УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ КАЗАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
Том 152, кн. 1 Физико-математические науки *2010*

УДК 517.957

СУЩЕСТВОВАНИЕ РЕШЕНИЯ КВАЗИЛИНЕЙНОЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ПРИ НАЛИЧИИ ТОЧЕЧНЫХ ИСТОЧНИКОВ

О.А. Задворнов

Аннотация

Доказано существование решения квазилинейной эллиптической краевой задачи при наличии точечных источников. Использовано аддитивное выделение особенности, связанной с сингулярностью правой части. Решение нелинейной задачи ищется в виде суммы известного решения некоторой линейной (ассоциированной с исходной) задачи с точечными источниками в правой части и неизвестного «добавка».

Ключевые слова: квазилинейная эллиптическая краевая задача, точечный источник, монотонный оператор, теорема существования.

Введение

Настоящая работа посвящена исследованию краевой задачи Дирихле для квазилинейного эллиптического уравнения в произвольной ограниченной области Ω при наличии внутри области точечных источников. Рассматривается уравнение в дивергентной форме, левая часть которого порождает монотонный и коэрцитивный оператор в гильбертовом пространстве $\overset{\circ}{W}{}_2^{(1)}(\Omega)$. В предположении, что правая часть уравнения из краевой задачи порождает функционал из пространства сопряженного к $\overset{\circ}{W}{}_2^{(1)}(\Omega)$, решение существует (см. [1, 2]). В нашем случае это условие на правую часть не выполняется и использовать непосредственно теорию монотонных операторов не представляется возможным. Однако такие задачи возникают и представляют определенный интерес (например, задачи теории фильтрации [3]).

В настоящей работе развивается подход, использованный при рассмотрении стационарных задач фильтрации несжимаемой жидкости, следующей закону фильтрации с предельным градиентом, при наличии точечного источника [4]. Решение нелинейной задачи ищется в виде суммы известного решения некоторой линейной (ассоциированной с исходной) задачи с точечными источниками в правой части и неизвестного «добавка». Таким образом, выделяется особенность решения нелинейной задачи, связанная с сингулярностью правой части (решение линейной задачи не принадлежит $\overset{\circ}{W}{}_2^{(1)}(\Omega)$, являясь менее гладким). Задача относительно искомого «добавка» сводится к уравнению с монотонным и коэрцитивным оператором в пространстве $\overset{\circ}{W}{}_2^{(1)}(\Omega)$, разрешимость которого следует из известных результатов.

Отметим, что предложенный в настоящей работе способ исследования нелинейных задач может быть использован и для систем уравнений (см. [5]).

1. Постановка задачи

Рассматривается краевая задача Дирихле для квазилинейного уравнения при наличии источников, сосредоточенных в точках x_i, с соответствующими интенсивностями q_i, $i = 1, 2, \ldots, N$:

$$-\operatorname{div} g(x, \nabla w(x)) = \sum_{i=1}^{N} q_i\, \delta(x - x_i), \quad x \in \Omega, \tag{1}$$

$$w(x) = w_\gamma(x), \quad x \in \partial\Omega, \tag{2}$$

где $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, – ограниченная область с липшиц-непрерывной границей $\partial\Omega$. Считаем, что точки x_i, $i = 1,2,\dots,N$, лежат внутри области Ω, а также существует функция $\widetilde{w} \in W_2^{(1)}(\Omega)$ со следом, удовлетворяющим равенству

$$\widetilde{w}(x) = w_\gamma(x), \quad x \in \partial\Omega. \tag{3}$$

Относительно функции $g : \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ предполагаем, что выполнены условия Каратеодори [6, с. 196]:

(I) для почти всех $x \in \Omega$ функция $\lambda \to g(x,\lambda)$ непрерывна при $\lambda \in \mathbb{R}^n$;

(II) для каждого $\lambda \in \mathbb{R}^n$ функция $x \to g(x,\lambda)$ измерима на Ω,

