УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ КАЗАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
Том 151, кн. 4 Физико-математические науки *2009*

УДК 514.132+514.763.8

О МЕТРИЧЕСКОЙ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ ФУНКЦИЙ, ЗАДАННЫХ НА ПЛОСКОСТИ ЛОБАЧЕВСКОГО

Н.Г. Коновенко, В.В. Лычагин

Аннотация

В данной работе мы находим необходимые и достаточные условия метрической эквивалентности, то есть эквивалентности относительно группы Ли изометрий, для функций, заданных на плоскости Лобачевского.

Ключевые слова: (плоскость Лобачевского, метрическая эквивалентность, джеты, дифференциальный инвариант, изометрии.)

---

1. Введение. Постановка задачи

В данной работе мы находим необходимые и достаточные условия метрической эквивалентности функций, заданных на плоскости Лобачевского.

В качестве плоскости Лобачевского $\mathbb{L}_2$ мы выбираем модуль Пуанкаре. Таким образом, плоскость Лобачевского рассматривается здесь как верхняя полуплоскость $\mathbb{R}^2_+$, снабженная метрикой

$$\Theta = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}.$$

Структурной группой для геометрии Лобачевского является группа сохраняющих ориентацию изометрий. Эта группа изоморфна проективной специальной линейной группе

$$PSL_2(\mathbb{R}) = SL_2(\mathbb{R})/\mathbb{Z}_2,$$

а преобразования, входящие в эту группу, суть дробно-линейные преобразования вида:

$$z \to \frac{az+b}{cz+d},$$

где матрица

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{R}).$$

Алгебра Ли инфинитезимальных изометрий плоскости $\mathbb{L}_2$ изоморфна алгебре $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ и порождена векторными полями:

$$A = \partial_x, \quad B = (x^2 - y^2)\partial_x + 2xy\partial_y, \quad H = 2x\partial_x + 2y\partial_y,$$

которые удовлетворяют следующим коммутационным соотношениям:

$$[H, A] = -2A, \quad [H, B] = 2B, \quad [A, B] = H.$$

Отметим, что действие группы Ли $PSL_2(\mathbb{R})$ на плоскости Лобачевского $\mathbb{L}_2$ является также симплектическим относительно 2-формы

$$\Omega = \frac{dx \wedge dy}{y^2}.$$

Скажем, что две гладкие функции f_1 f_2, заданные в некоторой области плоскости Лобачевского, *метрически эквивалентны*, если найдется такой элемент $g \in PSL_2(\mathbb{R})$, что

$$f_2 = f_1 \circ g^{-1}$$

в области определения.

Описание классов метрически эквивалентных функций мы проводим в два этапа. Сначала мы находим условия метрической эквивалентности функций на формальном уровне (то есть на уровне ∞-джетов функций). Это достигается описанием алгебры $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$-дифференциальных инвариантов на плоскости Лобачевского (см. [1]). После этого мы сводим задачу метрической эквивалентности к проблеме разрешимости системы дифференциальных уравнений конечного типа, откуда и получаем условия метрической эквивалентности для класса *регулярных* функций.

2. Алгебра метрических дифференциальных инвариантов

Обозначим через $J^k(\mathbb{L}_2)$ многообразие k-джетов функций, заданных на плоскости Лобачевского $\mathbb{L}_2$.

Каждая изометрия $g \in PSL_2(\mathbb{R})$ продолжается (см. [2]) до диффеоморфизма

$$g^{(k)} : J^k(\mathbb{L}_2) \to J^k(\mathbb{L}_2)$$

пространства k-джетов.

Аналогично, каждая инфинитезимальная изометрия $X \in \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ продолжается до векторного поля $X^{(k)}$ на многообразии k-джетов (см. [2]).

Гладкая функция I, заданная на многообразии $J^k(\mathbb{L}_2)$, называется метрическим дифференциальным инвариантом порядка $\leq k$, если

$$I = I \circ g^{(k)}$$

для всех изометрий $g \in PSL_2(\mathbb{R})$.

Поскольку группа $PSL_2(\mathbb{R})$ связна, то последнее условие эквивалентно тому, что

$$A^{(k)}(I) = B^{(k)}(I) = H^{(k)}(I) = 0.$$

Соответственно полную производную (см. [2])

$$\nabla \in C^\infty(J^\infty(\mathbb{L}_2)) \otimes D(\mathbb{L}_2)$$

назовем инвариантным метрическим дифференцированием, если ∇ коммутирует с продолженным действием группы изометрий, то есть

$$[\nabla, A^{(\infty)}] = [\nabla, B^{(\infty)}] = [\nabla, H^{(\infty)}] = 0.$$

Отметим, что в случае плоскости Лобачевского, наличие $PSL_2(\mathbb{R})$- инвариантной метрики и инвариантной симплектической структуры позволяет построить по каждому метрическому дифференциальному инварианту I два инвариантных дифференцирования.

