УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ КАЗАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
Том 152, кн. 1 Физико-математические науки *2010*

УДК 512.643.2

ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЙ ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ В ЗАДАЧЕ СИНТЕЗА ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ТРАНСПОРТИРОВКОЙ НЕФТИ И ГАЗА ПО ДЛИННЫМ ТРУБОПРОВОДАМ

А.А. Балоев, П.А. Лазарева

Аннотация

Рассматривается характеристический определитель, возникающий в задаче синтеза оптимального управления транспортировкой нефти и газа по длинным трубопроводам. Раскрытие данного определителя традиционными приемами при учете в разложении решения трех тонов и более представляет собой весьма трудную задачу, однако в настоящей работе характеристический определитель раскрыт в общем виде для любого числа тонов и получено выражение, содержащее только четные степени переменной.

Ключевые слова: транспортировка нефти и газа, характеристический определитель, оптимальное управление.

Введение

Современная технология транспорта нефти и нефтепродуктов по схеме «из насоса в насос» превращает магистральный трубопровод в единую динамическую систему, требующую согласованной работы всех насосных станций, вследствие чего существенно возросли требования к надежности систем регулирования. Важное значение приобретает проблема управления нефтепроводами при неустановившихся процессах. Такие процессы в магистральном трубопроводе, вызванные изменениями гидравлического режима перекачки (остановка или пуск насосных агрегатов, изменение давления (расхода), отключение или подключение попутного сброса или подкачки и т. п.), сопровождаются распространением от источника возмущения волн повышенного и пониженного давления по всей трубопроводной системе.

Исследованию неустановившихся процессов в трубопроводах посвящено множество работ (см., например, [1, 2]). Однако вопросы оптимального управления транспортировкой нефтепродуктов по магистральным трубопроводам остаются недостаточно разработанными [1]. В [3] рассматривается задача управления состоянием газопровода путем изменения давления в начале газопровода при неполном измерении по времени величины расхода потребителя. В [4] решается задача синтеза граничного управления транспортировкой углеводородного сырья по длинным трубопроводам в следующей формулировке: найти такое зависящее от фазовых координат $\phi_1(x,t)$, $\phi_2(x,t)$ управление $U(t)$, чтобы система

$$\frac{\partial \phi_1(x,t)}{\partial t} = \phi_2(x,t),$$

$$\frac{\partial \phi_2(x,t)}{\partial t} = c^2\,\frac{\partial^2 \phi_1(x,t)}{\partial x^2} - 2a\phi_2(x,t)$$

с граничными условиями

$$\phi_1(x,t)|_{x=0} = U(t), \quad \phi_1(x,t)|_{x=l} = p_*(t) \tag{1}$$

из начального ненулевого состояния

$$\phi_1(x,t)|_{t=0} = \phi_{10}(x), \quad \phi_2(x,t)|_{t=0} = \phi_{20}(x)$$

перешла в состояние

$$\phi_1(x,t)|_{t=\infty} = \phi_2(x,t)|_{t=\infty} = 0$$

при минимальном значении функционала

$$J = \frac{1}{2}\int\limits_0^\infty \left[\int\limits_0^l \left(c_1\phi_1^2(x,t) + c_2\phi_2^2(x,t)\right)\, dx + c_3U^2(t)\right] dt, \tag{2}$$

где $\phi_1(x,t)$ – отклонение давления от установившегося значения, Па; $U(t)$ – управляющее воздействие, Па; $p_*(t)$ – наперед заданная функция времени, Па; c – скорость звука в среде, м/с; a – коэффициент гидравлических потерь; l – длина трубопровода, м; c_i – весовые коэффициенты.

Для сведения граничных условий (1) к однородным вводится новая функция $\widetilde{\phi}_1$ такая, что

$$\phi_1(x,t) = \widetilde{\phi}_1(x,t) + \frac{x}{l}p_* - \frac{x-l}{l}U.$$

Для решения данной задачи используется вариационный корневой подход с применением универсальной формы записи [5]. В [4] получены необходимые условия экстремума функционала (2):

$$\frac{\partial^2\widetilde{\phi}_1}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2\widetilde{\phi}_1}{\partial x^2} - 2a\frac{\partial\widetilde{\phi}_1}{\partial t} - \frac{x}{l}\ddot{p}_* - 2a\frac{x}{l}\dot{p}_* + \frac{x-l}{l}\ddot{U} + 2a\frac{x-l}{l}\dot{U}, \tag{3}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2\lambda_2}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2\lambda_2}{\partial x^2} + 2a\frac{\partial\lambda_2}{\partial t} + c_2c^2\frac{\partial^2\tilde{\phi}_1}{\partial x^2} - 2ac_2\frac{\partial\widetilde{\phi}_1}{\partial t} - c_1\widetilde{\phi}_1 - \\ - 2ac_2\frac{x}{l}\dot{p}_* - c_1\frac{x}{l}p_* + 2ac_2\frac{x-l}{l}\dot{U} + c_1\frac{x-l}{l}U,\end{aligned} \tag{4}$$

$$U(t) = \frac{c^2}{c_3}\,\frac{\partial\lambda_2(0,t)}{\partial x}$$

с граничными условиями

$$\widetilde{\phi}_1(0,t) = \widetilde{\phi}_1(l,t) = 0, \quad \lambda_2(0,t) = \lambda_2(l,t) = 0.$$

Здесь λ_1, λ_2 – вспомогательные функции Лагранжа.

Уравнения (3), (4) решаются методом Галеркина, решения ищутся в виде

$$\widetilde{\phi}_1(x,t) = f(x)h(t), \quad \lambda_2(x,t) = f(x)q(t), \tag{5}$$

где $f(x) = [f_1(x),\ldots,f_n(x)]$ – вектор-строка базисных функций, $f_i(x) = \sin\left(\pi\frac{x}{l}i\right)$, $i = 1,2,\ldots,n$; $h(t) = [h_1(t),\ldots,h_n(t)]^T$, $q(t) = [q_1(t),\ldots,q_n(t)]^T$ – подлежащие определению векторы; n – количество тонов, удерживаемых в разложениях (5).