а также функция имеет линейный рост на бесконечности: существуют постоянная $d_1 > 0$ и функция $b_1 \in L_2(\Omega)$ такие, что

$$|\, g(x,\lambda)\,| \leqslant d_1\,|\,\lambda\,| + b_1(x) \quad \forall\,\lambda \in \mathbb{R}^n, \quad \forall\, x \in \Omega. \tag{4}$$

Кроме того, считаем, что она монотонна:

$$(\, g(x,\lambda) - g(x,\mu)\,, \lambda - \mu\,) \geqslant 0 \quad \forall\,\lambda,\mu \in \mathbb{R}^n, \quad \forall\, x \in \Omega. \tag{5}$$

и коэрцитивна: существуют постоянная $d_2 > 0$ и функция $b_2 \in L_1(\Omega)$ такие, что

$$(\, g(x,\lambda)\,, \lambda\,) \geqslant d_2\,|\,\lambda\,|^2 + b_2(x), \quad \forall\,\lambda \in \mathbb{R}^n, \quad \forall\, x \in \Omega. \tag{6}$$

Здесь $(\cdot,\cdot)$, $|\cdot|$ – скалярное произведение и норма в пространстве $\mathbb{R}^n$.

При выполнении условий (I), (II), (4)–(6) краевая задача (1), (2) имеет решение в $W_2^{(1)}(\Omega)$, если правая часть уравнения (1) порождает функционал из пространства, сопряженного к $W_2^{(1)}(\Omega)$ (см. [1, 2]). Очевидно, что в нашем случае правая часть менее гладкая, что не позволяет воспользоваться известными подходами.

В настоящей работе установлено существование решения задачи (1), (2); при этом понадобится следующее дополнительное предположение относительно функции g:

существуют постоянная α и матрицы G_i, $i = 1,2,\dots,N$, удовлетворяющие условиям:

$$\alpha > \alpha^* = \frac{n-2}{2}, \quad n \geqslant 2, \tag{7}$$

$$(\lambda, G_i\,\lambda) > 0 \;\forall\,\lambda \neq 0, \quad (G_i\,\lambda,\mu) = (\lambda, G_i\,\mu) \quad \forall\,\lambda,\mu \in \mathbb{R}^n, \tag{8}$$

такие, что для функции g выполнены следующие неравенства

$$|\, g(x,\lambda) - G_i\,\lambda\,| \leqslant c\,|\,x - x_i\,|^\alpha\,|\,\lambda\,| + C \quad \forall\,\lambda \in \mathbb{R}^n, \quad \forall\, x \in B_r(x_i) \subset \Omega, \tag{9}$$

$$B_r(x_i) \bigcap B_r(x_j) = \emptyset \quad \text{для } i \neq j. \tag{10}$$

Здесь r, c, $C > 0$ – положительные постоянные, $B_r(y) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x-y| < r\}$.

В завершение формулировки задачи определим класс функций, в котором будем искать решение w. С этой целью рассмотрим фундаментальное решение оператора Лапласа

$$\begin{aligned} &\phi_2(x) = \frac{1}{2\pi}\ln(\,|\,x\,|\,), \\ &\phi_n(x) = -\,\frac{1}{(n-2)\,\sigma_n |\,x\,|^{\,n-2}}, \quad n \geqslant 3, \quad \sigma_n = \operatorname{mes}\{x \in \mathbb{R}^n : |\,x\,| = 1\}, \end{aligned} \tag{11}$$

удовлетворяющее уравнению (1) в частном случае (когда $g(x,\lambda) \equiv \lambda$, $N = 1$, $x_1 = 0$ и $q_1 = -1$):

$$\int\limits_\Omega \Delta\phi_n(x)\,\eta(x)\,dx = \eta(0) \qquad \forall\eta \in C_0^\infty(\Omega).$$

Непосредственно из (11) вытекает, что

$$|\,\nabla\phi_n(x)\,| \leqslant \frac{C_n}{|\,x\,|^{\,n-1}}, \quad n \geqslant 2, \quad C_n > 0, \tag{12}$$

и, таким образом, выполнено включение

$$\phi_n \in W = \bigcap_{1<p<p^*} W_p^{(1)}(\Omega), \quad \text{где} \quad p^* = \frac{n}{n-1}, \quad n \geqslant 2. \tag{13}$$

Естественно ожидать, что решение нелинейной задачи будет иметь гладкость не выше, чем в линейном случае, и поэтому будем искать решение w среди элементов множества (13).

