УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ КАЗАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
Том 151, кн. 4 Физико-математические науки *2009*

УДК 514.763.85

О ПРИВЕДЕНИИ УРАВНЕНИЙ МОНЖА – АМПЕРА К УРАВНЕНИЮ ЭЙЛЕРА – ПУАССОНА

А.Г. Кушнер

Аннотация

В работе приводятся необходимые и достаточные условия контактной эквивалентности уравнений Монжа – Ампера уравнению Эйлера – Пуассона.

Ключевые слова: контактные преобразования, формы Лапласа.

Введение

Уравнение Монжа – Ампера имеет следующий вид:

$$Av_{xx} + 2Bv_{xy} + Cv_{yy} + D(v_{xx}v_{yy} - v_{xy}^2) + E = 0, \tag{1}$$

где A, B, C, D и E – функции от независимых переменных x, y, неизвестной функции $v = v(x,y)$ и ее первых производных v_x, v_y. Далее мы полагаем, что функции A, B, C, D и E принадлежат классу C^∞.

Класс уравнений Монжа – Ампера выделяется из уравнений второго порядка тем, что он замкнут относительно контактных преобразований и содержит квазилинейные уравнения.

Этот факт был известен еще Софусу Ли, который в серии работ [1–3] рассматривал проблему классификации гиперболических уравнений Монжа – Ампера и которую в современных терминах можно обобщить следующим образом:

Найти классы эквивалентности уравнений Монжа – Ампера относительно псевдогруппы контактных преобразований.

Сам Софус Ли сформулировал условия приведения гиперболических уравнений Монжа – Ампера к волновому уравнению $v_{xy} = 0$ при наличии у них двух промежуточных интегралов. Напомним, что *промежуточным интегралом* уравнения Монжа – Ампера называется дифференциальное уравнение первого порядка, каждое решение которого является решением данного уравнения Монжа – Ампера.

Заметим, что не все уравнения Монжа – Ампера обладают промежуточными интегралами. Поэтому результаты Ли применимы не ко всем уравнениям Монжа – Ампера, а только к тем из них, которые такими интегралами обладают. Кроме того, проверка наличия промежуточных интегралов у общего уравнения Монжа – Ампера, а тем более их построение, является непростой задачей. Доказательства полученных результатов Ли так и не опубликовал.

В 1978 г. В.В. Лычагин [4] предложил геометрическое описание широкого класса дифференциальных уравнений второго порядка на гладких многообразиях. Если размерность многообразия равна двум, то этот класс совпадает с классом уравнений Монжа – Ампера (1).

Основная идея Лычагина заключается в представлении уравнений Монжа – Ампера и их многомерных аналогов дифференциальными формами на пространстве 1-джетов функций на гладком многообразии M.

Преимуществом такого подхода перед классическим является редукция порядка пространства джетов: используется более простое пространство 1-джетов J^1M вместо пространства 2-джетов J^2M, в котором, будучи уравнениями второго порядка, *ad hoc* должны лежать уравнения Монжа – Ампера (см. [5]).

Такая интерпретация уравнений Монжа – Ампера позволила по-новому взглянуть на проблему их классификации и послужила толчком к появлению множества работ других авторов.

В частности, в 1983 г. В.В. Лычагиным и В.Н. Рубцовым [6] была решена проблема приводимости невырожденных уравнений (1) к уравнениям Монжа – Ампера с постоянными коэффициентами в случае, когда коэффициенты A, B, C, D, E не зависят от переменной v. Такие уравнения они назвали *симплектическими*. Оказалось, что если коэффициенты A, B, C, D, E уравнения – аналитические функции, то локальным симплектическим преобразованием оно может быть приведено к квазилинейному виду, то есть к виду (1), где $D=0$.

Кроме того, они нашли условия, при которых симплектические уравнения приводятся к уравнению Монжа – Ампера с постоянными коэффициентами A, B, C, D, E и показали, что если это условие выполняется, то гиперболические уравнения локально эквивалентны волновому уравнению $v_{xy}=0$, а эллиптические – уравнению Лапласа $v_{xx}+v_{yy}=0$.

Впоследствии Д.В. Туницкий снял требование независимости коэффициентов уравнения (1) от переменной v и решил проблему приведения уравнений Монжа – Ампера к уравнениям с постоянными коэффициентами в общем виде [7].

Задача эквивалентности симплектических уравнений Монжа – Ампера была решена Б.С. Кругликовым [8] и нами [9], а для уравнений переменного типа – нами [10].