С учетом (5) система уравнений (3), (4) в матричной форме примет вид:

$$\dot{Z} = AZ + B(t), \tag{6}$$

где $4n$-мерный вектор Z, $(4n \times 4n)$-мерная матрица A и $4n$-мерный вектор B таковы, что

$$Z = \begin{bmatrix} h \\ X \\ q \\ Y \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0_{n,n} & E_n & 0_{n,n} & 0_{n,n} \\ a_2 & a_1 & a_4 & a_3 \\ 0_{n,n} & 0_{n,n} & 0_{n,n} & E_n \\ b_4 & -b_3 & b_2 & b_1 \end{bmatrix}, \quad B(t) = \begin{bmatrix} 0_n \\ a_5 p_{*\phi}(t) - a_6 p_{*\lambda}(t) \\ 0_n \\ b_5 p_{*\lambda}(t) \end{bmatrix}.$$

Здесь E_n – единичная матрица размерности $(n \times n)$, $0_{n,n}$ – нулевая матрица размерности $(n \times n)$, 0_n – n-мерный нулевой вектор,

$$X = \frac{\partial h}{\partial t}, \quad Y = \frac{\partial q}{\partial t},$$

$$p_{*\phi}(t) = \ddot{p}_*(t) + 2a\dot{p}_*(t), \quad p_{*\lambda}(t) = 2ac_2\dot{p}_*(t) + c_1 p_*(t),$$

$$a_1 = 2a\left(r_1 c_2 I_2 f_0 - E_n\right), \quad a_2 = -r_2 I_0 + I_2 f_0 \operatorname*{diag}_{i=\overline{1,n}} \left(r_1 r_2 c_2 i^2 + r_1 c_1\right),$$

$$a_3 = 2a\left(r_1^2 n c_2 - 2r_1\right) I_2 f_0, \quad a_4 = r_1 I_2 f_0 \operatorname*{diag}_{i=\overline{1,n}} \left(r_2 i^2 + r_1 c_1 n\right), \quad a_5 = \frac{2}{\pi} I_1,$$

$$a_6 = \frac{2}{\pi} r_1 I_2 f_0 I_1, \quad b_1 = -a_1, \quad b_2 = -r_2 I_0 - r_1 c_1 I_2 f_0, \quad b_3 = 2ac_2 E_n,$$

$$b_4 = -\operatorname*{diag}_{i=\overline{1,n}} \left(c_1 + r_2 c_2 i^2\right), \quad b_5 = \frac{2}{\pi} I_1. \tag{7}$$

Причем $I_0 = \operatorname*{diag}_{i=\overline{1,n}} \left(i^2\right)$ – матрица $(n \times n)$, n-мерные векторы

$$I_1 = \begin{bmatrix} -1 & \frac{1}{2} & \ldots & \frac{(-1)^n}{n} \end{bmatrix}^T, \quad I_2 = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \ldots & \frac{1}{n} \end{bmatrix}^T,$$

n-мерная вектор-строка $f_0 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \end{bmatrix}$,

$$r_1 = \frac{2c^2}{c_3 l}, \quad r_2 = \frac{c^2 \pi^2}{l^2}.$$

Характеристический многочлен системы (6) имеет вид:

$$|A - \lambda E_{4n}| = \begin{vmatrix} -\lambda E_n & E_n & 0_{n,n} & 0_{n,n} \\ a_2 & a_1 - \lambda E_n & a_4 & a_3 \\ 0_{n,n} & 0_{n,n} & -\lambda E_n & E_n \\ b_4 & -b_3 & b_2 & b_1 - \lambda E_n \end{vmatrix} = 0. \tag{8}$$

Раскрытие данного определителя порядка $(4n \times 4n)$ традиционными приемами представляет собой весьма трудоемкую задачу. Так, например, при учете в разложении решения трех тонов он приобретает двенадцатый порядок. Однако в данной работе определитель (8) раскрывается в общем виде для любого числа тонов n.

1. Раскрытие определителя

Для раскрытия определителя блочной матрицы (8) воспользуемся формулой Фробениуса [6, с. 59]:

$$|A-\lambda E_{4n}| = \Delta = \begin{vmatrix} -\lambda E_n & E_n \\ a_2 & a_1-\lambda E_n \end{vmatrix} \left| \begin{bmatrix} -\lambda E_n & E_n \\ b_2 & b_1-\lambda E_n \end{bmatrix} - \right.$$

$$\left. - \begin{bmatrix} 0_{n,n} & 0_{n,n} \\ b_4 & -b_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\lambda E_n & E_n \\ a_2 & a_1-\lambda E_n \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0_{n,n} & 0_{n,n} \\ a_4 & a_3 \end{bmatrix} \right| = 0. \quad (9)$$

Рассмотрим первый определитель правой части в (9):

$$\begin{vmatrix} -\lambda E_n & E_n \\ a_2 & a_1-\lambda E_n \end{vmatrix} = |-\lambda E_n| \left| [a_1-\lambda E_n] - a_2[-\lambda E_n]^{-1}E_n \right| =$$

$$= (-1)^n \lambda^n \left| \frac{a_1\lambda - \lambda^2 E_n + a_2}{\lambda} \right| = (-1)^n |Q|, \quad (10)$$

где

$$Q = -\lambda^2 E_n + a_1\lambda + a_2.$$

Далее найдем обратную матрицу в (9) (см. [6]):

$$\begin{bmatrix} -\lambda E_n & E_n \\ a_2 & a_1-\lambda E_n \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -\operatorname{diag}(\lambda^{-1}) & 0_{n,n} \\ 0_{n,n} & \lambda Q^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_n - Q^{-1}a_2 & -\lambda Q^{-1} \\ a_2/\lambda & E_n \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -\left(E_n - Q^{-1}a_2\right)\dfrac{1}{\lambda} & Q^{-1} \\ Q^{-1}a_2 & \lambda Q^{-1} \end{bmatrix}. \quad (11)$$

Теперь подставим (10) и (11) в (9):

$$\Delta = (-1)^n |Q| \left| \begin{bmatrix} -\lambda E_n & E_n \\ b_2 & b_1-\lambda E_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0_{n,n} & 0_{n,n} \\ b_4 & -b_3 \end{bmatrix} \times \right.$$

$$\left. \times \begin{bmatrix} -\left(E_n - Q^{-1}a_2\right)\dfrac{1}{\lambda} & Q^{-1} \\ Q^{-1}a_2 & \lambda Q^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0_{n,n} & 0_{n,n} \\ a_4 & a_3 \end{bmatrix} \right| = (-1)^n |Q| \times$$

$$\times \begin{vmatrix} -\lambda E_n & E_n \\ b_2 - (b_4 - b_3\lambda)Q^{-1}a_4 & b_1 - \lambda E_n - (b_4 - b_3\lambda)Q^{-1}a_3 \end{vmatrix} =$$

$$= |Q| \left| b_1\lambda + b_2 - \lambda^2 E_n - (b_4 - b_3\lambda)Q^{-1}\left(a_3\lambda + a_4\right) \right| = 0. \quad (12)$$

