УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ КАЗАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
Том 151, кн. 4 Физико-математические науки *2009*

УДК 514.7+517.9

ОТОБРАЖЕНИЯ БЭКЛУНДА С ТОЧКИ ЗРЕНИЯ ТЕОРИИ СВЯЗНОСТЕЙ

А.К. Рыбников

Аннотация

Изучение преобразований Бэклунда – одна из наиболее интересных тем в теории дифференциальных уравнений с частными производными. Эти преобразования применяются для отыскания решений (в частности, солитонных) нелинейных дифференциальных уравнений. Одновременно преобразования Бэклунда представляют собой пример дифференциально-геометрической структуры, порожденной дифференциальными уравнениями.

Понятие преобразования Бэклунда является частным случаем более общего понятия *отображения Бэклунда.* В настоящей статье геометрическая теория отображений Бэклунда представлена как специальный раздел теории связностей.

Ключевые слова: преобразование Бэклунда, дифференциально-геометрическая структура, связность в главном расслоении, связность в ассоциированном расслоении, связность, определяющая представление нулевой кривизны.

Одним из самых важных и плодотворных понятий в дифференциальной геометрии является понятие связности в расслоенном многообразии. Особенный интерес представляет изучение связностей в расслоениях с расслоенными базами. Именно с такой ситуацией мы встречаемся при рассмотрении дифференциальных уравнений. Идея построения геометрической теории преобразований Бэклунда на основе теории связностей – одна из наиболее интересных и плодотворных идей. Представленная в настоящей работе геометрическая теория преобразований Бэклунда существенно отличается от теории, предложенной А.М. Васильевым [1]. Рассматривая преобразования Бэклунда, мы придерживаемся трактовки Ф. Пирани, Д. Робинсона и У. Шедвика [2, 3], в соответствии с которой преобразование Бэклунда является частным случаем более общего понятия *отображения Бэклунда.* Однако наша интерпретация понятия отображения Бэклунда отличается от интерпретации, предложенной в [2, 3]. Задание отображений Бэклунда трактуется нами как задание *специальных связностей* [4] (определенных в фактор-расслоениях расслоений реперов 1-го и 2-го порядков), определяющих *представления нулевой кривизны* для заданного дифференциального уравнения с частными производными.

В данной статье изучаются отображения Бэклунда для дифференциальных уравнений общего вида. Оставлен в стороне вопрос об отображениях Бэклунда для эволюционных уравнений (мы рассматривали их в [4–7]), которые имеют особую специфику. При этом мы ограничиваемся для простоты изложением геометрической теории отображений Бэклунда для уравнений второго порядка с неизвестной функцией двух аргументов.

В работе систематически используется инвариантный аналитический метод Э. Картана – Г.Ф. Лаптева (см. [8] или работы самого Г.Ф. Лаптева [9–13]). Все рассмотрения носят локальный характер.

1. Введение и краткий обзор работы

1.1. Впервые преобразования Бэклунда возникли как преобразования поверхностей постоянной отрицательной кривизны в 3-мерном евклидовом пространстве R^3. В 1879 г. в работах Л. Бианки [14] и С. Ли [15] было рассмотрено соответствие между двумя поверхностями S и S' в R^3, заданное системой уравнений

$$\begin{cases} \left(x^1-\xi^1\right)^2+\left(x^2-\xi^2\right)^2+(z-y)^2=a^2, \\ z_1\cdot\left(x^1-\xi^1\right)+z_2\cdot\left(x^2-\xi^2\right)-(z-y)=0, \\ y_1\cdot\left(x^1-\xi^1\right)+y_2\cdot\left(x^2-\xi^2\right)-(z-y)=0, \\ z_1\cdot y_1+z_2\cdot y_2+1=0, \end{cases} \tag{1}$$

связывающих координаты $x^1,\ x^2,\ z$ точки $M\in S$ и координаты $\xi^1,\ \xi^2,\ y$ точки $M'\in S'$. Здесь $z=z(x^1,x^2)$, $y=y(\xi^1,\xi^2)$, $z_i=\partial z/\partial x^i$, $y_i=\partial y/\partial\xi^i$, $i=1,2$. При этом предполагается, что поверхность S является поверхностью постоянной отрицательной кривизны $-1/a^2$, и следовательно, функция $z(x^1,x^2)$ является одним из решений уравнения Монжа – Ампера

$$z_{11}\cdot z_{22}-(z_{12})^2+\frac{(z_1)^2+(z_2)^2+1}{a^2}=0. \tag{2}$$

Система (1) определяет переменную y как функцию от $\xi^1,\ \xi^2$, соответствующую заранее заданной функции $z=z(x^1,x^2)$. Можно доказать, что функция $y(\xi^1,\xi^2)$ также удовлетворяет уравнению Монжа – Ампера

$$y_{11}\cdot y_{22}-(z_{12})^2+\frac{(y_1)^2+(y_2)^2+1}{a^2}=0,$$

и следовательно, поверхность S' также является поверхностью постоянной отрицательной кривизны $-1/a^2$. Систему (1) можно рассматривать как систему, определяющую соответствие между двумя поверхностями с одной и той же постоянной отрицательной кривизной $-1/a^2$. Одновременно система (1) определяет отображение каждого из решений уравнения Монжа – Ампера в другое решение того же уравнения. Соответствие, заданное системой (1), получило название *преобразование Бианки – Ли* [16, 17].

В 1880 г. А. Бэклунд [18] обнаружил, что преобразование Бианки – Ли можно рассматривать как частный случай преобразований более общего типа, задаваемых системой вида

$$F_\alpha(x^1,x^2,z,z_1,z_2,\xi^1,\xi^2,y,y_1,y_2)=0,\quad \alpha=1,2,3,4. \tag{3}$$

При этом предполагается, что систему (3) можно разрешить относительно $x^1,\ x^2,\ y_1,\ y_2$ и получить, в частности, уравнения

$$\begin{cases} y_1=\phi_1(\xi^1,\xi^2,y,z,z_1,z_2), \\ y_2=\phi_2(\xi^1,\xi^2,y,z,z_1,z_2). \end{cases} \tag{4}$$

Предполагается также, что система (4) интегрируема относительно y в том и только в том случае, когда функция $z=z(z^1,x^2)$ является решением дифференциального уравнения

$$U(x^1,x^2,z,z_1,z_2,z_{11},z_{12},z_{22})=0. \tag{5}$$

В этом случае можно рассматривать соответствие между решениями $z(x^1, x^2)$ уравнения (5) и решениями системы (4) (при условии $z = z(x^1, x^2)$). Если при этом любое решение системы (4) является к тому же решением дифференциального уравнения

$$V(\xi^1, \xi^2, y, y_1, y_2, y_{11}, y_{12}, y_{22}) = 0, \tag{5$'$}$$

то соответствие, определенное системой (4), называют *преобразованием Бэклунда* (точнее *преобразованием Бианки – Ли – Бэклунда*) дифференциального уравнения (5) в дифференциальное уравнение (5$'$).

Заметим, что А. Бэклунд трактовал эти преобразования как соответствия между парой поверхностей S и S' в R^3. Г. Дарбу [19] был первым, кто обратил внимание на то, что преобразования Бэклунда можно рассматривать как соответствия между интегральными многообразиями пары дифференциальных уравнений (или одного дифференциального уравнения), приведя в качестве примера автопреобразование Бэклунда для уравнения синус-Гордона

$$z_{12} = \sin z. \tag{6}$$

Такой подход к преобразованиям Бэклунда получил дальнейшее развитие в работах Э. Гурса [20] и Ж. Клерена [21]. Подробная библиография содержится в [17].

В 1977 г. Ф. Пирани и Д. Робинсон [2] предложили иную трактовку понятия преобразования Бэклунда, в соответствии с которой преобразование Бэклунда является частным случаем более общего понятия *отображения Бэклунда.*

Отображение Бэклунда для заданного дифференциального уравнения с частными производными Ф. Пирани и Д. Робинсон определили как отображение

$$J^k(M, N_1) \times N_2 \quad \xrightarrow{\psi} \quad J^1(M, N_2),$$

удовлетворяющее некоторым дополнительным условиям (см. [3] или [17]). Здесь $J^k(M, N)$ – многообразие k-струй отображений из M в N; M – многообразие независимых переменных x^1, x^2; N_1 - одномерное многообразие с локальной координатой z (старая зависимая переменная); N_2 – одномерное многообразие с локальной координатой y (новая зависимая переменная).

В локальных координатах отображение Бэклунда ψ для дифференциального уравнения 2-го порядка (5) записывается следующим образом:

$$\begin{cases} y_1 = y_1\left(x^i, z, z_j, \ldots, z_{j_1,\ldots,j_k}, y\right), \\ y_2 = y_2\left(x^i, z, z_j, \ldots, z_{j_1,\ldots,j_k}, y\right), \end{cases} \tag{7}$$

где $j = 1, 2$. Предполагается, что система (7) интегрируема в том и только в том случае, когда функция $z\left(x^1, x^2\right)$ является решением дифференциального уравнения (5).

В 2001 г. мы предложили новую интерпретацию понятия отображения Бэклунда [22]. Задание отображения Бэклунда мы трактуем как задание специальной связности, определяющей представление нулевой кривизны для заданного дифференциального уравнения. Первым примером такой связности была связность Р. Германа [23], ассоциированная со структурой продолжения Х. Уолквиста и Ф. Эстабрука [24]. Использование понятия связности, определяющей представление нулевой кривизны, позволяет дать естественную геометрическую интерпретацию таким понятиям, как преобразования Бэклунда, уравнения обратной задачи и псевдопотенциалы Уолквиста и Эстабрука.

1.2. Опишем кратко структуру настоящей статьи. Предварительно заметим, что, изучая дифференциальные уравнения с частными производными 2-го порядка общего вида (5), мы рассматриваем переменные x^1, x^2, z как адаптированные локальные координаты (2+1)-мерного расслоения H с 2-мерной базой (при этом x^1, x^2 являются локальными координатами на базе). Допустимые преобразования локальных координат имеют вид:

$$\widetilde{x}^i = \psi^i\left(x^1, x^2\right), \quad i = 1, 2; \quad \widetilde{z} = \psi^{2+1}\left(x^1, x^2, z\right).$$

Обозначим через x^i, z, p_j адаптированные локальные координаты в расслоении 1-струй J^1H. Локальные координаты в расслоении J^rH (расслоение голономных r-струй сечений) обозначим через x^i, z, $p_{j_1,\ldots,j_k}$, $k = 1, \ldots, r$ (имеет место симметрия по нижним индексам).

Для любого сечения $\sigma \subset H$, заданного уравнением $z = z\left(x^1, x^2\right)$, можно рассматривать поднятые сечения (поднятия) $\sigma^r \subset J^rH$, заданные уравнениями $z = z\left(x^1, x^2\right)$; $p_{j_1,\ldots,j_k} = z_{j_1,\ldots,j_k}$, $k = 1, \ldots, r$. Дифференциальное уравнение (5) можно записать в более общем виде

$$U\left(x^1, x^2, z, p_1, p_2, p_{11}, p_{12}, p_{22}\right) = 0. \tag{5''}$$

На поднятии $\sigma^2 \subset J^2H$ произвольного сечения это уравнение принимает вид (5). Решения $z = z\left(x^1, x^2\right)$ уравнения (5) – это сечения $\sigma \subset H$, на поднятиях которых уравнение (5) удовлетворяется тождественно.