Определившись с классом функций, введем вариационную формулировку задачи (1), (2):

$$\begin{cases} \text{найти } w \in W : \displaystyle\int\limits_\Omega \big(g(x,\nabla w(x)), \nabla\eta(x)\big)\;dx = \sum_{i=1}^N q_i\,\eta(x_i) \quad \forall\,\eta \in C_0^\infty(\Omega) \\ w(x) = w_\gamma, \quad x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{14}$$

и установим существование ее решения.

2. Существование решения

Покажем, что задача (14) сводится к уравнению в гильбертовом пространстве с монотонным, коэрцитивным оператором и поэтому разрешима.

При исследовании разрешимости нам потребуются ее частные случаи (G_i – матрицы из (9) для $i = 1, 2, \ldots, N$)

$$\begin{cases} \text{найти } \xi \in W : \displaystyle\int\limits_\Omega (G_i\,\nabla\xi(x),\,\nabla\eta(x))\;dx = \,q_i\eta(x_i) \quad \forall\,\eta \in C_0^\infty(\Omega), \\ \xi(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{15}$$

В силу условий (8) для $i = 1, 2, \ldots, N$ существует симметричная, положительно определенная матрица $\overline{G}_i$, удовлетворяющая равенству $\overline{G}_i\,\overline{G}_i = G_i^{-1}$, и тогда функция

$$\bar\xi_i(x) = -q_i\,\det\overline{G}_i\;\phi_n\left(\overline{G}_i(x - x_i)\right)$$

удовлетворяет вариационному равенству из задачи (15).

Поскольку точки x_i (являясь внутренними точками области Ω) не принадлежат границе $\partial\Omega$, то $\bar\xi_i \in C^\infty(\partial\Omega)$. Поэтому существует единственное решение у следующей задачи:

$$\text{найти } \zeta_i \in W_2^{(1)}(\Omega) : \operatorname{div} G_i\,\nabla\,\zeta_i(x) = 0,\; x \in \Omega; \quad \zeta_i(x) = -\bar\xi_i(x),\; x \in \partial\Omega,$$

и решение задачи (15) имеет вид

$$\xi_i(x) = \zeta_i(x) + \bar{\xi}_i(x), \quad x \in \Omega. \tag{16}$$

Из неравенства (12) и свойств матрицы $\overline{G_i}$ получаем оценку

$$|\nabla \bar{\xi}_i(x)| \leqslant \frac{\bar{c}}{|\, x - x_i \,|^{\,n-1}}, \quad n \geqslant 2, \tag{17}$$

и, следовательно, $\bar{\xi}_i \in W$ для $i = 1, 2, \ldots, N$.

Определим функцию $\xi \in W$ следующим равенством ($\widetilde{w}$ – функция из (3)):

$$\xi(x) = \widetilde{w}(x) + \sum_{i=1}^{N} \xi_i(x)\,, \quad x \in \Omega \tag{18}$$

и будем искать решение задачи (14) в виде $w = \xi + u$, где $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^{(1)}(\Omega)$ – неизвестная функция. С учетом равенств (15) задача (14) сводится к следующей:

$$\left\{ \begin{aligned} & \text{найти } u \in \overset{\circ}{W}{}_2^{(1)}(\Omega): \int\limits_{\Omega} \left(g(x, \nabla(\xi + u)(x))\,,\, \nabla \eta(x)\right)\, dx = \\ & = \sum_{i=1}^{N} \int\limits_{\Omega} (G_i\, \nabla\, \xi_i(x)\,,\, \nabla\, \eta(x))\, dx \quad \forall\, \eta \in C_0^{\infty}(\Omega). \end{aligned} \right. \tag{19}$$

