \widetilde{B}_{23} = B_{23}/D_{12} = 12\,G_{23}/\big(G_{12}\,h^2\big), \tag{1.4}$$

то уравнения (1.1) в терминах w, γ_1, γ_2 примут вид:

$$\begin{aligned}
\widetilde{f}_1 =& g_1 \frac{\partial^2\gamma_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\gamma_1}{\partial y^2} + \left(1+\nu_{21}\, g_1\right) \frac{\partial^2\gamma_2}{\partial x\,\partial y} - \widetilde{B}_{13}\Big(\frac{\partial w}{\partial x} + \gamma_1\Big) = 0,\\
\widetilde{f}_2 =& g_2 \frac{\partial^2\gamma_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\gamma_2}{\partial x^2} + \left(1+\nu_{12}\, g_2\right) \frac{\partial^2\gamma_1}{\partial x\,\partial y} - \widetilde{B}_{23}\Big(\frac{\partial w}{\partial y} + \gamma_2\Big) = 0,\\
\widetilde{f}_3 =& \widetilde{B}_{13}\left(1-t_1^0\right)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \widetilde{B}_{23}\left(1-t_2^0\right)\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\widetilde{B}_{13}\, t_{12}^0 + \widetilde{B}_{23}\, t_{21}^0\right)\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y} +\\
&+ \widetilde{B}_{13}\frac{\partial\gamma_1}{\partial x} + \widetilde{B}_{23}\frac{\partial\gamma_2}{\partial y} = 0.
\end{aligned} \tag{1.5}$$

В дальнейшем будем рассматривать только такую краевую задачу, которой соответствует постановка на кромках $x=0$, $x=a$ и $y=0$, $y=b$ статических граничных условий:
при $x=0$, $x=a$

$$\frac{\partial\gamma_1}{\partial x} + \nu_{21}\frac{\partial\gamma_2}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial\gamma_1}{\partial y} + \frac{\partial\gamma_2}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} + \gamma_1 - t_1^0\frac{\partial w}{\partial x} - t_{12}^0\frac{\partial w}{\partial y} = 0; \tag{1.6}$$

при $y=0$, $y=b$

$$\frac{\partial\gamma_2}{\partial y} + \nu_{12}\frac{\partial\gamma_1}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial\gamma_1}{\partial y} + \frac{\partial\gamma_2}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial y} + \gamma_2 - t_{21}^0\frac{\partial w}{\partial x} - t_2^0\frac{\partial w}{\partial y} = 0. \tag{1.7}$$

2. Построение общего решения задачи на основе тригонометрических базисных функций

Следуя [1,2], представим функции w, γ_1, γ_2, в виде

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &= \gamma_n \cos\lambda_n x + \widetilde{\gamma}_n \sin\lambda_n x,\\
\gamma_2 &= \Psi_n \sin\lambda_n x + \widetilde{\Psi}_n \cos\lambda_n x,\\
w &= w_n \cos\lambda_n x + \widetilde{w}_n \sin\lambda_n x,
\end{aligned} \tag{2.1}$$

где $\lambda_n = n\,\pi/a$. Подчинив (2.1) условиям (1.6), получаем $\big((\ldots)' = d(\ldots)/dy\big)$:

$$\begin{aligned}
&\widetilde{\gamma}_n = -\frac{\nu_{21}}{\lambda_n}\widetilde{\Psi}'_n, \quad \gamma_n = t_{12}^0 w'_n - \lambda_n(1-t_{12}^0)\widetilde{w}_n,\\
&\Psi_n = -\frac{1}{\lambda_n}\gamma'_n = -\frac{t_{12}^0}{\lambda_n}w''_n + (1-t_1^0)\widetilde{w}\,'_n.
\end{aligned} \tag{2.2}$$

При использовании (2.2) выражения (2.1) примут вид

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &= \left[\,t_{12}^0\, w'_n - \lambda_n\left(1-t_1^0\right)\widetilde{w}_n\,\right]\cos\lambda_n x - \frac{\nu_{21}}{\lambda_n}\,\widetilde{\Psi}\,'_n\,\sin\lambda_n x,\\
\gamma_2 &= \left[-\frac{t_{12}^0}{\lambda_n}w''_n + (1-t_1^0)\widetilde{w}\,'_n\right]\sin\lambda_n x + \widetilde{\Psi}_n\cos\lambda_n x,\\
w &= w_n\cos\lambda_n x + \widetilde{w}_n\sin\lambda_n x,
\end{aligned} \tag{2.3}$$

в которых подлежащими определению являются три одномерные функции w_n, $\widetilde{w}_n$ и $\widetilde{\Psi}_n$. Примем для них представления

$$w_n = w_{nk}\,\sin\lambda_k\, y + \widetilde{w}_{nk}\,\cos\lambda_k\, y, \quad \widetilde{w}_n = W_{nk}\,\sin\lambda_k\, y + \widetilde{W}_{nk}\,\cos\lambda_k\, y,$$

$$\widetilde{\Psi}_n = \Psi_{nk}\,\sin\lambda_k\,y + \widetilde{\Psi}_{nk}\,\cos\lambda_k\,y, \quad \lambda_k = k\,\pi/b$$

и внесем в (2.3). В результате получим функции

$$\begin{aligned}
w =&(w_{nk}\sin\lambda_k y + \widetilde{w}_{nk}\cos\lambda_k y)\cos\lambda_n x + (W_{nk}\sin\lambda_k y + \widetilde{W}_{nk}\cos\lambda_k y)\sin\lambda_n x,\\
\gamma_1 =&\Big[\lambda_k\,t^0_{12}\,(w_{nk}\,\cos\lambda_k\,y - \widetilde{w}_{nk}\,\sin\lambda_k\,y) - \lambda_n\,\big(1-t^0_1\,\big)\,\big(W_{nk}\,\sin\lambda_k\,y +\\
&+\widetilde{W}_{nk}\,\cos\lambda_k\,y\big)\Big]\,\cos\lambda_n\,x - \frac{\nu_{21}\,\lambda_k}{\lambda_n}\,\big(\Psi_{nk}\,\cos\lambda_k\,y - \widetilde{\Psi}_{nk}\,\sin\lambda_k\,y\big)\,\sin\lambda_n\,x,\\
\gamma_2 =&\Big[\,\frac{t^0_{12}\,\lambda^2_k}{\lambda_n}\,\big(w_{nk}\,\sin\lambda_k\,y + \widetilde{w}_{nk}\,\cos\lambda_k\,y\big) + \big(1-t^0_1\,\big)\,\lambda_n\,\big(W_{nk}\,\cos\lambda_k\,y -\\
&-\widetilde{W}_{nk}\,\sin\lambda_k\,y\big)\Big]\,\sin\lambda_n\,x + (\Psi_{nk}\,\sin\lambda_k\,y + \widetilde{\Psi}_{nk}\,\cos\lambda_k\,y)\,\cos\lambda_n\,x,
\end{aligned}\tag{2.4}$$

которые необходимо подчинить граничным условиям (1.7). Для этого внесем (2.4) в (1.7) и приравняем нулю коэффициенты при $\sin\lambda_n\,x$ и $\cos\lambda_n\,x$ в силу их линейной независимости. В итоге получим следующие алгебраические соотношения:

$$\lambda_n\,\lambda_k\,\big(2-t^0_1-t^0_2\,\big)\,W_{nk} + \big(t^0_{12}\,\lambda^2_k + t^0_{21}\,\lambda^2_n\big)\,\widetilde{w}_{nk} = 0, \tag{2.5}$$

$$\big(1-t^0_2\,\big)\,\lambda_k\,w_{nk} + \widetilde{\Psi}_{nk} - t^0_{21}\,\lambda_n\,\widetilde{W}_{nk} = 0, \tag{2.6}$$

$$\big(\nu_{21}\,\lambda^2_k - \lambda^2_n\big)\,\widetilde{\Psi}_{nk} = 0, \tag{2.7}$$

$$\lambda_k\,\big(1-\nu_{12}\,\nu_{21}\,\big)\,\Psi_{nk} = 0, \tag{2.8}$$

$$-t^0_{12}\,\lambda_k\,\big(-\lambda^2_k + \nu_{12}\,\lambda^2_n\big)\,w_{nk} + \big(1-t^0_1\big)\,\lambda_n\big(\nu_{12}\,\lambda^2_n - \lambda^2_k\,\big)\,\widetilde{W}_{nk} = 0, \tag{2.9}$$

В дальнейшем целесообразно рассмотреть по отдельности случаи $t^0_{12} = t^0_{21} = 0$ и $t^0_{12} \neq 0$, $t^0_{21} \neq 0$. Для обоих этих случаев из (2.7) и (2.8) следует, что

$$\widetilde{\Psi}_{nk} \neq 0 \quad \text{при} \;\; \nu_{21}\,\lambda^2_k - \lambda^2_n = 0, \tag{2.10}$$

$$\Psi_{nk} \neq 0 \quad \text{при} \;\; \lambda_k = 0, \tag{2.11}$$

а для первого случая, когда $t^0_{12} = t^0_{21} = 0$, вместо равенств (2.5), (2.6), (2.9) получим равенства

$$\lambda_k\,\big(1-t^0_1\,\big)\,W_{nk} = 0, \tag{2.12}$$

$$w_{nk} = -\widetilde{\Psi}_{nk}/\big[\lambda_k\,\big(1-t^0_2\,\big)\,\big], \tag{2.13}$$

$$\big(1-t^0_1\big)\big(\nu_{12}\,\lambda^2_n - \lambda^2_k\,\big)\,\widetilde{W}_{nk} = 0\,.$$