Замечание 1.1. В качестве главных форм на J^rH можно, в частности, выбрать так называемые контактные формы

$$\omega^i = dx^i, \quad \omega^{2+1}_{j_1,\ldots,j_k} = dp_{j_1,\ldots,j_k} - p_{j_1,\ldots,j_k i}dx^i, \quad k = 1, \ldots, r,$$

которые обращаются в нуль на контактных распределениях в J^rH (о понятии контактного распределения см. [1, гл. IV, § 3]).

Заметим, что поднятия $\sigma^r \subset J^rH$ сечений $\sigma \subset H$ (и только они) являются интегральными многообразиями системы Пфаффа

$$\omega^{2+1} = 0, \quad \omega^{2+1}_{j_1,\ldots,j_k} = 0, \quad k = 1, \ldots, r-1,$$

где ω^{2+1}, $\omega^{2+1}_{j_1,\ldots,j_k}$ $k = 1, \ldots, r-1$, – контактные формы.

Мы начинаем изучение отображений Бэклунда с рассмотрения *специальных связностей* [4] в главных расслоениях ${}^kr^*H$, ${}^kR^*H$ и ${}^k\Re^*H$ (фактор-многообразия многообразия реперов порядка k) при $k = 1$ и $k = 2$ (см. разд. 2). Многообразие 1-струй J^1H является общей базой для каждого из расслоений ${}^1r^*H$, ${}^1R^*H$, ${}^1\Re^*H$. Расслоения ${}^2r^*H$, ${}^2R^*H$, ${}^2\Re^*H$ имеют общую базу J^2H. Структурной группой для ${}^1r^*H$ и ${}^2r^*H$ является 1-мерная группа G_1, для ${}^1R^*H$ и ${}^2R^*H$ – группа $SL(2)$, для ${}^1\Re^*H$ и ${}^2\Re^*H$ – группа $GL(2)$. Заметим, что можно ограничиться рассмотрением специальных связностей только в ${}^kr^*H$ и ${}^kR^*H$, так как задание специальной связности в ${}^k\Re^*H$ равносильно заданию специальной связности в ${}^kR^*H$ (см. Замечание 2.2).

Нам интересны в первую очередь специальные связности в ${}^kR^*H$, определяющие представления нулевой кривизны для наперёд заданного дифференциального уравнения с частными производными 2-го порядка ($5''$), то есть специальные связности, у которых формы кривизны обращаются в нуль на решениях уравнения ($5''$) (и только на решениях).

Заметим, что связности, определяющие представления нулевой кривизны, могут быть заданы также в отличных от ${}^kR^*H$ главных расслоениях над базой J^kH, но со структурной группой G, которая является подгруппой группы $SL(2)$ (см. [5] и [25]).

Следующий раздел (разд. 3) мы начинаем с рассмотрения расслоений, ассоциированных с главными расслоениями ${}^kr^*H$ и ${}^kR^*H$. При этом, следуя [8], используем следующие обозначения. Главное расслоение с базой B и структурной группой G обозначаем $P(B,G)$. Ассоциированное с ним расслоение с типовым слоем $\Im$ ($\Im$ – пространство представления структурной группы G) обозначаем $\Im(P(B,\,G))$. Для нас представляют интерес связности в ассоциированных расслоениях $\Im\left({}^kR^*H\right)$, $k=1,2$, с одномерным типовым слоем. Связность в $\Im\left({}^kR^*H\right)$, $\dim\Im=1$, мы называем *связностью Бэклунда класса* k для дифференциального уравнения 2-го порядка $(5'')$, если она порождена специальной связностью в ${}^kR^*H$, определяющей представление нулевой кривизны для уравнения $(5'')$. В случае, когда специальная связность в $P(J^kH,G)$ (где G – подгруппа группы $SL(2)$) определяет представление нулевой кривизны для дифференциального уравнения $(5'')$, порождённую ею связность в $\Im\left(P\left(J^kH,\,G\right)\right)$ мы называем *особой связностью Бэклунда класса* k для уравнения $(5'')$. Особыми связностями Бэклунда являются, в частности, связности Бэклунда для эволюционных уравнений (см. [4–7]) и *связности Коула – Хопфа* [25].

Очевидно, что уравнение Пфаффа

$$\underset{\sigma}{\widetilde{\theta}}=0 \tag{8}$$

вполне интегрируемо в том и только в том случае, когда сечение $\sigma\subset H$ является решением дифференциального уравнения $(\widetilde{5})$ (здесь $\widetilde{\theta}$ – форма связности, соответствующая связности Бэклунда, а $\underset{\sigma}{\widetilde{\theta}}$ – форма $\widetilde{\theta}$, рассматриваемая над сечением $\sigma\subset H$).

Уравнение Пфаффа (8) определяет отображение

$$H\supset\sigma \quad\to\quad \underset{\sigma}{\Sigma}\subset\Im\left({}^kR^*H\right),\quad \dim\Im=1, \tag{9}$$

при котором любое решение $\sigma\subset H$ дифференциального уравнения $(5'')$ переходит в сечение $\underset{\sigma}{\Sigma}\subset\Im\left({}^kR^*H\right)$, $\dim\Im=1$, являющееся решением уравнения Пфаффа (8) при заданном $\sigma\subset H$. Мы называем отображение (9) *отображением Бэклунда класса* k, соответствующим дифференциальному уравнению $(5'')$, а уравнение (8) – *уравнением Пфаффа, определяющим отображение Бэклунда.*

В случае, когда в качестве главных форм выбраны контактные формы, уравнение Пфаффа (8) эквивалентно системе уравнений с частными производными (мы называем её *системой Бэклунда*), которая имеет весьма специальный вид (см. разд. 3). В частности, в случае $k=2$ система Бэклунда имеет следующий вид (см. Замечание 3.1):

$$\begin{cases} y_1=\left(\varphi_2^1y^2+\varphi\,y-\varphi_1^2\right)\cdot z_{11}+\left(\psi_2^1y^2+\psi y-\psi_1^2\right)\cdot z_{12}+\chi_{21}^1y^2+\chi_1y-\chi_{11}^2,\\ y_2=\left(\varphi_2^1y^2+\varphi y-\varphi_1^2\right)\cdot z_{12}+\left(\psi_2^1y^2+\psi y-\psi_1^2\right)\cdot z_{22}+\chi_{22}^1y^2+\chi_2y-\chi_{12}^2, \end{cases} \tag{10}$$

где

$$\varphi,\ \varphi_1^2,\ \varphi_2^1,\ \psi,\ \psi_1^2,\ \psi_2^1,\ \chi_i,\ \chi_{1i}^2,\ \chi_{2i}^1,\quad i=1,2 \tag{11}$$

зависят от $x^1,\ x^2,\ z,\ z_1,\ z_2$.

Установлено (см. Теорему 3.1), что:

1) если для дифференциального уравнения 2-го порядка существует отображение Бэклунда класса 1, то оно – квазилинейное уравнение;

2) если для дифференциального уравнения 2-го порядка существует отображение Бэклунда класса 2, то в случае, когда функции (11) удовлетворяют условиям:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial\psi}{\partial z_1}-\frac{\partial\varphi}{\partial z_2}+2\begin{vmatrix}\varphi_2^1 & \varphi_1^2\\ \psi_2^1 & \psi_1^2\end{vmatrix}=0,\\
\frac{\partial\psi_1^2}{\partial z_1}-\frac{\partial\varphi_1^2}{\partial z_2}+\begin{vmatrix}\varphi_1^2 & \varphi\\ \psi_1^2 & \psi\end{vmatrix}=0,\\
\frac{\partial\psi_2^1}{\partial z_1}-\frac{\partial\varphi_2^1}{\partial z_2}+\begin{vmatrix}\varphi & \varphi_2^1\\ \psi & \psi_2^1\end{vmatrix}=0,
\end{gathered}\tag{12}$$

оно – квазилинейное, а в случае, когда эти условия не выполнены, оно является уравнением типа Монжа – Ампера

$$z_{1\,1}\cdot z_{2\,2}-(z_{1\,2})^2+P\,z_{1\,1}+Q\,z_{1\,2}+R\,z_{2\,2}+S=0,\tag{13}$$

где $P,\ Q,\ R,\ S$ зависят от $x^1,\ x^2,\ z,\ z_1,\ z_2$.

В разд. 4 рассматриваются дифференциальные уравнения 2-го порядка, допускающие преобразования Бэклунда класса 1 одного специального типа (так называемые стандартные преобразования Бэклунда [26]). В разд. 5 установлено существование отображений Бэклунда класса 2 для уравнения $z_{11}\cdot z_{22}-(z_{12})^2+c^2=0$, $c=\mathrm{const}$.

2. Специальные связности, определяющие представления нулевой кривизны

2.1. Главные расслоения $^k r^*H$, $^k R^*H$ и $^k\Re^*H$, $k=1,2$. Рассмотрим главные дифференциальные формы $\omega^1,\ \omega^2,\ \omega^{2+1}$ расслоенного многообразия H. Они удовлетворяют структурным уравнениям

$$d\omega^i=\omega^j\wedge\omega^i_j,\quad d\omega^{2+1}=\omega^j\wedge\omega^{2+1}_j+\omega^{2+1}\wedge\omega^{2+1}_{2+1}.$$

В процессе правильного продолжения (см. об этой процедуре в [11]) возникает последовательность структурных форм расслоений реперов порядков $1,2,\ldots$ (расслоений $R^1H,\ R^2H,\ldots$). При этом формы

$$\omega^i,\ \ \omega^{2+1},\ \ \omega^{2+1}_j,\ \ \omega^i_j,\ \ \omega^{2+1}_{2+1}\tag{14}$$

представляют собой систему структурных форм расслоения R^1H. На следующем этапе продолжения возникают формы

$$\omega^{2+1}_{j\,k},\ \ \omega^i_{j\,k},\ \ \omega^i_{j,\,2+1},\ \ \omega^{2+1}_{2+1,\,2+1},\tag{15}$$

где формы $\omega^{2+1}_{j\,k}$ и $\omega^i_{j\,k}$ симметричны по нижним индексам. Формы (14) и (15) в совокупности представляют собой систему структурных форм расслоения R^2H. Заметим, что формы $\omega^i,\ \omega^{2+1},\ \omega^{2+1}_j$ одновременно являются главными формами в многообразии 1-струй J^1H, а формы $\omega^i,\ \omega^{2+1},\ \omega^{2+1}_j,\ \omega^{2+1}_{k\,l}$ – главными формами в многообразии 2-струй J^2H. Можно выделить три фактор-многообразия многообразия R^1H:

• многообразие ${}^1r^*H$ со структурными формами ω^i, ω^{2+1}, ω_j^{2+1}, ϑ, где $\vartheta = \omega_1^1 + \omega_2^2$;

• многообразие ${}^1R^*H$ со структурными формами ω^i, ω^{2+1}, ω_j^{2+1}, ω, ω_1^2, ω_2^1, где $\omega = \omega_1^1 - \omega_2^2$;

• многообразие ${}^1\Re^*H$ со структурными формами ω^i, ω^{2+1}, ω_j^{2+1}, ω_j^i.