Пусть $V = \overset{\circ}{W}{}_2^{(1)}(\Omega)$ – гильбертово пространство со скалярным произведением и соответствующей ему нормой, задаваемыми по формулам:

$$(u, w)_V = \int\limits_{\Omega} (\nabla u, \nabla w)\, dx, \quad \|u\|_V = \left[\, \int\limits_{\Omega} |\nabla u|^2\, dx \right]^{1/2} \quad u,\, v \in V.$$

Определим форму $a : V \times V \to \mathbb{R}^1$ следующим образом:

$$a(u, v) = \int\limits_{\Omega} \left(g\left(x, \nabla\xi(x) + \nabla u(x)\right) - \sum_{i=1}^{N} G_i\, \nabla \xi_i(x),\, \nabla v(x) \right)\, dx. \tag{20}$$

Проверим корректность этого определения. Введем функцию $g_0 : \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$,

$$g_0(x, \lambda) = g(x, \nabla\xi(x) + \lambda) - \sum_{i=1}^{N} G_i\, \nabla \xi_i(x), \quad x \in \Omega, \quad \lambda \in \mathbb{R}^n. \tag{21}$$

Поскольку функция g удовлетворяет условиям (I) и (II), функция ξ определена равенством (18), то выполнены аналогичные условия для функции g_0:

(i) для почти всех $x \in \Omega$ функция $\lambda \to g_0(x, \lambda)$ непрерывна при $\lambda \in \mathbb{R}^n$;

(ii) для каждого $\lambda \in \mathbb{R}^n$ функция $x \to g_0(x, \lambda)$ измерима на Ω.

Установим, что функция g_0 имеет линейный рост на бесконечности. Пользуясь условием (4), получаем:

$$|\, g_0(x, \lambda)\, | \leqslant d_1\, |\lambda| + \widetilde{b}(x) \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{R}^n, \quad \forall\, x \in \Omega \backslash \bigcup_{i=1}^{N} B_r(x_i), \tag{22}$$

где функция $\widetilde{b}$ определена равенством

$$\widetilde{b}(x) = d_1\,|\nabla\xi(x)| + \Big|\sum_{i=1}^{N} G_i\,\nabla\xi_i(x)\Big| + b_1(x)$$

и принадлежит пространству $L_2\Big(\Omega\setminus\bigcup_{i=1}^{N} B_r(x_i)\Big)$.

Далее, рассмотрим поведение функции g_0 в окрестности точки x_i, предварительно проведя с учетом (16), (18) следующие преобразования:

$$g_0(x,\lambda) = g(x,\nabla\xi(x)+\lambda) - G_i\,(\nabla\xi(x)+\lambda) + G_i\,\lambda + G_i\,\nabla\xi(x) - \sum_{j=1}^{N} G_i\,\nabla\xi_j(x) =$$

$$= g(x,\nabla\xi(x)+\lambda) - G_i(\nabla\xi(x)+\lambda) + G_i\,\lambda + G_i\,\nabla\widetilde{w}(x) + \sum_{j=1, j\neq i}^{N} (G_i - G_j)\,\nabla\xi_j(x) =$$

$$= g(x, f_i(x) + \nabla\bar{\xi}_i(x) + \lambda) - G_i(f_i(x) + \nabla\bar{\xi}_i(x) + \lambda) + G_i\,\lambda + \widetilde{f}_i(x), \quad (23)$$

где функции f_i, $\widetilde{f}_i$ определены равенствами

$$f_i(x) = \nabla\Big(\widetilde{w}(x) + \zeta_i(x) + \sum_{j=1, j\neq i}^{N} \xi_j(x)\Big),$$

$$\widetilde{f}_i(x) = G_i\,\nabla\widetilde{w}(x) + \sum_{j=1, j\neq i}^{N} (G_i - G_j)\,\nabla\xi_j(x)$$

и принадлежат пространству $L_2(B_r(x_i))$.