Из (2.12) следует, что $W_{nk} \neq 0$ при:

$$1)\; t^0_1 = 1; \tag{2.14}$$

$$2)\; \lambda_k = 0. \tag{2.15}$$

Аналогичным образом $\widetilde{W}_{nk} \neq 0$ при:

$$1)\; t^0_1 = 1; \tag{2.16}$$

$$2)\; \lambda^2_k = \nu_{12}\,\lambda^2_n. \tag{2.17}$$

Таким образом, в рассматриваемом случае, представив (2.13) в виде $w_{nk} = -c_k\widetilde{\Psi}_{nk}$, $c_k = 1/\left[\lambda_k\left(1-t_2^0\right)\right]$, функции (2.4) перепишем в форме

$$\begin{aligned}
w &= (-c_k\widetilde{\Psi}_{nk}\sin\lambda_k y + \widetilde{w}_{nk}\cos\lambda_k y)\cos\lambda_n x + \\
&\quad + (W_{nk}\sin\lambda_k y + \widetilde{W}_{nk}\cos\lambda_k y)\sin\lambda_n x, \\
\gamma_1 &= -\lambda_n\,(1-t_1^0)\,(W_{nk}\,\sin\lambda_k\,y + \widetilde{W}_{nk}\,\cos\lambda_k\,y)\cos\lambda_n\,x - \\
&\quad - \frac{\nu_{21}\,\lambda_k}{\lambda_n}\,(\Psi_{nk}\,\cos\lambda_k\,y - \widetilde{\Psi}_{nk}\,\sin\lambda_k\,y)\sin\lambda_n\,x, \\
\gamma_2 &= \lambda_k\,(1-t_1^0)\,(W_{nk}\,\cos\lambda_k\,y - \widetilde{W}_{nk}\,\sin\lambda_k\,y)\sin\lambda_n\,x + \\
&\quad + (\Psi_{nk}\,\sin\lambda_k\,y + \widetilde{\Psi}_{nk}\,\cos\lambda_k\,y)\cos\lambda_n\,x,
\end{aligned} \tag{2.18}$$

которые будут удовлетворять всем граничным условиям на кромках $x = 0$, $x = a$ и $y = 0$, $y = b$ при выполнении условий (2.10), (2.11), (2.14) или (2.15), а также (2.16) или (2.17).

Если считать, что сформулированные условия (2.10), (2.11), (2.14)–(2.17) не выполняются, то получим равенства $\widetilde{\Psi}_{nk} = \Psi_{nk} = W_{nk} = \widetilde{W}_{nk} = w_{nk} = 0$. В результате при $t_{12}^0 = t_{21}^0 = 0$ вместо (2.18) с учетом (2.13) будем иметь решение

$$w = \widetilde{w}_{nk}\,\cos\lambda_k\,y\,\cos\lambda_n\,x, \quad \gamma_1 = \gamma_2 = 0, \tag{2.19}$$

удовлетворяющее всем граничным условиям задачи.

Первые два уравнения системы (1.5) при использовании (2.19) доставляют нетривиальное решение $\widetilde{w}_{nk}$ только при условиях $\widetilde{B}_{13} = 0$, $\widetilde{B}_{23} = 0$ (нулевые жесткости на поперечные сдвиги), а из третьего уравнения $\widetilde{f}_3 = 0$ следует характеристическое уравнение

$$\widetilde{B}_{13}\,\lambda_n^2 + \widetilde{B}_{23}\,\lambda_k^2 = \widetilde{B}_{13}\,\lambda_n^2\,t_1^0 + \widetilde{B}_{23}\,\lambda_k^2\,t_2^0, \tag{2.20}$$

служащее для определения бифуркационного значения параметра нагрузки t_1^0 при заданном отношении

$$t_2^0 = r\,t_1^0. \tag{2.21}$$

Заметим, что при предварительном удовлетворении всем граничным условиям задачи уравнениям (1.5) соответствует вариационное уравнение метода Бубнова

$$\int_0^a\int_0^b \left(\widetilde{f}_1\,\delta\,\gamma_1 + \widetilde{f}_2\,\delta\,\gamma_2 + \widetilde{f}_3\,\delta\,w\right)dx\,dy = 0, \tag{2.22}$$

из которого без введения условий $\widetilde{B}_{13} = 0$, $\widetilde{B}_{23} = 0$ и следует характеристическое уравнение (2.20), если внести в (2.22) левые части уравнений (1.5) и подчинить решению (2.19).

Рассмотрим теперь случай, когда $t_{12}^0 \neq 0$, $t_{21}^0 \neq 0$. Для этого случая из (2.5) следует равенство

$$W_{nk} = \frac{t_{12}^0\,\lambda_k^2 + t_{21}^0\,\lambda_n^2}{\lambda_n\,\lambda_k\left(2 - t_1^0 - t_2^0\right)}\,\widetilde{w}_{nk}, \tag{2.23}$$

а уравнение (2.10) представимо в виде

$$\widetilde{W}_{nk} = \frac{t_{12}^0\,\lambda_k}{\left(1 - t_1^0\right)\lambda_n}\,w_{nk} \tag{2.24}$$

при условии $\lambda_k^2 \neq \nu_{12}\,\lambda_n^2$. При подстановке (2.24) в (2.6) приходим к зависимости

$$w_{nk} = -\frac{1-t_1^0}{\lambda_k\left[\left(1-t_1^0\right)\left(1-t_2^0\,t_{12}^0\,t_{21}^0\right)\right]\lambda_n}\;\widetilde{\Psi}_{nk}, \tag{2.25}$$

справедливой в силу (2.10) при условии $\lambda_n^2 = \nu_{21}\,\lambda_k^2$. Подставляя (2.25) в (2.24), получим зависимость

$$\widetilde{W}_{nk} = -\frac{t_{12}^0}{\lambda_n\left[\left(1-t_1^0\right)\left(1-t_2^0\right)-t_{12}^0\,t_{21}^0\right]\lambda_n}\;\widetilde{\Psi}_{nk}, \tag{2.26}$$

также справедливую, если $\lambda_n^2 = \nu_{21}\lambda_k^2$. В результате с учетом (2.23), (2.25), (2.26) функции (2.4), удовлетворяющие всем граничным условиям, запишутся в виде

$$\begin{aligned}
w &= \Big[-\frac{1-t_1^0}{p_1^0\,\lambda_k}\,\widetilde{\Psi}_{nk}\,\sin\lambda_k\,y + \widetilde{w}_{nk}\,\cos\lambda_k\,y\Big]\cos\lambda_n\,x + \\
&\quad + \Big[\frac{t_{12}^0\,\lambda_k^2 + t_{21}^0\,\lambda_n^2}{\lambda_n\,\lambda_k\,p_2^0}\,\widetilde{w}_{nk}\,\sin\lambda_k\,y - \frac{t_{12}^0}{\lambda_n\,p_1^0}\,\widetilde{\Psi}_{nk}\,\cos\lambda_k\,y\Big]\sin\lambda_n\,x, \\
\gamma_1 &= -\Big[\lambda_k\,t_{12}^0 + \frac{\left(1-t_1^0\right)\left(t_{12}^0\,\lambda_k^2 + t_{21}^0\,\lambda_n^2\right)}{\lambda_k\,p_2^0}\Big]\widetilde{w}_{nk}\,\sin\lambda_k\,y\,\cos\lambda_n\,x - \\
&\quad - \frac{\nu_{21}\,\lambda_k}{\lambda_n}\left(\Psi_{nk}\,\cos\lambda_k\,y - \widetilde{\Psi}_{nk}\,\sin\lambda_k\,y\right)\sin\lambda_n\,x, \\
\gamma_2 &= \Big[\frac{\lambda_k^2\,t_{12}^0}{\lambda_n} + \frac{\left(1-t_1^0\right)\left(t_{12}^0\,\lambda_k^2 + t_{21}^0\,\lambda_n^2\right)}{\lambda_n\,p_2^0}\Big]\widetilde{w}_{nk}\,\cos\lambda_k\,y\,\sin\lambda_n\,x + \\
&\quad + \left(W_{nk}\,\sin\lambda_k\,y + \widetilde{W}_{nk}\,\cos\lambda_k\,y\right)\cos\lambda_n\,x,
\end{aligned} \tag{2.27}$$

где $p_1^0 = \left(1-t_1^0\right)\left(1-t_2^0\right) - t_{12}^0\,t_{21}^0$, $p_2^0 = 2 - t_1^0 - t_2^0$.

Непосредственной проверкой можно убедиться, что построенные функции удовлетворяют всем граничным условиям задачи при выполнении условий (2.10), (2.11), а также дополнительного условия $\widetilde{w}_{nk} \neq 0$ при $t_{12}^0\,\lambda_k^2 + t_{21}^0\,\lambda_n^2 = 0$. Так как $t_{12}^0\,\lambda_k^2 + t_{21}^0\,\lambda_n^2 \neq 0$, то $\widetilde{w}_{nk} = 0$. В силу этого функции (2.27) примут вид

$$\begin{aligned}
w &= -\frac{1-t_1^0}{p_1^0\,\lambda_k}\,\widetilde{\Psi}_{nk}\,\sin\lambda_k\,y\,\cos\lambda_n\,x - \frac{t_{12}^0}{\lambda_n\,p_1^0}\,\widetilde{\Psi}_{nk}\cos\lambda_k\,x\,\sin\lambda_k\,y, \\
\gamma_1 &= -\frac{\nu_{21}\,\lambda_k}{\lambda_n}\Big(\Psi_{nk}\,\cos\lambda_k\,y - \widetilde{\Psi}_{nk}\,\sin\lambda_k\,y\Big)\sin\lambda_n\,x, \\
\gamma_2 &= \left(\Psi_{nk}\,\sin\lambda_k\,y + \widetilde{\Psi}_{nk}\,\cos\lambda_k\,y\right)\cos\lambda_n\,x.
\end{aligned} \tag{2.28}$$

3. Критические нагрузки и ФПУ пластины при действии сил p, q и τ неизменных направлений

