УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ КАЗАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
Том 152, кн. 1 Физико-математические науки *2010*

УДК 517.544

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА РИМАНА НА ЗАМКНУТОЙ НЕСПРЯМЛЯЕМОЙ КРИВОЙ И ПРЕОБРАЗОВАНИЕ КОШИ

Б.А. Кац

Аннотация

В работе установлено, что решения краевой задачи Римана на замкнутой неспрямляемой кривой представимы в виде преобразований Коши некоторых распределений.

Ключевые слова: неспрямляемая кривая, краевая задача Римана, преобразование Коши.

---

1. Настоящая работа посвящена следующей хорошо известной краевой задаче. Пусть Γ есть замкнутая жорданова кривая на комплексной плоскости $\mathbf{C}$, разбивающая ее на конечную область D^+ и содержащую бесконечно удаленную точку область D^-. Требуется найти голоморфную в $\overline{\mathbf{C}} \setminus \Gamma$ функцию $\Phi(z)$, имеющую граничные значения $\lim\limits_{D^+ \ni z \to t} \Phi(z) \equiv \Phi^+(t)$ и $\lim\limits_{D^- \ni z \to t} \Phi(z) \equiv \Phi^-(t)$ в каждой точке $t \in \Gamma$, исчезающую в бесконечно удаленной точке и удовлетворяющую условию граничного сопряжения

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) + g(t), \quad t \in \Gamma, \tag{1}$$

где G и g – заданные функции. Эта задача, известная как задача Римана, имеет обширные приложения. Ее классическая теория (см. [1, 2]) основана на использовании интеграла типа Коши

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z}. \tag{2}$$

В частности, для кусочно-гладкой кривой Γ этот интеграл с плотностью f, удовлетворяющей условию Гельдера с показателем $\nu \in (0, 1]$, дает единственное решение простейшего случая задачи Римана – задачи о скачке:

$$\Phi^+(t) - \Phi^-(t) = f(t), \quad t \in \Gamma. \tag{3}$$

Если кривая Γ – неспрямляемая, то интеграл по ней, вообще говоря, не определен. Но краевая задача Римана сохраняет смысл и в этой ситуации. В 1980-е годы мы показали (см., например, [3]), что она разрешима, если граничные данные $G(t)$ и $g(t)$ удовлетворяют условию Гельдера с показателем

$$\nu > \frac{1}{2} \operatorname{Dmb} \Gamma, \tag{4}$$

где $\operatorname{Dmb} \Gamma$ есть верхняя метрическая размерность (она же размерность Минковского, она же box dimension; см. [4, 5]) кривой Γ, определяемая равенством

$$\operatorname{Dmb} \Gamma = \limsup_{\varepsilon \to 0} \frac{\log N(\varepsilon, \Gamma)}{-\log \varepsilon}. \tag{5}$$

Здесь $N(\varepsilon, \Gamma)$ есть наименьшее число кругов диаметра ε, покрывающих множество Γ. При этом не были получены представления решений задачи в форме контурных интегралов. В настоящей работе мы получим такие представления.

2. В последние десятилетия появилось немало работ (см., например, [6–8]), посвященных свойствам преобразования Коши различных мер. Если μ есть мера на комплексной плоскости с компактным носителем S, то ее преобразование Коши – это интеграл $\mathcal{C}\mu := \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int \frac{d\mu(\zeta)}{\zeta - z}$, называемый также потенциалом Коши. В частном случае, когда S есть спрямляемая кривая, $d\mu = f(t)\,dt$ и $f(t)$ есть интегрируемая (относительно длины S) функция, он превращается в интеграл типа Коши. С другой стороны, если φ есть распределение с компактным носителем S на комплексной плоскости, то его преобразование Коши можно определить равенством

$$\mathcal{C}\varphi := \frac{1}{2\pi i}\left\langle \varphi, \frac{1}{\zeta - z}\right\rangle,$$

где $z \notin S$. Последнее равенство понимается как применение φ к $\dfrac{1}{\zeta - z}$ как к функции переменной ζ либо как свертка $\varphi * E$, где E есть распределение $\dfrac{1}{2\pi i\zeta}$. Мы отождествляем каждую заданную на комплексной плоскости функцию $F(\zeta)$ с распределением $F : C_0^\infty \ni \omega \mapsto \ \mapsto \displaystyle\iint F(\zeta)\omega(\zeta)\,d\zeta\,d\overline{\zeta}$, если последний интеграл имеет смысл. Поскольку E есть фундаментальное решение дифференциального оператора $\overline{\partial}$ (иначе говоря, $\overline{\partial}E = \delta_0$, см. [9]), то $\overline{\partial}\mathcal{C}\varphi = \varphi$ и функция $\mathcal{C}\varphi(z)$ голоморфна в $\overline{\mathbf{C}} \setminus S$. Очевидно, эта функция равна нулю в точке ∞.