Можно выделить также три фактор-многообразия многообразия R^2H:

• многообразие ${}^2r^*H$ со структурными формами ω^i, ω^{2+1}, ω_j^{2+1}, ω_{kl}^{2+1}, ϑ;

• многообразие ${}^2R^*H$ со структурными формами ω^i, ω^{2+1}, ω_j^{2+1}, ω_{kl}^{2+1}, ω, ω_1^2, ω_2^1;

• многообразие ${}^2\Re^*H$ со структурными формами ω^i, ω^{2+1}, ω_j^{2+1}, ω_{kl}^{2+1}, ω_j^i.

Каждое из многообразий

$$ {}^kr^*H, \quad {}^kR^*H, \quad {}^k\Re^*H, \qquad k = 1, 2, \tag{16} $$

имеет структуру главного расслоения. Многообразие 1-струй J^1H является общей базой расслоений ${}^1r^*H$, ${}^1R^*H$ и ${}^1\Re^*H$, а многообразие 2-струй J^2H – общей базой расслоений ${}^2r^*H$, ${}^2R^*H$ и ${}^2\Re^*H$. Структурными группами расслоений (16) (как при $k = 1$, так и при $k = 2$) являются группы G_1, $SL(2)$, $GL(2)$ соответственно. Совокупность слоевых форм в ${}^kr^*H$ состоит из одной формы ϑ; формы ω, ω_1^2, ω_2^1 – слоевые формы в ${}^kR^*H$; формы ω_j^i – слоевые формы в ${}^k\Re^*H$ (как при $k = 1$, так и при $k = 2$). При фиксации точки базы слоевые формы превращаются в инвариантные структурные формы соответствующей группы.

Среди связностей, заданных в главных расслоениях (16), инвариантным образом выделяются *специальные связности* [4], то есть связности, у которых все коэффициенты связности, кроме коэффициентов при ω^1, ω^2, равны нулю.

В дальнейшем для нас будут представлять интерес специальные связности, определяющие представления нулевой кривизны. Напомним, что связность в главном расслоении над базой J^kH ($k = 1$ или $k = 2$) называется *связностью, определяющей представление нулевой кривизны* для заданного дифференциального уравнения, если её формы кривизны обращаются в нуль на решениях этого уравнения (говоря точнее, на поднятиях решений) и только на решениях.

2.2. Специальные связности в ${}^kr^*H$, $k = 1, 2$. Если в расслоении ${}^kr^*H$ задана специальная связность, то (как в случае $k = 1$, так и в случае $k = 2$) совокупность форм связности состоит из одной формы $\widetilde{\vartheta}$, которая имеет следующий вид:

$$ \widetilde{\vartheta} = \vartheta + h_1\,\omega^1 + h_2\,\omega^2. $$

Коэффициенты h_1 и h_2 зависят от x^i, z, p_j, если $k = 1$, и от x^i, z, p_j, p_{kl}, если $k = 2$. Они удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$ \begin{cases} d\,h_1 - \dfrac{1}{2}h_1\vartheta - \dfrac{1}{2}h_1\omega - h_2\omega_1^2 - \omega_{11}^1 - \omega_{12}^2 = 0, \\ d\,h_2 - \dfrac{1}{2}h_2\vartheta + \dfrac{1}{2}h_2\omega - h_1\omega_2^1 - \omega_{12}^1 - \omega_{22}^2 = 0. \end{cases} \tag{17} $$

Здесь равенство нулю имеет место по модулю главных форм. Форма связности $\widetilde{\vartheta}$ удовлетворяет структурному уравнению

$$ d\,\widetilde{\vartheta} = \Omega. \tag{18} $$

где $\Omega = R\,\omega^1 \wedge \omega^2 + \cdots$ – форма кривизны (многоточием обозначена сумма слагаемых, содержащая произведения главных форм, отличные от $\omega^1 \wedge \omega^2$).

Можно выбрать в качестве главных форм контактные формы

$$\begin{gathered}\omega^i = dx^i, \quad \omega^{2+1} = dz - p_i\,dx^i, \\ \omega_j^{2+1} = dp_j - p_{jk}\,dx^k, \quad \omega_{jk}^{2+1} = dp_{jk} - p_{jkl}\,dx^l.\end{gathered} \tag{19}$$

При таком выборе главных форм $\omega_j^i = 0$ (следовательно, $\vartheta = 0$) и форма связности $\widetilde{\vartheta}$ принимает вид

$$\widetilde{\vartheta} = h_1\,dx^1 + h_2\,dx^2.$$

При этом в случае $k = 1$

$$R = \frac{\partial h_2}{\partial p_1}\cdot p_{11} + \left(\frac{\partial h_2}{\partial p_2} - \frac{\partial h_1}{\partial p_1}\right)\cdot p_{12} - \frac{\partial h_1}{\partial p_2}\cdot p_{22} + \frac{\partial h_2}{\partial z}\cdot p_1 - \\ - \frac{\partial h_1}{\partial z}\cdot p_2 + \frac{\partial h_2}{\partial x^1} - \frac{\partial h_1}{\partial x^2}, \tag{20}$$

а в случае $k = 2$

$$R = \frac{\partial h_2}{\partial p_{11}}\cdot p_{111} + \left(\frac{\partial h_2}{\partial p_{12}} - \frac{\partial h_1}{\partial p_{11}}\right)\cdot p_{112} + \left(\frac{\partial h_2}{\partial p_{22}} - \frac{\partial h_1}{\partial p_{12}}\right)\cdot p_{122} - \\ - \frac{\partial h_1}{\partial p_{22}}\cdot p_{222} + \frac{\partial h_2}{\partial p_1}\cdot p_{11} + \left(\frac{\partial h_2}{\partial p_2} - \frac{\partial h_1}{\partial p_1}\right)\cdot p_{12} - \frac{\partial h_1}{\partial p_2}\cdot p_{22} + \\ + \frac{\partial h_2}{\partial z}\cdot p_1 - \frac{\partial h_1}{\partial z}\cdot p_2 + \frac{\partial h_2}{\partial x^1} - \frac{\partial h_1}{\partial x^2}. \tag{21}$$

На поднятии любого сечения $\sigma \subset H$ контактные формы ω^{2+1}, ω_j^{2+1}, ω_{kl}^{2+1} обращаются в нуль (см. Замечание 1.1) и структурное уравнение (18) принимает вид:

$$d\,\underset{\sigma}{\widetilde{\vartheta}} = \underset{\sigma}{R}\;dx^1 \wedge dx^2,$$

где $\underset{\sigma}{R}$ – это коэффициент R, рассматриваемый на поднятии сечения $\sigma \subset H$. Уравнение

$$\underset{\sigma}{R} = 0 \tag{22}$$

является при $k = 1$ квазилинейным уравнением 2-го порядка. При $k = 2$ уравнение (22) является, вообще говоря, уравнением 3-го порядка. Вместе с тем среди специальных связностей, заданных в ${}^2r^*H$, существуют и такие связности, для которых уравнение (22) является уравнением 2-го порядка (см. далее Пример 2.2). Имеет место следующая лемма, доказательство которой содержится в [25]:

Лемма 2.1. *Если в ${}^2r^*H$ задана специальная связность и в качестве главных форм выбраны контактные формы* (19)*, то уравнение* (22) *является дифференциальным уравнением 2-го порядка в том и только в том случае, когда коэффициенты связности имеют вид*

$$h_i = \varphi\cdot p_{1i} + \psi\cdot p_{2i} + \chi_i, \quad i = 1, 2, \tag{23}$$

где φ, ψ, χ_1, χ_2 – функции переменных x^1, x^2, z, p_1, p_2.

Заметим, что в этом случае в силу (21) и (23) уравнение (22) при $k = 2$ принимает следующий вид:

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial z_1} - \frac{\partial\varphi}{\partial z_2}\right)\cdot\left(z_{11}\cdot z_{22} - (z_{12})^2\right) - -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\cdot z_2 + \frac{\partial\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial\chi_2}{\partial z_1}\right)\cdot z_{11} +$$
$$+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\cdot z_1 - \frac{\partial\psi}{\partial z}\cdot z_2 + \frac{\partial\varphi}{\partial x^1} - \frac{\partial\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial\chi_2}{\partial z_2} - \frac{\partial\chi_1}{\partial z_1}\right)\cdot z_{12} +$$
$$+\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\cdot z_1 + \frac{\partial\psi}{\partial x^1} - \frac{\partial\chi_1}{\partial z_2}\right)\cdot z_{22} + \frac{\partial\chi_2}{\partial z}\cdot z_1 - \frac{\partial\chi_1}{\partial z}\cdot z_2 + \frac{\partial\chi_2}{\partial x^1} - \frac{\partial\chi_1}{\partial x^2} = 0.$$

Оно является квазилинейным уравнением, если функции φ и ψ удовлетворяют условию:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial p_2} = \frac{\partial\psi}{\partial p_1}, \tag{24}$$

и уравнением типа Монжа – Ампера (13), если условие (24) не выполнено. Очевидно, что рассматриваемая специальная связность определяет представление нулевой кривизны для дифференциального уравнения 2-го порядка ($5''$), если левая часть уравнения ($5''$) отличается от R множителем. Следовательно, справедлива

Теорема 2.1. *Если для дифференциального уравнения с частными производными 2-го порядка* ($5''$) *существует специальная связность в* ${}^1r^*H$, *определяющая представление нулевой кривизны, то уравнение* ($5''$) *– квазилинейное. Если для дифференциального уравнения* ($5''$) *существует специальная связность в* ${}^2r^*H$, *определяющая представление нулевой кривизны, и в соотношениях* (23) *функции* φ *и* ψ *удовлетворяют условию* (24), *то уравнение* ($5''$) *и в этом случае – квазилинейное. Если же условие* (24) *не выполнено, то уравнение* ($5''$) *является уравнением типа Монжа – Ампера* (13).