Проблема приведения невырожденных уравнений Монжа – Ампера к линейным уравнениям

$$v_{xx}\pm v_{yy}=a(x,y)v_x+b(x,y)v_y+c(x,y)v+g(x,y) \tag{2}$$

была решена нами в серии работ [11–13], а в работах [14–18] были построены различные линейные нормальные формы для уравнений Монжа – Ампера гиперболического, эллиптического и переменного типов. В частности, были найдены условия приведения уравнений Монжа – Ампера к уравнениям вида (2), где $a=b=0$, а также к телеграфному уравнению

$$v_{xy}=v$$

и уравнению Гельмгольца

$$v_{xx}+v_{yy}=\kappa v+f(x,y),\quad \kappa\in\mathbb{R}\setminus\{0\}.$$

В наших работах [11–13] были построены две дифференциальные 2-формы λ_+ и λ_-, которые являются инвариантами уравнений Монжа – Ампера относительно контактных преобразований. Примечательно, что коэффициенты этих форм, вычисленных для линейных гиперболических уравнений, представляют собой классические инварианты Лапласа k и h [19, 20]. Поэтому формы λ_+ и λ_- были названы *формами Лапласа*.

Подробный обзор и новые результаты по классификации уравнений Монжа – Ампера можно найти в работе [21] и монографии [22].

В настоящей работе мы приводим необходимые и достаточные условия, при которых уравнение Монжа – Ампера контактно эквивалентно уравнению Эйлера-Пуассона:

$$v_{xy}=\frac{\alpha}{x+y}v_x+\frac{\beta}{x+y}v_y-\frac{\alpha\beta}{(x+y)^2}v. \tag{3}$$

Здесь $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Решение этой задачи будет сформулировано в терминах форм Лапласа.

1. Операторы и уравнения Монжа – Ампера: подход Лычагина

Пусть M – двумерное гладкое многообразие и J^1M – пространство 1-джетов гладких функций на M. Каждая дифференциальная 2-форма $\omega \in \Omega^2(J^1M)$ может рассматриваться как нелинейный дифференциальный оператор

$$\Delta_\omega : C^\infty(M) \to \Omega^2(M),$$

действующий на функцию $v \in C^\infty(M)$ по следующему правилу [4]:

$$\Delta_\omega(v) = \omega|_{j_1(v)(M)}. \tag{4}$$

Здесь $j_1(v)(M) \subset J^1M$ – график 1-джета функции v, $\omega|_{j_1(v)(M)}$ – ограничение дифференциальной формы ω на этот график.

Оператор Δ_ω называется *оператором Монжа – Ампера*, а соответствующее уравнение $E_\omega = \{\Delta_\omega(v) = 0\}$ – *уравнением Монжа – Ампера*.

Гладкое многообразие 1-джетов J^1M, $\dim J^1M = 5$, снабжено естественной контактной структурой, задаваемой распределением Картана:

$$\mathcal{C} : J^1M \ni a \mapsto \mathcal{C}(a) \subset T_a(J^1M),$$

или дифференциальной 1-формой Картана $\mathcal{U}$, которая в стандартных локальных координатах q_1, q_2, u, p_1, p_2 на J^1M имеет следующий канонический вид:

$$\mathcal{U} = du - p_1dq_1 - p_2dq_2.$$

Подпространство $\mathcal{C}(a) = \ker\mathcal{U}_a$ касательного пространства $T_a(J^1M)$ называется *подпространством Картана* [5].

Диффеоморфизм $\phi : J^1M \to J^1M$, сохраняющий распределение Картана, называется *контактным*. Соответственно, векторное поле X на J^1M называется *контактным*, если $L_X(\mathcal{U}) = \lambda\mathcal{U}$ для некоторой функции λ [5]. Здесь $L_X(\mathcal{U})$ – производная Ли от $\mathcal{U}$ вдоль векторного поля X.

Отметим, что контактное векторное поле X однозначно определяется функцией $f = \mathcal{U}(X)$, которая называется *производящей* функцией контактного векторного поля X. Поэтому контактное векторное поле с производящей функцией f обозначают X_f.

Дифференциальные формы на J^1M, исчезающие на любом интегральном многообразии распределения Картана и поэтому порождающие нулевые дифференциальные операторы, образуют идеал во внешней алгебре $\Omega^*\left(J^1M\right)$. Обозначим этот идеал через

$$I^* = \bigoplus_{s\geq 0} I^s, \quad \text{где} \quad I^s \subset \Omega^s\left(J^1M\right).$$

В силу обобщения теоремы Лепажа [23], этот идеал порожден дифференциальными формами вида

$$\mathcal{U} \wedge \alpha + d\mathcal{U} \wedge \beta,$$

где α и β – некоторые дифференциальные формы.

Элементы фактор-модуля $\Omega^2\left(J^1M\right)/I^2$ называются *эффективными* 2-формами [4].

Пусть ω – дифференциальная 2-форма на J^1M. Отвечающую ей эффективную форму мы будем обозначать ω_ε, то есть $\omega_\varepsilon = \omega \mod I^2$.

Пусть X_1 – контактное векторное поле с производящей функцией 1. В каждой точке $a \in J^1M$ касательное пространство T_aJ^1M распадается в прямую сумму $T_aJ^1M = \langle X_{1,a}\rangle \oplus \mathcal{C}(a)$.