3.1. Действие сил p и q. Следуя методике, предложенной в [1], в рассматриваемом случае в соответствии с (2.22) и структурой функций (2.18) необходимо составить уравнения метода Бубнова следующих видов:

$$\int_0^a\!\!\int_0^b\Big(-\widetilde{f}_3\,c_k\,\sin\lambda_k\,y\,\cos\lambda_n\,x + \frac{\nu_{21}\,\lambda_k}{\lambda_n}\widetilde{f}_1\,\sin\lambda_k\,y\,\sin\lambda_n\,x + \widetilde{f}_2\,\cos\lambda_k\,y\,\cos\lambda_n\,x\Big)\,dx\,dy = 0 \quad \text{при} \quad \delta\,\widetilde{\Psi}_{nk} \neq 0, \tag{3.1}$$

$$\int_0^a\int_0^b \widetilde{f}_3 \cos\lambda_k\, y\, \cos\lambda_n\, x\, dx\, dy = 0 \quad \text{при} \quad \delta\, \widetilde{w}_{nk} \neq 0, \tag{3.2}$$

$$\int_0^a\int_0^b \Big[\widetilde{f}_3 \sin\lambda_k\, y\, \sin\lambda_n\, x - \lambda_n \left(1 - t_1^0\right) \widetilde{f}_1 \sin\lambda_k\, y\, \cos\lambda_n\, x + \\ + \lambda_k \left(1 - t_1^0\right) \widetilde{f}_2 \cos\lambda_k\, y\, \sin\lambda_n\, x\Big]\, dx\, dy = 0 \quad \text{при} \quad \delta\, W_{nk} \neq 0, \tag{3.3}$$

$$\int_0^a\int_0^b \Big[\widetilde{f}_3 \cos\lambda_k\, y\, \sin\lambda_n\, x - \lambda_n \left(1 - t_1^0\right) \widetilde{f}_1 \cos\lambda_k\, y\, \cos\lambda_n\, x - \\ - \lambda_k \left(1 - t_1^0\right) \widetilde{f}_2 \sin\lambda_k\, y\, \sin\lambda_n\, x\Big]\, dx\, dy = 0 \quad \text{при} \quad \delta\, \widetilde{W}_{nk} \neq 0, \tag{3.4}$$

$$\int_0^a\int_0^b \Big[-\frac{\nu_{21}\lambda_k}{\lambda_n}\widetilde{f}_1 \cos\lambda_k y\, \sin\lambda_n x + \widetilde{f}_2 \sin\lambda_k y\, \cos\lambda_n x\Big]\, dx\, dy = 0 \quad \text{при} \quad \delta\Psi_{nk} \neq 0, \tag{3.5}$$

в которых $\widetilde{f}_1$, $\widetilde{f}_2$, $\widetilde{f}_3$ – левые части уравнений (1.5), приведенные на основе функций (2.18) к виду

$$\widetilde{f}_1 = \Big[g_1 \left(1 - t_1^0\right) \lambda_n \left(\lambda_n^2 - \nu_{21}\, \lambda_k^2\right) - \widetilde{B}_{13}\, \lambda_n\, t_1^0\Big] \big(W_{nk} \sin\lambda_k\, y\, \cos\lambda_n\, x + \\ + \widetilde{W}_{nk} \cos\lambda_k y\, \cos\lambda_n x\big) + \left(\frac{\nu_{21}\lambda_k^3}{\lambda_n} - \lambda_k\lambda_n + \widetilde{B}_{13}\, \frac{\nu_{21}\lambda_k}{\lambda_n}\right)\Psi_{nk} \cos\lambda_k y\, \sin\lambda_n x + \\ + \Big[-\frac{\nu_{21}\, \lambda_k^3}{\lambda_n} + \lambda_k\, \lambda_n - \widetilde{B}_{13}\left(\lambda_n\, c_k + \frac{\nu_{21}\, \lambda_k}{\lambda_n}\right)\Big]\widetilde{\Psi}_{nk} \sin\lambda_k\, y\, \sin\lambda_n\, x + \\ + \widetilde{B}_{13}\, \lambda_n\, \widetilde{w}_{nk} \cos\lambda_k\, y\, \sin\lambda_n\, x\,, \tag{3.6}$$

$$\widetilde{f}_2 = \Big[g_2 \left(1 - t_1^0\right)\lambda_k \left(-\lambda_k^2 + \nu_{12}\lambda_n^2\right) - \widetilde{B}_{23}\lambda_k \left(2 - t_1^0\right)\Big]\big(W_{nk} \cos\lambda_k y \sin\lambda_n x - \\ - \widetilde{W}_{nk} \sin\lambda_k y \sin\lambda_n x\big) - \left(\widetilde{g}_2\, \lambda_k^2 + \lambda_n^2 - \nu_{21}\, \lambda_k^2 + \widetilde{B}_{13}\right) \Psi_{nk} \sin\lambda_k y\, \cos\lambda_n x - \\ - \Big[\widetilde{g}_2\, \lambda_k^2 + \lambda_n^2 - \nu_{21}\, \lambda_k^2 - \widetilde{B}_{13}\left(\lambda_k\, c_k - 1\right)\Big]\, \widetilde{\Psi}_{nk} \cos\lambda_k\, y\, \cos\lambda_n\, x + \\ + \widetilde{B}_{23}\, \lambda_k\, \widetilde{w}_{nk} \sin\lambda_k\, y\, \cos\lambda_n\, x\,, \tag{3.7}$$

$$\widetilde{f}_3 = \Big[\widetilde{B}_{13}(1 - t_1^0) c_k \lambda_n^2 + \widetilde{B}_{23}(1 - t_2^0) c_k \lambda_k^2 + \lambda_k(-\widetilde{B}_{23} + \nu_{21}\widetilde{B}_{13})\Big]\widetilde{\Psi}_{nk} \sin\lambda_k y\, \cos\lambda_n x - \\ - \left(2 - t_1^0 - t_2^0\right) \lambda_k^2\, \widetilde{B}_{23}\left(W_{nk} \sin\lambda_k\, y + \widetilde{W}_{nk} \cos\lambda_k\, y\right) \sin\lambda_n\, x + \\ + \left(\widetilde{B}_{23} - \nu_{21}\, \widetilde{B}_{13}\right) \lambda_k \widetilde{\Psi}_{nk} \cos\lambda_k\, y\, \cos\lambda_n\, x, \tag{3.8}$$

где $\widetilde{g}_2 = g_2 \left(1 - \nu_{12}\, \nu_{21}\right)$.

При подстановке выражений (3.6)–(3.8) в уравнение (3.1) оно приводится к виду

$$\Big\{-\frac{1}{\lambda_k\,(1-t_2^0)}\Big[\,\widetilde{B}_{13}\,\frac{(1-t_1^0)\lambda_n^2}{(1-t_2^0)\lambda_k}+\widetilde{B}_{23}\lambda_k+\lambda_k\big(-\widetilde{B}_{23}+\nu_{21}\,\widetilde{B}_{13}\big)\,\Big]-$$
$$-\frac{\nu_{21}\lambda_k}{\lambda_n}\,\Big[\,\frac{\nu_{21}\lambda_k^3}{\lambda_n}-\lambda_n\,\lambda_k+\widetilde{B}_{13}\,\Big(\,\frac{\lambda_n}{\lambda_k\,(1-t_2^0)}+\frac{\nu_{21}\lambda_k}{\lambda_n}\Big)\,\Big]-$$
$$-\,\Big[\,\widetilde{g}_2\,\lambda_k^2+\lambda_n^2-\nu_{21}\,\lambda_k^2-\widetilde{B}_{13}\,\Big(\,\frac{1}{1-t_2^0}-1\Big)\Big]\,\Big\}\,\widetilde{\Psi}_{nk}=0. \quad (3.9)$$

В соответствии с (2.10) данное уравнение имеет нетривиальное решение $\widetilde{\Psi}_{nk}\neq 0$, когда

$$w=-\frac{1}{\lambda_k\,\big(1-t_1^0\big)}\,\widetilde{\Psi}_{nk}\,\sin\lambda_k\,y\,\cos\lambda_n\,x,$$
$$\gamma_1=\frac{\nu_{21}\lambda_k}{\lambda_n}\,\widetilde{\Psi}_{nk}\,\sin\lambda_k\,y\,\sin\lambda_n\,x,\quad \gamma_2=\widetilde{\Psi}_{nk}\,\cos\lambda_k\,y\,\cos\lambda_n\,x, \quad (3.10)$$

и только при условии $\lambda_n^2=\nu_{21}\,\lambda_k^2$. В силу этого условия из (3.9) следует характеристическое уравнение

$$(\widetilde{g}_2\lambda_k^2+\widetilde{B}_{23}+\nu_{21}\widetilde{B}_{13})(t_2^0)^2-(2\widetilde{g}_2\lambda_k^2+\widetilde{B}_{23}+4\nu_{21}\widetilde{B}_{13})t_2^0-$$
$$-\,\nu_{21}\widetilde{B}_{13}t_1^0+\widetilde{g}_2\lambda_k^2+4\nu_{21}\widetilde{B}_{13}=0, \quad (3.11)$$

в котором допустимо принять $\nu_{21}=\lambda_n^2/\lambda_k^2$. При $t_1^0=0$ (одностороннее сжатие силой p) из (3.11) следует бифуркационное значение параметра t_1^0:

$$t_2^{0\,*}=4+\widetilde{g}_2\,\lambda_k^4/\big(\widetilde{B}_{13}\,\lambda_n^2\big)=4+\widetilde{g}_2\,\lambda_k^2/\big(\nu_{21}\,\widetilde{B}_{13}\big). \quad (3.12)$$

Аналогичным образом, с учетом (3.6)–(3.8) уравнение (3.4) приводится к виду

$$\Big\{-\big(2-t_1^0-t_2^0\big)\lambda_k^2g_{23}-\lambda_n\big(1-t_1^0\big)\Big[g_1\big(1-t_1^0\big)\lambda_n\big(\lambda_n^2-\nu_{21}\lambda_k^2\big)-g_{13}\lambda_nt_1^0\Big]+$$
$$+\,\lambda_k\,\big(1-t_1^0\big)\Big[g_2\,\big(1-t_1^0\big)\lambda_k\,\big(-\lambda_k^2+\nu_{12}\,\lambda_n^2\big)-g_{23}\,\lambda_k\,\big(2-t_1^0\big)\Big]\,\Big\}\,\widetilde{W}_{nk}=0, \quad (3.13)$$