Пример 2.1. Специальная связность в ${}^1r^*H$ с коэффициентами связности

$$h_1 = p_2, \quad h_2 = \ln z$$

определяет представление нулевой кривизны для обобщённого уравнения теплопроводности

$$z_1 - z\cdot z_{22} = 0.$$

Действительно, на любом сечении $\sigma \subset H$ форма связности

$$\underset{\sigma}{\widetilde{\vartheta}} = z_2\,dx^1 + \ln z\,dx^2$$

удовлетворяет структурному уравнению

$$d\,\underset{\sigma}{\widetilde{\vartheta}} = \frac{1}{2}\left(z_1 - z\cdot z_{22}\right)\,dx^1\wedge dx^2.$$

Пример 2.2. Специальная связность в ${}^2r^*H$ с коэффициентами связности

$$h_1 = \frac{a^2}{2}\cdot p_{11}\cdot\ln\left((p_1)^2 + (p_2)^2 + 1\right) + z, \quad h_2 = \frac{a^2}{2}\cdot p_{12}\cdot\ln\left((p_1)^2 + (p_2)^2 + 1\right)$$

определяет представление нулевой кривизны для классического уравнения Монжа – Ампера (2). В самом деле, на каждом сечении $\sigma \subset H$ форма связности

$$\underset{\sigma}{\widetilde{\vartheta}} = \left(\frac{a^2}{2}\cdot z_{11}\cdot\ln\left((z_1)^2 + (z_2)^2 + 1\right) + z\right)dx^1 + \frac{a^2}{2}\cdot z_{12}\cdot\ln\left((z_1)^2 + (z_2)^2 + 1\right)dx^2$$

удовлетворяет структурному уравнению

$$d\underset{\sigma}{\widetilde{\vartheta}} = -a^2\frac{z_2}{(z_1)^2+(z_2)^2+1}\left(z_{11}\cdot z_{22}-(z_{12})^2+\frac{(z_1)^2+(z_2)^2+1}{a^2}\right)dx^1\wedge dx^2.$$

2.3. Специальные связности в ${}^kR^*H,\ (k=1,2)$. В случае, когда специальная связность задана в ${}^kR^*H$, где $k=1$ или $k=2$, формы связности имеют вид

$$\widetilde{\omega}=\omega+\gamma_1\omega^1+\gamma_2\omega^2,\quad \widetilde{\omega}_1^2=\omega_1^2+\gamma_{11}^2\omega^1+\gamma_{12}^2\omega^2,\quad \widetilde{\omega}_2^1=\omega_2^1+\gamma_{21}^1\omega^1+\gamma_{22}^1\omega^2.$$

Коэффициенты связности

$$\gamma_1,\ \ \gamma_{11}^2,\ \ \gamma_{21}^1,\ \ \gamma_2,\ \ \gamma_{12}^2,\ \ \gamma_{22}^1 \tag{25}$$

в случае $k=1$ зависят от $x^i,\ z,\ p_j$, а в случае $k=2$ – от $x^i,\ z,\ p_j,\ p_{kl}$. Они удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\begin{cases} d\gamma_1-\dfrac{1}{2}\gamma_1\vartheta-\dfrac{1}{2}\gamma_1\omega-\left(\gamma_2+2\gamma_{21}^1\right)\omega_1^2+2\gamma_{11}^2\omega_2^1-\omega_{11}^1+\omega_{12}^2=0,\\ d\gamma_2-\dfrac{1}{2}\gamma_2\vartheta+\frac{1}{2}\gamma_2\omega-2\gamma_{22}^1\omega_1^2-\left(\gamma_1-2\gamma_{12}^2\right)\omega_2^1-\omega_{12}^1+\omega_{22}^2=0,\\ d\gamma_{11}^2-\dfrac{1}{2}\gamma_{11}^2\vartheta-\dfrac{3}{2}\gamma_{11}^2\omega+\left(\gamma_1-\gamma_{12}^2\right)\omega_1^2-\omega_{11}^2=0,\\ d\gamma_{12}^2-\dfrac{1}{2}\gamma_{12}^2\vartheta-\dfrac{1}{2}\gamma_{12}^2\omega+\gamma_2\omega_1^2-\gamma_{11}^2\omega_2^1-\omega_{12}^2=0,\\ d\gamma_{21}^1-\dfrac{1}{2}\gamma_{21}^1\vartheta+\dfrac{1}{2}\gamma_{21}^1\omega-\gamma_{22}^1\omega_1^2-\gamma_1\omega_2^1-\omega_{21}^1=0,\\ d\gamma_{22}^1-\dfrac{1}{2}\gamma_{22}^1\vartheta+\dfrac{3}{2}\gamma_{22}^1\omega-\left(\gamma_2+\gamma_{21}^1\right)\omega_2^1-\omega_{22}^1=0. \end{cases} \tag{26}$$

Здесь равенство нулю имеет место по модулю главных форм.

Замечание 2.1. Специальная связность в ${}^kR^*H$ с коэффициентами связности (25) порождает специальную связность в ${}^kr^*H$ с коэффициентами связности

$$h_1=\gamma_1+2\gamma_{12}^2,\quad h_2=-\gamma_2+2\gamma_{12}^1. \tag{27}$$

Действительно, нетрудно проверить, что дифференциальные уравнения, которым удовлетворяют коэффициенты h_1 и h_2, вычисленные по формулам (27), имеют вид (17).

Формы связности $\widetilde{\omega},\ \widetilde{\omega}_1^2,\ \widetilde{\omega}_2^1$ удовлетворяют структурным уравнениям

$$d\widetilde{\omega}=2\,\widetilde{\omega}_1^2\wedge\widetilde{\omega}_2^1+\Omega,\quad d\widetilde{\omega}_1^2=\widetilde{\omega}\wedge\widetilde{\omega}_1^2+\Omega_1^2,\quad d\widetilde{\omega}_2^1=\widetilde{\omega}_2^1\wedge\widetilde{\omega}+\Omega_2^1, \tag{28}$$

где $\Omega=R_{12}\omega^1\wedge\omega^2+\cdots$, $\Omega_1^2=R_{112}^2\omega^1\wedge\omega^2+\cdots$, $\Omega_2^1=R_{212}^1\omega^1\wedge\omega^2+\cdots$ – формы кривизны (многоточием обозначены суммы слагаемых, содержащих произведения главных форм, отличные от $\omega^1\wedge\omega^2$).

Напомним, что инвариантные структурные формы структурной группы $SL(2)$ (обозначим их $\overline{\omega},\ \overline{\omega}_1^2,\ \overline{\omega}_2^1$) удовлетворяют структурным уравнениям этой группы:

$$d\overline{\omega}=2\,\overline{\omega}_1^2\wedge\overline{\omega}_2^1,\quad d\overline{\omega}_1^2=\overline{\omega}\wedge\overline{\omega}_1^2,\quad d\overline{\omega}_2^1=\overline{\omega}_2^1\wedge\overline{\omega}.$$

Если в качестве главных форм выбраны контактные формы (19), то $\omega = \omega^2_1 = \omega^1_2 = 0$ и, следовательно,

$$\widetilde{\omega} = \gamma_1\, dx^1 + \gamma_2\, dx^2, \quad \widetilde{\omega}^2_1 = \gamma^2_{1\,1}\, dx^1 + \gamma^2_{12}\, dx^2, \quad \widetilde{\omega}^1_2 = \gamma^1_{21}\, dx^1 + \gamma^1_{22}\, dx^2. \tag{29}$$

При этом если $k = 1$, то

$$R_{12} = \frac{\partial\gamma_2}{\partial p_1}\cdot p_{11} + \left(\frac{\partial\gamma_2}{\partial p_2} - \frac{\partial\gamma_1}{\partial p_1}\right)\cdot p_{12} - \frac{\partial\gamma_1}{\partial p_2}\cdot p_{22} + \frac{\partial\gamma_2}{\partial z}\cdot p_1 - \\ - \frac{\partial\gamma_1}{\partial z}\cdot p_2 + \frac{\partial\gamma_2}{\partial x^1} - \frac{\partial\gamma_1}{\partial x^2} + +2\left(\gamma^1_{21}\cdot\gamma^2_{12} - \gamma^1_{22}\cdot\gamma^2_{11}\right),$$

$$R^2_{112} = \frac{\partial\gamma^2_{12}}{\partial p_1}\cdot p_{11} + \left(\frac{\partial\gamma^2_{12}}{\partial p_2} - \frac{\partial\gamma^2_{11}}{\partial p_1}\right)\cdot p_{12} - \frac{\partial\gamma^2_{11}}{\partial p_2}\cdot p_{22} + \\ + \frac{\partial\gamma^2_{12}}{\partial z}\cdot p_1 - \frac{\partial\gamma^2_{11}}{\partial z}\cdot p_2 + \frac{\partial\gamma^2_{12}}{\partial x^1} - \frac{\partial\gamma^2_{11}}{\partial x^2} + \gamma^2_{11}\cdot\gamma_2 - \gamma^2_{12}\cdot\gamma_1,$$

$$R^1_{212} = \frac{\partial\gamma^1_{22}}{\partial p_1}\cdot p_{11} + \left(\frac{\partial\gamma^1_{22}}{\partial p_2} - \frac{\partial\gamma^1_{21}}{\partial p_1}\right)\cdot p_{12} - \frac{\partial\gamma^1_{21}}{\partial p_2}\cdot p_{22} + \\ + \frac{\partial\gamma^1_{22}}{\partial z}\cdot p_1 - \frac{\partial\gamma^1_{21}}{\partial z}\cdot p_2 + \frac{\partial\gamma^1_{22}}{\partial x^1} - \frac{\partial\gamma^1_{21}}{\partial x^2} + \gamma^1_{22}\cdot\gamma_1 - \gamma^1_{21}\cdot\gamma_2,$$

а если $k = 2$, то

$$R_{12} = \frac{\partial\gamma_2}{\partial p_{11}}\cdot p_{111} + \left(\frac{\partial\gamma_2}{\partial p_{12}} - \frac{\partial\gamma_1}{\partial p_{11}}\right)\cdot p_{112} + \left(\frac{\partial\gamma_2}{\partial p_{22}} - \frac{\partial\gamma_1}{\partial p_{12}}\right)\cdot p_{122} - \\ - \frac{\partial\gamma_1}{\partial p_{22}}\cdot p_{222} + \frac{\partial\gamma_2}{\partial p_1}\cdot p_{11} + \left(\frac{\partial\gamma_2}{\partial p_2} - \frac{\partial\gamma_1}{\partial p_1}\right)\cdot p_{12} - \frac{\partial\gamma_1}{\partial p_2}\cdot p_{22} + \\ + \frac{\partial\gamma_2}{\partial z}\cdot p_1 - \frac{\partial\gamma_1}{\partial z}\cdot p_2 + \frac{\partial\gamma_2}{\partial x^1} - \frac{\partial\gamma_1}{\partial x^2} + 2\left(\gamma^1_{21}\cdot\gamma^2_{12} - \gamma^1_{22}\cdot\gamma^2_{11}\right),$$

$$R^2_{112} = \frac{\partial\gamma^2_{12}}{\partial p_{11}}\cdot p_{111} + \left(\frac{\partial\gamma^2_{12}}{\partial p_{12}} - \frac{\partial\gamma^2_{11}}{\partial p_{11}}\right)\cdot p_{112} + \left(\frac{\partial\gamma^2_{12}}{\partial p_{22}} - \frac{\partial\gamma^2_{11}}{\partial p_{12}}\right)\cdot p_{122} - \\ - \frac{\partial\gamma^2_{11}}{\partial p_{22}}\cdot p_{222} + \frac{\partial\gamma^2_{12}}{\partial p_1}\cdot p_{11} + \left(\frac{\partial\gamma^2_{12}}{\partial p_2} - \frac{\partial\gamma^2_{11}}{\partial p_1}\right)\cdot p_{12} - \frac{\partial\gamma^2_{11}}{\partial p_2}\cdot p_{22} + \\ + \frac{\partial\gamma^2_{12}}{\partial z}\cdot p_1 - \frac{\partial\gamma^2_{11}}{\partial z}\cdot p_2 + \frac{\partial\gamma^2_{12}}{\partial x^1} - \frac{\partial\gamma^2_{11}}{\partial x^2} + \gamma^2_{11}\cdot\gamma_2 - \gamma^2_{12}\cdot\gamma_1,$$

$$R^1_{212} = \frac{\partial\gamma^1_{22}}{\partial p_{11}}\cdot p_{111} + \left(\frac{\partial\gamma^1_{22}}{\partial p_{12}} - \frac{\partial\gamma^1_{21}}{\partial p_{11}}\right)\cdot p_{112} + \left(\frac{\partial\gamma^1_{22}}{\partial p_{22}} - \frac{\partial\gamma^1_{21}}{\partial p_{12}}\right)\cdot p_{122} - \\ - \frac{\partial\gamma^1_{21}}{\partial p_{22}}\cdot p_{222} + \frac{\partial\gamma^1_{22}}{\partial p_1}\cdot p_{11} + \left(\frac{\partial\gamma^1_{22}}{\partial p_2} - \frac{\partial\gamma^1_{21}}{\partial p_1}\right)\cdot p_{12} - \frac{\partial\gamma^1_{21}}{\partial p_2}\cdot p_{22} + \\ + \frac{\partial\gamma^1_{22}}{\partial z}\cdot p_1 - \frac{\partial\gamma^1_{21}}{\partial z}\cdot p_2 + \frac{\partial\gamma^1_{22}}{\partial x^1} - \frac{\partial\gamma^1_{21}}{\partial x^2} + \gamma^1_{22}\cdot\gamma_1 - \gamma^1_{21}\cdot\gamma_2.$$