Это разложение позволяет отождествить эффективные формы с дифференциальными формами на J^1M.

Определим действие контактных диффеоморфизмов на уравнениях Монжа–Ампера.

Пусть ϕ – контактный диффеоморфизм на J^1M. Тогда ϕ^* сохраняет модуль I^2 и поэтому определяет отображение эффективных 2-форм:

$$\phi^*: \quad \omega \mod I^2 \;\mapsto\; \phi^*(\omega) \mod I^2.$$

Определим действие ϕ^* на эффективных формах следующим образом:

$$\phi^*(\omega_\varepsilon) = \phi^*(\omega)_\varepsilon.$$

Определим теперь действие контактного диффеоморфизма ϕ на уравнения Монжа–Ампера, положив $\phi(E_\omega) = E_{\phi^*(\omega_\varepsilon)}$.

Два уравнения Монжа–Ампера E_{ω_1} и E_{ω_2} назовем *локально контактно эквивалентными в точке* $a \in J^1M$, если существует такой локальный контактный диффеоморфизм ϕ некоторой окрестности O_a этой точки, что $\phi(a) = a$ и $\phi(E_{\omega_1}) = E_{\omega_2}$.

В терминах дифференциальных форм это означает, что $(\phi^*(\omega_1))_\varepsilon = h_\phi(\omega_2)_\varepsilon$ для некоторой функции $h_\phi \in C^\infty(J^1M)$, $h_\phi(a) \neq 0$.

2. Геометрические структуры на J^1M

Ограничение дифференциала формы Картана на подпространство Картана $\mathcal{C}(a)$ невырождено и определяет на нем симплектическую структуру Ω_a

Определим ассоциированное с формой ω поле операторов A_ω, действующих на распределении Картана $\mathcal{C}$, следующим образом [6]:

$$A_\omega X \rfloor \ \Omega = X \ \rfloor \omega. \tag{5}$$

Здесь X – векторное поле из распределения Картана.

Функция $\mathrm{Pf}(\omega) \in C^\infty\left(J^1M\right)$, определяемая равенством

$$\mathrm{Pf}(\omega)\Omega \wedge \Omega = \omega \wedge \omega, \tag{6}$$

называется *пфаффианом* формы ω [6].

Квадрат оператора A_ω скалярен и

$$A_\omega^2 + \mathrm{Pf}\,(\omega) = 0. \tag{7}$$

Пусть ω – эффективная дифференциальная 2-форма. Уравнение E_ω называется *гиперболическим, параболическим* или *эллиптическим* в точке $a \in J^1M$, если пфаффиан в этой точке $\mathrm{Pf}(\omega)$ – отрицательный, нулевой или положительный соответственно.

Если в точке $a \in J^1M$ пфаффиан меняет знак, то соответствующее уравнение называется уравнением *переменного типа* в этой точке. Если $\mathrm{Pf}(\omega)(a) \neq 0$, то уравнение называется *невырожденным* в точке a. Если для уравнения E_ω пфаффиан не обращается в нуль в некоторой области, то форму ω можно нормировать так, чтобы $\mathrm{Pf}(\omega) = -1$ в гиперболическом случае или $\mathrm{Pf}(\omega) = 1$ в эллиптическом. Оператор A_ω, отвечающий нормированной форме ω, мы будем обозначать A.

Таким образом, для гиперболических уравнений нормированный оператор порождает на подпространстве Картана структуру почти произведения ($A_a^2 = 1$), а для эллиптических уравнений – комплексную структуру ($A_a^2 = -1$).

Собственные подпространства оператора A двумерны и порождают два распределения $\mathcal{C}_+$ и $\mathcal{C}_-$ на J^1M, которые мы будем называть *характеристическими*. Пересечение первых производных этих распределений порождает одномерное распределение l, трансверсальное распределению Картана [24].

Таким образом, для гиперболических уравнений в каждой точке $a \in J^1M$ касательное пространство к многообразию 1-джетов распадается в прямую сумму трех подпространств:

$$T_a(J^1M) = \mathcal{C}_+(a) \oplus l(a) \oplus \mathcal{C}_-(a), \tag{8}$$

и гиперболическое уравнение Монжа–Ампера порождает на пространстве J^1M набор из трех распределений $\mathcal{P} = (\mathcal{C}_+, l, \mathcal{C}_-)$. Такая структура является частным случаем структуры r-кратного почти произведения [21].

Невырожденное уравнение Монжа–Ампера мы называем *регулярным*, если производные $\mathcal{C}_\pm^{(k)}$, $k = 1, 2, 3$, характеристических распределений также являются распределениями.

3. Формы Лапласа

Обозначим распределения $\mathcal{C}_+$, l, $\mathcal{C}_-$ через $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$, $\mathcal{P}_3$ соответственно. Пусть $D_i = D(\mathcal{P}_i)$ – модули векторных полей из распределения $\mathcal{P}_i$, $i = 1, 2, 3$.