соответствующее нетривиальному решению $\widetilde{W}_{nk}\neq 0$ с функциями

$$w=\widetilde{W}_{nk}\,\cos\lambda_k\,y\,\sin\lambda_n\,x,\quad \gamma_1=-\lambda_n\,\big(1-t_1^0\big)\widetilde{W}_{nk}\,\cos\lambda_k\,y\,\cos\lambda_n\,x,$$
$$\gamma_2=-\lambda_k\,\big(1-t_1^0\big)\widetilde{W}_{nk}\,\sin\lambda_k\,y\,\sin\lambda_n\,x \quad (3.14)$$

и наложенных условиях (2.16), (2.17). Рассмотрим каждое из этих условий по отдельности.

a) Пусть выполнено условие (2.16), то есть $t_1^0=1$. Тогда из (3.13) следует бифуркационное значение $t_2^{0\,*}=1$, соответствующее, как и $t_1^{0\,*}=1$, чисто поперечно-сдвиговой ФПУ.

b) Пусть выполнено условие (2.17), то есть $\lambda_k^2-\nu_{12}\,\lambda_n^2=0$. Тогда следующее из (3.13) характеристическое уравнение становится аналогичным уравнению (3.11) и принимает вид

$$(\widetilde{g}_1\lambda_n^2+\widetilde{B}_{13})(t_1^0)^2-(2\widetilde{g}_1\lambda_n^2+\widetilde{B}_{13}+4\nu_{12}\widetilde{B}_{23})t_1^0-\nu_{12}\widetilde{B}_{23}t_2^0+\widetilde{g}_1\lambda_n^2+4\nu_{12}\widetilde{B}_{23}=0, \quad (3.15)$$

В нем допустимо принять $\nu_{12} = \lambda_k^2/\lambda_n^2$, а $\widetilde{g}_1 = g_1\,(1-\nu_{12}\,\nu_{21})$. В случае $t_1^0 = 0$ из уравнения (3.15) следует бифуркационное значение

$$t_2^{0\,*} = 4 + \widetilde{g}_1\,\lambda_n^4/\big(\widetilde{B}_{23}\,\lambda_k^2\big) = 4 + \widetilde{g}_1\,\lambda_n^2/\big(\nu_{12}\,\widetilde{B}_{23}\big),$$

аналогичное (3.12), а при $t_1^0 = 1$ приходим к равенству $t_2^0 = 1$.

В общем случае, когда t_2^0 задается в виде зависимости (2.21), для определения бифуркационного значения усилия t_1^0 из (3.15) следует квадратное уравнение вида

$$r_1\,\big(t_1^0\big)^2 - \big(r_2 + r\,\nu_{12}\,\widetilde{B}_{23}\,\big)\,t_1^0 + r_3 = 0, \tag{3.16}$$

где $r_1 = \widetilde{g}_1\,\lambda_n^2 + \widetilde{B}_{13} + \nu_{12}\,\widetilde{B}_{23}$, $r_2 = 2\,\widetilde{g}_1\,\lambda_n^2 + \widetilde{B}_{13} + 4\,\nu_{12}\,\widetilde{B}_{23}$, $r_3 = \widetilde{g}_1\,\lambda_n^2 + 4\,\nu_{12}\,\widetilde{B}_{23}$.

Следует заметить, что при $r = 0$ и $\nu_{12} = 0$ следующие из уравнения (3.16) бифуркационные значения $t_1^{0\,*}$ будут равны

$$t_{1(1)}^{0\,*} = 1, \quad t_{1(2)}^{0\,*} = \widetilde{g}_1/(\widetilde{g}_1\,\lambda_n^2 + \widetilde{B}_{13}), \tag{3.17}$$

из которых первое соответствует реализации чисто сдвиговой, а второе – изгибно-сдвиговой ФПУ пластины в виде удлиненного стержня (то есть в предположении $\sigma_{22} = 0$, $M_{22} = 0$).

Рассмотрим теперь уравнение (3.3). Подставляя в него выражения (3.6)–(3.8), по-прежнему получим уравнение (3.13), которое в данном случае соответствует нетривиальному решению вида

$$\begin{aligned} &w = W_{nk}\,\sin\lambda_k\,y\,\sin\lambda_n\,x\,, \quad \gamma_1 = -\lambda_n\,\big(1-t_1^0\big)W_{nk}\,\sin\lambda_k\,y\,\cos\lambda_n\,x\,,\\ &\gamma_2 = \big(1-t_1^0\big)\,\lambda_k\,W_{nk}\,\cos\lambda_k\,y\,\sin\lambda_n\,x \end{aligned} \tag{3.18}$$

при выполнении условий (2.14) и (2.15). При выполнении условия (2.15), то есть $\lambda_k = 0$, из уравнения (3.13) следует бифуркационное значение

$$t_1^{0\,*} = g_1\,\lambda_n^2/(g_1\,\lambda_n^2 + \widetilde{B}_{13}), \tag{3.19}$$

которое соответствует потере устойчивости бесконечно-широкой пластины по изгибно-сдвиговой форме. В этом легко можно убедиться, если воспользоваться соответствующими формулами (1.2)–(1.4).

К формуле (3.19) можно прийти и интегрированием изложенным методом одномерных уравнений

$$\widetilde{f}_1 = g_1\,\frac{d^2\gamma_1}{dx^2} - \widetilde{B}_{13}\left(\frac{dw}{dx} + \gamma_1\right) = 0, \quad \widetilde{f}_3 = \widetilde{B}_{13}\,\big(1-t_1^0\big)\,\frac{d^2w}{dx^2} + \widetilde{B}_{13}\,\frac{d\gamma_1}{dx} = 0, \tag{3.20}$$

следующих из (1.5) при $d(\ldots)/dy = 0$, когда в качестве w и γ_1 используются функции

$$w = w_0\,\sin\lambda_n\,x, \quad \gamma_1 = -\lambda_n\,\big(1-t_1^0\big)w_0\,\cos\lambda_n\,x \tag{3.21}$$

и составляется уравнение метода Бубнова вида

$$\int\limits_0^a \Big[\widetilde{f}_3\,\sin\lambda_n\,x - \widetilde{f}_1\,\lambda_n\,\big(1-t_1^0\big)\,\cos\lambda_n\,x\Big]\,dx = 0. \tag{3.22}$$

Однако заметим, что функции (3.18) при $\lambda_k = 0$ не сводятся к функциям (3.21), принимающим вид $w = 0$, $\gamma_1 = 0$, $\gamma_2 = 0$. Зато при $\lambda_k = 0$ к ним сводятся функции (3.14), но при выполнении условия (2.17).

В свете полученных результатов необходимо провести дополнительный анализ построенного характеристического уравнения (3.11). Полагая в нем $\nu_{21}=0$, что эквивалентно равенству $\lambda_n=0$, получим уравнение

$$\big(\widetilde{g}_2\,\lambda_k^2+\widetilde{B}_{23}\,\big)\,\big(\,t_2^0\big)^2-\big(2\,\widetilde{g}_2\,\lambda_k^2+\widetilde{B}_{23}\,\big)\,t_2^0+\widetilde{g}_2\,\lambda_k^2=0,$$

из которого следуют два бифуркационных значения: $t_2^{0\,*}=1$ и

$$t_2^{0\,*}=\widetilde{g}_2\,\lambda_k^2/\big(\widetilde{g}_2\,\lambda_k^2+\widetilde{B}_{23}\big). \tag{3.23}$$

Последнее отличается от аналогичной формулы (3.19) величиной $\widetilde{g}_2$ вместо g_2. Оно также соответствует изгибно-сдвиговой ФПУ пластины, но при ее сжатии силой q и моделировании стержнем, когда принимается условие $\sigma_{11}=0$.

Если пластина находится в условиях двустороннего сжатия, то уравнение (3.11) при введении обозначений

$$k_1=\widetilde{g}_2\lambda_k^2+\widetilde{B}_{23}+\nu_{21}\,\widetilde{B}_{13},\quad k_2=2\widetilde{g}_2\lambda_k^2+\widetilde{B}_{23}+4\nu_{21}\,\widetilde{B}_{13},\quad k_3=\widetilde{g}_2\lambda_k^2+4\nu_{12}\,\widetilde{B}_{13}$$

можно записать в виде

$$k_1\,r^2\big(\,t_1^0\big)^2-\big(k_2\,r+\nu_{21}\,\widetilde{B}_{13}\,\big)\,t_1^0+k_3=0, \tag{3.24}$$

если задана зависимость (2.21), или в виде

$$k_1\big(\,t_2^0\big)^2-\big(k_2+r_*\,\nu_{21}\,\widetilde{B}_{13}\,\big)\,t_2^0+k_3=0, \tag{3.25}$$

если задана зависимость $t_2^0=r_*\,t_2^0$. Из уравнений (3.24) или (3.25), являющихся аналогами уравнения (3.16), необходимо определить минимальное значение корня t_1^0 (или t_2^0) путем минимизации только по одному из целочисленных параметров n или k, так как они в рассматриваемом случае связаны зависимостью $\lambda_n^2=\nu_{21}\,\lambda_k^2$.

