УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ КАЗАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Том 151, кн. 4 Физико-математические науки *2009*

УДК 514.76

ГОЛОМОРФНЫЕ ТЕНЗОРНЫЕ ПОЛЯ И ЛИНЕЙНЫЕ СВЯЗНОСТИ НА КАСАТЕЛЬНОМ РАССЛОЕНИИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Ф.Р. Гайнуллин, В.В. Шурыгин

Аннотация

Касательное расслоение второго порядка T^2M гладкого многообразия M несет на себе структуру гладкого многообразия над алгеброй $\mathbf{R}(\varepsilon^2)$ срезанных многочленов степени 2. Всякое сечение σ расслоения T^2M индуцирует $\mathbf{R}(\varepsilon^2)$-гладкий диффеоморфизм $\Sigma : T^2M \to T^2M$. Получены условия, выраженные в терминах производных Ли тензорных полей и объекта линейной связности, при которых $\mathbf{R}(\varepsilon^2)$-гладкое тензорное поле и $\mathbf{R}(\varepsilon^2)$-гладкая линейная связность на T^2M могут быть переведены диффеоморфизмом вида Σ соответственно в лифты некоторых тензорного поля и линейной связности, заданных на M.

Ключевые слова: касательное расслоение второго порядка, лифт линейной связности, лифт тензорного поля, голоморфная связность, производная Ли.

Введение

А.П. Широковым [1] было показано, что касательные расслоения высших порядков T^rM, $r = 2, 3, \dots$, гладкого многообразия M размерности n несут на себе естественные структуры n-мерных гладких многообразий $M^{\mathbf{R}(\varepsilon^r)}$ над алгебрами плюральных чисел (срезанных многочленов) $\mathbf{R}(\varepsilon^r)$. Использование указанных структур позволило получить простой вариант изложения теории лифтов тензорных полей и линейных связностей с многообразия M на расслоения T^rM, построенной А. Моримото [2], и ввести в рассмотрение лифты более общего типа, так называемые синектические расширения полных лифтов, представляющие собой реализации $\mathbf{R}(\varepsilon^r)$-гладких (голоморфных над алгеброй $\mathbf{R}(\varepsilon^r)$) тензорных полей и связностей [3].

В работе [4] А.П. Широковым было доказано, что реализация $\mathbf{R}(\varepsilon)$-гладкой метрики

$$\begin{pmatrix} \dot{x}^k \partial_k g_{ij} + a_{ij} & g_{ij} \\ g_{ij} & 0 \end{pmatrix}$$

на касательном расслоении TM ($\{\dot{x}^k\}$ – слоевые координаты) эквивалентна метрике полного лифта ($a_{ij} = 0$) тогда и только тогда, когда $a_{ij} = \mathcal{L}_v g_{ij}$ для некоторого векторного поля v на M. Целью настоящей работы является нахождение условий, при которых $\mathbf{R}(\varepsilon^2)$-гладкие тензорные поля и линейные связности на касательном расслоении второго порядка T^2M эквивалентны $\mathbf{R}(\varepsilon^2)$-продолжениям соответственно некоторых тензорных полей и линейных связностей, заданных на многообразии M. Отметим, что аналогичные вопросы могут быть поставлены для касательных расслоений T^rM более высоких порядков, а также для полукасательных расслоений, теория которых была развита В.В. Вишневским [5].

1. Касательные расслоения второго порядка

Пусть M – гладкое многообразие размерности n. Касательный вектор к многообразию M в точке $x_0 \in M$ представляет собой класс эквивалентности гладких кривых

$$\gamma : (a,b) \ni t \mapsto \gamma(t) \in M, \quad 0 \in (a,b) \subset \mathbf{R}, \tag{1}$$