Формула (8) влечет за собой разложение в прямую сумму модуля дифференциальных 1-форм на J^1M:

$$\Omega^1(J^1M) = \Omega^{1,0,0} \oplus \Omega^{0,1,0} \oplus \Omega^{0,0,1}. \tag{9}$$

Здесь $\Omega^{1,0,0}$ – модуль дифференциальных 1-форм на J^1M, аннулирующихся на распределениях $\mathcal{P}_2$ и $\mathcal{P}_3$. Остальные слагаемые в (9) определяются аналогично.

Определим тензорные поля $q_{j,k}^s$ типа (2,1) на J^1M следующим образом:

$$q_{j,k}^s(X, Y) = -\mathbf{P}_s\left[\mathbf{P}_j X, \mathbf{P}_k Y\right], \tag{10}$$

где $\mathbf{P}_j : D(J^1M) \to D_j$ – проектор на распределение $\mathcal{P}_j$, $j, k, s = 1, 2, 3$, $s \neq j, k$ (см. [13]).

Построенные тензорные поля позволяют определить дифференциальные 2-формы, ассоциированные с уравнением Монжа–Ампера.

Пусть $A, B \in \Omega^2 \otimes D$ – тензорные поля типа (2,1) на J^1M. Здесь $\Omega^2 = \Omega^2(J^1M)$ и $D = D(J^1M)$.

В силу естественного вложения

$$\Omega^2 \otimes D \otimes \Omega^2 \otimes D \overset{\iota}{\hookrightarrow} \Omega^1 \otimes \Omega^1 \otimes D \otimes \Omega^1 \otimes \Omega^1 \otimes D$$

тензорное произведение $A \otimes B$ можно рассматривать как элемент пространства

$$T = \Omega^1 \otimes \Omega^1 \otimes D \otimes \Omega^1 \otimes \Omega^1 \otimes D.$$

Пусть C_j^i – операция свертки элемента пространства T по индексам i и j, $i = 3, 6$, $j = 1, 2, 4, 5$. Тогда композиция $C_1^6 \circ C_4^3$ действует в пространство тензоров $\Omega^1 \otimes \Omega^1$:

$$C_1^6 \circ C_4^3 : T \to \Omega^1 \otimes \Omega^1.$$

Прямые вычисления показывают, что

$$\langle A, B\rangle_W = C_1^6 \circ C_4^3(\iota(A)\otimes\iota(B) - \iota(B)\otimes\iota(A)) \tag{11}$$

является внешней дифференциальной 2-формой на J^1M. Операцию $\langle\cdot,\cdot\rangle_W$ мы называем операцией *косой свертки*.

Замечание 1. На разложимых тензорах, то есть на тензорах вида $\alpha\otimes X$ и $\beta\otimes Y$, где $\alpha,\beta\in\Omega^2$ и $X, Y\in D$, скобка $\langle\cdot,\cdot\rangle_W$ имеет вид:

$$\langle\alpha\otimes X, \beta\otimes Y\rangle_W = (Y\rfloor\alpha)\wedge(X\rfloor\beta).$$

Формы Лапласа определяются как косые свертки тензорных полей $q_{j,k}^s$:

$$\lambda_- = \left\langle q_{1,1}^2, q_{2,3}^1\right\rangle_W \quad \text{и} \quad \lambda_+ = \left\langle q_{3,3}^2, q_{1,2}^3\right\rangle_W. \tag{12}$$

Дифференциальные 2-формы (12) являются основным инструментом при классификации уравнений Монжа – Ампера и называются *формами Лапласа* уравнения Монжа – Ампера [11–13]. По построению формы Лапласа являются инвариантами уравнений Монжа – Ампера относительно контактных преобразований.

Например, для уравнения

$$v_{xy} = f(x, y, v, v_x, v_y)$$

эти формы имеют вид:

$$\begin{aligned}
\lambda_- =& f_{p_2p_2}\,(f_{p_1}dq_1\wedge du - dq_1\wedge dp_2) + \\
&(f_u - p_2f_{p_2u} + f_{p_1}f_{p_2} - p_2f_{p_1}f_{p_2p_2} - ff_{p_1p_2} - f_{q_2p_2})\,dq_1\wedge dq_2,\\
\lambda_+ =& f_{p_1p_1}\,(f_{p_2}dq_2\wedge du - dq_2\wedge dp_1) + \\
&(-f_u + p_1f_{p_1u} - f_{p_1}f_{p_2} + p_1f_{p_2}f_{p_1p_1} + ff_{p_1p_2} + f_{q_1p_1})\,dq_1\wedge dq_2.
\end{aligned}$$

Замечание 2. Если вместо скобки (11) рассмотреть скобку

$$\langle A, B\rangle_S = \frac{1}{2}C_1^6 \circ C_4^3(\iota(A)\otimes\iota(B) + \iota(B)\otimes\iota(A)),$$

то мы получим симметрическую билинейную форму.