И, наконец, подставляя выражения (3.6)–(3.8) в оставшиеся уравнения (3.2) и (3.5), получим систему алгебраических уравнений

$$\lambda_k\,\big(\widetilde{B}_{23}-\nu_{21}\,\widetilde{B}_{13}\big)\Psi_{nk}-\Big[\widetilde{B}_{13}\,\big(1-t_1^0\big)\,\lambda_n^2+\widetilde{B}_{23}\,\big(1-t_2^0\big)\,\lambda_k^2\Big]\,\widetilde{w}_{nk}=0, \tag{3.26}$$

$$\frac{\nu_{21}\lambda_k}{\lambda_n}\,\Big[\Big(\frac{\nu_{21}\lambda_k^3}{\lambda_n}-\lambda_k\,\lambda_n+\widetilde{B}_{13}\,\frac{\nu_{21}\lambda_k}{\lambda_n}\Big)\,\Psi_{nk}+\widetilde{B}_{13}\,\lambda_n\,\widetilde{w}_{nk}\,\Big]-\\
-\Big[\widetilde{g}_2\,\lambda_k^2+\lambda_n^2-\nu_{21}\,\lambda_k^2+\widetilde{B}_{23}\Big]\Psi_{nk}+\widetilde{B}_{23}\,\lambda_k\,\widetilde{w}_{nk}=0, \tag{3.27}$$

причем первое из них следует из (3.2) в силу того, что $\delta\,\widetilde{w}_{nk}\neq0$ без наложенных условий на $\widetilde{w}_{nk}$, а в соответствии с (2.11) $\delta\,\widetilde{\Psi}_{nk}\neq0$ только при $\lambda_k=0$. Поэтому в уравнении (3.27), следующем из (3.5), в силу соотношения $\delta\,\widetilde{w}_{nk}\neq0$ необходимо принять $\lambda_k=0$, что приводит к равенству $\big(\lambda_n^2+\widetilde{B}_{23}\big)\,\Psi_{nk}=0$. Отсюда получаем решение $\Psi_{nk}=0$, следовательно, из (3.26) при условии $\widetilde{w}_{nk}\neq0$ получаем характеристическое уравнение

$$\widetilde{B}_{13}\,\big(1-t_1^0\big)\,\lambda_n^2+\widetilde{B}_{23}\,\big(1-t_2^0\big)\,\lambda_k^2=0. \tag{3.28}$$

При $\lambda_k=0$ из уравнения (3.28) следует бифуркационное значение $t_1^{0\,*}=1$, отвечающее чисто поперечно-сдвиговой ФПУ бесконечно широкой пластины при осевом сжатии силой q, а при $\lambda_n = 0$ – бифуркационное значение $t_2^{0\,*} = 1$ аналогичного содержания. При двустороннем нагружении, когда $t_2^0 = r\,t_1^0$, из (3.28) получаем формулу для определения бифуркационного значения:

$$t_1^{0\,*} = \frac{\widetilde{B}_{13}\,\lambda_n^2 + \widetilde{B}_{23}\,\lambda_k^2}{\widetilde{B}_{13}\,\lambda_n^2 + r\,\widetilde{B}_{23}\,\lambda_k^2} = \frac{\widetilde{B}_{13}\,\widetilde{\varepsilon}^{\,2} + \widetilde{B}_{23}}{\widetilde{B}_{13}\,\widetilde{\varepsilon}^{\,2} + r\,\widetilde{B}_{23}}, \tag{3.29}$$

где $\widetilde{\varepsilon} = \lambda_n/\lambda_k = n\,b/k\,a = n\,\varepsilon/k$, $\varepsilon = b/a$. Из (3.29) видно, что $t_1^{0\,*} = 1$ при $r = 1$ (то есть при $p = q$); $t_1^{0\,*} > 1$ при $r < 1$, а при $r > 1$ имеем, что $t_1^{0\,*} < 1$.

3.2. ФПУ прямоугольной пластины с незакрепленными краями, находящейся в условиях чистого сдвига. Структуре составленных функций (2.28) в рассматриваемом случае соответствуют следующие уравнения метода Бубнова

$$\int_0^a\!\!\int_0^b \widetilde{f}_2\,\sin\lambda_k\,y\,\cos\lambda_n\,x\,d\,x\,d\,y = 0 \quad \text{при } \delta\,\Psi_{nk} \neq 0, \tag{3.30}$$

$$\int_0^a\!\!\int_0^b \Big(\frac{\nu_{21}\,\lambda_k}{\lambda_n}\widetilde{f}_1\,\sin\lambda_k\,y\,\sin\lambda_n\,x + \widetilde{f}_2\,\cos\lambda_k\,y\,\cos\lambda_n\,x - \frac{1}{p_1^0\,\lambda_k}\,\widetilde{f}_3\,\sin\lambda_k\,y\,\cos\lambda_n\,x -$$
$$- \frac{t_{12}^0}{\lambda_n\,p_1^0}\,\widetilde{f}_3\,\cos\lambda_k\,y\,\sin\lambda_n\,x\Big)\,dx\,dy = 0 \quad \text{при} \quad \delta\,\widetilde{\Psi}_{nk} \neq 0, \tag{3.31}$$

где

$$\widetilde{f}_3 = \Big[\frac{\widetilde{B}_{13}\big(\lambda_n^2 - \lambda_k^2 t_{12}^0\,t_{21}^0\big)}{\lambda_k\,p_1^0} + \nu_{21}\,\lambda_k\,\widetilde{B}_{13}\Big]\,\widetilde{\Psi}_{nk}\,\sin\lambda_k y\,\cos\lambda_n x +$$
$$+ \Big(\frac{\widetilde{B}_{23}\,\lambda_k^2 t_{12}^0}{\lambda_n\,p_1^0} - \widetilde{B}_{23}\,\lambda_n t_{21}^0\Big)\,\widetilde{\Psi}_{nk}\,\cos\lambda_k y\,\sin\lambda_n x + \lambda_k\,\widetilde{B}_{23}\,\Psi_{nk}\,\cos\lambda_k\,y\cos\lambda_n\,x, \tag{3.32}$$

$$\widetilde{f}_1 = \Big(-\frac{\nu_{21}\,\lambda_k^3}{\lambda_n} + \lambda_k\lambda_n - \widetilde{B}_{13}\,\frac{\lambda_n}{\lambda_k\,p_1^0} - \widetilde{B}_{13}\,\frac{\nu_{21}\,\lambda_k}{\lambda_n}\Big)\,\widetilde{\Psi}_{nk}\,\sin\lambda_k\,y\,\sin\lambda_n\,x +$$
$$+ \widetilde{B}_{13}\,\frac{t_{12}^0}{p_1^0}\widetilde{\Psi}_{nk}\,\cos\lambda_k\,y\,\cos\lambda_n\,x - \big(1 + \nu_{21}\,g_1\big)\,\lambda_k\,\lambda_n\,\Psi_{nk}\,\cos\lambda_k\,y\,\sin\lambda_n\,x, \tag{3.33}$$

$$\widetilde{f}_2 = \Big(-\widetilde{g}_2\,\lambda_k^2 - \lambda_n^2 + \nu_{12}\,\lambda_k^2 + \widetilde{B}_{23}\,\frac{1 - p_1^0}{p_1^0}\Big)\widetilde{\Psi}_{nk}\,\cos\lambda_k\,y\,\cos\lambda_n\,x +$$
$$+ \widetilde{B}_{23}\,\frac{\lambda_k\,t_{12}^0}{\lambda_n\,p_1^0}\,\widetilde{\Psi}_{nk}\,\sin\lambda_k\,y\,\sin\lambda_n\,x - \big(g_2\,\lambda_k^2 + \lambda_n^2 + \widetilde{B}_{23}\big)\,\Psi_{nk}\sin\lambda_k\,y\,\cos\lambda_n\,x. \tag{3.34}$$

Обратимся к уравнению (3.31). При подстановке в него составленных выражений (3.32)–(3.34), используя равенство $\lambda_n^2 = \nu_{21}\,\lambda_k^2$, из условия $\widetilde{\Psi}_{nk} \neq 0$ приходим к характеристическому уравнению

$$
\begin{aligned}
-\widetilde{B}_{13}\,\nu_{21}\,\frac{1+p_1^0}{p_1^0}-\widetilde{g}_2\,\lambda_k^2+\widetilde{B}_{23}\,\frac{1-p_1^0}{p_1^0}-\frac{\widetilde{B}_{13}\left(\nu_{21}-t_{12}^0\,t_{12}^0\right)}{p_1^{0\,2}}-\\
-\frac{\widetilde{B}_{13}\,\nu_{21}}{p_1^0}-\frac{\widetilde{B}_{23}\,t_{12}^0\,t_{12}^0}{\nu_{21}\,p_1^{0\,2}}+\frac{\widetilde{B}_{23}\,t_{12}^0\,t_{21}^0}{p_1^{0\,2}}=0, \qquad (3.35)
\end{aligned}
$$

которому отвечает частное решение рассматриваемой задачи

$$
w=-\frac{\widetilde{\Psi}_{nk}}{p_1^0}\Big(\frac{1}{\lambda_k}\,\sin\lambda_k\,y\,\cos\lambda_n\,x+\frac{t_{12}^0}{\lambda_n}\,\cos\lambda_k\,y\,\sin\lambda_n\,x\Big),
$$

$$
\gamma_1=\frac{\nu_{21}\,\lambda_k}{\lambda_n}\,\widetilde{\Psi}_{nk}\,\sin\lambda_k\,y\,\sin\lambda_n\,x, \quad \gamma_2=\widetilde{\Psi}_{nk}\,\cos\lambda_k\,y\,\cos\lambda_n\,x.
$$

точно удовлетворяющее всем граничным условиям при $\lambda_n^2=\nu_{21}\,\lambda_k^2$. Если ввести в рассмотрение определяющий параметр e и параметр нагрузки $\widetilde{\tau}$ по формулам $e=B_{23}/B_{13}=g_{23}/g_{13}$, $\widetilde{\tau}=\tau^2/\big(B_{13}\,B_{13}\big)$, в силу которых $t_{12}^0\,t_{21}^0=\widetilde{\tau}$, $t_{12}^0=e\,t_{21}^0$, то с учетом формулы $p_1^0=1-t_{12}^0\,t_{21}^0$ уравнение (3.35) преобразуется к виду

$$
\begin{aligned}
\big(\widetilde{g}_2\,\lambda_k^2+\widetilde{B}_{13}\,\nu_{21}+2\,\widetilde{B}_{23}\big)\,\widetilde{\tau}^{\,2}-\big(4\,\widetilde{B}_{13}\,\nu_{21}+2\,\widetilde{g}_2\,\lambda_k^2+\\
+2\,\widetilde{B}_{23}+e\,\widetilde{B}_{13}-\frac{e\,\widetilde{B}_{23}}{\nu_{21}}\big)\,\widetilde{\tau}+4\,\widetilde{B}_{13}\,\nu_{21}+\widetilde{g}_2\,\lambda_k^2=0. \qquad (3.36)
\end{aligned}
$$

Путем решения уравнения (3.36) находится положительное бифуркационное значение параметра $\widetilde{\tau}$, минимизацией которого по k определяется минимальная критическая нагрузка $\tau_{\min}^*$ по формуле $\tau_{\min}^*=\sqrt{\widetilde{\tau}_{\min}^*\,B_{13}\,B_{23}}$.