Пользуясь неравенствами (9) и (17) получаем:

$$|\,g_0(x,\lambda)\,| \leqslant c\,|\,x - x_i\,|^{\alpha}\,|\,f_i(x) + \nabla\bar{\xi}_i(x) + \lambda\,| + C + |\,G_i\,\lambda\,| + \Big|\widetilde{f}_i(x)\Big| \leqslant$$

$$\leqslant c\,|\,x - x_i\,|^{\alpha}|\,\nabla\bar{\xi}_i(x)\,| + \widetilde{b}_i(x) + \widetilde{d}_i\;|\lambda| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{c\;\bar{c}}{|\,x - x_i\,|^{\,n-1-\alpha}} + \widetilde{b}_i(x) + \widetilde{d}_i\;|\,\lambda\,| \quad \forall\, x \in B_r(x_i),\; \lambda \in \mathbb{R}^n.$$

Из неравенства (7) имеем, что $2\,(1+\alpha-n) > -n$, таким образом, функция $x \to |x - x_i|^{1+\alpha-n}$ принадлежит $L_2\,(B_r(x_i))$, и, следовательно, существуют постоянная $\widetilde{d} > 0$ и функция $\widetilde{b} \in L_2\Big(\bigcup_{i=1}^{N} B_r(x_i)\Big)$ такие, что

$$|\,g_0(x,\lambda)\,| \leqslant \widetilde{d}\,|\lambda| + \widetilde{b}(x) \quad \forall\,\lambda \in \mathbb{R}^n, \quad \forall\, x \in \bigcup_{i=1}^{N} B_r(x_i). \quad (24)$$

Таким образом, пользуясь неравенствами (22) и (24), получаем:

$$|a(u,v)| \leqslant (k_0 + k\|u\|_V)\|v\|_V < +\infty \quad \forall\, u,\, v \in V, \quad (25)$$

где k, k_0 – некоторые положительные постоянные.

Форма (20) линейна по второму аргументу, а в силу неравенства (25) непрерывна по нему. По теореме Рисса – Фишера эта форма порождает оператор $A : V \to V$,

$$(Au, v)_V = a(u, v) \quad \forall\, u,\, v \in V. \tag{26}$$

Очевидно, что из определения оператора и формы (20) следует эквивалентность задачи (19) следующему операторному уравнению:

$$Au = 0. \tag{27}$$

Чтобы доказать разрешимость этого уравнения, нам понадобится следующая

Лемма 1. *Пусть функция g удовлетворяет условиям* (I), (II), (4)–(6), (9). *Тогда оператор A, определенный в* (20), (26), *является непрерывным, ограниченным, монотонным, удовлетворяет неравенству*

$$(Au, u)_V \geqslant m\, \|u\|_V^2 - m_0 \quad \forall\, u \in V, \tag{28}$$

где m, m_0 – некоторые положительные константы.

Доказательство. Определение (26) с учетом (21) имеет вид

$$(Au, v)_V = \int\limits_{\Omega} (g_0(x, \nabla u(x)), \nabla v(x))\, dx \quad \forall\, u,\, v \in V.$$

и, поскольку функция g_0 удовлетворяет условиям Каратеодори (i) и (ii), (22) и (24), то оператор $A : V \to V$ является непрерывным (см. [6, с. 213]).

Далее из (25), (26) получаем оценку:

$$\|Au\|_V \leqslant k\|u\|_V + k_0,$$

и, таким образом, оператор A является ограниченным.