Исследуем определитель $|Q|$, где

$$Q = -\lambda^2 E_n + a_1\lambda + a_2 =$$

$$= -\lambda^2 E_n + 2a\left(r_1c_2I_2f_0 - E_n\right)\lambda - r_2I_0 + I_2f_0 \operatorname*{diag}_{i=\overline{1,n}}\left(r_1r_2c_2i^2 + r_1c_1\right),$$

то есть

$$Q = I_2f_0 \operatorname*{diag}_{i=\overline{1,n}}\left(\beta_i\right) + \operatorname*{diag}_{i=\overline{1,n}}\left(\tilde{\alpha}_i\right), \quad (13)$$

где
$$\beta_i = 2ar_1c_2\lambda + r_1r_2c_2i^2 + r_1c_1, \quad \tilde{\alpha}_i = -\left(\lambda^2 + 2a\lambda + r_2i^2\right).$$

Обозначим
$$C_0 = 2ar_1c_2, \quad B_i = r_1\left(r_2c_2i^2 + c_1\right), \quad A_i = r_2i^2, \quad \alpha_i = \lambda^2 + 2a\lambda + A_i.$$

Тогда
$$\beta_i = C_0\lambda + B_i, \quad \tilde{\alpha}_i = -\alpha_i.$$

Определитель $|Q|$ согласно (13) примет вид:
$$|Q| = \left|I_2\beta_1 + \underline{\tilde{\alpha}}_1 \quad I_2 2\beta_2 + \underline{\tilde{\alpha}}_2 \quad \ldots \quad I_2 n\beta_n + \underline{\tilde{\alpha}}_n\right|,$$

где n-мерный столбец
$$\underline{\widetilde{\alpha}}_i = \begin{bmatrix}0 & \ldots & 0 & \tilde{\alpha}_i & 0 & \ldots & 0\end{bmatrix}^T, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Так как столбцы определителя $|Q|$ представлены в виде суммы двух слагаемых, то можем представить его в виде суммы определителей. Среди полученных слагаемых равны нулю те, у которых имеется более одного столбца, содержащего $I_2 i\beta_i$. Это обусловлено тем, что при вынесении общих множителей столбцов $i\beta_i$ в данных определителях обнаруживаются два и более одинаковых столбца I_2. Таким образом, путем вышеприведенных преобразований получаем:

$$\begin{gathered}
|Q| = \left|I_2\beta_1 + \underline{\tilde{\alpha}}_1 \quad I_2 2\beta_2 + \underline{\tilde{\alpha}}_2 \quad \ldots \quad I_2 n\beta_n + \underline{\tilde{\alpha}}_n\right| = \\
= 1\cdot 1\beta_1\tilde{\alpha}_2\ldots\tilde{\alpha}_n + \frac{1}{2}2\beta_2\tilde{\alpha}_1\tilde{\alpha}_3\ldots\tilde{\alpha}_n + \ldots + \frac{1}{n}n\beta_n\tilde{\alpha}_1\ldots\tilde{\alpha}_{n-1} + \tilde{\alpha}_1\ldots\tilde{\alpha}_n = \\
= \beta_1\tilde{\alpha}_2\ldots\tilde{\alpha}_n + \beta_2\tilde{\alpha}_1\tilde{\alpha}_3\ldots\tilde{\alpha}_n + \ldots + \beta_n\tilde{\alpha}_1\ldots\tilde{\alpha}_{n-1} + \tilde{\alpha}_1\ldots\tilde{\alpha}_n. \quad (14)
\end{gathered}$$

Введем обозначения:
$$\Lambda = (-1)^n\prod_{j=1}^{n}\alpha_j, \quad \Lambda_i = (-1)^{n-1}\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\alpha_j, \quad \Lambda_{ij} = (-1)^{n-2}\prod_{\substack{k=1\\ k\neq i,j}}^{n}\alpha_k.$$

Тогда
$$|Q| = \sum_{i=1}^{n}\beta_i\Lambda_i + \Lambda. \quad (15)$$

Найдем алгебраические дополнения элементов матрицы Q, не стоящих на главной диагонали ($i \neq j$). Заметим, что в алгебраическом дополнении Δ_{ij} в i-м столбце отсутствует слагаемое $\widetilde{\alpha}_i$. Поэтому при преобразовании определителя к сумме определителей все слагаемые, содержащие $I_2 f_{0k}\beta_k$, $k \neq i$, будут равны нулю. Таким образом, приходим к виду

$$\Delta_{ij} = \begin{vmatrix}
\widetilde{\alpha}_1 & \ldots & I_{21}f_{0i}\beta_i & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
0 & \ldots & I_{2(i-1)}f_{0i}\beta_i & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots \\
0 & \ldots & I_{2(i+1)}f_{0i}\beta_i & \widetilde{\alpha}_{i+1} & \ldots & 0 & 0 & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
0 & \ldots & I_{2j}f_{0i}\beta_i & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots \\
0 & \ldots & I_{2(j+1)}f_{0i}\beta_i & 0 & \ldots & 0 & \widetilde{\alpha}_{j+1} & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots
\end{vmatrix}. \quad (16)$$

В определителе (16) остался один столбец, содержащий $I_2 f_{0i}\beta_i$, остальные элементы – диагональные, за исключением области, образуемой строками под номерами $(i+1)$ и j и столбцами i и $(j-1)$, где элементы $\tilde{\alpha}_k$ находятся над главной диагональю. Раскладывая определитель (16) по элементам столбцов от 1 до $(i-1)$ и от $(j+1)$ до n-го, получаем

$$\Delta_{ij} = \tilde{\alpha}_1 \ldots \tilde{\alpha}_{i-1}\tilde{\alpha}_{j+1}\ldots\tilde{\alpha}_n \begin{vmatrix} I_{2(i+1)} f_{0i}\beta_i & \tilde{\alpha}_{i+1} & 0 & \ldots & 0 \\ I_{2(i+2)} f_{0i}\beta_i & 0 & \tilde{\alpha}_{i+2} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ I_{2j} f_{0i}\beta_i & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{vmatrix}.$$

Далее продолжим разложение по элементам j-й строки:

$$\Delta_{ij} = (-1)^{i+j}\tilde{\alpha}_1 \ldots \tilde{\alpha}_{i-1}\tilde{\alpha}_{j+1}\ldots\tilde{\alpha}_n I_{2j} f_{0i}\beta_i \begin{vmatrix} \tilde{\alpha}_{i+1} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \tilde{\alpha}_{i+2} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \tilde{\alpha}_{j-1} \end{vmatrix}.$$