Заметим, принимая во внимание Замечание 1.1, что в этом случае на поднятии любого сечения $\sigma \subset H$ структурные уравнения (28) принимают вид

$$\begin{cases} d\underset{\sigma}{\widetilde{\omega}} = 2\underset{\sigma}{\widetilde{\omega}}{}_1^2 \wedge \underset{\sigma}{\widetilde{\omega}}{}_2^1 + \underset{\sigma}{R}{}_{12}\, dx^1 \wedge dx^2, \\ d\underset{\sigma}{\widetilde{\omega}}{}_1^2 = \underset{\sigma}{\widetilde{\omega}} \wedge \underset{\sigma}{\widetilde{\omega}}{}_1^2 + \underset{\sigma}{R}{}_{112}^2\, dx^1 \wedge dx^2, \\ d\underset{\sigma}{\widetilde{\omega}}{}_2^1 = \underset{\sigma}{\widetilde{\omega}}{}_2^1 \wedge \underset{\sigma}{\widetilde{\omega}} + \underset{\sigma}{R}{}_{212}^1\, dx^1 \wedge dx^2. \end{cases}$$

Уравнения

$$\underset{\sigma}{R}{}_{12} = 0, \quad \underset{\sigma}{R}{}_{112}^2 = 0, \quad \underset{\sigma}{R}{}_{212}^1 = 0 \tag{30}$$

являются при $k = 1$ дифференциальными уравнениями 2-го порядка. При $k = 2$ уравнения (30) являются, вообще говоря, уравнениями 3-го порядка. Вместе с тем существуют и такие связности в ${}^2R^*H$, для которых уравнения (30) являются уравнениями 2-го порядка (см. далее Пример 2.5). Имеет место следующая лемма, доказательство которой проводится аналогично доказательству Леммы 2.1:

Лемма 2.2. *Если в ${}^2R^*H$ задана специальная связность и в качестве главных форм выбраны контактные формы* (19)*, то уравнения* (30) *являются дифференциальными уравнениями* 2*-го порядка в том и только в том случае, когда коэффициенты связности имеют вид*

$$\begin{aligned} \gamma_i &= \varphi \cdot p_{1i} + \psi \cdot p_{2i} + \chi_i, \\ \gamma_{1i}^2 &= \varphi_1^2 \cdot p_{1i} + \psi_1^2 \cdot p_{2i} + \chi_{1i}^2, \\ \gamma_{2i}^1 &= \varphi_2^1 \cdot p_{1i} + \psi_2^1 \cdot p_{2i} + \chi_{2i}^1. \end{aligned} \tag{31}$$

Здесь $i = 1, 2$; φ, φ_1^2, φ_2^1, ψ, ψ_1^2, ψ_2^1, χ_i, χ_{1i}^2, χ_{2i}^1 – функции переменных x^1, x^2, z, p_1, p_2.

В случае, когда коэффициенты связности имеют вид (31), компоненты R_{12}, R_{112}^2, R_{212}^1 выглядят следующим образом:

$$R_{12} = \left(\frac{\partial\psi}{\partial p_1} - \frac{\partial\varphi}{\partial p_2} + 2\begin{vmatrix} \varphi_2^1 & \varphi_1^2 \\ \psi_2^1 & \psi_1^2 \end{vmatrix}\right) \cdot \left(p_{11} \cdot p_{22} - (p_{12})^2\right) + K_1\, p_{11} + L_1\, p_{12} + M_1\, p_{22} + N_1,$$

$$R_{112}^2 = \left(\frac{\partial\psi_1^2}{\partial p_1} - \frac{\partial\varphi_1^2}{\partial p_2} + \begin{vmatrix} \varphi_1^2 & \varphi \\ \psi_1^2 & \psi \end{vmatrix}\right) \cdot \left(p_{11} \cdot p_{22} - (p_{12})^2\right) + K_2\, p_{11} + L_2\, p_{12} + M_2\, p_{22} + N_2,$$

$$R_{212}^1 = \left(\frac{\partial\psi_2^1}{\partial p_1} - \frac{\partial\varphi_2^1}{\partial p_2} + \begin{vmatrix} \varphi & \varphi_2^1 \\ \psi & \psi_2^1 \end{vmatrix}\right) \cdot \left(p_{11} \cdot p_{22} - (p_{12})^2\right) + K_3\, p_{11} + L_3\, p_{12} + M_3\, p_{22} + N_3,$$

где K_i, L_i, M_i, N_i, $i = 1, 2, 3$, зависят от x^1, x^2, z, p_1, p_2.

Если каждая из компонент R_{12}, R_{112}^2, R_{212}^1 отличается от левой части уравнения 2-го порядка $(5'')$ множителем, рассматриваемая специальная связность в ${}^2R^*H$ определяет представление нулевой кривизны для уравнения $(5'')$. Таким образом, справедлива

Теорема 2.2. *Если для дифференциального уравнения с частными производными 2-го порядка* $(5'')$ *существует специальная связность в* ${}^1R^*H$, *определяющая представление нулевой кривизны, то уравнение* $(5'')$ *– квазилинейное.*

Если для дифференциального уравнения $(5'')$ *существует специальная связность в* ${}^2R^*H$, *определяющая представление нулевой кривизны, и в соотношениях* (31) *функции* (11) *удовлетворяют условиям* (12), *то уравнение* $(5'')$ *и в этом случае – квазилинейное. Если же условие* (12) *не выполнены, то уравнение* $(5'')$ *является уравнением типа Монжа–Ампера* (13).

Пример 2.3. Специальная связность в ${}^1R^*H$ с коэффициентами связности

$$\gamma_1 = \cos\frac{z}{2}, \quad \gamma_{11}^2 = -\frac{1}{2}\sin\frac{z}{2} - \frac{1}{4}p_1, \quad \gamma_{21}^1 = -\frac{1}{2}\sin\frac{z}{2} + \frac{1}{4}p_1,$$

$$\gamma_2 = \cos\frac{z}{2}, \quad \gamma_{12}^2 = \frac{1}{2}\sin\frac{z}{2} + \frac{1}{4}p_2, \quad \gamma_{22}^1 = \frac{1}{2}\sin\frac{z}{2} - \frac{1}{4}p_2$$

определяет представление нулевой кривизны для уравнения синус-Гордона

$$z_{12} = \sin z.$$

В самом деле нетрудно убедиться в том, что

$$\underset{\sigma}{R}_{12} = 0, \quad \underset{\sigma}{R}{}^2_{112} = \frac{1}{2}\left(z_{12} - \sin z\right), \quad \underset{\sigma}{R}{}^1_{212} = -\frac{1}{2}\left(z_{12} - \sin z\right)$$

на поднятии любого сечения $\sigma \subset H$.

Пример 2.4. Специальная связность в ${}^2R^*H$ с коэффициентами связности

$$\gamma_1 = \frac{1}{2}p_1, \quad \gamma_{11}^2 = 0, \quad \gamma_{21}^1 = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{z/2},$$

$$\gamma_2 = -\frac{1}{2}p_2, \quad \gamma_{12}^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{z/2}, \quad \gamma_{22}^1 = 0$$

определяет представление нулевой кривизны для уравнения Лиувилля

$$z_{12} = e^z.$$

Действительно, нетрудно проверить что

$$\underset{\sigma}{R}_{12} = -\left(z_{12} - e^z\right), \quad \underset{\sigma}{R}{}^2_{112} = 0, \quad \underset{\sigma}{R}{}^1_{212} = 0$$

на поднятии любого сечения $\sigma \subset H$.

Пример 2.5. Специальная связность в ${}^2R^*H$ с коэффициентами связности

$$\gamma_1 = 2\,p_2 \cdot p_{1\,1} - 1, \quad \gamma_{1\,1}^2 = -p_2 \cdot p_{1\,1}, \quad \gamma_{2\,1}^1 = p_2 \cdot p_{1\,1} - 1,$$

$$\gamma_2 = 2\,p_2 \cdot p_{1\,2} - 1, \quad \gamma_{1\,2}^2 = -p_2 \cdot p_{1\,2}, \quad \gamma_{2\,2}^1 = p_2 \cdot p_{1\,2} - 1$$

определяет представление нулевой кривизны для уравнения

$$z_{11} \cdot z_{22} - (z_{12})^2 + z_2 \cdot z_{11} - z_2 \cdot z_{12} = 0.$$

В самом деле нетрудно проверить, что

$$\underset{\sigma}{R}_{12} = -2\left(z_{11} \cdot z_{22} - (z_{12})^2 + z_2 \cdot z_{11} - z_2 \cdot z_{12}\right),$$

$$\underset{\sigma}{R}{}^2_{112} = z_{11} \cdot z_{22} - (z_{12})^2 + z_2 \cdot z_{11} - z_2 \cdot z_{12},$$

$$\underset{\sigma}{R}{}^1_{212} = -\left(z_{11} \cdot z_{22} - (z_{12})^2 + z_2 \cdot z_{11} - z_2 \cdot z_{12}\right)$$

на поднятии любого сечения $\sigma \subset H$.

2.4. Специальные связности в ${}^k\Re^*H,\ k=1,2$. Можно рассматривать также специальные связности в ${}^k\Re^*H,\ k=1,2$. Формы связности в этом случае имеют вид

$$\widetilde{\widetilde{\omega}}{}^i_j = \omega^i_j + \Gamma^i_{jk}\omega^k.$$

При этом будем предполагать, что $\Gamma^i_{jk}=\Gamma^i_{kj}$. Коэффициенты связности в случае $k=1$ зависят от $x^i,\ z,\ p_j$, а в случае $k=2$ – от $x^i,\ z,\ p_j,\ p_{kl}$. Они удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$d\Gamma^i_{jk} + \Gamma^m_{jk}\omega^i_m - \Gamma^i_{mk}\omega^m_j - \Gamma^i_{jm}\omega^m_k - \omega^i_{jk} = 0. \tag{32}$$

Здесь равенство нулю имеет место по модулю главных форм.

Замечание 2.2. Заметим, что задание специальной связности в ${}^k\Re^*H$ равносильно заданию специальной связности в ${}^kR^*H$.