В основном нас будет интересовать случай $\varphi = \overline{\partial}F$, где F – голоморфная в $\mathbf{C} \setminus \Gamma$ функция, локально интегрируемая в $\mathbf{C}$. Носитель такого распределения лежит на кривой Γ. Если эта кривая – спрямляемая, а F имеет на ней непрерывные граничные значения с обеих сторон $F^\pm$, то нетрудно убедиться, что распределение $\varphi = \overline{\partial}F$ действует по формуле

$$\langle \varphi, \omega\rangle = \int\limits_{\Gamma} (F^+(\zeta) - F^-(\zeta))\,\omega(\zeta)\,d\zeta.$$

Поэтому для неспрямляемой кривой Γ это распределение может рассматриваться как обобщенное интегрирование по кривой Γ с весом $F^+(\zeta) - F^-(\zeta)$. Интегрирование с единичным весом получается, например, когда F есть характеристическая функция $\gamma^+(z)$ области D^+, равная единице в D^+ и нулю в D^-. Все такие распределения мы будем называть интегрированиями[1] и обозначать $\displaystyle\int^{[F]}$. При этом будем писать $\displaystyle\int^{[F]} \omega\,d\zeta$ вместо $\left\langle \displaystyle\int^{[F]}, \omega \right\rangle$. Дифференциал $d\zeta$ здесь служит для указания переменной, по которой производится интегрирование.

3. Интегрирования определены выше как распределения, то есть функционалы на C^∞. Покажем, что их можно продолжить по непрерывности на более обширные

[1]С другими подходами к вопросу об интегрировании по неспрямляемым кривым можно ознакомиться в работах [10–13].

пространства. Для этого мы используем понятие аппроксимационной размерности неспрямляемой кривой, введенное в [14].

В определении этого понятия используются следующие две метрические характеристики конечной области P со спрямляемой границей: $\lambda(P)$ означает длину ее границы ∂P, а $w(P)$ – диаметр наибольшего круга, содержащегося в P.

Пусть $\mathcal{P}^+ = \{P_n, n = 1, 2, \dots\}$ есть некоторое разложение D^+ на многоугольники, то есть последовательность неналегающих многоугольников таких, что $\overline{P_n} \subset \subset \overline{D^+}$, $n = 1, 2, \dots$, $\overline{\bigcup\limits_{n\le 1} P_n} = \overline{D^+}$, и любое замкнутое множество $\overline{A} \subset D^+$ пересекает лишь конечное число многоугольников P_n. Без ограничения общности можно считать, что при любом n одна из сторон многоугольника P_{n+1} принадлежит границе объединения $\bigcup\limits_{k=1}^{n} \overline{P_k}$. Тогда замкнутые ломаные $\Gamma_n^+ := \partial \bigcup\limits_{1\le k\le n} \overline{P_k}$ сходятся к Γ из области D^+. Назовем d-массой $\mathcal{P}^+$ сумму $\mathcal{M}_d(\mathcal{P}^+) := \sum\limits_{n\ge 1} \lambda(P_n) w^{d-1}(P_n)$.

Определение 1. Пусть $N^+(\Gamma)$ есть множество всех таких чисел d, что область D^+ имеет разложение $\mathcal{P}^+$ с конечной d-массой $\mathcal{M}_d(\mathcal{P}^+)$. Тогда $\operatorname{Dma}^+ \Gamma := \inf N^+(\Gamma)$ есть внутренняя аппроксимационная размерность кривой Γ.

Аналогично, пусть $\mathcal{P}^- = \{P_n,\, n = 0, 1, 2, \dots\}$ есть разложение бесконечной области D^- на многоугольники, причем многоугольная область P_0 содержит внутри себя ∞, а все остальные многоугольники конечны. Такое разложение порождает последовательность ломаных Γ_n^-, сходящихся к Γ из D^-. Полагаем $\mathcal{M}_d(\mathcal{P}^-) := := \sum\limits_{n\ge 1} \lambda(P_n) w^{d-1}(P_n)$.

Определение 2. Пусть $N^-(\Gamma)$ есть множество всех таких чисел d, что область D^- имеет разложение $\mathcal{P}^-$ с конечной d-массой $\mathcal{M}_d(\mathcal{P}^-)$. Тогда $\operatorname{Dma}^- \Gamma := \inf N^-(\Gamma)$ есть внешняя аппроксимационная размерность кривой Γ.

Аппроксимационной размерностью Γ называется величина

$$\operatorname{Dma} \Gamma := \min\{\operatorname{Dma}^+ \Gamma, \operatorname{Dma}^- \Gamma\}.$$

Теорема 1.
i. Для любой плоской кривой Γ выполняются неравенства

$$\operatorname{Dma}^+ \Gamma \le \operatorname{Dmb} \Gamma, \quad \operatorname{Dma}^- \Gamma \le \operatorname{Dmb} \Gamma. \tag{6}$$

ii. Для любого числа $d \in (1, 2)$ можно указать кривые Γ_1 и Γ_2 такие, что $\operatorname{Dmb} \Gamma_1 = \operatorname{Dmb} \Gamma_2 = d$, но $\operatorname{Dma}^- \Gamma_1 < d$ и $\operatorname{Dma}^- \Gamma_2 < d$.