Ввиду того, что элементы $\tilde{\alpha}_k$ находятся над главной диагональю, сумма их индексов всегда нечетная, поэтому получаем

$$\Delta_{ij} = (-1)^{i+j}\tilde{\alpha}_1 \ldots \tilde{\alpha}_{i-1}\tilde{\alpha}_{j+1}\ldots\tilde{\alpha}_n I_{2j} f_{0i}\beta_i (-1)\tilde{\alpha}_{i+1}(-1)\tilde{\alpha}_{i+2}\ldots(-1)\tilde{\alpha}_{j-1} =$$

$$= (-1)^{i+j+(j-1)-(i+1)+1}\frac{i}{j}\prod_{\substack{k=1\\k\neq i,j}}^{n}\tilde{\alpha}_k\beta_i = (-1)^{2j-1}\frac{i}{j}\prod_{\substack{k=1\\k\neq i,j}}^{n}(-1)\alpha_k\beta_i = -\frac{i}{j}\beta_i\Lambda_{ij},$$

то есть

$$\Delta_{ij} = -\frac{i}{j}\beta_i\Lambda_{ij}, \quad i\neq j, \quad i,j = 1,2,\ldots,n.$$

В случае, когда $i=j$, по аналогии с (14) получим, что

$$\Delta_{jj} = \sum_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{n}\beta_i\Lambda_{ij} + \Lambda_j, \quad j = 1,2,\ldots,n.$$

В таком случае обратная матрица

$$Q^{-1} = \frac{1}{|Q|}\begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \ldots & \delta_{1n} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \ldots & \delta_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \ldots & \delta_{nn} \end{bmatrix}, \tag{17}$$

где $\delta_{ij} = \Delta_{ji}$.

Рассмотрим произведение, которое будет использовано далее:

$$\delta_{ij} I_2 f_0 = \begin{bmatrix} \sum\limits_{j=1}^{n}\delta_{1j}j^{-1} & 2\sum\limits_{j=1}^{n}\delta_{1j}j^{-1} & \ldots & n\sum\limits_{j=1}^{n}\delta_{1j}j^{-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \sum\limits_{j=1}^{n}\delta_{nj}j^{-1} & 2\sum\limits_{j=1}^{n}\delta_{nj}j^{-1} & \ldots & n\sum\limits_{j=1}^{n}\delta_{nj}j^{-1} \end{bmatrix}.$$

Элемент матрицы преобразуем следующим образом:

$$\sum_{j=1}^{n}\delta_{ij}j^{-1}=\sum_{j=1}^{i-1}j^{-1}\delta_{ij}+\frac{1}{i}\delta_{ii}+\sum_{j=i+1}^{n}j^{-1}\delta_{ij}=-\sum_{j=1}^{i-1}j^{-1}\frac{j}{i}\beta_j\Lambda_{ij}+$$

$$+\frac{1}{i}\left(\sum_{j=1,j\neq i}^{n}\beta_j\Lambda_{ij}+\Lambda_i\right)-\sum_{j=i+1}^{n}j^{-1}\frac{j}{i}\beta_j\Lambda_{ij}=-\frac{1}{i}\sum_{j=1}^{i-1}\beta_j\Lambda_{ij}+$$

$$+\frac{1}{i}\left(\sum_{j=1,j\neq i}^{n}\beta_j\Lambda_{ij}+\Lambda_i\right)-\frac{1}{i}\sum_{j=i+1}^{n}\beta_j\Lambda_{ij}=\frac{1}{i}\Lambda_i.$$

Тогда имеем:

$$\delta_{ij}I_2f_0=\begin{bmatrix}\Lambda_1 & 2\Lambda_1 & \ldots & n\Lambda_1\\ \frac{1}{2}\Lambda_2 & \Lambda_2 & \ldots & \frac{n}{2}\Lambda_2\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \frac{1}{n}\Lambda_n & \frac{2}{n}\Lambda_n & \ldots & \Lambda_n\end{bmatrix}=\operatorname*{diag}_{i=\overline{1,n}}(\Lambda_i)I_2f_0. \tag{18}$$

Определитель (12) с учетом (7), (17) и (18) запишется в виде:

$$\Delta=|Q|\left|\frac{1}{|Q|}S\tilde{D}+I_2\tilde{f}_0+\operatorname*{diag}_{i=\overline{1,n}}\left(\tilde{\delta}_i\right)\right|, \tag{19}$$

где

$$S=\operatorname*{diag}_{i=\overline{1,n}}(\beta_i\Lambda_i)\,I_2=\begin{bmatrix}\beta_1\Lambda_1 & \frac{1}{2}\beta_2\Lambda_2 & \ldots & \frac{1}{n}\beta_n\Lambda_n\end{bmatrix}^T,$$

$$\tilde{D}=f_0\operatorname*{diag}_{i=\overline{1,n}}(D_0\lambda+D_i)=\begin{bmatrix}D_0\lambda+D_1 & 2\,(D_0\lambda+D_2) & \ldots & n\,(D_0\lambda+D_n)\end{bmatrix},$$

$$\widetilde{f}_0=-f_0\,(C_0\lambda+A_0)\,,\quad \tilde{\delta}_i=-\bar{\alpha}_i,\quad \bar{\alpha}_i=\lambda^2-2a\lambda+A_i,\quad A_0=r_1c_1,$$

$$D_0=2a\,(r_1nc_2-2)\,,\quad D_i=r_2i^2+r_1c_1n,\quad i=1,2,\ldots,n.$$

Введем обозначения:

$$\bar{\Lambda}=(-1)^n\prod_{j=1}^{n}\bar{\alpha}_j,\quad \bar{\Lambda}_i=(-1)^{n-1}\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\bar{\alpha}_j,\quad \bar{\Lambda}_{ij}=(-1)^{n-2}\prod_{\substack{k=1\\ k\neq i,j}}^{n}\bar{\alpha}_k,$$

$$\hat{\Lambda}=\Lambda\bar{\Lambda},\quad \hat{\Lambda}_i=\Lambda_i\bar{\Lambda}_i,\quad \hat{\Lambda}_{ij}=\Lambda_{ij}\bar{\Lambda}_{ij}.$$

Запишем определитель (19) в виде

$$\Delta=\sum_{i=1}^{n}\Delta_{1i}+\sum_{i=1}^{n}\Delta_{2i}+\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\Delta_{3ij}+|Q|\bar{\Lambda}, \tag{20}$$