Рассмотрим теперь уравнение (3.30). После подстановки в него выражения (3.34) получим равенство $\big(g_2\,\lambda_k^2+\lambda_n^2+g_{23}\big)\,\Psi_{nk}=0$, откуда следует, что $\Psi_{nk}=0$.

3.3. Анализ результатов расчетов. Из полученных результатов наибольший практический интерес представляют критические значения усилий $t_1^{0\,*}$ или $t_2^{0\,*}$, которые определяются в результате решения уравнений (3.16), (3.24) и (3.25). Так как эти уравнения являются абсолютно эквивалентными, то достаточно провести анализ корней уравнения (3.25), которые при введении в рассмотрение определяющих параметров $\varepsilon_b=h/b$, $\widetilde{G}_{13}=G_{13}/G_{12}$, $\widetilde{G}_{23}=G_{23}/G_{12}$ и обозначений для безразмерных коэффициентов

$$
c_1^k=\frac{12\,\nu_{21}\,\widetilde{G}_{13}}{\pi^2\,\varepsilon_b^2\,\widetilde{g}_2\,k^2}, \quad c_2^k=\frac{12\,\widetilde{G}_{13}}{\pi^2\,\varepsilon_b^2\,\widetilde{g}_2\,k^2}, \quad c_3^k=1+\frac{c_2^k}{2}+\frac{c_1^k}{2}\left(4+r_*\right)
$$

будут определяться по формулам

$$
t_2^{0\,(1,2)}=c_3^k\,\Big(1\pm\sqrt{1-\left(1+c_1^k\right)\left(1+c_1^k+c_2^k\right)/\left(c_3^k\right)^2}\;\Big)/(1+c_1^k+c_2^k). \qquad (3.37)
$$

Проведенные расчеты показали, что при $r_*=0$ (одностороннее сжатие) и $r_*=1$ (двустороннее сжатие пластины одинаковыми усилиями) один из корней уравнения стремится к единице и в случае $\nu_{21}\neq 0$, что соответствует чисто поперечно-сдвиговой ФПУ, а другим корнем описывается изгибно-сдвиговая ФПУ. Значения

Табл. 1

r_*	ν_{21}	$\varepsilon_b = 0.01$		$\varepsilon_b = 0.025$		$\varepsilon_b = 0.05$		$\varepsilon_b = 0.075$	
		$\widetilde{G} = 0.1$	$\widetilde{G} = 0.01$	$\widetilde{G} = 0.1$	$\widetilde{G} = 0.01$	$\widetilde{G} = 0.1$	$\widetilde{G} = 0.01$	$\widetilde{G} = 0.1$	$\widetilde{G} = 0.01$
0	0	0.008	0.076	0.049	0.339	0.170	0.672	0.316	0.822
	0.3	0.153	0.181	0.169	0.304	0.222	0.513	0.292	0.646
1	0	0.008	0.076	0.049	0.339	0.170	0.672	0.316	0.822
	0.3	0.131	0.156	0.146	0.267	0.192	0.467	0.256	0.601

последних минимальны при $k = 1$, и для случая $\widetilde{g}_2 = 10$ и различных значений $\widetilde{G}_{13} = \widetilde{G}_{23} = \widetilde{G}$, ν_{21}, r_*, ε_b они приведены в табл. 1. Из них значения при $\nu_{21} = 0$ соответствуют реализации изгибно-сдвиговой ФПУ, когда $\gamma_1 = 0$, $w \neq 0$, $\gamma_2 \neq 0$ (цилиндрическая ФПУ), а при $\nu_{21} = 0.3$ – цилиндрической изгибно-сдвиговой ФПУ, описывающейся функциями (3.10), в которых необходимо принять $t_1^0 = r_* t_2^0$, $\lambda_n = n\pi/a$, $n = \nu_{12}^{1/2} a/b$. Видно, что для пластин из материала с малой поперечно-сдвиговой жесткостью ($\widetilde{G} = 0.01$), имеющих параметр относительной толщины $\varepsilon_b \geq 0.025$, критическая нагрузка, определяемая по формуле (3.23) и соответствующая первой из указанных ФПУ, становится выше критической нагрузки, определяемой вторым корнем уравнения (3.37). При реализации такой нецилиндрической ФПУ в случае $r_* > 0$ наблюдается также и снижение параметра критической нагрузки.

4. Изгибные и поперечно-сдвиговые формы свободных колебаний пластины со свободными краями

Исследуемые формы колебаний описываются уравнениями

$$
\begin{aligned}
f_1 &= \frac{\partial M_{11}}{\partial x} + \frac{\partial M_{12}}{\partial y} - T_{13} + \rho\,\frac{h^3}{12}\,\omega^2\,\gamma_1 = 0,\\
f_2 &= \frac{\partial M_{12}}{\partial x} + \frac{\partial M_{22}}{\partial y} - T_{23} + \rho\,\frac{h^3}{12}\,\omega^2\,\gamma_2 = 0,\\
f_3 &= \frac{\partial T_{13}}{\partial x} + \frac{\partial T_{23}}{\partial x} + \rho\,h\,\omega^2\,w = 0,
\end{aligned}
\tag{4.1}
$$

где ρ – плотность материала, ω – круговая частота свободных колебаний. Введя в дополнение к (1.2), (1.4) параметр Ω и коэффициент c по формулам $\Omega^2 = \rho\,h\,\omega^2/D_{12}$, $c = h^2/12$, уравнения (4.1) приведем к виду

$$
\begin{aligned}
\widetilde{f}_1 &= g_1\,\frac{\partial^2\gamma_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\gamma_1}{\partial y^2} + \left(1 + \nu_{21}\,g_1\right)\frac{\partial^2\gamma_2}{\partial x\partial y} - \widetilde{B}_{13}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \gamma_1\right) + c\,\Omega^2\,\gamma_1 = 0,\\
\widetilde{f}_2 &= g_2\,\frac{\partial^2\gamma_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\gamma_2}{\partial x^2} + \left(1 + \nu_{12}\,g_2\right)\frac{\partial^2\gamma_1}{\partial x\partial y} - \widetilde{B}_{23}\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \gamma_2\right) + c\,\Omega^2\,\gamma_2 = 0,\\
\widetilde{f}_3 &= \widetilde{B}_{13}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial\gamma_1}{\partial x}\right) + \widetilde{B}_{23}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial\gamma_2}{\partial y}\right) + \Omega^2\,w = 0,
\end{aligned}
\tag{4.2}
$$

для которых граничные условия на кромках $x = 0$, $x = a$ и $y = 0$, $y = b$ следуют из (1.6), (1.7) при $t_1^0 = t_{12}^0 = t_{21}^0 = t_2^0 = 0$. Можно показать, что данным граничным условиям удовлетворяют функции

$$
\begin{aligned}
w = &\Big(-\frac{1}{\lambda_k}\,\widetilde{\Psi}_{nk}\,\sin\lambda_k\,y + \widetilde{w}_{nk}\,\cos\lambda_k\,y\Big)\,\cos\lambda_n\,x + \\
&+ \big(W_{nk}\,\sin\lambda_k\,y + \widetilde{W}_{nk}\,\cos\lambda_k\,y\big)\,\sin\lambda_n\,x, \\
\gamma_1 = &-\lambda_n\,\big(W_{nk}\,\sin\lambda_k\,y + \widetilde{W}_{nk}\,\cos\lambda_k\,y\big)\,\cos\lambda_n\,x - \\
&- \frac{\nu_{21}\,\lambda_k}{\lambda_n}\,\big(\Psi_{nk}\,\cos\lambda_k\,y - \widetilde{\Psi}_{nk}\,\sin\lambda_k\,y\big)\,\sin\lambda_n\,x, \\
\gamma_2 = &\lambda_k(W_{nk}\cos\lambda_k y - \widetilde{W}_{nk}\sin\lambda_k y)\sin\lambda_n x + (\Psi_{nk}\sin\lambda_k y + \widetilde{\Psi}_{nk}\cos\lambda_k y)\cos\lambda_n x
\end{aligned}
\tag{4.3}
$$

в случае выполнения условий:

$$W_{nk} \neq 0 \quad \text{при} \quad \lambda_k = 0, \tag{4.4}$$

$$\Psi_{nk} \neq 0 \quad \text{при} \quad \lambda_k = 0, \tag{4.5}$$

$$\widetilde{\Psi}_{nk} \neq 0 \quad \text{при} \quad \lambda_n^2 = \nu_{21}\,\lambda_k^2, \tag{4.6}$$

$$\widetilde{W}_{nk} \neq 0 \quad \text{при} \quad \lambda_k^2 = \nu_{12}\,\lambda_n^2. \tag{4.7}$$