4. Скалярные дифференциальные инварианты гиперболических уравнений

Пусть λ_+ и λ_- – формы Лапласа для гиперболического уравнения E_ω.

Допустим, что для уравнения Монжа – Ампера выполняются следующие условия:

1) обе формы Лапласа не обращаются в нуль в точке $a\in J^1M$;

2) $\lambda_-\wedge\lambda_- = \lambda_+\wedge\lambda_+ = \lambda_-\wedge\lambda_+ = 0$.

Из условия 2) следует, что формы Лапласа являются внешним произведением дифференциальных 1-форм

$$\lambda_+ = r_+\eta_-\wedge\eta_+ \quad \text{и} \quad \lambda_- = r_-\eta_+\wedge\eta_-$$

Здесь r_+ и r_- – некоторые функции, $\eta_+\in\Omega^{1,0,0}$ и $\eta_-\in\Omega^{0,0,1}$ (см. [11]).

Дифференциальные 1-формы $\eta_\pm$ определены с точностью до умножения на функцию и порождают два 4-мерных распределения $\mathcal{F}\langle\eta_+\rangle$ и $\mathcal{F}\langle\vartheta_-\rangle$ на J^1M.

Помимо условий 1) и 2) допустим, что эти распределения вполне интегрируемы и формы Лапласа замкнуты.

Тогда для любого векторного поля Z из распределения l производные Ли равны нулю:

$$L_Z(\lambda_\pm) = Z\rfloor d\lambda_\pm = 0.$$

Пусть теперь Y – произвольное векторное поле из одномерного распределения $\mathcal{C}_+^{(2)} \cap \mathcal{C}_-$. Так как

$$Y\rfloor \eta_+ = 0 \quad \text{и} \quad Y\rfloor \eta_- = 0,$$

то

$$Y\rfloor \lambda_+ = 0 \quad \text{и} \quad Y\rfloor \lambda_- 0.$$

В силу замкнутости форм Лапласа это означает, что производные Ли этих форм вдоль векторного поля Y равны нулю:

$$L_Y(\lambda_\pm) = Y\rfloor d\lambda_\pm = 0.$$

Аналогично получаем, что производные Ли от форм Лапласа вдоль любого векторного поля X из распределения $\mathcal{C}_-^{(2)} \cap \mathcal{C}_+$ также равны нулю.

Таким образом, производные Ли от форм Лапласа вдоль каждого векторного поля из вполне интегрируемого трехмерного распределения $\mathcal{F}\langle\eta_+, \eta_-\rangle$ равны нулю.

Это означает, что формы Лапласа являются дифференциальными формами на расслоении интегральных многообразий распределения $\mathcal{F}\langle\eta_+, \eta_-\rangle$, то есть они имеют вид:

$$\lambda_+ = \Phi_+(g,h)dg \wedge dh \quad \text{и} \quad \lambda_- = \Phi_-(g,h)dg \wedge dh, \tag{13}$$

где g и h – первые интегралы распределений ${\mathcal{C}_+}^{(2)}$ и ${\mathcal{C}_-}^{(2)}$ соответственно. Функции Φ_+ и Φ_- не обращаются в нуль в точке a.

Теорема 1. *Функции*

$$J_+ = \frac{1}{\Phi_+}\frac{\partial^2}{\partial g \partial h}\ln|\Phi_+| \quad \textit{и} \quad J_- = \frac{1}{\Phi_-}\frac{\partial^2}{\partial g \partial h}\ln|\Phi_-|$$

являются инвариантами уравнения Монжа – Ампера относительно контактных преобразований.

Доказательство. Пусть E_ω и $E_{\widetilde{\omega}}$ – два уравнения Монжа – Ампера, удовлетворяющие перечисленным выше условиям. Пусть эти уравнения локально контактно эквивалентны, то есть

$$(\phi^*(\widetilde{\omega}))_\varepsilon = h_0\omega$$

для некоторого контактного преобразования ϕ. Здесь h_0 – некоторая функция.

Тогда

$$\phi^*(\widetilde{\lambda}_\pm) = \lambda_\pm \tag{14}$$

или

$$\phi^*(\widetilde{\lambda}_\pm) = \lambda_\mp. \tag{15}$$

Без ограничения общности можно считать, что выполняется (14). Действительно, если имеет место (15), то, умножив форму ω на -1, мы получим (14). Тогда $\widetilde{g} = \alpha(g)$ и $\widetilde{h} = \beta(h)$, где α и β – некоторые функции, такие, что $\alpha'\beta' \neq 0$. Пусть Φ – одна из функций Φ_+ или Φ_-. Тогда

$$\phi^*(\widetilde{\Phi}(\widetilde{g}, \widetilde{h})) = \frac{\Phi(g,h)}{\alpha'(g)\beta'(h)}.$$

Учитывая, что

$$J = \frac{\Phi\Phi_{gh} - \Phi_g\Phi_h}{\Phi^3},$$

мы получаем:

$$\phi^*(\widetilde{J}) = J.$$

□

Замечание 3. Для линейных уравнений вида

$$v_{xy} = a(x,y)v_x + b(x,y)v_y + c(x,y)v,$$

дифференциальный инвариант J_+ совпадает с дифференциальным инвариантом q, найденным Л.В. Овсянниковым [20].