Монотонность оператора A вытекает из условия монотонности (5):

$$(Au - Av, u - v)_V = a(u, u - v) - a(v, u - v) =$$
$$= \int\limits_{\Omega} (g(x, \nabla(\xi + u)) - g(x, \nabla(\xi + v)), \nabla(\xi + u) - \nabla(\xi + v))\, dx \geqslant 0.$$

Докажем теперь неравенство (26). На множестве $B_r(x_i)$, пользуясь (23) и неравенством (9), получаем:

$$(g_0(x, \lambda)\,,\, \lambda) = (g(x, f_i(x) + \nabla\bar{\xi}_i(x) + \lambda) - G_i\, (f_i(x) + \nabla\bar{\xi}_i(x) + \lambda) + G_i\, \lambda + \widetilde{f}_i(x)\,,\, \lambda) \geqslant$$
$$\geqslant -(\, c\, |\, x - x_i\, |^{\,\alpha}\, |\, f_i(x) + \nabla\bar{\xi}_i(x) + \lambda\, | + C\,)\, |\, \lambda\, | + (G_i\, \lambda\,,\, \lambda) + (\widetilde{f}_i(x)\,,\, \lambda) \geqslant$$
$$\geqslant -\big(\, c\, |x - x_i|^{\alpha}\, (\, |f_i(x)| + |\, \nabla\bar{\xi}_i(x)\, | + |\lambda|\,) + C\, \big)\, |\lambda| + (c_i - c\, |x - x_i|^{\alpha})\; |\lambda|^{\,2} - |\, \widetilde{f}_i(x)\, |\, |\lambda| \geqslant$$
$$\geqslant (c_i - c\, |x - x_i|^{\alpha})\; |\, \lambda\, |^{\,2} - \Big(\, c\, |\, x - x_i\, |^{\,\alpha}\, |\, f_i(x)\, | + \, c\, \bar{c}\, |\, x - x_i\, |^{\,1+\alpha-n} + C + |\, \widetilde{f}_i(x)\, |\, \Big)\; |\, \lambda\, |.$$

Выберем $r_i > 0$ так, чтобы $c_i - c\, |\, x - x_i\, |^{\,\alpha} \geqslant \widehat{d}_i > 0$ при $x \in B_{r_i}(x_i)$; тогда

$$(g_0(x, \lambda), \lambda) \geqslant \widehat{d}_i\; |\, \lambda\, |^{\,2} + \widehat{b}_i(x)\; |\, \lambda\, | \quad \forall\, x \in B_{r_i}(x_i), \quad \lambda \in \mathbb{R}^n, \tag{29}$$

где функция $\widehat{b}_i$ определена равенством:

$$\widehat{b}_i(x) = c\,|\,x - x_i\,|^{\alpha}\,|\,f_i(x)\,| + c\,\bar{c}\,|\,x - x_i\,|^{1+\alpha-n} + C + |\widetilde{f}_i(x)|$$

и принадлежит пространству $L_2(B_{r_i}(x_i))$.

Далее пользуясь условиями (4) и (6) получаем

$$\begin{gathered}
(g_0(x,\lambda)\,,\,\lambda) = (g(x,\nabla\xi(x)+\lambda)\,,\,\nabla\xi(x)+\lambda) - \\
- (g(x,\nabla\xi(x)+\lambda)\,,\,\nabla\xi(x)) - \Big(\sum_{i=1}^{N} G_i\,\nabla\xi_i(x)\,,\,\lambda\Big) \geqslant \\
\geqslant d_2|\nabla\xi(x)+\lambda|^2 + b_2(x) - (d_1|\nabla\xi(x)+\lambda| + b_1(x))|\nabla\xi(x)| - \Big|\sum_{i=1}^{N} G_i\,\nabla\xi_i(x)\Big|\,|\lambda| \geqslant \\
\geqslant d_2\,|\,\lambda\,|^2 + \widetilde{b}_1(x)\,|\,\lambda\,| + \widetilde{b}_2(x)\,, \quad \forall\,\lambda\in\mathbb{R}^n,\ \forall\,x\in\Omega\backslash\bigcup_{i=1}^{N} B_{r_i}(x_i), \qquad (30)
\end{gathered}$$

где функция $\widetilde{b}_1$ принадлежит пространству $L_2\Big(\Omega\backslash\bigcup_{i=1}^{N} B_{r_i}(x_i)\Big)$, а функция $\widetilde{b}_2$ – пространству $L_1\Big(\Omega\backslash\bigcup_{i=1}^{N} B_{r_i}(x_i)\Big)$.