Доказательство. Неравенства (6) доказываются точно так же, как в [14] доказывалось неравенство $\operatorname{Dma} \Gamma \le \operatorname{Dmb} \Gamma$. Второе утверждение теоремы также можно доказать, повторяя рассуждения из [14], но здесь мы применим несколько иную конструкцию.

Пусть $\{a_k\}$ есть убывающая последовательность положительных чисел такая, что $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k = 1$. Положим $x_n = \sum\limits_{k=n}^{\infty} a_k$ и будем считать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ расходится. Рассмотрим вертикальные отрезки $\sigma_n := \{z = x_n + iy : 0 \le y \le x_n\}$ и найдем верхнюю метрическую размерность множества $\sigma := \overline{\bigcup\limits_{n\ge 1} \sigma_n}$. Разобьем плоскость на квадраты со стороной $\varepsilon > 0$ и обозначим через $N^\diamond(\varepsilon, \sigma)$ число таких квадратов, пересекающихся с σ. Хорошо известно, что $N(\varepsilon, A) \asymp N^{\diamond}(\varepsilon, A)$ для любого компакта A, и поэтому мы можем заменить N на $N^{\diamond}$ в равенстве (5). Пусть номер $n(\varepsilon)$ определяется неравенством $a_{n(\varepsilon)+1} \leq \varepsilon < a_{n(\varepsilon)}$. Тогда все отрезки с номерами $n \geq n(\varepsilon)$ покрываются N_1 квадратами, заполняющими половину квадрата $[0, x_{n(\varepsilon)}] \times [0, x_{n(\varepsilon)}]$ под его диагональю; отсюда $N_1 \asymp \varepsilon^{-2} x^2_{n(\varepsilon)}$. Остальные отрезки σ_k, $k = 1, 2, \ldots, n(\varepsilon) - 1$, покрываются N_2 квадратами, причем никакой квадрат не может пересекаться с двумя или более отрезками из этого списка. Поэтому $N_2 \asymp \varepsilon^{-1} \sum\limits_{k=1}^{n(\varepsilon)-1} x_k$ и

$$N^{\diamond}(\varepsilon, \sigma) \asymp \varepsilon^{-2} x^2_{n(\varepsilon)} + \varepsilon^{-1} \sum_{k=1}^{n(\varepsilon)-1} x_k.$$

Входящие сюда величины легко оцениваются, что позволяет вычислить $\operatorname{Dmb} \sigma$ для многих конкретных последовательностей $\{a_k\}$. В частности, справедлива

Лемма 1. *Если* $x_n \asymp \dfrac{1}{n^{\alpha}}$ *и* $a_n \asymp \dfrac{1}{n^{\alpha+1}}$, *где* $0 < \alpha < 1$, *то* $\operatorname{Dmb} \sigma = \dfrac{2}{1+\alpha}$.

В частности, условия леммы выполнены при $x_n = \dfrac{1}{n^{\alpha}}, n = 1, 2, \ldots$.

Теперь зафиксируем $\beta > 1$ и рассмотрим систему прямоугольников $R_n := \{z = x + iy : x_n - a_n^{\beta} < x < x_n, 0 \leq y < x_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$ Пусть $R := \bigcup\limits_{n \geq 1} R_n$. Положим $D_1^+ := \{z = x + iy : 0 < x < 1, -1 < y < 0\} \bigcup R$ (квадрат с серией прямоугольных аппендиксов), $D_2^+ := \{z = x + iy : 0 < x < 1, 0 < y < 1\} \setminus R$ (квадрат с серией прямоугольных вырезов) и $\Gamma_{1,2} = \partial D^+_{1,2}$. Из леммы 1 нетрудно вывести, что $\operatorname{Dmb} \Gamma_1 = \operatorname{Dmb} \Gamma_2 = 2(1+\alpha)^{-1}$. Положим $\alpha = 2d^{-1} - 1$; тогда

$$\operatorname{Dmb} \Gamma_1 = \operatorname{Dmb} \Gamma_2 = d.$$

Далее, область D_1^+ имеет разложение, состоящее из квадрата $\{z = x + iy : 0 < x < 1, -1 < y < 0\}$ и прямоугольников R_n, а дополняющая D_2^+ область D_2^- – разложение, состоящее из тех же прямоугольников и дополнения квадрата $\{z = x + iy : 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$ до всей комплексной плоскости. Тогда p-массы обоих этих разложений содержат ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda(R_n) w^{p-1}(R_n)$, сходящийся одновременно с рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n a_n^{\beta(p-1)}$. Но этот ряд сходится при $p > 1 + \dfrac{1-\alpha}{\beta(1+\alpha)} = 1 + \beta^{-1}(d-1)$. Значит,

$$\operatorname{Dma}^+ \Gamma_1 \leq 1 + \frac{d-1}{\beta} < d, \quad \operatorname{Dma}^- \Gamma_2 \leq 1 + \frac{d-1}{\beta} < d,$$

что и завершает доказательство теоремы 1.