5. Уравнение Эйлера – Пуассона

Следующая теорема задает необходимые и достаточные условия локальной эквивалентности уравнений Монжа – Ампера уравнению Эйлера Пуассона.

Теорема 2. *Гиперболическое регулярное уравнение Монжа – Ампера локально контактно эквивалентно уравнению Эйлера-Пуассона*

$$v_{xy} = \frac{\alpha}{x+y}\,v_x + \frac{\beta}{x+y}\,v_y - \frac{\alpha\beta}{(x+y)^2}\,v, \quad \alpha,\,\beta \in \mathbb{R}, \tag{16}$$

в точке $a_0 \in J^1M$ тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:

1) обе формы Лапласа не обращаются в нуль в точке $a_0 \in J^1M$ и замкнуты;

2) $\lambda_- \wedge \lambda_- = \lambda_+ \wedge \lambda_+ = \lambda_- \wedge \lambda_+ = 0$;

3) распределения $\mathcal{F}\langle\eta_-\rangle$ и $\mathcal{F}\langle\eta_+\rangle$ вполне интегрируемы;

4) $\alpha\lambda_- + \beta\lambda_+ = 0$;

5) дифференциальный инвариант $J_+ = \mathrm{const} \neq 0$.

Доказательство. Для уравнения (16) формы Лапласа имеют вид

$$\lambda_+ = -\frac{\alpha}{(q_1+q_2)^2}dq_1 \wedge dq_2 \quad \text{и} \quad \lambda_- = \frac{\beta}{(q_1+q_2)^2}dq_1 \wedge dq_2.$$

Поэтому

$$J_+ = -\frac{2}{\alpha} \quad \text{и} \quad J_- = \frac{2}{\beta}.$$

Таким образом, условия теоремы являются необходимыми.

Условия 1)–3) теоремы означают (см. [11]), что уравнение Монжа – Ампера локально контактно эквивалентно линейному уравнению

$$v_{xy} = a(x,y)v_x + b(x,y)v_y + c(x,y)v + g(x,y). \tag{17}$$

В силу условий 4) и 5) теоремы инварианты

$$p = \frac{k}{h} \quad \text{и} \quad q = \frac{1}{h}\frac{\partial^2 \ln h}{\partial x \partial y}$$

этого уравнения постоянны, причем $q \neq 0$ [20].

По теореме Овсянникова (см. [20, с. 123]) уравнение (17) заменой переменных приводится к уравнению (16). □

6. Уравнение Хантера – Сакстона

В качестве приложения теоремы 2 рассмотрим уравнение Хантера – Сакстона, возникающее в теории жидких кристаллов [26]. Это уравнение гиперболического типа, и оно имеет следующий вид:

$$v_{tx} = vv_{xx} + \kappa u_x^2, \tag{18}$$

где κ – некоторая константа.

Ему отвечает эффективная дифференциальная 2-форма

$$\omega = 2udq_2 \wedge dp_1 + dq_1 \wedge dp_1 - dq_2 \wedge dp_2 - 2\kappa p_1^2 dq_1 \wedge dq_2$$

и оператор

$$A_\omega = \begin{Vmatrix} 1 & 2u & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2\kappa p_1^2 & 1 & 0 \\ 2\kappa p_1^2 & 0 & 2u & -1 \end{Vmatrix}$$

в базисе

$$\frac{d}{dq_1} = \frac{\partial}{\partial q_1} + p_1\frac{\partial}{\partial u}, \quad \frac{d}{dq_2} = \frac{\partial}{\partial q_2} + p_2\frac{\partial}{\partial u}, \quad \frac{\partial}{\partial p_1}, \quad \frac{\partial}{\partial p_2} \tag{19}$$

модуля $D(\mathcal{C})$.