Из (29), (30) следует существование постоянной $\widehat{d} > 0$ и функций $\widehat{b} \in L_2(\Omega)$, $\widetilde{b}_2 \in L_1(\Omega)$ таких, что

$$(g_0(x,\lambda),\lambda) \geqslant \widehat{d}\ \,|\,\lambda\,|^2 + \widehat{b}(x)\ |\,\lambda\,| + \widetilde{b}_2(x) \quad \forall\,x\in\Omega, \quad \lambda\in\mathbb{R}^n. \qquad (31)$$

Пользуясь (31) и ε-неравенством, имеем:

$$\begin{gathered}
(Au,u)_V \geqslant \int_\Omega \widehat{d}\ \,|\,\nabla u(x)\,|^2 + \widehat{b}(x)\ |\,\nabla u(x)\,| + \widetilde{b}_2(x)\,dx \geqslant \\
\geqslant (\widehat{d} - \varepsilon^2)\int_\Omega |\,\nabla u(x)\,|^2\,dx - \frac{1}{\varepsilon^2}\int_\Omega \Big|\,\widehat{b}(x)\Big|^2\,dx - \int_\Omega \Big|\,\widetilde{b}_2(x)\Big|\,dx.
\end{gathered}$$

Подобрав достаточно малое $\varepsilon > 0$, получаем неравенство (28). □

Основным результатом настоящей статьи является следующая

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* (I), (II), (4)–(6), (9). *Тогда множество решений задачи* (14) *непусто и представимо в следующем виде*

$$M = \xi + M_0, \qquad (32)$$

где функция ξ *принадлежит* W *и определена равенством* (18), *а* $M_0 \subset \overset{\circ}{W}{}_2^{(1)}(\Omega)$ – *выпуклое, замкнутое и ограниченное множество решений уравнения* (27).

Доказательство. По лемме 1 оператор A непрерывен, монотонен, а из неравенства (28) вытекает его коэрцитивность. Тогда по теореме 2.1 [2, с. 95] множество M_0 решений уравнения (27) не пусто, выпукло и замкнуто в пространстве

$\overset{\circ}{W}{}_2^{(1)}(\Omega)$, а, следовательно, все функции из множества (32) являются решениями задачи (14).

Пусть теперь $\widetilde{\xi}$ – некоторое решение задачи (14). Положим $u = \widetilde{\xi} - \xi$, тогда функция u является некоторым решением задачи (19), а, следовательно, $\widetilde{\xi}$ принадлежит множеству M. $\square$

3. Примеры задач

В качестве примера приведем задачу теории фильтрации несжимаемой жидкости, следующей закону фильтрации с предельным градиентом для двух- и трехмерного случая.

Пусть точечный источник находится в начале координат, которое является внутренней точкой области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$, закон фильтрации имеет вид

$$g(x,\lambda) = \begin{cases} \kappa(x)[\,|\lambda| - \mu(x)\,]_+\,|\lambda|^{-1}\,\lambda\,, & \lambda \neq 0, \\ 0\,, & \lambda = 0, \end{cases} \quad \text{где} \quad [\,s\,]_+ = \begin{cases} 0\,, & s < 0 \\ s\,, & s \geq 0, \end{cases} \tag{33}$$

функции $\mu, \kappa : \Omega \to R$ измеримы и ограничены,

$$0 \leqslant \mu(x) \leqslant \overline{\mu}, \quad 0 < \underline{\kappa} \leqslant \kappa(x) \leqslant \overline{\kappa},$$