где

$$\sum_{i=1}^{n}\Delta_{1i}=|Q|\sum_{i=1}^{n}\left|\underline{\widetilde{\delta}}_1\quad\ldots\quad\underline{\widetilde{\delta}}_{i-1}\quad\frac{1}{|Q|}S\widetilde{D}_i\quad\underline{\widetilde{\delta}}_{i+1}\quad\ldots\quad\underline{\widetilde{\delta}}_n\right|=\sum_{i=1}^{n}\bar{D}_i\beta_i\bar{\Lambda}_i, \tag{21}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\Delta_{2i}=|Q|\sum_{i=1}^{n}\left|\underline{\widetilde{\delta}}_1\quad\ldots\quad\underline{\widetilde{\delta}}_{i-1}\quad I_2\tilde{f}_{0i}\quad\underline{\widetilde{\delta}}_{i+1}\quad\ldots\quad\underline{\widetilde{\delta}}_n\right|=-|Q|\left(C_0\lambda+A_0\right)\sum_{i=1}^{n}\bar{\Lambda}_i,\tag{22}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\Delta_{3ij}=|Q|\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\left|\underline{\widetilde{\delta}}_1\quad\ldots\quad\frac{1}{|Q|}S\widetilde{D}_i\quad\ldots\quad I_2\widetilde{f}_{0j}\quad\ldots\quad\underline{\widetilde{\delta}}_n\right|=$$
$$=\left(C_0\lambda+A_0\right)\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}\left(D_i-D_j\right)\left(\beta_i\alpha_j-\beta_j\alpha_i\right)\widehat{\Lambda}_{ij}.\tag{23}$$

Здесь

$$\underline{\tilde{\delta}}_i=\begin{bmatrix}0&\ldots&0&\tilde{\delta}_i&0&\ldots&0\end{bmatrix}^T,\quad \bar{D}_i=D_0\lambda+D_i.$$

С учетом (21)–(23) можно переписать (20) в виде:

$$\Delta=\sum_{i=1}^{n}\bar{D}_i\beta_i\hat{\Lambda}_i-|Q|\left(C_0\lambda+A_0\right)\sum_{i=1}^{n}\bar{\Lambda}_i+$$
$$+\left(C_0\lambda+A_0\right)\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}\left(D_i-D_j\right)\left(\beta_i\alpha_j-\beta_j\alpha_i\right)\hat{\Lambda}_{ij}+|Q|\bar{\Lambda}.\tag{24}$$

В (24) согласно (15) имеем:

$$|Q|\sum_{i=1}^{n}\bar{\Lambda}_i=\sum_{i=1}^{n}\beta_i\Lambda_i\sum_{j=1}^{n}\bar{\Lambda}_j+\Lambda\sum_{j=1}^{n}\bar{\Lambda}_j\tag{25}$$

и

$$|Q|\bar{\Lambda}=\sum_{i=1}^{n}\beta_i\Lambda_i\bar{\Lambda}+\hat{\Lambda}.\tag{26}$$

Далее для (25) имеем:

$$\sum_{i=1}^{n}\beta_i\Lambda_i\sum_{j=1}^{n}\bar{\Lambda}_j=\beta_1\Lambda_1\sum_{j=1}^{n}\bar{\Lambda}_j+\beta_2\Lambda_2\sum_{j=1}^{n}\bar{\Lambda}_j+\ldots+\beta_n\Lambda_n\sum_{j=1}^{n}\bar{\Lambda}_j=$$
$$=\beta_1\left(\hat{\Lambda}_1+\alpha_2\bar{\alpha}_1\hat{\Lambda}_{12}+\ldots+\alpha_n\bar{\alpha}_1\hat{\Lambda}_{1n}\right)+\beta_2\left(\alpha_1\bar{\alpha}_2\hat{\Lambda}_{21}+\hat{\Lambda}_2+\ldots+\alpha_n\bar{\alpha}_2\hat{\Lambda}_{2n}\right)+$$
$$+\ldots+\beta_n\left(\alpha_1\bar{\alpha}_n\hat{\Lambda}_{n1}+\alpha_2\bar{\alpha}_n\hat{\Lambda}_{n2}+\ldots+\hat{\Lambda}_n\right)=$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\beta_i\hat{\Lambda}_i+\sum_{i=1}^{n-1}\beta_i\sum_{j=i+1}^{n}\alpha_j\bar{\alpha}_i\hat{\Lambda}_{ij}+\sum_{i=2}^{n}\beta_i\sum_{j=1}^{i-1}\alpha_j\bar{\alpha}_i\hat{\Lambda}_{ij}.\tag{27}$$

Преобразуем последнее слагаемое в (27). Обозначим $\alpha=i-1$:

$$\sum_{i=2}^{n}\beta_i\sum_{j=1}^{i-1}\alpha_j\bar{\alpha}_i\hat{\Lambda}_{ij}=\sum_{\alpha=1}^{n-1}\beta_{\alpha+1}\sum_{j=1}^{\alpha}\alpha_j\bar{\alpha}_{\alpha+1}\hat{\Lambda}_{\alpha+1,j}.$$

Изменим очередность суммирования:

$$\sum_{\alpha=1}^{n-1}\beta_{\alpha+1}\sum_{j=1}^{\alpha}\alpha_j\bar{\alpha}_{\alpha+1}\hat{\Lambda}_{\alpha+1,j}=\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{\alpha=j}^{n-1}\beta_{\alpha+1}\alpha_j\bar{\alpha}_{\alpha+1}\hat{\Lambda}_{\alpha+1,j}=\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i}^{n-1}\beta_{j+1}\alpha_i\bar{\alpha}_{j+1}\hat{\Lambda}_{j+1,i},$$

то есть

$$\sum_{i=2}^{n}\beta_i\sum_{j=1}^{i-1}\alpha_j\bar{\alpha}_i\hat{\Lambda}_{ij}=\sum_{i=1}^{n-1}\alpha_i\sum_{j=i}^{n-1}\beta_{j+1}\bar{\alpha}_{j+1}\hat{\Lambda}_{i,j+1}=\sum_{i=1}^{n-1}\alpha_i\sum_{j=i+1}^{n}\beta_j\bar{\alpha}_j\hat{\Lambda}_{ij}. \tag{28}$$