Первое из них, которое мы обозначаем через ∇_I, отвечает градиенту I относительно метрики Θ, а второе, которое мы обозначаем γ_I, соответствует гамильтонову полю с гамильтонианом I относительно инвариантной симплектической формы Ω.

Более формально конструкция этих дифференцирований выглядит следующим образом.

Пусть $f \in C^{\infty}(\mathbb{L}_2)$ – гладкая функция на плоскости Лобачевского, а $S_f^k \subset J^k((\mathbb{L}_2))$ – график ее k-джета. Обозначим через I_f значения дифференциального инварианта I на функции f, то есть

$$I_f = I\big|_{S_f^k} \in C^{\infty}(\mathbb{L}_2).$$

Пусть также $\nabla_{I,f}$ – ограничение полного дифференцирования ∇_I на S_f^{∞}. Тогда $\nabla_{I,f}$ совпадает с градиентом функции I_f относительно метрики Θ, или

$$\nabla_I \rfloor \Theta = \widehat{d}I,$$

где $\widehat{d} : C^{\infty}(\mathbb{L}_2) \to \Omega^1(J^{\infty}\mathbb{L}_2)$ – оператор полного дифференцирования [2].

Аналогично, определим дифференцирование γ_I формулой

$$\gamma_I \rfloor \Omega = \widehat{d}I.$$

Инвариантность этих дифференцирований непосредственно вытекает из $PSL_2(\mathbb{R})$-инвариантности Θ и Ω.

Координатное представление этих дифференцирований выглядит следующим образом.

Пусть $(x, y, u, u_1, \ldots, u_\sigma, \ldots)$ – канонические координаты в пространстве джетов. Тогда указанные выше дифференцирования имеют следующий вид:

$$\nabla_I = y^2\left(\frac{dI}{dx}\frac{d}{dx} + \frac{dI}{dy}\frac{d}{dy}\right),$$

$$\gamma_I = y^2\left(\frac{dI}{dy}\frac{d}{dx} - \frac{dI}{dx}\frac{d}{dy}\right),$$

где через $\dfrac{d}{dx}$ и $\dfrac{d}{dy}$ обозначены полные производные относительно x и y соответственно.

Используя инвариантные дифференцирования γ_I, определим скобку на алгебре дифференциальных инвариантов:

$$[I, J] = \gamma_I(J),$$

где I и J – метрические дифференциальные инварианты.

Отметим, что скобка $[I, J]$ также является метрическим дифференциальным инвариантом.

Из приведенных рассуждений непосредственно вытекает следующий результат.

Теорема 1. *Алгебра метрических дифференциальных инвариантов на плоскости Лобачевского является пуассоновой алгеброй относительно скобки:*

$$[I, J] = y^2\left(\frac{dI}{dy}\frac{dJ}{dx} - \frac{dJ}{dy}\frac{dI}{dx}\right).$$

Используем теперь построенные инвариантные дифференцирования для описания алгебры метрических дифференциальных инвариантов.

Прежде всего заметим, что функция

$$u : J^0(\mathbb{L}_2) = \mathbb{L}_2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

является метрическим дифференциальным инвариантом порядка нуль.

Поэтому мы имеем два инвариантных дифференцирования:

$$\nabla_u = y^2\left(u_1\frac{d}{dx} + u_2\frac{d}{dy}\right)$$

и

$$\gamma_u = y^2\left(u_2\frac{d}{dx} - u_1\frac{d}{dy}\right).$$

Применяя дифференцирование ∇_u к инварианту u, получаем метрический дифференциальный инвариант первого порядка:

$$J_1 = \nabla_u(u) = y^2\big(u_1^2 + u_2^2\big).$$

Более того, как нетрудно видеть, метрические дифференциальные инварианты $J_0 = u$ и $J_1 = \nabla_u(u)$ порождают дифференциальные инварианты порядка не выше, чем 1.

Применяя инвариантные дифференцирования ∇_u и γ_u к инварианту 1-го порядка J_1, мы получаем два метрических дифференциальных инварианта 2-го порядка:

$$J_2(1) = \nabla_u(J_1) = 2y^4(2u_1u_2u_{12} + u_1^2u_{11} + u_2^2u_{22}) + 2y^3(u_2u_1^2 + u_2^3),$$

$$J_2(2) = \gamma_u(J_1) = 2y^4(u_1u_2u_{11} + u_2^2u_{12} + u_1^2u_{12} - u_1u_2u_{22}) - 2y^3u_1(u_1^2 + u_2^2).$$

Из соображений размерности следует, что должен быть еще один дифференциальный инвариант 2-го порядка $J_2(2)$, функционально независимый с $J_2(1)$.

Для того чтобы найти этот инвариант, заметим, что оператор Лапласа $\Delta = -y^2(\partial_x^2+\partial_y^2)$ является инвариантным относительно группы изометрий $PSL_2(\mathbb{R})$, поэтому дифференциальный оператор в полных производных

$$\widehat{\Delta} = -y^2\left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2}\right)$$

коммутирует с продолженным действием группы изометрий.