В соответствии с методикой [1, 2] и структурой функций (4.3) для интегрирования уравнений (4.2) необходимо составить следующие уравнения метода Бубнова:

$$
\begin{aligned}
&\int\limits_0^a\int\limits_0^b\Big(-\frac{1}{\lambda_k}\,\widetilde{f}_3\,\sin\lambda_k\,y\,\cos\lambda_n\,x + \frac{\nu_{21}\,\lambda_k}{\lambda_n}\,\widetilde{f}_1\,\sin\lambda_k\,y\,\sin\lambda_n\,x + \\
&\qquad + \widetilde{f}_2\,\cos\lambda_k\,y\,\cos\lambda_n\,x\Big)\,d\,x\,d\,y = 0 \quad \text{при} \quad \delta\,\widetilde{\Psi}_{nk} \neq 0,
\end{aligned}
\tag{4.8}
$$

$$\int\limits_0^a\int\limits_0^b \widetilde{f}_3\,\cos\lambda_k\,y\,\cos\lambda_n\,x\,dx\,dy = 0 \quad \text{при} \quad \delta\,\widetilde{w}_{nk} \neq 0, \tag{4.9}$$

$$
\begin{aligned}
&\int\limits_0^a\int\limits_0^b\big(\widetilde{f}_3\,\sin\lambda_k\,y\,\sin\lambda_n\,x - \lambda_n\,\widetilde{f}_1\,\sin\lambda_k\,y\,\cos\lambda_n\,x + \\
&\qquad + \lambda_k\,\widetilde{f}_2\,\cos\lambda_k\,y\,\sin\lambda_n\,x\big)\,d\,x\,d\,y = 0 \quad \text{при} \quad \delta\,W_{nk} \neq 0,
\end{aligned}
\tag{4.10}
$$

$$
\begin{aligned}
&\int\limits_0^a\int\limits_0^b\big(\widetilde{f}_3\,\cos\lambda_k\,y\,\sin\lambda_n\,x - \lambda_n\,\widetilde{f}_1\,\cos\lambda_k\,y\,\cos\lambda_n\,x - \\
&\qquad - \lambda_k\,\widetilde{f}_2\,\sin\lambda_k\,y\,\sin\lambda_n\,x\big)\,dx\,dy = 0 \quad \text{при} \quad \delta\,\widetilde{W}_{nk} \neq 0,
\end{aligned}
\tag{4.11}
$$

$$\int\limits_0^a\int\limits_0^b\Big(-\frac{\nu_{21}\lambda_k}{\lambda_n}\widetilde{f}_1\cos\lambda_k y\,\sin\lambda_n x + \widetilde{f}_2\sin\lambda_k y\,\cos\lambda_n x\Big)\,dx\,dy = 0 \;\text{ при }\; \delta\Psi_{nk} \neq 0, \tag{4.12}$$

в которых

$$\widetilde{f}_1 = \Big[g_1\,\lambda_n\big(\lambda_n^2 - \nu_{21}\,\lambda_k^2\big) - c\,\lambda_n\,\Omega^2\Big]\,\big(W_{nk}\,\sin\lambda_k\,y\,\cos\lambda_n\,x + \widetilde{W}_{nk}\cos\lambda_k y\,\cos\lambda_n x\big) +$$
$$+\Big(\frac{\nu_{21}\,\lambda_k^3}{\lambda_n} - \lambda_k\,\lambda_n + g_{13}\,\frac{\nu_{21}\lambda_k}{\lambda_n} - \frac{\nu_{21}\,\lambda_k}{\lambda_n}\,c\,\Omega^2\Big)\,\Psi_{nk}\,\cos\lambda_k\,y\,\sin\lambda_n\,x +$$
$$+\Big[-\frac{\nu_{21}\,\lambda_k^3}{\lambda_n} + \lambda_k\,\lambda_n - g_{13}\,\Big(\frac{\lambda_n}{\lambda_k} + \frac{\nu_{21}\,\lambda_k}{\lambda_n}\Big) + \frac{\nu_{21}\,\lambda_k}{\lambda_n}\,c\,\Omega^2\Big]\widetilde{\Psi}_{nk}\,\sin\lambda_k\,y\,\sin\lambda_n\,x +$$
$$+\,g_{13}\,\lambda_n\,\widetilde{w}_{nk}\,\cos\lambda_k\,y\,\sin\lambda_n\,x, \quad (4.13)$$

$$\widetilde{f}_2 = \Big[g_2\,\lambda_k\big(-\lambda_k^2 + \nu_{12}\lambda_n^2\big) - 2\lambda_k g_{23} + c\,\lambda_k\,\Omega^2\Big](W_{nk}\cos\lambda_k y\sin\lambda_n x -$$
$$-\,\widetilde{W}_{nk}\sin\lambda_k y\sin\,\lambda_n x) - (\widetilde{g}_2\,\lambda_k^2 + \lambda_n^2 - \nu_{21}\,\lambda_k^2 + g_{23} - c\,\Omega^2)\,\Psi_{nk}\sin\lambda_k y\,\cos\lambda_n x -$$
$$-\,(\widetilde{g}_2\,\lambda_k^2 + \lambda_n^2 - \nu_{21}\,\lambda_k^2 - c\,\Omega^2\,)\widetilde{\Psi}_{nk}\,\cos\lambda_k\,y\,\cos\lambda_n\,x +$$
$$+\,g_{23}\,\lambda_k\,\widetilde{w}_{nk}\,\sin\lambda_k\,y\,\cos\lambda_n\,x, \quad (4.14)$$

$$\widetilde{f}_3 = \Big[\widetilde{B}_{13}\,\frac{\lambda_n^2}{\lambda_k} + \lambda_k\,\nu_{21}\,\widetilde{B}_{13} - \frac{\Omega^2}{\lambda_k}\Big]\,\widetilde{\Psi}_{nk}\sin\lambda_k\,y\,\cos\lambda_n\,x -$$
$$-\,(\widetilde{B}_{13}\,\lambda_n^2 + \widetilde{B}_{23}\,\lambda_k^2 - \Omega^2)\,\widetilde{w}_{nk}\,\cos\lambda_k\,y\,\cos\lambda_n\,x - \big(2\,\lambda_k^2\,\widetilde{B}_{23} - \Omega^2\big)\,(W_{nk}\,\sin\lambda_k\,y +$$
$$+\,\widetilde{W}_{nk}\,\cos\lambda_k\,y)\,\sin\lambda_n\,x + (\widetilde{B}_{23} - \nu_{21}\,\widetilde{B}_{13})\,\lambda_k\Psi_{nk}\,\cos\lambda_k\,y\,\cos\lambda_n\,x, \quad (4.15)$$

При подстановке выражений (4.13)–(4.15) в (4.8) приходим к уравнению

$$\Big\{-\Big(\widetilde{B}_{13}\,\frac{\lambda_n^2}{\lambda_k^2} + \nu_{21}\,g_{13}\Big) + \frac{\Omega^2}{\lambda_k^2} + \frac{\nu_{21}\lambda_k}{\lambda_n}\Big[-\frac{\nu_{21}\lambda_k^3}{\lambda_n} + \lambda_n\,\lambda_k - \widetilde{B}_{13}\,\Big(\frac{\lambda_n}{\lambda_k} + \frac{\nu_{21}\lambda_k}{\lambda_n}\Big) +$$
$$+\,\frac{\nu_{21}\lambda_k}{\lambda_n}\,c\,\Omega^2\Big] - \big(\widetilde{g}_2\,\lambda_k^2 + \lambda_n^2 - \nu_{21}\,\lambda_k^2 - c\,\Omega^2\big)\Big\}\widetilde{\Psi}_{nk} = 0. \quad (4.16)$$

в котором в соответствии с (4.6) $\delta\,\widetilde{\Psi}_{nk} \neq 0$ только при условии $\lambda_n^2 = \nu_{21}\,\lambda_k^2$. При удовлетворении этому условию из (4.16) следует формула для определения Ω^2:

$$\Omega^2 = \frac{\big(\widetilde{g}_2\,\lambda_k^2 + 4\,\nu_{21}\,\widetilde{B}_{13}\big)\,\lambda_k^2}{1 + c\,(1 + \nu_{21})\,\lambda_k^2} = \frac{\widetilde{g}_2\,\lambda_k^4 + 4\,\widetilde{B}_{13}\,\lambda_n^2}{1 + c\,(\lambda_n^2 + \lambda_k^2)}\,. \quad (4.17)$$

Колебания с такими частотами описываются функциями

$$w = -\frac{1}{\lambda_k}\widetilde{\Psi}_{nk}\sin\lambda_k y\cos\lambda_n x,$$

$$\gamma_1 = \frac{\nu_{21}\lambda_k}{\lambda_n}\widetilde{\Psi}_{nk}\sin\lambda_k y\sin\lambda_n x, \quad \gamma_2 = \widetilde{\Psi}_{nk}\cos\lambda_k y\cos\lambda_n x$$

с параметрами волнообразования λ_n и λ_k, связанными зависимостью $\lambda_n^2 = \nu_{21}\,\lambda_k^2$.

Аналогичным образом из (4.10) при подстановке в это уравнение выражений (4.13)–(4.15) следует, что

$$\Big[4\lambda_k^2 g_{23} + \Omega^2 - g_1\lambda_n^2(\lambda_n^2 - \nu_{21}\,\lambda_k^2) + c\lambda_n^2\Omega^2 + g_2\lambda_k^2(-\lambda_k^2 + \nu_{12}\,\lambda_n^2) - c\lambda_k^2\Omega^2\Big]W_{nk} = 0,$$

которое в силу условия (4.4) приводит к формуле

$$\Omega^2 = g_1\,\lambda_n^4/(1 + c\,\lambda_n^2). \tag{4.18}$$

Так как соответствующие этим частотам формы свободных колебаний в силу того, что $\lambda_k = 0$, описываются функциями $w = 0$, $\gamma_1 = 0$, $\gamma_2 = 0$, то рассматриваемое решение является тривиальным ($\Omega^2 = 0$).