□

Для любого ограниченного множества $A \subset \mathbf{C}$ обозначим через $H(A, \nu)$ множество всех заданных на нем функций f, удовлетворяющих условию

$$h_{\nu}(f, A) := \sup \left\{ \frac{|f(t') - f(t'')|}{|t' - t''|^{\nu}} : t', t'' \in A, t' \neq t'' \right\} < \infty, \tag{7}$$

то есть условию Гельдера с показателем $\nu \in (0, 1]$. Коэффициент $h_{\nu}(f, A)$ является полунормой в $H(A, \nu)$. В качестве нормы можно взять сумму $\|f\|_{H(A,\nu)} := |f(t_0)| + h_{\nu}(f, A)$, где $t_0 \in A$ – фиксированная точка. Хорошо известно (см., например,

[15]), что замыкание C^∞ по норме $H(A,\nu)$ не совпадает с $H(A,\nu)$, но содержит все пространства $H(A,\nu')$ с $\nu'>\nu$. Обозначим $H^*(A,\nu) := \bigcup\limits_{\nu'>\nu} H(A,\nu')$. Выберем последовательность показателей $\{\nu'_j\}$ такую, что $\nu'_j > \nu'_{j+1} > \nu, j = 1,2,\dots,$ и $\lim\limits_{j\to\infty} \nu'_j = \nu$. Семейство, состоящее из полунорм $h_{\nu'_j}(f,A), j = 1,2,\dots,$ и полунормы $|f(t_0)|$, превращает $H^*(A,\nu)$ в пространство Фреше, в котором множество C^∞ является плотным. Аналогичным образом можно задать структуру пространства Фреше на множестве $H_*(A,\nu) := \bigcap\limits_{\nu'<\nu} H(A,\nu')$.

Введем еще одно обозначение. Всюду ниже считаем, что функция $F(z)$ голоморфна в $\mathbf{C}\setminus\Gamma$ и ограничена. При этом $F^+(z)$ (соответственно $F^-(z)$) обозначает функцию, равную $F(z)$ в области D^+ (соответственно в D^-) и нулю в дополнении замыкания соответствующей области.

Теорема 2. *Если* $\mathrm{Dma}^\pm\,\Gamma < 2$, *то функционалы* $\int^{[F^\pm]}$ *продолжимы по непрерывности на пространства* $H^*(A, \mathrm{Dma}^\pm\,\Gamma - 1)$ *соответственно, где в качестве* A *можно взять любой компакт, содержащий* Γ *внутри себя.*

Доказательство. Пусть $\mathrm{Dma}^+\,\Gamma < 2$. Зафиксируем числа d и ν такие, что $\mathrm{Dma}^+\,\Gamma < d < 2,\ 1 > \nu > d-1$. По определению внутренней аппроксимационной размерности существует разложение $\mathcal{P}^+$ области D^+ с конечной d-массой $\mathcal{M}_d(\mathcal{P}^+)$. Пусть Γ_n^+ – соответствующие ломаные, сходящиеся к Γ изнутри, $\Gamma^* = \overline{\bigcup\limits_{n\ge1} \Gamma_n^+}$. Любая функция $\omega \in C^\infty$ удовлетворяет условию Гельдера с любым показателем $\nu \le 1$. Возьмем сужение ω на Γ^*, применим к этому сужению оператор продолжения Уитни (см., например, [9]) и обозначим полученную функцию через ω^*. В силу свойств оператора продолжения Уитни [9] эта функция определена во всей комплексной плоскости и удовлетворяет там условию Гельдера с любым показателем $\nu \le 1$, совпадает с ω на множестве Γ^*, а в $\mathbf{C}\setminus\Gamma^*$ имеет частные производные всех порядков, причем

$$|\nabla\omega^*(z)| \le Ch_\nu \operatorname{dist}^{\nu-1}(z,\Gamma^*).$$

Здесь и ниже C означает различные положительные постоянные. При $\nu = 1$ отсюда следует ограниченность частных производных первого порядка. Поэтому

$$\int^{[F^+]} \omega(\zeta)\,d\zeta = \langle\overline{\partial}F^+,\omega\rangle = -\langle F^+,\overline{\partial}\omega\rangle = -\iint\limits_{D^+} F(\zeta)\frac{\partial\omega}{\partial\overline{\zeta}}\,d\zeta\,d\overline{\zeta} =$$

$$= -\sum_{P_n\in\mathcal{P}^+}\iint\limits_{P_n} F(\zeta)\frac{\partial\omega}{\partial\overline{\zeta}}\,d\zeta\,d\overline{\zeta} = \sum_{P_n\in\mathcal{P}^+}\int\limits_{\partial P_n} F(\zeta)\omega(\zeta)\,d\zeta =$$

$$= \sum_{P_n\in\mathcal{P}^+}\int\limits_{\partial P_n} F(\zeta)\omega^*(\zeta)\,d\zeta = -\sum_{P_n\in\mathcal{P}^+}\iint\limits_{P_n} F(\zeta)\frac{\partial\omega^*}{\partial\overline{\zeta}}\,d\zeta\,d\overline{\zeta}.$$

Теперь заметим, что внутри многоугольника P_n функция ω^* совпадает с результатом применения оператора продолжения Уитни к сужению ω на границу этого многоугольника, и поэтому мы можем воспользоваться следующей леммой из работы [14].