В частности, этот оператор также переводит метрические дифференциальные инварианты в себя. Поэтому функция

$$J_2(3) = \widehat{\Delta}(u) = -y^2(u_{11} + u_{22})$$

является метрическим дифференциальным инвариантом второго порядка, а дифференциальные инварианты $J_0, J_1, J_2(1), J_2(2), J_2(3)$ порождают все дифференциальные инварианты до порядка 2 включительно. Подсчет размерностей показывает, что справедлив следующий результат.

Теорема 2. *Алгебра метрических дифференцинвариантов на плоскости Лобачевского порождена базисными инвариантами $J_0 = u$ и $J_2(3) = -y^2(u_{11} + u_{22})$, а также всеми их инвариантными производными вдоль ∇_u и γ_u.*

3. Изометрическая эквивалентность функций

Гладкая функция $f \in C^\infty(\mathbb{L}_2)$, заданная в некоторой области плоскости Лобачевского, называется *регулярной*, если значения $J_{0,f}$, $J_{1,f}$ дифференциальных инвариантов J_0 и J_1 на этой функции в этой области независимы:

$$dJ_{0,f} \wedge dJ_{1,f} \neq 0.$$

В противном случае, то есть если $dJ_{0,f} \wedge dJ_{1,f} \equiv 0$, функция f называется *сингулярной*.

Иначе говоря, функция f сингулярна, если она является решением дифференциального уравнения

$$f_x^2 + f_y^2 = y^{-2}\varphi(f)$$

для некоторой функции φ.

Если функция f регулярна, то значения инвариантов второго порядка являются функциями $J_{0,f}$ и $J_{1,f}$. Тем самым функция f удовлетворяет системе дифференциальных уравнений 2-го порядка:

$$\begin{aligned} J_2(1) &= A(J_0, J_1), \\ J_2(2) &= B(J_0, J_1), \\ J_2(3) &= C(J_0, J_1). \end{aligned} \tag{1}$$

Выразив вторые производные u из этой системы уравнений, мы приходим к эквивалентной системе уравнений

$$\begin{aligned} u_{11} &= cy^2{u_2}^2({u_2}^2 + {u_1}^2) + b({u_1}^2 - {u_2}^2) + au_1u_2 + \frac{u_2}{y}, \\ u_{12} &= -cy^2u_1u_2({u_1}^2 + {u_2}^2) - \frac{a}{2}({u_1}^2 - {u_2}^2) + 2bu_1u_2 - \frac{u_1}{y}, \\ u_{22} &= cy^2{u_1}^2({u_1}^2 + {u_2}^2) - b({u_1}^2 - u_22) - au_1u_2 - \frac{u_2}{y}. \end{aligned} \tag{2}$$

Последняя система является системой конечного типа, а размерность пространства решений не превосходит 3. При этом размерность равна 3, если эта система является системой фробениусова типа.

В случае, когда регулярная функция f удовлетворяет системе (2), действие группы изометрий эффективно и из соображений размерности следует, что это действие транзитивно. Иначе говоря, в этом случае любые два решения переводятся друг в друга изометрией плоскости Лобачевского.

Суммируя сказанное, приходим к следующему результату.

Теорема 3.

A. *Класс $PSL_2(\mathbb{R})$-эквивалентности регулярных функций на плоскости Лобачевского определяется функциями A, B, C, задающими зависимость метрических инвариантов 2-го порядка $J_2(1)$, $J_2(2)$, $J_2(3)$ через инварианты J_0, J_1.*

B. *Функции A, B, C, задающие класс метрической эквивалентности, не произвольны, а удовлетворяют 2-соотношениям (сизигиям), которые гарантируют, что система дифференциальных уравнений (2) является системой фробениусова типа.*

Summary

N.G. Konovenko, V.V. Lychagin. On Metric Equivalence of Functions on the Lobachevski Plane.

We find necessary and sufficient conditions for functions to be equivalent with respect to the isometry group of the Lobachevski plane.

Key words: differential invariants, invariant derivations, Lobachevski plane, isometry.

Литература

1. *Клейн Ф.* Сравнительное обозрение новейших геометрических исследований // Об основаниях геометрии. – 1872. – С. 399–434.

2. *Виноградов А.М., Красильщик И.С., Лычагин В.В.* Введение в геометрию нелинейных дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1986. – 336 с.

Поступила в редакцию
15.09.09

Коновенко Надежда Григорьевна – ассистент кафедры высшей математики Одесской национальной академии пищевых технологий.
E-mail: *konovenko@ukr.net*

Лычагин Валентин Васильевич – доктор физико-математических наук, профессор Института математики и статистики, Университет г. Тромсо, Норвегия.
E-mail: *lychagin@math.uit.no*