Из (4.11) при подстановке выражений (4.13)–(4.15) следует уравнение

$$\left[4\lambda_k^2\,g_{23} + (1 + c\,\lambda_n^2 + c\,\lambda_k^2)\Omega^2 - g_1\,\lambda_n^2\,(\lambda_n^2 - \nu_{21}\,\lambda_k^2) + g_2\,\lambda_k^2\,(-\lambda_k^2 + \nu_{12}\,\lambda_n^2)\right]\widetilde{W}_{nk} = 0. \tag{4.19}$$

Нетривиальным решениям $\widetilde{W}_{nk} \neq 0$ в соответствии с условиями (4.7) будут отвечать частоты колебаний

$$\Omega^2 = \frac{\left(\widetilde{g}_1\,\lambda_n^2 + 4\nu_{12}\,\widetilde{B}_{23}\right)\lambda_n^2}{1 + c\,(1+\nu_{12})\,\lambda_n^2} = \frac{\widetilde{g}_1\,\lambda_n^4 + 4\,\widetilde{B}_{23}\,\lambda_k^2}{1 + c\,(\lambda_n^2 + \lambda_k^2)}, \tag{4.20}$$

по структуре совпадающие с частотами (4.17) и следующие из (4.19) при $\lambda_k^2 = \nu_{12}\,\lambda_n^2$. Колебания с такими частотами имеют форму

$$w = \widetilde{W}_{nk}\,\cos\lambda_k\,y\,\sin\lambda_n\,x, \quad \gamma_1 = -\lambda_n\,\widetilde{W}_{nk}\,\cos\lambda_k\,y\,\cos\lambda_n\,x,$$
$$\gamma_2 = -\lambda_k\,\widetilde{W}_{nk}\,\sin\lambda_k\,y\,\sin\lambda_n\,x, \quad \lambda_k^2 = \nu_{12}\,\lambda_n^2.$$

И, наконец, при использовании выражений (4.13)–(4.15) из (4.9) и (4.12) получается следующая система однородных алгебраических уравнений

$$\begin{gathered}
-\left(\widetilde{B}_{13}\,\lambda_n^2 + \widetilde{B}_{23}\,\lambda_k^2 - \Omega^2\right)\widetilde{w}_{nk} + \lambda_k\left(\widetilde{B}_{23} - \nu_{21}\,\widetilde{B}_{13}\right)\Psi_{nk} = 0 \quad \text{при} \quad \widetilde{w}_{nk} \neq 0,\\
\lambda_k\left(\widetilde{B}_{23} - \nu_{21}\,\widetilde{B}_{13}\right)\widetilde{w}_{nk} + \Big[\nu_{21}\,\lambda_k^2\left(2\,\lambda_n^2 - \nu_{21}\,\lambda_k^2 - \widetilde{B}_{13}\,\nu_{21}\right) - \widetilde{B}_{23}\,\lambda_n^2 - \\
-\lambda_n^4 - g_2\,\lambda_k^2\,\lambda_n^2 + \left(\lambda_n^2 + \nu_{21}\,\lambda_k^2\right)c\,\Omega^2\Big]\Psi_{nk} = 0 \quad \text{при} \quad \Psi_{nk} \neq 0,
\end{gathered} \tag{4.21}$$

причем в соответствии с (2.11) $\Psi_{nk} \neq 0$ только при выполнении условия $\lambda_k = 0$, а на $\widetilde{w}_{nk}$ никаких условий не накладывается. В связи с этим система уравнений (4.21) имеет место только при $\Psi_{nk} = 0$ и приводится к виду

$$\left(g_{13}\,\lambda_n^2 + g_{23}\,\lambda_k^2 - \Omega^2\right)\widetilde{w}_{nk} = 0. \tag{4.22}$$

Из (4.22) следует формула для определения частот

$$\Omega^2 = g_{13}\,\lambda_n^2 + g_{23}\,\lambda_k^2 \tag{4.23}$$

колебаний, являющихся чисто поперечно-сдвиговыми и имеющих форму

$$w = \widetilde{w}_{nk}\,\cos\lambda_k\,y\,\cos\lambda_n\,x, \quad \gamma_1 = 0, \quad \gamma_2 = 0.$$

Такие колебания могут реализоваться в пластине лишь при малых значениях параметров G_{13}/E_1 и G_{23}/E_2.

Следует отметить, что спектр частот свободных колебаний определяется не только выведенными формулами (4.17), (4.20) и (4.23). Более того, установленные частоты изгибно-сдвиговых форм колебаний и не являются самыми низшими, на что указывает наличие слагаемых, учитывающих поперечные сдвиги, в числителях, а не в знаменателях формул (4.17) и (4.20). Поэтому полученные в данном разделе результаты в большей степени представляют лишь теоретический интерес, так как известно, что учет поперечных сдвигов в пластинах приводит к снижению, а не к повышению частот изгибных форм колебаний. В свою очередь, и существование таких форм колебаний с частотами (4.17) и (4.20) требует соответствующего обоснования, что может быть выполнено только на основе использования более строгих и точных уравнений, чем уравнения (4.2) теории типа Тимошенко.

Если считать, что функции w, γ_1, γ_2 имеют нулевую изменяемость по x и y, то из уравнений (4.2) в силу соотношений $\gamma_1 = \mathrm{const} \neq 0$, $\gamma_2 = \mathrm{const} \neq 0$ следуют еще две формулы $\Omega^2 = g_{13}/c^2$, $\Omega^2 = g_{23}/c^2$, аналогичные выведенным в [6] для трехслойных пластин.

Если же принять, что нулевую изменяемость функции w, γ_1, γ_2 имеют только в направлении оси y, то уравнения (4.2) принимают вид

$$\begin{aligned} \widetilde{f}_1 &= g_1 \frac{\partial^2 \gamma_1}{\partial x^2} - g_{13} \Big(\frac{\partial w}{\partial x} + \gamma_1 \Big) + c\,\Omega^2 \gamma_1 = 0, \\ \widetilde{f}_3 &= g_{13} \Big(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial \gamma_1}{\partial x} \Big) + \Omega^2 w = 0. \end{aligned} \tag{4.24}$$

Для этих уравнений функции, удовлетворяющие при $x = 0$, $x = a$ граничным условиям $\partial\gamma_1/\partial x = 0$, $\partial w/\partial x + \gamma_1 = 0$, могут быть построены в виде

$$w = -\frac{1}{\lambda_n} W_{n0} \sin \lambda_n x, \quad \gamma_1 = W_{n0} \cos \lambda_n x. \tag{4.25}$$

В соответствии с их структурой в рассматриваемом случае необходимо составить уравнение метода Бубнова следующего вида

$$\int\limits_0^a \Big(\widetilde{f}_1 \cos \lambda_n x - \frac{1}{\lambda_n} \widetilde{f}_3 \sin \lambda_n x \Big) dx = 0, \tag{4.26}$$

где

$$\widetilde{f}_1 = \big(g_1 \lambda_n^2 + c\,\Omega^2 \big) W_{n0} \cos \lambda_n x, \quad \widetilde{f}_3 = -\frac{\Omega^2}{\lambda_n} W_{n0} \sin \lambda_n x. \tag{4.27}$$

Подстановка выражений (4.27) в уравнение (4.26) при условии $\widetilde{W}_{n0} \neq 0$ приводит к формуле

$$\Omega^2 = g_1 \lambda_n^4 / (1 + c\,\lambda_n^2), \tag{4.28}$$

полностью совпадающей с формулой (4.18), но не следующей из уравнений (4.24) при подстановке в них функций (4.25). Следовательно, построенные функции (4.25), приводящие к выполнению равенства $\gamma_1 + \partial w/\partial x = 0$ по всей длине пластины и к формуле (4.28) при использовании метода Бубнова, в задаче о свободных колебаниях не являются точным решением исходных уравнений (4.24), в то время как в аналогичной задаче об устойчивости пластины построенные функции (3.21) приводят к точной формуле (3.19) как при их подстановке в уравнения (3.20), так и при использовании метода Бубнова в форме уравнения (3.22).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 09-01-00323-а) и по федеральной целевой программе «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» (мероприятие 1.1 «Проведение научных исследований коллективами научно-образовательных центров», № 2009-1.1-112-049-024. Гос. контракт № 02.740.11.0205 от 7 июля 2009 г.).

Summary

V.N. Paimushin, T.V. Polyakova. Exact Solutions of the Problem of Flexural and Cross-Section-Shear Buckling Modes and Free Oscillations of the Rectangular Orthotropic Plate with Loose Edges.

The article regards linearized problems about elastic stability of an orthotropic rectangular plate with loose edges under the influence of running forces of the invariable directions which cause in a plate either a single-sided and double-end compression, or pure shear. For stating the problem we use the known equations of the specified theory of plates of Timoshenko type considering the cross-section shears. On the basis of double trigonometrical base-load functions such analytical solutions of the specified problems are presented which fulfill all static boundary conditions. Depending on the structure of these solutions in order to conform to the equations of perturbed equilibrium of a plate the corresponding equations of Bubnov method are made, proceeding from which the bifurcation values of operating forces are defined and buckling modes corresponding to them are ultimately determined. On the basis of the stated method some analytical solutions are also discovered for the problem of small free oscillations of a plate with loose edges.

Key words: linearized stability problem, rectangular plate, double-end compression, pure shear, flexural and cross-section-shear buckling modes, free oscillations, loose edges, trigonometrical base-load functions, analytical solutions, Bubnov method.

Литература

1. *Паймушин В.Н.* Точные и приближенные решения задачи о плоских формах свободных колебаний прямоугольной пластины со свободными краями, основанные на тригонометрических базисных функциях // Механика композитных материалов. – 2005. – Т. 41, № 4. – С. 461–488.
2. *Паймушин В.Н., Полякова Т.В.* Точные аналитические решения задачи о плоских формах потери устойчивости прямоугольной ортотропной пластины с незакрепленными краями в условиях двухстороннего нагружения // Механика композитных материалов. – 2007. – Т. 43, № 2. – С. 149–170.
3. *Паймушин В.Н., Полякова Т.В.* Точные аналитические решения трехмерной задачи о свободных колебаниях ортотропного прямоугольного параллелепипеда со свободными гранями // Механика композитных материалов и конструкций. – М.: Ин-т прикл. механики РАН, 2006. – Т. 12, № 3. – С. 317–336.
4. *Болотин В.В.* Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. – М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1961. – 340 с.
5. *Рикрадс Р.Б., Тетерс Г.А.* Устойчивость оболочек из композитных материалов. – Рига: Зинатне, 1974. – 310 с.
6. *Паймушин В.Н., Хусаинов В.Р.* Уравнения и классификация свободных и собственных колебаний симметричных по толщине трехслойных пластин с трансверсально-мягким заполнителем // Механика композитных материалов и конструкций. – М.: Ин-т прикл. механики РАН, 2001. – Т. 7, № 3. – С. 310–317.

Поступила в редакцию
20.10.09

Паймушин Виталий Николаевич – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой сопротивления материалов Казанского государственного технического университета им. А.Н. Туполева.

E-mail: *lukankin@dsm.kstu-kai.ru*

Полякова Татьяна Витальевна – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник научно-технического центра проблем динамики и прочности при Казанском государственном техническом университете им. А.Н. Туполева.

E-mail: *dsm@dsm.kstu-kai.ru*