Лемма 2. *Пусть* δ *есть конечная область с жордановой спрямляемой границей* γ, $f \in H_\nu(\gamma)$ *и* f^w *есть продолжение Уитни функции* f *с кривой* γ. *Если* $p < \dfrac{1}{1-\nu}$, *то*

$$\iint\limits_{\delta} |\nabla f^w|^p \, dx\, dy \le C h_\nu^p(f,\gamma)\lambda(\gamma) w^{1-p(1-\nu)}(\delta).$$

Выберем p так, чтобы $d-1 = 1-p(1-\nu)$, то есть

$$p = \frac{2-d}{1-\nu}. \tag{8}$$

Тогда при $|F^+(\zeta)| \le M$ и $p^{-1}+q^{-1}=1$ согласно лемме 2 получаем

$$\left|\int^{[F^+]} \omega(\zeta) d\zeta\right| \le 2\Big(\sum_{P_n \in \mathcal{P}^+} \iint\limits_{P_n} \left|\frac{\partial \omega^*}{\partial \bar\zeta}\right|^p dx\, dy\Big)^{1/p}\Big(\sum_{P_n \in \mathcal{P}^+} \iint\limits_{P_n} |F(x+iy)|^q \, dx\, dy\Big)^{1/q} \le$$

$$\le C M S^{1/q} \mathcal{M}_d^{1/p}(\mathcal{P}^+) h_\nu(\omega, A),$$

где S есть площадь D^+. Эта оценка доказывает непрерывность функционала $\int^{[F^+]}$ в пространстве $H^*(A, \mathrm{Dma}^+\,\Gamma - 1)$ и его продолжимость в это пространство по непрерывности. Случай $\mathrm{Dma}^-\,\Gamma < 2$ рассматривается аналогично. □

Продолженные функционалы мы также будем называть интегрированиями. Из доказательства видно, что при $\mathrm{Dma}^+\,\Gamma < 2$ (или $\mathrm{Dma}^-\,\Gamma < 2$) продолжение функционала $\int^{[F^+]}$ (соответственно $\int^{[F^-]}$) строится следующим образом. Для любой функции f из пространства $H^*(A, \mathrm{Dma}^+\,\Gamma - 1)$ (соответственно, $H^*(A, \mathrm{Dma}^-\,\Gamma - 1)$) можно указать показатель $\nu > \mathrm{Dma}^+\,\Gamma - 1$ (соответственно $\nu > \mathrm{Dma}^-\,\Gamma - 1$) такой, что $f \in H(A,\nu)$, а также разложение $\mathcal{P}^+$ (соответственно $\mathcal{P}^-$) области D^+ (соответственно D^-) с конечной d-массой такое, что $\nu > d-1$ и $d > \mathrm{Dma}^+\,\Gamma$ (соответственно $d > \mathrm{Dma}^-\,\Gamma$). Тогда

$$\int^{[F^\pm]} f(\zeta)\, d\zeta = -\iint\limits_{D^\pm} F^\pm(\zeta) \frac{\partial f^*}{\partial \bar\zeta}\, d\zeta\, d\bar\zeta, \tag{9}$$

где f^* есть продолжение Уитни сужения f на $\Gamma^* = \overline{\bigcup\limits_{n\ge1} \Gamma_n^\pm}$. В случае интегрирования по бесконечной области D^- продолжение f^* должно иметь компактный носитель (скажем, можно умножить результат применения оператора Уитни на гладкую функцию с компактны носителем, равную единице в окрестности Γ).

Если две функции f и g из пространства $H^*(A, \mathrm{Dma}^\pm\,\Gamma - 1)$ совпадают в какой-либо окрестности Γ, то, очевидно, $\int^{[F^\pm]} f(\zeta)\, d\zeta = \int^{[F^\pm]} g(\zeta)\, d\zeta$. Но, вообще говоря, неизвестно, следует ли выполнение этого равенства из совпадения сужений f и g на саму кривую Γ, а не на ее окрестность. В связи с этим приведем такой результат.

Теорема 3. *Если* $\mathrm{Dmb}\,\Gamma < 2$, *то функционал* $\int\limits^{[F]}$ *продолжим по непрерывности на пространство* $H^*(A, \mathrm{Dmb}\,\Gamma - 1)$, *где в качестве* A *можно взять любой компакт, содержащий* Γ *внутри себя. Если при этом сужения функций* f *и* g *из пространства* $H^*(A, \mathrm{Dmb}\,\Gamma - 1)$ *на кривую* Γ *совпадают, то* $\int\limits^{[F]} f(\zeta)\,d\zeta = \int\limits^{[F]} g(\zeta)\,d\zeta$.