В частности, специальная связность в ${}^k\Re^*H$ с коэффициентами Γ^i_{jk} порождает специальную связность в ${}^kR^*H$ с коэффициентами:

$$\begin{aligned} &\gamma_1 = \Gamma^1_{11} - \Gamma^2_{12}, \quad \gamma^2_{11} = \Gamma^2_{11}, \quad \gamma^1_{2\,1} = \Gamma^1_{12},\\ &\gamma_2 = \Gamma^1_{12} - \Gamma^2_{22}, \quad \gamma^2_{12} = \Gamma^2_{12}, \quad \gamma^1_{22} = \Gamma^1_{22}. \end{aligned} \tag{33}$$

Нетрудно проверить, что дифференциальные уравнения, которым удовлетворяют коэффициенты Γ^i_{jk} (25), вычисленные по формулам (33), имеют вид (26).

3. Связности Бэклунда и отображения Бэклунда, системы Бэклунда

Наряду с главными расслоениями (16) можно рассматривать ассоциированные с ними расслоения. Напомним (см. разд. 1, п. 1.2), что, следуя [8], мы обозначаем символом $P\,(B,G)$ главное расслоение с базой B и структурной группой G. Ассоциированное с ним расслоение с типовым слоем $\Im$ ($\Im$ – пространство представления структурной группы G) мы обозначаем $\Im\,(P\,(B,G))$. Заметим, принимая во внимание Замечание 2.2, что, исследуя связности в ассоциированных расслоениях $\Im\left({}^kr^*H\right)$, $\Im\left({}^kR^*H\right)$, $\Im\left({}^k\Re^*H\right)$, можно ограничиться изучением связностей в $\Im\left({}^kr^*H\right)$ и $\Im\left({}^kR^*H\right)$. Особый интерес представляют для нас связности в ассоциированных расслоениях $\Im\left({}^kR^*H\right)$, $k=1,2$, с одномерным типовым слоем.

Напомним сначала (см. [8]), что связность, заданная в главном расслоении $P(B,G)$, порождает связность в ассоциированном расслоении $\Im(P(B,G))$. Если при этом $\dim\Im=1$, то совокупность форм связности в $\Im\,(P\,(B,G))$ состоит из одной формы $\widetilde{\theta}$, которая имеет следующий вид:

$$\widetilde{\theta} = dY - \xi_A\,(Y)\cdot\widetilde{\omega}^A.$$

Здесь $\widetilde{\omega}^A$ – формы связности в $P(B,G)$, индексы $A,\ B,\ C$ пробегают значения $1,\dots,\dim G$, а коэффициенты $\xi_A(Y)$ удовлетворяют тождествам Ли:

$$d\xi_B\cdot\xi_C - d\xi_C\cdot\xi_B = \xi_A\,C^A_{BC}\,dY,$$

где C^A_{BC} – структурные константы группы Ли G.

Форма $\widetilde{\theta}$ удовлетворяет структурному уравнению

$$d\widetilde{\theta} = \widetilde{\theta}\wedge\left(-\frac{d\xi_A}{dY}\widetilde{\omega}^A\right) - \xi_A\Omega^A,$$

где Ω^A – формы кривизны, соответствующие связности, заданной в $P(B,G)$.

Имеет место

Лемма 3.1. *Форму связности $\widetilde{\theta}$ в ассоциированном расслоении $\Im(P(B,G))$ можно представить в виде*

$$\widetilde{\theta} = \chi \left\{ dy + \widetilde{\omega}_1^2 - y\,\widetilde{\omega} - y^2\,\widetilde{\omega}_2^1 \right\}, \quad \chi \neq 0, \tag{35}$$

где $\widetilde{\omega}$, $\widetilde{\omega}_1^2$, $\widetilde{\omega}_2^1$ – формы связности, заданной в ${}^kR^*H$.

Доказательство. Форма связности в $\Im\left({}^kR^*H\right)$ имеет следующий вид

$$\widetilde{\theta} = dY - \xi\,(Y)\cdot\widetilde{\omega} - \xi_1^2\,(Y)\cdot\widetilde{\omega}_2^1 - \xi_2^1\,(Y)\cdot\widetilde{\omega}_1^2,$$

где $\widetilde{\omega}$, $\widetilde{\omega}_1^2$, $\widetilde{\omega}_2^1$ – формы связности, заданной в ${}^kR^*H$. Тождества Ли, которым удовлетворяют коэффициенты $\xi(Y)$, $\xi_1^2(Y)$, $\xi_2^1(Y)$, имеют в данном случае следующий вид:

$$\begin{aligned} &\xi\cdot d\xi_1^2 - \xi_1^2\cdot d\xi = \xi_1^2\,dY,\\ &\xi\cdot d\xi_2^1 - \xi_2^1\cdot d\xi = -\xi_2^1\,dY,\\ &\xi_1^2\cdot d\xi_2^1 - \xi_2^1\cdot d\xi_1^2 = 2\xi\,dY. \end{aligned} \tag{36}$$

В результате умножения первого уравнения системы (36) на ξ_2^1, второго – на ξ_1^2, третьего – на ξ и последующего сложения получим:

$$\xi_1^2\cdot\xi_2^1 + (\xi)^2 = 0. \tag{37}$$

Заметим, что при этом

$$\xi_2^1 \neq 0, \tag{38}$$

так как в противном случае из (37) следует, что $\xi = 0$, и тогда в силу равенств $\xi_2^1 = \xi = 0$ из первого уравнения системы (36) следует соотношение $\xi_1^2 = 0$. Однако одновременное обращение в нуль всех трёх коэффициентов ξ, ξ_1^2, ξ_2^1 не может иметь места. Приняв во внимание (38), представим форму $\widetilde{\theta}$ следующим образом:

$$\widetilde{\theta} = -\xi_2^1\left\{-\frac{dY}{\xi_2^1} + \frac{\xi}{\xi_2^1}\,\widetilde{\omega} + \frac{\xi_1^2}{\xi_2^1}\,\widetilde{\omega}_2^1 + \widetilde{\omega}_1^2\right\}$$

и введём новую переменную

$$y = -\frac{\xi\,(Y)}{\xi_2^1\,(Y)}. \tag{39}$$

Дифференцируя (39), получим (принимая во внимание второе уравнение системы (36)):

$$-\frac{dY}{\xi_2^1\,(Y)} = dy. \tag{40}$$

Из (39) и (37) следует, что

$$\xi = -y\cdot\xi_2^1, \quad \xi_1^2 = -y^2\cdot\xi_2^1, \tag{41}$$

и в силу (40) и (41) форму $\widetilde{\theta}$ можно представить в виде (35), где $\chi = -\xi_2^1 \neq 0$, что и требовалось доказать. □

Напомним (см. разд. 1), что связности в $\Im\left({}^kR^*H\right)$, $\dim\Im = 1$, мы называем связностями Бэклунда класса k для заданного дифференциального уравнения

($5''$), если они порождены специальными связностями в ${}^kR^*H$, определяющими представления нулевой кривизны для уравнения ($5''$). Наряду со связностями Бэклунда общего типа существуют *особые связности Бэклунда,* порождённые специальными связностями в $P\left(J^kH, G\right)$ (где G – подгруппа группы $SL(2)$), определяющими представления нулевой кривизны (см. упоминание о них в разд. 1).

Уравнение Пфаффа (8):

$$\underset{\sigma}{\widetilde{\theta}} = 0,$$

где $\underset{\sigma}{\widetilde{\theta}}$ – соответствующая связности Бэклунда форма $\widetilde{\theta}$, рассматриваемая на поднятии произвольного сечения $\sigma \subset H$, вполне интегрируемо тогда и только тогда, когда $\sigma \subset H$ – решение уравнения ($5''$). Оно определяет отображение (9):

$$H \supset \sigma \quad \rightarrow \quad \underset{\sigma}{\Sigma} \subset \Im\left({}^kR^*H\right), \quad \dim \Im = 1,$$

которое мы условились (см. разд. 1) называть *отображением Бэклунда класса k,* соответствующим дифференциальному уравнению ($5''$). Уравнение (8) мы называем *уравнением Пфаффа, определяющим отображение Бэклунда.*

Заметим (принимая во внимание Лемму 3.1), что в случае, когда в качестве главных форм выбраны контактные формы (19), уравнение Пфаффа (8) имеет вид

$$dy - \left(-\underset{\sigma}{\gamma^2_{11}} + y \cdot \underset{\sigma}{\gamma_1} + y^2 \cdot \underset{\sigma}{\gamma^1_{21}}\right) dx^1 - \left(-\underset{\sigma}{\gamma^2_{12}} + y \cdot \underset{\sigma}{\gamma_2} + y^2 \cdot \underset{\sigma}{\gamma^1_{22}}\right) dx^2 = 0$$

и, следовательно, эквивалентно системе уравнений с частными производными

$$\begin{cases} y_1 = -\underset{\sigma}{\gamma^2_{11}} + y \cdot \underset{\sigma}{\gamma_1} + y^2 \cdot \underset{\sigma}{\gamma^1_{21}}, \\ y_2 = -\underset{\sigma}{\gamma^2_{12}} + y \cdot \underset{\sigma}{\gamma_2} + y^2 \cdot \underset{\sigma}{\gamma^1_{22}}, \end{cases} \tag{42}$$

которую мы называем системой Бэклунда. Здесь $\underset{\sigma}{\gamma^2_{1i}},\ \underset{\sigma}{\gamma_i},\ \underset{\sigma}{\gamma^1_{2i}},\ i = 1, 2,$ – коэффициенты связности в ${}^kR^*H$, определяющей представление нулевой кривизны (рассматриваемые на сечении $\sigma \subset H$).

Систему Бэклунда (42) можно также посредством замены $y = \operatorname{tg}\dfrac{('y)}{2}$ представить в форме

$$\begin{cases} 'y_1 = \underset{\sigma}{\gamma^1_{21}} - \underset{\sigma}{\gamma^2_{11}} + \underset{\sigma}{\gamma_1} \cdot \sin('y) - \left(\underset{\sigma}{\gamma^1_{21}} + \underset{\sigma}{\gamma^2_{11}}\right) \cdot \cos('y), \\ 'y_2 = \underset{\sigma}{\gamma^1_{22}} - \underset{\sigma}{\gamma^2_{12}} + \underset{\sigma}{\gamma_2} \cdot \sin('y) - \left(\underset{\sigma}{\gamma^1_{22}} + \underset{\sigma}{\gamma^2_{12}}\right) \cdot \cos('y) \end{cases} \tag{42$'$}$$

либо посредством замены $y = e^{(''y)}$ в форме

$$\begin{cases} ''y_1 = \underset{\sigma}{\gamma_1} + \underset{\sigma}{\gamma^1_{21}} \cdot e^{(''y)} - \underset{\sigma}{\gamma^2_{11}} \cdot e^{-(''y)}, \\ ''y_2 = \underset{\sigma}{\gamma_2} + \underset{\sigma}{\gamma^1_{22}} \cdot e^{(''y)} - \underset{\sigma}{\gamma^2_{12}} \cdot e^{-(''y)}. \end{cases} \tag{42$''$}$$

Замечание 3.1. Заметим, что система Бэклунда (42), соответствующая отображению Бэклунда класса 2, имеет в силу (31) вид (10)

$$\begin{cases} y_1 = \left(\varphi^1_2 y^2 + \varphi\, y - \varphi^2_1\right) \cdot z_{11} + \left(\psi^1_2 y^2 + \psi y - \psi^2_1\right) \cdot z_{12} + \chi^1_{21} y^2 + \chi_1 y - \chi^2_{11}, \\ y_2 = \left(\varphi^1_2 y^2 + \varphi\, y - \varphi^2_1\right) \cdot z_{12} + \left(\psi^1_2 y^2 + \psi y - \psi^2_1\right) \cdot z_{22} + \chi^1_{22} y^2 + \chi_2 y - \chi^2_{12} \end{cases}$$

Имеет место следующая теорема, которая является следствием Теоремы 2.1:

Теорема 3.1. *Если дифференциальное уравнение с частными производными 2-го порядка* $(5'')$ *допускает отображение Бэклунда класса* 1, *то оно – квазилинейное.*

Если уравнение $(5'')$ *допускает отображение Бэклунда класса* 2, *то оно является либо уравнением типа Монжа–Ампера* (13), *либо квазилинейным уравнением* (*если в системе Бэклунда* (10) *функции* (11) *удовлетворяют условиям* (12)).