Выберем следующий базис модуля векторных полей на J^1M:

$$\begin{aligned}
X_1 &= \frac{\partial}{\partial q_1} + p_1\frac{\partial}{\partial u} + \kappa p_1^2\frac{\partial}{\partial p_2}, \\
X_2 &= \frac{\partial}{\partial p_1} + u\frac{\partial}{\partial p_2}, \\
Z &= \frac{\partial}{\partial u} + (2\,\kappa - 1)\, p_1\frac{\partial}{\partial p_2}, \\
Y_1 &= \frac{\partial}{\partial q_2} + \kappa p_1^2\frac{\partial}{\partial p_1} - u\frac{\partial}{\partial q_1} + (p_2 - up_1)\,\frac{\partial}{\partial u}, \\
Y_2 &= \frac{\partial}{\partial p_2}
\end{aligned}$$

и дуальный ему базис модуля дифференциальных 1-форм:

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= dq_1 + udq_2, \\
\alpha_2 &= dp_1 - \kappa p_1^2 dq_2, \\
\theta &= du - p_1dq_1 - p_2dq_2, \\
\beta_1 &= dq_2, \\
\beta_2 &= dp_2 + (1-2\kappa)\, p_1du + (\kappa - 1)\, p_1^2dq_1 + (2\kappa - 1)\, p_1p_2dq_2 - udp_1.
\end{aligned}$$

Векторные поля X_1, X_2 в первом базисе образуют базис модуля $\mathcal{C}_+$, а поля Y_1, Y_2 – базис модуля $D(\mathcal{C}_-)$.

Тензорные инварианты (10) для уравнения (18) имеют следующий вид:

$$q_{23}^1 = -\,(p_1dq_1 \wedge dq_2 + dq_2 \wedge du) \otimes \left(\frac{\partial}{\partial q_1} + p_1\frac{\partial}{\partial u} + \kappa p_1^2\frac{\partial}{\partial p_2}\right),$$

$$q_{12}^3 = 2(\kappa - 1)\,\bigl(\kappa p_1^3 dq_1 \wedge dq_2 + \kappa p_1^2 dq_2 \wedge du - \\ - dp_1 \wedge du - p_1 dq_1 \wedge dp_1 - p_2 dq_2 \wedge dp_1\bigr) \otimes \frac{\partial}{\partial p_2},$$

$$q_{11}^2 = \bigl(dq_1 \wedge dp_1 - \kappa p_1^2 dq_1 \wedge dq_2 + u dq_2 \wedge dp_1\bigr) \otimes \left(\frac{\partial}{\partial u} + (2\kappa - 1)\, p_1 \frac{\partial}{\partial p_2}\right),$$

$$q_{33}^2 = \bigl(dq_2 \wedge dp_2 + (1 - 2\kappa)\, p_1 dq_2 \wedge du + (1 - \kappa)\, p_1^2 dq_1 \wedge dq_2 - u dq_2 \wedge dp_1\bigr) \otimes \\ \otimes \left(\frac{\partial}{\partial u} + (2\kappa - 1)\, p_1 \frac{\partial}{\partial p_2}\right).$$

Формы Лапласа для уравнения Хантера – Сакстона имеют вид:

$$\lambda_- = -dq_2 \wedge dp_1,$$
$$\lambda_+ = 2\,(1 - \kappa)\, dq_2 \wedge dp_1.$$

Поэтому уравнение (18) удовлетворяет условиям теоремы 2. Контактное преобразование

$$Q_1 = \kappa q_2 + \frac{1}{p_1}, \quad Q_2 = q_2, \quad U = u - p_1 q_1, \quad P_1 = q_1 p_1^2, \quad P_2 = p_2 - \kappa q_1 p_1^2.$$

переводит форму ω в форму

$$\widetilde{\omega} = dQ_1 \wedge dP_1 - dQ_2 \wedge dP_2 + \left(\frac{2(2\kappa - 1)P_1}{\kappa Q_2 - Q_1} + \frac{2U}{(\kappa Q_2 - Q_1)^2}\right) dQ_1 \wedge dQ_2,$$

которой отвечает линейное уравнение

$$U_{Q_1 Q_2} = \frac{2\kappa - 1}{Q_1 - \kappa Q_2} U_{Q_1} - \frac{1}{(Q_1 - \kappa Q_2)^2} U.$$

Последнее уравнение масштабным преобразованием

$$q_1 = Q_1, \quad q_2 = -\kappa Q_2$$

переводится в уравнение Эйлера – Пуассона.

Замечание 4. Другое контактное преобразование, переводящее уравнение Хантера – Сакстона в уравнение Эйлера – Пуассона, было найдено О.И. Морозовым [25].

Summary

A.G. Kushner. On Reduction of Monge – Ampére Equation to Euler – Poisson Equation.

We solve the problem of local contact equivalence of Monge – Ampére equation to Euler – Poisson equation.

Key words: contact transformations, Laplace forms.