Эта теорема фактически доказана в иных терминах в работах [10, 12]. Ее первое утверждение непосредственно следует из теоремы 2 и первого утверждения теоремы 1.

Отметим также, что функционал (9) можно рассматривать как семейство распределений $\int\limits^{[F^{\pm}]f}$, действующих по правилу

$$\left\langle \int\limits^{[F^{\pm}]f}, \omega \right\rangle = \int\limits^{[F^{\pm}]} f(\zeta)\omega(\zeta)\,d\zeta, \tag{10}$$

где f пробегает пространство $H^*(A, \mathrm{Dma}^{\pm}\,\Gamma - 1)$.

4. Рассмотрим преобразования Коши распределений (10). Мы будем обозначать их через $\mathcal{C}_{\Gamma}^{[F^{\pm}]}f$, то есть

$$\mathcal{C}_{\Gamma}^{[F^{\pm}]}f := \frac{1}{2\pi i}\left\langle \int\limits^{[F^{\pm}]f}, \frac{1}{\zeta - z} \right\rangle.$$

Как уже отмечалось, это голоморфная в $\overline{\mathbf{C}} \setminus \Gamma$ функция, исчезающая в бесконечно удаленной точке. Несложные преобразования равенств (9) и (10) приводят к представлению

$$\mathcal{C}_{\Gamma}^{[F^{\pm}]}f(z) = \pm F^{\pm}(z)f^*(z) \mp \frac{1}{2\pi i}\iint\limits_{D^{\pm}} \frac{\partial f^*}{\partial \overline{\zeta}} \frac{F^{\pm}(\zeta)\,d\zeta\,d\overline{\zeta}}{\zeta - z}, \tag{11}$$

где f^* – то же, что в (9). Свойства входящего в последнее равенство интегрального оператора хорошо известны (см., например, [16]). В частности, он дает непрерывную во всей комплексной плоскости функцию, удовлетворяющую в $\mathbf{C}$ условию Гельдера с показателем $(p-2)/p$, если его плотность $\dfrac{\partial f^*}{\partial \overline{\zeta}} F^{\pm}(\zeta)$ интегрируема в области интегрирования в некоторой степени $p > 2$. При ограниченной функции $F^{\pm}$ это происходит, если определенный равенством (8) показатель p больше двух, то есть при $\nu > \mathrm{Dma}^{\pm}\,\Gamma/2$. Первое (внеинтегральное) слагаемое в правой части (11) имеет скачок $(F^+ - F^-)f$ на кривой Γ. Итак, справедлива

Теорема 4. *Если* $\mathrm{Dma}\,\Gamma < 2$, $f \in H^*(A, \mathrm{Dma}\,\Gamma/2)$, *где* A *– любой компакт, содержащий* Γ *внутри себя, и функция* F *имеет на* Γ *предельные значения с обеих сторон, то функция* $\Phi(z) := \mathcal{C}_{\Gamma}^{[F^{\pm}]}f(z)$ *имеет в каждой точке* $t \in \Gamma$ *предельные значения с обеих сторон, связанные соотношением*

$$\Phi^+(t) - \Phi^-(t) = (F^+(t) - F^-(t))f(t), \quad t \in \Gamma.$$

Напомним, что наши построения относятся к случаю, когда $F(z)$ тождественно равна нулю либо в D^+, либо в $D-$, то есть множитель перед f равен $\pm F^{\pm}(t)$.

Далее, любая функция $f \in H^*(\Gamma, \operatorname{Dma}\Gamma/2)$ продолжается до некоторой функции $\widetilde{f} \in H^*(A, \operatorname{Dma}\Gamma/2)$ посредством оператора продолжения Уитни. Таким образом, имеет место

Следствие 1. *Если* $\operatorname{Dma}\Gamma < 2$ *и* $f \in H^*(\Gamma, \operatorname{Dma}\Gamma/2)$, *то задача о скачке* (3) *имеет решение, задаваемое формулой* $\Phi(z) := \mathcal{C}_\Gamma^{[\gamma^+]}\tilde{f}(z)$ *при* $\operatorname{Dma}\Gamma = \operatorname{Dma}^+\Gamma$ *и* $\Phi(z) := \mathcal{C}_\Gamma^{[\gamma^-]}\widetilde{f}(z)$ *при* $\operatorname{Dma}\Gamma = \operatorname{Dma}^-\Gamma$. *Здесь функция* $\gamma^+(z)$ *равна единице в* D^+ *и нулю в* D^-, $\gamma^-(z) = \gamma^+(z) - 1$.