функция κ дифференцируема в начале координат (в точке сосредоточения источника). Тогда в некоторой окрестности нуля выполнено неравенство:

$$|g(x,\lambda) - \kappa(0)\lambda| = \left| \frac{(\kappa(x) - \kappa(0))[\,|\lambda| - \mu(x)\,]_+}{|\lambda|}\,\lambda + \frac{\kappa(0)([\,|\lambda| - \mu(x)\,]_+ - |\lambda|)}{|\lambda|}\,\lambda \right| \leqslant$$

$$\leqslant |\kappa(x) - \kappa(0)|\,|\lambda| \left| \frac{[\,|\lambda| - \mu(x)\,]_+}{|\lambda|} \right| + |\kappa(0)([\,|\lambda| - \mu(x)\,]_+ - |\lambda|)| \leqslant$$

$$\leqslant (|\nabla\kappa(0)| + \varepsilon)\,|x|\,|\lambda| + |\kappa(0)|\,\overline{\mu}, \quad \varepsilon > 0.$$

Таким образом, функция, определенная в (33), удовлетворяет условию (9) с $\alpha = 1$ и матрицей $G_1 = \kappa(0)\,\mathrm{I}$ (I – единичная матрица).

Аналогично устанавливается, что выполнено условие (9) для функции следующего вида (случай анизотропной среды):

$$g(x,\lambda) = \begin{pmatrix} \kappa_1(x)[\,|\lambda| - \mu_1(x)\,]_+ & 0 & 0 \\ 0 & \kappa_2(x)[\,|\lambda| - \mu_2(x)\,]_+ & 0 \\ 0 & 0 & \kappa_3(x)[\,|\lambda| - \mu_3(x)\,]_+ \end{pmatrix} \frac{\lambda}{|\lambda|}$$

Здесь функции $\mu_i, \kappa_i : \Omega \to R$, $i = 1, 2, 3$ удовлетворяют тем же требованиям, что и функции μ и κ соответственно, и в некоторой окрестности нуля выполнено неравенство:

$$\left| g(x,\lambda) - \begin{pmatrix} \kappa_1(0) & 0 & 0 \\ 0 & \kappa_2(0) & 0 \\ 0 & 0 & \kappa_3(0) \end{pmatrix} \lambda \right| \leqslant c\,|\,x\,|\,|\,\lambda\,| + C.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 09-01-97015, 10-01-00728).

Summary

O.A. Zadvornov. Existence of Solutions for Quasilinear Elliptic Boundary Value Problem in the Presence of Point Sources.

The existence of solutions of a quasilinear elliptic boundary value problem in the presence of point sources is investigated. We use an additive selection of the singularity of the right side. Solution of nonlinear problem is sought as the sum of known solution of a linear problem (associated with the original one) with point sources in the right side and the unknown additive term.

Key words: quasilinear elliptic boundary value problem, point source, monotone operator, existence theorem.

Литература

1. *Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. – М.: Наука, 1973. – 576 с.
2. *Гаевский Х., Грегер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. – М.: Мир, 1978. – 336 с.
3. *Ляшко А.Д., Карчевский М.М.* О решении некоторых нелинейных задач теории фильтрации // Изв. вузов. Матем. – 1975. – № 6. – С. 73–81.
4. *Задворнов О.А.* Исследование нелинейной стационарной задачи фильтрации при наличии точечного источника // Изв. вузов. Матем. – 2005. – № 1. – С. 58-63.
5. *Бадриев И.Б., Бандеров В.В., Задворнов О.А.* Существование решения задачи о равновесии мягкой сетчатой оболочки при наличии точечного источника // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2010. – Т. 152, кн. 1. – С. 93-102.
6. *Вайнберг М.М.* Вариационные методы исследования нелинейных операторов. – М.: Гостехиздат, 1956. – 344 с.

Поступила в редакцию
23.11.09

Задворнов Олег Анатольевич – доктор физико-математических наук, профессор кафедры вычислительной математики Казанского государственного университета.

E-mail: *Oleg.Zadvornov@ksu.ru*