Замечание 3.2. Теорема 3.1 является уточнением известного ещё с 1906 г. результата А.Р. Форсиса [27], который установил, что в случае, когда дифференциальное уравнение 2-го порядка допускает преобразование Бэклунда, оно имеет вид

$$T\left(z_{11}\cdot z_{22}-(z_{12})^2\right)+P\,z_{11}+Q\,z_{12}+R\,z_{22}+S=0,$$

где P, Q, R, S, T являются функциями переменных x^1, x^2, z, z_1, z_2.

Пример 3.1. Рассмотрим отображение Бэклунда класса 1, для которого система Бэклунда (записанная в форме $(42')$) имеет вид

$$\begin{cases} y_1 = \dfrac{1}{2}z_1+\sin y\cdot\cos\dfrac{z}{2}+\cos y\cdot\sin\dfrac{z}{2}=\dfrac{1}{2}z_1+\sin\left(y+\dfrac{z}{2}\right), \\ y_2 = -\dfrac{1}{2}z_2+\sin y\cdot\cos\dfrac{z}{2}-\cos y\cdot\sin\dfrac{z}{2}=-\dfrac{1}{2}z_2+\sin\left(y-\dfrac{z}{2}\right). \end{cases} \tag{43}$$

Соответствующая связность Бэклунда порождена связностью в ${}^1R^*H$, определяющей представление нулевой кривизны для уравнения синус-Гордона (Пример 2.3).

Заметим, что это отображение является автопреобразованием уравнения синус-Гордона. Действительно, продифференцируем первое из уравнений (43) по x^2, а второе – по x^1. После сложения получим

$$(2y)_{12}=\sin(2y)\,.$$

Пример 3.2. Рассмотрим отображение Бэклунда класса 1, для которого система Бэклунда (записанная в форме $(42'')$), имеет вид

$$\begin{cases} y_1 = \dfrac{1}{2}z_1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\,e^{z/2+y}, \\ y_2 = -\dfrac{1}{2}z_2-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\,e^{z/2-y}. \end{cases} \tag{44}$$

Соответствующая связность Бэклунда порождена связностью в ${}^1R^*H$, определяющей представление нулевой кривизны для уравнения Лиувилля (Пример 2.4).

Система (44) определяет преобразование уравнения Лиувилля в волновое уравнение

$$y_{12}=0. \tag{45}$$

Действительно, заметим, что

$$\begin{cases} y_{12} = \dfrac{1}{2}z_{12}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\,e^{z/2+y}\left(\dfrac{1}{2}z_2+y_2\right), \\ y_{21} = -\dfrac{1}{2}z_{21}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\,e^{z/2-y}\left(\dfrac{1}{2}z_1-y_1\right). \end{cases}$$

В результате сложения этих уравнений (принимая во внимание (44)) получим (45).

Пример 3.3. Рассмотрим отображение Бэклунда класса 1, для которого система Бэклунда имеет вид

$$\begin{cases} y_1 = y - z + z_2, \\ y_2 = -y + \ln z. \end{cases} \tag{46}$$

Это отображение является преобразованием Бэклунда уравнения

$$z_1 = z \cdot z_{22} + z\,\ln z - z^2 \tag{47}$$

в уравнение

$$y_1 = y + e^{y+y_2}\left(-1 + y_2 + y_{22}\right)\,. \tag{48}$$

В этом можно убедиться следующим образом.

1. В результате дифференцирования первого уравнения системы (46) по x^2, второго уравнения по x^1 и последующего вычитания мы придём (принимая во внимание уравнения(46)) к уравнению (47).

2. Из второго уравнения системы (46) следует, что $z = e^{y+y_2}$. Следовательно, $z_2 = e^{y+y_2}\left(y_2 + y_{22}\right)$. Подставляя эти выражения в первое уравнение системы (46), получим (48).

Заметим, что в данном случае мы имеем дело с особым преобразованием Бэклунда. Действительно, для соответствующей связности Бэклунда формами связности являются формы

$$\widetilde{\omega} = dx^1 - dx^2, \quad \widetilde{\omega}_1^2 = (z - z_2)\,dx^1 + \ln z \cdot dx^2, \quad \widetilde{\omega}_2^1 = 0.$$

Это означает, что связность Бэклунда порождена связностью (определяющей представление нулевой кривизны), заданной в расслоении $P\left(J^1H, G\right)$, где G – подгруппа группы $SL(2)$, определённая уравнением Пфаффа $\overline{\omega}_2^1 = 0$ (об инвариантных структурных формах $\overline{\omega}$, $\overline{\omega}_1^2$, $\overline{\omega}_2^1$ группы $SL(2)$ см. разд. 2, п. 2.3).

Пример 3.4. Система

$$\begin{cases} y_1 = z_2 \cdot z_{11} + (2\,z_2 \cdot z_{11} - 1) \cdot y + (z_2 \cdot z_{11} - 1) \cdot y^2, \\ y_2 = z_2 \cdot z_{12} + (2\,z_2 \cdot z_{12} - 1) \cdot y + (z_2 \cdot z_{12} - 1) \cdot y^2 \end{cases}$$

является системой Бэклунда, определяющей отображение Бэклунда класса 2 для уравнения

$$z_{11} \cdot z_{22} - \left(z_{12}\right)^2 + z_2 \cdot z_{11} - z_2 \cdot z_{12} = 0.$$

Соответствующая связность Бэклунда порождена связностью, определяющей представление нулевой кривизны для этого уравнения (Пример 2.5).

4. Преобразования Бэклунда класса 1 одного специального типа («стандартные» преобразования Бэклунда)

Отображение Бэклунда класса 1 условимся называть *стандартным,* если в одном из уравнений системы Бэклунда коэффициенты являются функциями одного переменного z (допустим для определенности, что это коэффициенты γ_2, γ_{12}^2, γ_{22}^1), и при этом данное уравнение может быть разрешено относительно z.

Заметим, что стандартные отображения Бэклунда являются преобразованиями Бэклунда. Действительно, в этом случае $z = z\,(y, y_2)$ и, следовательно, $z_i = \phi_i\,(y, y_1, y_2, y_{12}, y_{22})$. Подставив эти выражения в первое уравнение системы Бэклунда, мы придём к уравнению 2-го порядка с неизвестной функцией y.

Примером стандартного преобразования Бэклунда является преобразование, рассмотренное в Примере 3.3.

Приведём ещё один пример стандартного преобразования Бэклунда.

Пример 4.1. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} y_1 = -\dfrac{1}{2}\left(z_2 - \dfrac{z^2}{2}\right)\cdot y - \dfrac{1}{4} z\cdot y^2, \\ y_2 = -\dfrac{z}{2}\cdot y + \dfrac{1}{2}y^2, \end{cases}$$

которая, как нетрудно проверить, является системой Бэклунда, определяющей стандартное автопреобразование уравнения Бюргерса

$$z_1 + z\cdot z_2 - z_{22} = 0. \tag{49}$$

Заметим, что это преобразование – особое (как и преобразование, рассмотренное в Примере 3.3).

Замечание 4.1. Уравнения 2-го порядка, допускающие стандартные преобразования Бэклунда, имеют вид

$$P_1(z, z_1, z_2)\cdot z_{12} + P(z, z_1, z_2)\cdot z_{22} + Q(z, z_1, z_2) = 0, \tag{50}$$

так как в этом случае каждое из уравнений системы (30) имеет вид (50). Среди уравнений вида (50) содержатся, в частности, уравнения

$$z_{22} - h(z, z_1, z_2) = 0.$$

Замечание 4.2. Нетрудно убедиться в том, что уравнения $z_{22} - h(z, z_1, z_2) = 0$, допускающие стандартные преобразования Бэклунда, имеют вид

$$z_{22} - F(z, z_2)\cdot z_1 - G(z, z_2) = 0.$$

В частном случае, когда $F(z, z_2)$ зависит только от z и не обращается в нуль, такое уравнение можно записать следующим образом:

$$z_1 - f(z)\cdot z_{22} - g(z, z_2) = 0\,(f(z) \neq 0).$$

Можно доказать (см. [26]), что имеет место

Теорема 4.1. *Если дифференциальное уравнение*

$$z_1 - f(z)\cdot z_{22} - g(z, z_2) = 0, \quad f(z) \neq 0,$$

допускает стандартное преобразование Бэклунда, то оно имеет вид

$$z_1 - f(z)\cdot z_{22} - \xi(z)\cdot (z_2)^2 - \eta(z)\cdot z_2 - \zeta(z) = 0, \quad f(z) \neq 0, \tag{51}$$

где

$$\zeta(z) = \frac{f(z)}{f_\xi(z)}\left(A\int \frac{\eta(z)\cdot f_\xi(z)}{f(z)}\,dz + B\int \frac{f_\xi(z)}{f(z)}\,dz - A^2\int f_\xi(z)\,dz + C\right).$$

Здесь A, B, C – константы, $f_\xi(z) = \exp\left(\int \frac{\xi(z)}{f(z)}\,dz\right)$, символами

$$\int \frac{\xi(z)}{f(z)}\,dz, \quad \int f_\xi(z)\,dz, \quad \int \frac{f_\xi(z)}{f(z)}\,dz, \quad \int \frac{\eta(z)\cdot f_\xi(z)}{f(z)}\,dz \tag{52}$$

обозначены произвольно выбранные первообразные.

Замечание 4.3. Нетрудно проверить, что уравнение (51) в случае $A^2+B^2\neq 0$ допускает стандартное преобразование Бэклунда, для которого система Бэклунда имеет вид

$$\begin{cases} y_1 = By + a\cdot\left(z_2\cdot f_\xi(z) - \displaystyle\int\frac{\eta(z)\cdot f_\xi(z)}{f(z)}\,dz - A\int f_\xi(z)\,dz + k_1\right), \\ y_2 = -Ay + a\cdot\left(\displaystyle\int\frac{f_\xi(z)}{f(z)}\,dz + k_2\right), \end{cases} \tag{53}$$

где $a,\ k_1,\ k_2$ – константы. При этом $a\neq 0$, а константы k_1 и k_2 связаны соотношением $Ak_1+Bk_2-C=0$.