Отсюда, в свою очередь, следует

Следствие 2. *Если* $\operatorname{Dmb}\Gamma < 2$ *и* $f \in H^*(\Gamma, \operatorname{Dmb}\Gamma/2)$, *то задача о скачке* (3) *имеет решение, задаваемое любой из двух эквивалентных формул* $\Phi(z) := \mathcal{C}_\Gamma^{[\gamma^+]}\widetilde{f}(z)$ *и* $\Phi(z) := \mathcal{C}_\Gamma^{[\gamma^-]}\widetilde{f}(z)$.

Существование решений задачи о скачке при условиях $f \in H^*(\Gamma, \operatorname{Dmb}\Gamma/2)$ и $f \in H^*(\Gamma, \operatorname{Dma}\Gamma/2)$ было доказано в работах [3] и [14] соответственно; здесь мы доказали представимость этих решений в виде преобразований Коши.

Решение задачи о скачке на неспрямляемой кривой может оказаться неединственным. Это происходит, когда хаусдорфова размерность $\operatorname{Dmh}\Gamma$ этой кривой превосходит единицу. Согласно теореме Е.П. Долженко [17], если область B содержит компакт A и функция $F \in H^+(B, \operatorname{Dmh} A - 1)$ голоморфна в $B \setminus A$, то она голоморфна в B; кроме того, при $\operatorname{Dmh} A > 1$ существует непостоянная функция $F \in H_{\operatorname{Dmh} A-1}(\mathbf{C})$, голоморфная в $\mathbf{C} \setminus A$.

Иными словами, если $\operatorname{Dmh}\Gamma > 1$, то задача о нулевом скачке имеет нетривиальные решения, но их гельдеровы показатели не превосходят $\operatorname{Dmh}\Gamma - 1$.

Будем говорить, что голоморфная в $\mathbf{C} \setminus \Gamma$ функция Φ удовлетворяет условию Хаусдорфа–Долженко (HD-условию) если кривая Γ имеет окрестность V такую, что сужения Φ на $V \bigcap D^+$ и на $V \bigcap D^-$ удовлетворяют условию Гельдера с показателем, который превосходит $\operatorname{Dmh}\Gamma - 1$. Соответственно, решение задачи Римана или задачи о скачке на кривой Γ, удовлетворяющее HD-условию, будем называть HD-решением. Как уже отмечалось, интегральный член представления (11) удовлетворяет в $\mathbf{C}$ условию Гельдера с показателем $(p-2)/p$, где p задается соотношением (8). Таким образом, этот показатель равен $\dfrac{2\nu - d}{2 - d}$, где d сколь угодно близко к $\operatorname{Dma}\Gamma$. Следовательно, преобразование Коши дает HD-решение задачи о скачке при условии

$$\frac{2\nu - \operatorname{Dma}\Gamma}{2 - \operatorname{Dma}\Gamma} > \operatorname{Dmh}\Gamma - 1,$$

или, что равносильно,

$$\nu > \frac{1}{2}\operatorname{Dmu}\Gamma,$$

где

$$\operatorname{Dmu}\Gamma := \operatorname{Dma}\Gamma + (\operatorname{Dmh}\Gamma - 1)(2 - \operatorname{Dma}\Gamma).$$

Эта несколько загадочная характеристика ведет себя подобно размерности плоской кривой Γ: она принимает значения в промежутке от единицы до двух и равна 1 для спрямляемой кривой. Ее можно назвать размерностью единственности. Итак, доказано

Следствие 3. *Если* $\operatorname{Dma}\Gamma < 2$ *и* $f \in H^*(\Gamma, \operatorname{Dmu}\Gamma/2)$, *то описанное выше преобразование Коши является единственным HD-решением задачи о скачке* (3).

Теперь перейдем к задаче Римана (1). Как обычно (см. [1, 2]), мы предполагаем, что $G(t)$ не обращается в нуль на кривой Γ и обе функции $G(t)$ и $g(t)$ удовлетворяют там условию Гельдера. Что касается показателя в этом условии, то для доказательства существования решений достаточно считать его превосходящим $\dfrac{1}{2}\operatorname{Dma}\Gamma$, но для исключения эффектов, связанных с существованием нетривиальных решений задачи о нулевом скачке, должны положить $\nu > \frac{1}{2}\operatorname{Dmu}\Gamma$.

При этих условиях $G(t) = (t - z_0)^\kappa \exp f(t)$, где $f \in H_\nu(\Gamma)$, $z_0 \in D^+$, а κ есть целое число (равное поделенному на 2π приращению аргумента G на Γ; см. [1, 2]). Рассмотрим функцию $\Psi(z) := \mathcal{C}_\Gamma^{[\gamma^+]}\tilde{f}(z)$, являющуюся HD-решением задачи о скачке

$$\Psi^+(t) - \Psi^-(t) = f(t), \quad t \in \Gamma.$$

Тогда функция

$$X(z) := \exp\Psi(z), \quad z \in D^+, \quad X(z) := (z - z_0)^{-\kappa}\exp\Psi(z), \quad z \in D^-,$$