Объединяя второе слагаемое в (27) и (28), получим:

$$\sum_{i=1}^{n-1}\beta_i\sum_{j=i+1}^{n}\alpha_j\bar{\alpha}_i\hat{\Lambda}_{ij}+\sum_{i=2}^{n}\beta_i\sum_{j=1}^{i-1}\alpha_j\bar{\alpha}_i\hat{\Lambda}_{ij}=\sum_{i=1}^{n-1}\beta_i\sum_{j=i+1}^{n}\alpha_j\bar{\alpha}_i\hat{\Lambda}_{ij}+\sum_{i=1}^{n-1}\alpha_i\sum_{j=i+1}^{n}\beta_j\bar{\alpha}_j\hat{\Lambda}_{ij}=$$

$$=\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}\left(\beta_i\alpha_j\bar{\alpha}_i+\alpha_i\beta_j\bar{\alpha}_j\right)\hat{\Lambda}_{ij},$$

поэтому

$$\sum_{i=1}^{n}\beta_i\Lambda_i\sum_{j=1}^{n}\bar{\Lambda}_j=\sum_{i=1}^{n}\beta_i\hat{\Lambda}_i+\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}\left(\beta_i\alpha_j\bar{\alpha}_i+\alpha_i\beta_j\bar{\alpha}_j\right)\hat{\Lambda}_{ij}. \tag{29}$$

Далее в (25)

$$\Lambda\sum_{i=1}^{n}\bar{\Lambda}_i=-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\hat{\Lambda}_i. \tag{30}$$

Кроме того, в (26)

$$\sum_{i=1}^{n}\beta_i\Lambda_i\bar{\Lambda}=-\sum_{i=1}^{n}\beta_i\bar{\alpha}_i\hat{\Lambda}_i. \tag{31}$$

Таким образом, из (24) с учетом (25), (26), (29)–(31) находим, что

$$\Delta=\sum_{i=1}^{n}\bar{D}_i\beta_i\hat{\Lambda}_i-(C_0\lambda+A_0)\left(\sum_{i=1}^{n}\beta_i\hat{\Lambda}_i+\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}\left(\beta_i\alpha_j\bar{\alpha}_i+\alpha_i\beta_j\bar{\alpha}_j\right)\hat{\Lambda}_{ij}-\right.$$

$$\left.-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\hat{\Lambda}_i\right)-\sum_{i=1}^{n}\beta_i\bar{\alpha}_i\hat{\Lambda}_i+\hat{\Lambda}+(C_0\lambda+A_0)\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}(D_i-D_j)\left(\beta_i\alpha_j-\beta_j\alpha_i\right)\hat{\Lambda}_{ij}.$$

Объединяя слагаемые, запишем, что

$$\Delta=\sum_{i=1}^{n}\left(\bar{D}_i\beta_i-\beta_i\bar{\alpha}_i-(C_0\lambda+A_0)\left(\beta_i-\alpha_i\right)\right)\hat{\Lambda}_i+$$

$$+(C_0\lambda+A_0)\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}\left((D_i-D_j)\left(\beta_i\alpha_j-\beta_j\alpha_i\right)-\beta_i\alpha_j\bar{\alpha}_i-\alpha_i\beta_j\bar{\alpha}_j\right)\hat{\Lambda}_{ij}+\hat{\Lambda}. \tag{32}$$

Введем обозначения:

$$D_{ij}=D_i-D_j,$$

$$G_i=\left(D_0\lambda+D_i-\bar{\alpha}_i-C_0\lambda-A_0\right)\beta_i+(C_0\lambda+A_0)\,\alpha_i,$$

$$\tilde{S}_{ij}=\left(D_{ij}-\bar{\alpha}_i\right)\beta_i\alpha_j-\left(D_{ij}+\bar{\alpha}_j\right)\beta_j\alpha_i.$$

Тогда для (32) имеем:

$$\Delta = \sum_{i=1}^{n} G_i \hat{\Lambda}_i + (C_0\lambda + A_0) \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} \tilde{S}_{ij} \hat{\Lambda}_{ij} + \hat{\Lambda}. \tag{33}$$

Заметим, что

$$D_{ij} = r_2 \left(i^2 - j^2\right) = A_i - A_j,$$

поэтому

$$D_{ij} - A_i = -A_j, \quad D_{ij} + A_j = A_i.$$

Следовательно,

$$\tilde{S}_{ij} = \left(D_{ij} - \lambda^2 + 2a\lambda - A_i\right) \beta_i \alpha_j - \left(D_{ij} + \lambda^2 - 2a\lambda + A_j\right) \beta_j \alpha_i =$$

$$= \left(-\lambda^2 + 2a\lambda - A_j\right) \beta_i \alpha_j - \left(\lambda^2 - 2a\lambda + A_i\right) \beta_j \alpha_i =$$

$$= -\bar{\alpha}_j \beta_i \alpha_j - \bar{\alpha}_i \beta_j \alpha_i = -\left(\hat{\alpha}_j \beta_i + \hat{\alpha}_i \beta_j\right),$$

где

$$\hat{\alpha}_i = \alpha_i \bar{\alpha}_i = \left(\lambda^2 + 2a\lambda + A_i\right)\left(\lambda^2 - 2a\lambda + A_i\right) = \left(\lambda^2 + A_i\right)^2 - 4a^2\lambda^2.$$

Рассмотрим в (33) выражение

$$\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} \tilde{S}_{ij} \hat{\Lambda}_{ij} = -\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} \left(\hat{\alpha}_i \beta_j + \hat{\alpha}_j \beta_i\right) \hat{\Lambda}_{ij} = -\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} \left(\beta_j \hat{\Lambda}_j + \beta_i \hat{\Lambda}_i\right), \tag{34}$$

где

$$\hat{\Lambda}_i = \hat{\alpha}_j \hat{\Lambda}_{ij}, \quad \hat{\Lambda}_j = \hat{\alpha}_i \hat{\Lambda}_{ij}.$$

Далее преобразуем слагаемые в (34):

$$\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} \beta_j \hat{\Lambda}_j = \sum_{j=2}^{n} \beta_j \hat{\Lambda}_j + \sum_{j=3}^{n} \beta_j \hat{\Lambda}_j + \ldots \sum_{j=n-1}^{n} \beta_j \hat{\Lambda}_j + \sum_{j=n}^{n} \beta_j \hat{\Lambda}_j =$$

$$= \beta_n \hat{\Lambda}_n (n-1) + \beta_{n-1} \hat{\Lambda}_{n-1} (n-2) + \ldots + \beta_3 \hat{\Lambda}_3 \cdot 2 + \beta_2 \hat{\Lambda}_2 \cdot 1 = \sum_{i=2}^{n} (i-1) \beta_i \hat{\Lambda}_i,$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} \beta_i \hat{\Lambda}_i = \beta_1 \hat{\Lambda}_1 (n-1) + \beta_2 \hat{\Lambda}_2 (n-2) + \ldots + \beta_{n-1} \hat{\Lambda}_{n-1} \cdot 2 + \beta_n \hat{\Lambda}_n \cdot 1 =$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} (n-i) \beta_i \hat{\Lambda}_i.$$