Литература

1. *Lie S.* Ueber einige partielle Differential-Gleichungen zweiter Orduung // Math. Ann. – 1872. – V. 5.– P. 209–256.
2. *Lie S.* Begrundung einer Invarianten-Theorie der Beruhrungs- Transformationen // Math. Ann. – 1874. – V. 8. – P. 215–303.
3. *Lie S.* Classification und integration von gewöhnlichen differentialgleichungen zwischen x, y, die eine Gruppe von Transformationen gestatten // Math. Ann. – 1888. – V. 32. – P. 213–281.
4. *Лычагин В.В.* Контактная геометрия и нелинейные дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка // Докл. АН СССР. – 1978. – Т. 238, № 5. – С. 273–276.
5. *Виноградов, А.М., Красильщик И.С., Лычагин В.В.* Введение в геометрию нелинейных дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1986. – 336 с.
6. *Лычагин В.В., Рубцов В.Н.* О теоремах Софуса Ли для уравнений Монжа – Ампера // Докл. АН БССР. – 1983. – Т. 27, № 5. – С. 396–398.
7. *Туницкий Д.В.* О контактной линеаризации уравнений Монжа – Ампера // Изв. РАН. Сер. матем. – 1996. – Т. 60, № 2. – С. 195–220.
8. *Кругликов Б.С.* О некоторых классификационных задачах в четырехмерной геометрии: распределения, почти комплексные структуры и обобщенные уравнения Монжа – Ампера // Матем. сб. – 1998. – Т. 189, № 11. – С. 61–74.
9. *Кушнер А.Г.* Уравнения Монжа – Ампера и e-структуры // Докл. РАН. – 1998. – Т. 361, № 5. – С. 595–596.
10. *Kushner A.G.* Symplectic geometry of mixed type equations // Lychagin V.V. (ed) The Interplay beetween Differential Geometry and Differential Equations. Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2. – 1995. – V. 167. – P. 131–142.
11. *Кушнер А.Г.* Контактная линеаризация невырожденных уравнений Монжа – Ампера // Изв. вузов. Матем. – 2008. – № 4. – С. 43–58.
12. *Кушнер А.Г.* Контактная линеаризация уравнений Монжа – Ампера и инварианты Лапласа // Докл. РАН. – 2008. – Т. 422, № 5. – С. 597–600.
13. *Kushner A.G.* A contact linearization problem for Monge – Ampère equations and Laplace invariants // Acta Appl. Math. – 2008. – V. 101, No 1–3. – P. 177–189.
14. *Кушнер А.Г.* Нормальные формы Чаплыгина и Келдыша уравнений Монжа – Ампера // Матем. заметки. – 1992. – Т. 52, № 5. – С. 63–67.
15. *Кушнер А.Г.* Приведение гиперболических уравнений Монжа – Ампера к линейным уравнениям с постоянными коэффициентами // Докл. РАН. – 2008. – Т. 423, № 5. – С. 609–611.
16. *Кушнер А.Г.* Нормальные формы для уравнений Монжа – Ампера: телеграфное уравнение и уравнение Гельмгольца // Геометрія, топологія та їх застосуваня. Збірник Праць Ін-ту математики НАН Украіни. – 2009. – Т. 6, № 2. – С. 91–122.
17. *Кушнер А.Г., Манжосова Е.Н.* Симплектическая классификация гиперболических уравнений Монжа – Ампера // Proceedings of the International Geometry Center. – 2008. – V. 1, No 1–2. – С. 41–70.
18. *Kushner A.G.* On contact equivalence of Monge – Ampere equations to linear equations with constant coefficients // Acta Appl. Math. – 2009. – Online First: DOI 10.1007/ s10440-009-9447-z.

19. *Laplace P.S.* Recherches sur le calcul intégrals aux différences partielles // Mémoires de l'Académie royale des Sciences de Paris. – 1773. – T. 23(24). – P. 341–402.

20. *Овсянников Л.В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1978. – 399 с.

21. *Kushner A.G.* Classification of Monge – Ampère equations // Differential Equations: Geometry, Symmetries and Integrability. Proceedings of the Fifth Abel Symposium, Tromso, Norway, June 17–22, 2008 / Eds. B. Kruglikov, V. Lychagin, E. Straume. – 2008. – P. 223–256.

22. *Kushner A.G., Lychagin V.V., Rubtsov V.N.* Contact geometry and nonlinear differential equations. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2007. – xxii+496 p.

23. *Лычагин В.В.* Контактная геометрия и нелинейные дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка // Усп. матем. нуак. – 1979. – Т. 34, № 1. – С. 137–165.

24. *Lychagin V.V.* Lectures on geometry of differential equations. – Rome: La Sapienza, 1993. – V. 1,2.

25. *Morozov O.I.* Contact equivalence of the generalized Hunter-Saxton equation and the Euler – Poisson equation. – Preprint arXiv: math-ph/0406016. – 2004. – P. 1–3.

26. *Hunter J.K., Saxton R.* Dynamics of director fields // SIAM J. Appl. Math. – 1991. – V. 51, No 6. – P. 1498–1521.

Поступила в редакцию
27.07.09

Кушнер Алексей Гурьевич – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики и информатики Астраханского государственного университета и научный сотрудник Института проблем управления РАН, г. Москва.

E-mail: *kushnera@mail.ru*