удовлетворяет краевому условию

$$X^+(t) = G(t)X^-(t), \quad t \in \Gamma,$$

причем она также является HD-решением однородной задачи Римана. Как обычно, мы подставляем $G(t) = X^+(t)/X^-(t)$ в соотношение (1) и получаем задачу о скачке:

$$\frac{\Phi^+(t)}{X^+(t)} - \frac{\Phi^-(t)}{X^-(t)} = \frac{g(t)}{X^+(t)}, \quad t \in \Gamma.$$

Скачок g/X^+ удовлетворяет условию Гельдера с показателем, меньшим $\dfrac{2\nu - \operatorname{Dma}\Gamma}{2 - \operatorname{Dma}\Gamma} < \nu$. Поэтому мы не можем применить здесь следствие 1. Тем не менее теорема 4 позволяет решить полученную задачу. Для этого в случае $\operatorname{Dma}\Gamma = \operatorname{Dmb}^+\Gamma$ достаточно положить в этой теореме функцию $F(z)$ равной $1/X(z)$ в области D^+ и нулю в области D^-, а в случае $\operatorname{Dma}\Gamma = \operatorname{Dmb}^-\Gamma$ – равной нулю в D^+ и $-1/X(z)$ в D^-.

Таким образом, справедлива

Теорема 5. *Если коэффициенты $G(t)$ и $g(t)$ принадлежат пространству $H^*\left(\Gamma, \dfrac{1}{2}\operatorname{Dmu}\Gamma\right)$ и $G(t)$ не обращается в нуль на кривой Γ, то картина HD-разрешимости краевой задачи Римана* (1) *совпадает с классической картиной ее разрешимости для кусочно-гладких кривых* (*см.* [1, 2]), *и все ее HD-решения и условия HD-разрешимости представимы в виде преобразований Коши.*

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 09-01-12188-офи-м).

Summary

B.A. Kats. The Riemann Boundary Value Problem on Non-Rectifiable Curve and the Cauchy Transform.

In the present paper we obtain a representation for solutions of the Riemann boundary value problem on non-rectifiable closed Jordan curves in terms of the Cauchy transforms of certain distributions.

Key words: non-rectifiable curve, Riemann boundary value problem, Cauchy transform.

Литература

1. *Гахов Ф.Д.* Краевые задачи. – М.: Наука, 1977. – 640 с.
2. *Мусхелишвили Н.И.* Сингулярные интегральные уравнения. – М.: Наука, 1962. – 600 с.
3. *Кац Б.А.* Задача Римана на замкнутой жордановой кривой // Изв. вузов. Матем. – 1983. – № 4. – С. 68–80.
4. *Колмогоров А.Н., Тихомиров В.М.* ε-энтропия и ε-емкость множеств в функциональных пространствах // Усп. матем. наук. – 1959. – Т. 14, Вып. 2. – С. 3–86.
5. *Федер Е.* Фракталы. – М.: Мир, 1991. – 254 с.
6. *Mattila P., Melnikov M.S.* Existence and weak type inequalities for Cauchy integrals of general measure on rectifiable curves and sets // Proc. Am. Math. Soc. – 1994. – V. 120. – P. 143–149.
7. *Tolsa X.* Bilipschitz maps, analytic capacity and the Cauchy integral // Ann. of Math. – 2005. – V. 162, No 2. – P. 1243–1304.
8. *Verdera J.* A weak type inequality for Cauchy transform of finite measure // Publ. Mat. – 1992. – V. 36. – P. 1029–1034.
9. *Hörmander L.* The Analysis of Linear Partial Differential Operators I. Distribution theory and Fourier Analysis. – Springer Verlag, 1983. – 464 p.
10. *Кац Б.А.* Задача о скачке и интеграл по неспрямляемой кривой // Изв. вузов. Матем. – 1987. – № 5. – С. 49–57.
11. *Kats B.A.* The Cauchy integral over non-rectifiable paths // Contemp. Math. – 2008. – V. 455. – P. 183–196.
12. *Harrison J., Norton A.* Geometric integration on fractal curves in the plane // Indiana Univ. Math. J. – 1991. – V. 40, No 2. – P. 567–594.
13. *Harrison J.* Lectures on chainlet geometry – new topological methods in geometric measure theory. – arXiv:math-ph/0505063, 24 May 2005. – 153 p.
14. *Kats B.A.* On solvability of the jump problem // J. Math. Anal. Appl. – 2009. – V. 356, No 2. – P. 577–581.
15. *Крейн С.Г., Петунин Ю.И., Семенов Е.М.* Интерполяция линейных операторов. – М.: Наука, 1978. – 400 с.
16. *Векуа И.Н.* Обобщенные аналитические функции. – М.: Наука, 1988. – 512 с.
17. *Долженко Е.П.* О «стирании» особенностей аналитических функций // Усп. матем. наук. – 1963. – Т. 18, № 4. – С. 135–142.

Поступила в редакцию
02.12.09

Кац Борис Александрович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики Казанского государственного архитектурно-строительного университета.

E-mail: *katsboris877@gmail.com*