Тогда (34) примет вид:

$$\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} \tilde{S}_{ij} \hat{\Lambda}_{ij} = -\left(\sum_{i=2}^{n} (i-1) \beta_i \hat{\Lambda}_i + \sum_{i=1}^{n-1} (n-i) \beta_i \hat{\Lambda}_i\right) =$$

$$= -\left(\sum_{i=2}^{n-1} (i-1) \beta_i \hat{\Lambda}_i + (n-1) \beta_n \hat{\Lambda}_n + (n-1) \beta_1 \hat{\Lambda}_1 + \sum_{i=2}^{n-1} (n-i) \beta_i \hat{\Lambda}_i\right) =$$

$$= -\left(\sum_{i=2}^{n-1} (n-1) \beta_i \hat{\Lambda}_i + (n-1) \beta_n \hat{\Lambda}_n + (n-1) \beta_1 \hat{\Lambda}_1\right) = -(n-1) \sum_{i=1}^{n} \beta_i \hat{\Lambda}_i.$$

Таким образом, для (33) имеем:

$$\Delta = \sum_{i=1}^{n} G_i \hat{\Lambda}_i - (n-1)(C_0\lambda + A_0) \sum_{i=1}^{n} \beta_i \hat{\Lambda}_i + \hat{\Lambda} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left[\left(\bar{D}_i - \bar{\alpha}_i - C_0\lambda - A_0 \right) \beta_i + (C_0\lambda + A_0)\alpha_i - (n-1)(C_0\lambda + A_0)\beta_i \right] \hat{\Lambda}_i + \hat{\Lambda} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left[\left(\bar{D}_i - \bar{\alpha}_i - n(C_0\lambda + A_0) \right) \beta_i + (C_0\lambda + A_0)\alpha_i \right] \hat{\Lambda}_i + \hat{\Lambda}. \quad (35)$$

Распишем следующее выражение в (35):

$$\bar{D}_i - \bar{\alpha}_i - n(C_0\lambda + A_0) = (2ar_1nc_2 - 4a)\lambda + r_2i^2 + r_1c_1n -$$

$$- \lambda^2 + 2a\lambda - r_2i^2 - 2ar_1nc_2\lambda - r_1c_1n = -\lambda^2 - 2a\lambda.$$

Тогда (35) преобразуется к виду:

$$\Delta = \sum_{i=1}^{n} \left[\left(-\lambda^2 - 2a\lambda \right) \beta_i + (C_0\lambda + A_0)\alpha_i \right] \hat{\Lambda}_i + \hat{\Lambda} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left[(C_0\lambda + B_i)\left(-\lambda^2 - 2a\lambda \right) + (C_0\lambda + A_0)\left(\lambda^2 + 2a\lambda + A_i \right) \right] \hat{\Lambda}_i + \hat{\Lambda}. \quad (36)$$

Раскроем в (36) выражение под знаком суммы:

$$(C_0\lambda + B_i)\left(-\lambda^2 - 2a\lambda \right) + (C_0\lambda + A_0)\left(\lambda^2 + 2a\lambda + A_i \right) =$$

$$= (-B_i + A_0)\lambda^2 + (2a(A_0 - B_i) + C_0A_i)\lambda + A_0A_i =$$

$$= \left(-r_1r_2c_2i^2 - r_1c_1 + r_1c_1 \right)\lambda^2 + \left(2a\left(r_1c_1 - r_1r_2c_2i^2 - r_1c_1 \right) + 2ar_1r_2c_2i^2 \right)\lambda +$$

$$+ c_1r_1r_2i^2 = -r_1r_2c_2i^2\lambda^2 + r_1r_2c_1i^2. \quad (37)$$

С учетом (37), (36) примет вид:

$$\Delta = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i \hat{\Lambda}_i + \hat{\Lambda}, \quad (38)$$

где

$$\gamma_i = r_1r_2i^2\left(c_1 - c_2\lambda^2 \right).$$

Таким образом, нами раскрыт характеристический определитель (8) системы (6) в общем виде, причем в полученном выражении присутствуют только четные степени переменной λ.

Рассмотрим пример.

Пусть $n = 3$. В этом случае характеристический определитель имеет двенадцатый порядок:

$$|A - \lambda E_{12}| = \begin{vmatrix} -\lambda E_3 & E_3 & 0_{3,3} & 0_{3,3} \\ a_2 & a_1 - \lambda E_3 & a_4 & a_3 \\ 0_{3,3} & 0_{3,3} & -\lambda E_3 & E_3 \\ b_4 & -b_3 & b_2 & b_1 - \lambda E_3 \end{vmatrix}.$$

Запишем выражения

$$\alpha_1 = \lambda^2 + 2a\lambda + r_2, \quad \alpha_2 = \lambda^2 + 2a\lambda + 4r_2, \quad \alpha_3 = \lambda^2 + 2a\lambda + 9r_2,$$

$$\bar{\alpha}_1 = \lambda^2 - 2a\lambda + r_2, \quad \bar{\alpha}_2 = \lambda^2 - 2a\lambda + 4r_2, \quad \bar{\alpha}_2 = \lambda^2 - 2a\lambda + 9r_2.$$

Тогда

$$\Lambda = (-1)^3 \prod_{j=1}^{3} \alpha_j = -\left(\lambda^2 + 2a\lambda + r_2\right)\left(\lambda^2 + 2a\lambda + 4r_2\right)\left(\lambda^2 + 2a\lambda + 9r_2\right),$$

$$\Lambda_1 = \left(\lambda^2 + 2a\lambda + 4r_2\right)\left(\lambda^2 + 2a\lambda + 9r_2\right), \quad \Lambda_2 = \left(\lambda^2 + 2a\lambda + r_2\right)\left(\lambda^2 + 2a\lambda + 9r_2\right),$$

$$\Lambda_3 = \left(\lambda^2 + 2a\lambda + r_2\right)\left(\lambda^2 + 2a\lambda + 4r_2\right),$$

$$\bar{\Lambda} = (-1)^3 \prod_{j=1}^{3} \bar{\alpha}_j = -\left(\lambda^2 - 2a\lambda + r_2\right)\left(\lambda^2 - 2a\lambda + 4r_2\right)\left(\lambda^2 - 2a\lambda + 9r_2\right),$$

$$\bar{\Lambda}_1 = \left(\lambda^2 - 2a\lambda + 4r_2\right)\left(\lambda^2 - 2a\lambda + 9r_2\right), \quad \bar{\Lambda}_2 = \left(\lambda^2 - 2a\lambda + r_2\right)\left(\lambda^2 - 2a\lambda + 9r_2\right),$$

$$\bar{\Lambda}_3 = \left(\lambda^2 - 2a\lambda + r_2\right)\left(\lambda^2 - 2a\lambda + 4r_2\right).$$