Уравнением такого типа является, в частности, уравнение (47) (см. Пример 3.3). В этом случае $f(z)=z,\ \xi(z)=\eta(z)=0,\ A=B=1,\ C=0.$

Первообразные (52) выбраны следующим образом:

$$\int\frac{\xi(z)}{f(z)}\,dz = \int 0\cdot dz = 1$$

(следовательно, $f_\xi(z)=e^0=1$),

$$\int f_\xi(z)\,dz = \int 1\cdot dz = z,$$

$$\int\frac{f_\xi(z)}{f(z)}\,dz = \int\frac{dz}{z} = \ln z,$$

$$\int\frac{\eta(z)\cdot f_\xi(z)}{f(z)}\,dz = \int 0\cdot dz = 0.$$

Система Бэклунда для уравнения (47) (система (46)) имеет вид (53), где $a=1$, $k_1=k_2=0$.

Замечание 4.4. Уравнение (51) в случае $A=B=C=0$ допускает, как нетрудно проверить, стандартное преобразование Бэклунда, для которого система Бэклунда имеет вид

$$\begin{cases} y_1 = \left(ay^2+by+c\right)\cdot\left(z_2\cdot f_\xi(z) - \displaystyle\int\frac{\eta(z)\cdot f_\xi(z)}{f(z)}\,dz\right), \\ y_2 = \left(ay^2+by+c\right)\cdot\left(\displaystyle\int\frac{f_\xi(z)}{f(z)}\,dz + 1\right), \end{cases}$$

где $a,\ b,\ c$ – константы, $a^2+b^2+c^2\neq 0$, и, следовательно, посредством подходящей замены переменной y может быть сведена к системе, определяющей преобразование Коула – Хопфа.

Вместе с тем существуют уравнения вида (51), удовлетворяющие условию $A = B = C = 0$ и допускающие при этом преобразования Бэклунда, не сводящиеся к преобразованиям Коула – Хопфа. Таким уравнением является, в частности, уравнение Бюргерса (см. Пример 4.1). Оно является уравнением вида (51), где $f(z)=1$, $\xi(z)=0,\ \eta(z)=z,\ A=B=C=0.$

5. Существование отображений Бэклунда класса 2 для уравнения $z_{11} \cdot z_{22} - (z_{12})^2 + c^2 = 0,\ c = \mathrm{const}$

Имеет место

Теорема 5.1. *Уравнение*

$$z_{11} \cdot z_{22} - (z_{12})^2 + c^2 = 0, \quad c = \mathrm{const} \tag{54}$$

допускает отображение Бэклунда класса 2*, для которого система Бэклунда имеет вид*

$$\begin{cases} y_1 = \left(A_2^1\, y^2 + A\, y + A_1^2\right) \cdot z_{11} + \left(B_2^1\, y^2 + B\, y + B_1^2\right) \cdot (z_{12} + c)\,, \\ y_2 = \left(A_2^1\, y^2 + A\, y + A_1^2\right) \cdot (z_{12} - c) + \left(B_2^1\, y^2 + B\, y + B_1^2\right) \cdot z_{22}, \end{cases}$$

где $A,\ A_1^2,\ A_2^1,\ B,\ B_1^2,\ B_2^1$ *– константы, причём* $\mathrm{rg}\begin{pmatrix} A_2^1 & A & A_1^2 \\ B_2^1 & B & B_1^2 \end{pmatrix} = 2$.

Доказательство. Чтобы доказать теорему, достаточно построить специальную связность в ${}^2R^*H$, определяющую представление нулевой кривизны для уравнения (54). Такой связностью является связность с коэффициентами связности (31), где

$$\begin{array}{llll} \varphi = A, & \psi = B, & \chi_1 = cB, & \chi_2 = -cA, \\ \varphi_1^2 = -A_1^2, & \psi_1^2 = -B_1^2, & \chi_{11}^2 = -cB_1^2, & \chi_{12}^2 = cA_1^2, \\ \varphi_2^1 = A_2^1, & \psi_2^1 = B_2^1, & \chi_{21}^1 = cB_2^1, & \chi_{21}^1 = -cA_2^1. \end{array}$$

Действительно, рассматривая структурные уравнения, которым удовлетворяют формы связности, можно заметить, что на поднятии любого сечения $\sigma \subset H$ эти уравнения имеют вид:

$$d\underset{\sigma}{\widetilde{\omega}} = 2\underset{\sigma\,1}{\widetilde{\omega}^2} \wedge \underset{\sigma\,2}{\widetilde{\omega}^1} - 2\begin{vmatrix} A_2^1 & A_1^2 \\ B_2^1 & B_1^2 \end{vmatrix}\left(z_{11} \cdot z_{22} - (z_{12})^2 + c^2\right) dx^1 \wedge dx^2,$$

$$d\underset{\sigma\,1}{\widetilde{\omega}^2} = \underset{\sigma}{\widetilde{\omega}} \wedge \underset{\sigma\,1}{\widetilde{\omega}^2} + \begin{vmatrix} A & A_1^2 \\ B & B_1^2 \end{vmatrix}\left(z_{11} \cdot z_{22} - (z_{12})^2 + c^2\right) dx^1 \wedge dx^2,$$

$$d\underset{\sigma\,2}{\widetilde{\omega}^1} = \underset{\sigma\,2}{\widetilde{\omega}^1} \wedge \underset{\sigma}{\widetilde{\omega}} - \begin{vmatrix} A_2^1 & A \\ B_2^1 & B \end{vmatrix}\left(z_{11} \cdot z_{22} - (z_{12})^2 + c^2\right) dx^1 \wedge dx^2,$$

что и требовалось доказать. □

Summary

A.K. Rybnikov. Bäcklund Maps in View of the Theory of Connections.

Study of Bäcklund transformations is one of the most interesting topics in the theory of partial differential equations. These transformations are used for searching of solutions (in particular, soliton solutions) of nonlinear equations. At the same time Bäklund transformation is the instance of differential-geometric structure generated by a differential equation.

The notion of Bäcklund transformation is a particular case of more general notion of Bäcklund map. In the present work the theory of Bäcklund maps is treated as a special chapter of the theory of connections.

Key words: Bäcklund transformation, differential-geometric object, differential-geometric structure, connection in principal or associated bundle, connection defining the representation of zero curvature for a given partial differential equation.

Литература

1. *Васильев А.М.* Теория дифференциально-геометрических структур. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1987. – 190 с.
2. *Pirani F.A.E., Robinson D.C.* Sur la définition des transformations de Bäcklund // C.R. Acad. Sc. Paris, Serie A. – 1977. - T. 285. – P. 581–583.
3. *Pirani F.A.E., Robinson D.C., Shadwick W.F.* Local Jet-bundle Formulation of Bäcklund Transformations. – Dordrecht (Holland): Reidal, 1979. – 132 p.
4. *Рыбников А.К.* О специальных связностях, определяющих представление нулевой кривизны для эволюционных уравнений второго порядка // Изв. вузов. Матем. – 1999. – № 9. – С. 32–41.
5. *Рыбников А.К., Семёнов К.В.* Связности Бэклунда и отображения Бэклунда, соответствующие эволюционным уравнениям второго порядка // Изв. вузов. Матем. – 2004. – № 5. – С. 52–68.
6. *Рыбников А.К.* Теория связностей и проблема существования преобразований Бэклунда для эволюционных уравнений второго порядка // Докл. РАН. – 2005. – Т. 400, № 3. – С. 319–322.
7. *Rybnikov A.K.* Theory of connections and the problem of existence of Backlund transformations for second-order evolution equations. – URL: www.arXiv.org/math.DG/0405432.
8. *Евтушик Л.Е., Лумисте Ю.Г., Остиану Н.М., Широков А.П.* Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях // Проблемы геометрии. Итоги науки. – М.: ВИНИТИ, 1972. – Т. 9. – С. 5–246.
9. *Лаптев Г.Ф.* Дифференциальная геометрия погруженных многообразий // Труды Моск. матем. о-ва. – 1953. – Т. 2. – С. 275–382.
10. *Лаптев Г.Ф.* Теоретико-групповой метод дифференциально-геометрических исследований // Труды 3-го Всесоюз. матем. съезда. Москва, 1956. – М.: АН СССР, 1958. – Т. 3. – С. 409–418.
11. *Лаптев Г.Ф.* Основные инфинитезимальные структуры высших порядков на гладком многообразии // Труды геометр. семинара. – М.: ВИНИТИ, 1966. – Т. 1. – С. 139–189.
12. *Лаптев Г.Ф.* Структурные уравнения главного расслоенного многообразия // Труды геометр. семинара. – М.: ВИНИТИ, 1969. – Т. 2. – С. 161–178.
13. *Лаптев Г.Ф.* К инвариантной теории дифференцируемых отображений // Труды геометр. семинара. – М.: ВИНИТИ, 1974. – Т. 6. – С. 37–42.
14. *Bianchi L.* Ricerche sulle superficie a curvatura constante e sulle elicoidi // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa. – 1879. – V. 2. – 285 p.
15. *Lie S.* Zur Theorie der Flächen konstanter Krümmung, III, IV // Arch. Math. Naturvidensk. – 1880. – Bd. 5, H. 3. – S. 282–306, 328–358.
16. *Ибрагимов Н.Х.* Группы преобразований в математической физике. – М.: Наука, 1983. – 280 с.
17. *Rogers C., Shadwick W.F.* Bäcklund Transformations and their Applications. – New York, London: Academic Press, 1982. – 334 p.
18. *Bäcklund A.V.* Zur Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung // Math. Ann. – 1880. – Bd. 17. – S. 285–328.
19. *Darboux G.* Leçons sur la Théorie Générale des Surfaces. Part 3. – Paris: Gauthier-Villars, 1894. – 512 p.

20. *Goursat E.* Le Problème de Bäcklund (Memorial des Sciences Mathematiques. Fasc. VI). – Paris: Gauthier-Villars, 1925. – 53 p.

21. *Clairin J.* Sur les Transformations de Baecklund // Ann. Sci. Ecole Norm. Sup., 3-e ser. – 1902. – Supple 19. – P. 1–63.

22. *Рыбников А.К., Семёнов К.В.* О геометрической интерпретации отображений Бэклунда // Инвариантные методы исследования на многообразиях структур геометрии, анализа и математической физики: Тр. участников междунар. конф. пам. Г.Ф. Лаптева. Москва, 1999. – М.: Изд-во мех.-матем. фак. Моск. ун-та, 2001. – Ч. 2. – С. 172–193.

23. *Hermann R.* Pseudopotentials of Estabrook and Wahlquist, the geometry of solitons, and the theory of connections // Phys. Rev. Lett. – 1976. – V. 36, No 15. – P. 835–836.

24. *Wahlquist H.D., Estabrook F.B.* Prolongation structures of nonlinear evolution equations // J. Math. Phys. – 1975. – V. 16. – P. 1–7.

25. *Рыбников А.К.* Теория связностей, преобразования Коула – Хопфа и потенциалы дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка // Изв. вузов. Матем. – 2007. – № 9. – С. 50–70.

26. *Рыбников А.К.* Теория связностей и преобразования Бэклунда для общих дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка // Докл. РАН. – 2005. – Т. 405, № 1. – С. 26–29.

27. *Forsyth A.R.* Theory of Differential Equations. Part 4. V. 6. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1906. – 596 p.

Поступила в редакцию
15.05.09

Рыбников Алексей Константинович – кандидат физико-математических наук, доцент механико-математического факультета Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова.

E-mail: *arybnikov@mail.ru*