Затем найдем

$$\hat{\Lambda} = \Lambda\bar{\Lambda} = \lambda^{12} + \left(-12a^2 + 28r_2\right)\lambda^{10} + \left(48a^4 + 294r_2^2 - 224a^2r_2\right)\lambda^8 +$$
$$+ \left(-64a^6 + 448a^4r_2 - 1568a^2r_2^2 + 1444r_2^3\right)\lambda^6 + \left(3409r_2^4 + 1568a^4r_2^2 - 4624a^2r_2^3\right)\lambda^4 +$$
$$+ \left(-5572a^2r_2^4 + 3528r_2^5\right)\lambda^2 + 1296r_2^6,$$

$$\hat{\Lambda}_1 = \Lambda_1\bar{\Lambda}_1 = \lambda^8 + \left(-8a^2 + 26r_2\right)\lambda^6 + \left(16a^4 + 241r_2^2 - 104a^2r_2\right)\lambda^4 +$$
$$+ \left(-388a^2r_2^2 + 936r_2^3\right)\lambda^2 + 1296r_2^4,$$

$$\hat{\Lambda}_2 = \Lambda_2\bar{\Lambda}_2 = \lambda^8 + \left(-8a^2 + 20r_2\right)\lambda^6 + \left(16a^4 + 118r_2^2 - 80a^2r_2\right)\lambda^4 +$$
$$+ \left(-328a^2r_2^2 + 180r_2^3\right)\lambda^2 + 81r_2^4,$$

$$\hat{\Lambda}_3 = \Lambda_3\bar{\Lambda}_3 = \lambda^8 + \left(-8a^2 + 10r_2\right)\lambda^6 + \left(16a^4 + 33r_2^2 - 40a^2r_2\right)\lambda^4 +$$
$$+ \left(-68a^2r_2^2 + 40r_2^3\right)\lambda^2 + 16r_2^4.$$

И наконец найдем

$$\gamma_1 = r_1r_2\left(c_1 - c_2\lambda^2\right), \quad \gamma_2 = 4r_1r_2\left(c_1 - c_2\lambda^2\right), \quad \gamma_3 = 9r_1r_2\left(c_1 - c_2\lambda^2\right).$$

Запишем выражение (38) для характеристического определителя Δ:

$$\Delta = \gamma_1\hat{\Lambda}_1 + \gamma_2\hat{\Lambda}_2 + \gamma_3\hat{\Lambda}_3 + \hat{\Lambda} = \lambda^{12} + (28r_2 - 12a^2 - 14r_1r_2c_2)\lambda^{10} +$$
$$+ (294r_2^2 + 112r_1r_2c_2a^2 + 48a^4 - 224a^2r_2 - 196r_1r_2^2c_2 + 14r_1r_2c_1)\lambda^8 +$$
$$+ (-112r_1r_2c_1a^2 - 1010r_1r_2^3c_2 + 784r_1r_2^2c_2a^2 - 1568a^2r_2^2 + 448a^4r_2 + 1444r_2^3 +$$

$$+\,196r_1r_2^2c_1 - 224r_1r_2c_2a^4 - 64a^6)\lambda^6 + (-4624a^2r_2^3 + 2312r_1r_2^3c_2a^2 - 2016r_1r_2^4c_2 +$$

$$+\,1568a^4r_2^2 - 784r_1r_2^2c_1a^2 + 1010r_1r_2^3c_1 + 224r_1r_2c_1a^4 + 3409r_2^4)\lambda^4 +$$

$$+(-2312r_1r_2^3c_1a^2+3528r_2^5-1764r_1r_2^5c_2-5572a^2r_2^4+2016r_1r_2^4c_1)\lambda^2+1764r_1r_2^5c_1+1296r_2^6.$$

Нами раскрыт характеристический определитель двенадцатого порядка.

Заключение

В работе раскрыт в общем виде характеристический определитель порядка $4n \times 4n$, возникающий в задаче синтеза оптимального управления транспортировкой углеводородного сырья по длинным трубопроводам. Полученный результат позволяет учитывать любое число тонов n в разложении решения задачи.

Summary

A.A. Baloev, P.A. Lazareva. Characteristic Determinant in the Problem of Optimal Control Synthesis for Oil and Gas Transport through Long Pipelines.

In this paper we consider the characteristic determinant which arises in the problem of optimal control synthesis for oil and gas transport through long pipelines. Expansion of the determinant with traditional methods accounting for three or more tones in expansion of the solution is a very difficult task, but in this paper characteristic determinant is expanded in general way for any number of tones, and we obtained an expression that contains only even powers of the variable.

Key words: oil and gas transport, characteristic determinant, optimal control.

Литература

1. *Гусейнзаде М.А., Юфин В.А.* Неустановившееся движение нефти и газа в магистральных трубопроводах. – М.: Недра, 1981. – 232 с.
2. *Чарный И.А.* Неустановившееся движение реальной жидкости в трубах. – М.; Л.: Гос. изд-во техн.-теор. лит., 1951. – 223 с.
3. *Ибрагимов С.И.* Об оптимальном управлении процессами в газопроводах // Техн. кибернетика. – 1985. – № 3. – С. 201–204.
4. *Балоев А.А., Мурга Л.О.* Синтез управления транспортировкой углеводородного сырья по длинным трубопроводам // Вестн. КГТУ им. А.Н. Туполева. – 2004. – № 1. – С. 50–56.
5. *Балоев А.А.* Универсальная форма записи решения системы линейных неоднородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами // Изв. вузов. Матем. – 1991. – № 11. – С. 6–13.
6. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. – М.: Наука, 1966. – 576 с.

Поступила в редакцию
07.12.09

Балоев Арнольд Андреевич – доктор технических наук, профессор кафедры автоматики и управления Казанского государственного технического университета им. А.Н. Туполева.

Лазарева Полина Александровна – аспирант кафедры автоматики и управления Казанского государственного технического университета им. А.Н. Туполева.

E-mail: *polina.lazar@mail.ru*