проходящих через точку x_0 при $t=0$ (то есть $\gamma(0)=x_0$), относительно следующего отношения эквивалентности: $\gamma_1 \sim \gamma_2 \iff d(h^i \circ \gamma_1)/dt|_0 = d(h^i \circ \gamma_2)/dt|_0$, где $h : U \ni x \mapsto \{x^i = h^i(x)\} \in U^* \subset \mathbf{R}^n$, $U \ni x_0$, – некоторая карта из атласа на M. Класс эквивалентности $v = [\gamma] = [\gamma]^1$ называется касательным вектором M в точке x_0. Числа $v^i = d(h^i \circ \gamma)/dt|_0$ называются координатами вектора v. Множество T_xM касательных векторов к M в точке x называется касательным пространством к M в точке x. На множестве $TM = \bigcup\limits_{x \in M} T_xM$ всех касательных векторов к M индуцируется структура гладкого $2n$-мерного многообразия, расслоенного над M, называемого касательным расслоением (первого порядка) многообразия M. Структура гладкого многообразия на TM задается следующим образом. Пусть $\pi_0^1 : TM \ni v_x \mapsto x \in M$ – отображение, относящее вектору $v_x \in T_xM$ точку $x \in M$. Карта (U,h) из атласа на M индуцирует карту

$$h^1 : (\pi_0^1)^{-1}(U) \ni v_x \mapsto \{x^i, \dot{x}^i\} \in U^* \times \mathbf{R}^n$$

на TM, где $\{\dot{x}^i\}$ – координаты вектора v_x в карте (U,h). Преобразованиям координат $h' \circ h^{-1}$ на пересечении областей определения $U \cap U'$ карт (U,h) и (U',h') на M, имеющим вид $x^{i'} = f^{i'}(x^i)$, на TM соответствуют преобразования координат $(h')^1 \circ (h^1)^{-1}$, имеющие вид

$$x^{i'} = f^{i'}(x^i), \quad \dot{x}^{i'} = (\partial_j f^{i'})\dot{x}^j, \tag{2}$$

где использовано обозначение $\partial_j f^{i'} = \dfrac{\partial f^{i'}}{\partial x^j}$.

Каноническая проекция $\pi_0^1 : TM \to M$ является гладким отображением, из уравнений (2) следует, что касательное расслоение TM является локально тривиальным расслоением над M со стандартным слоем $\mathbf{R}^n$.

Касательное расслоение TM несет на себе структуру n-мерного гладкого многообразия над алгеброй дуальных чисел $\mathbf{R}(\varepsilon)$, то есть алгеброй размерности два над $\mathbf{R}$, элементы которой имеют вид $a + b\varepsilon$, $a,b \in \mathbf{R}$, а умножение определяется условием $\varepsilon^2 = 0$. Алгебра $\mathbf{R}(\varepsilon)$ может также рассматриваться как алгебра срезанных многочленов степени, меньшей или равной 1, от одной переменной, то есть как фактор-алгебра алгебры многочленов от одной переменной $\mathbf{R}[t]$ по главному идеалу $t^2\mathbf{R}[t]$ многочленов, кратных квадрату t^2 переменной t. Структура многообразия над $\mathbf{R}(\varepsilon)$ на TM задается атласом, получающимся заменой карт $((\pi_0^1)^{-1}(U), h^1)$ на $\mathbf{R}(\varepsilon)^n$-карты (карты со значениями в модуле $\mathbf{R}(\varepsilon)^n$) [1, 6]

$$h^{\mathbf{R}(\varepsilon)} : (\pi_0^1)^{-1}(U) \ni v_x \mapsto \{X^i = x^i + \varepsilon\dot{x}^i\} \in \mathbf{R}(\varepsilon)^n.$$

Преобразования $\mathbf{R}(\varepsilon)$-координат $\{X^i = x^i + \varepsilon\dot{x}^i\}$ на TM, соответствующие преобразованиям координат (2), имеют вид

$$x^{i'} + \varepsilon\dot{x}^{i'} = f^{i'}(x^i) + \varepsilon(\partial_j f^{i'})\dot{x}^j \tag{3}$$

и являются $\mathbf{R}(\varepsilon)$-гладкими.

Требуя, чтобы у функций $h^i \circ \gamma_1$ и $h^i \circ \gamma_2$, задающих кривые γ_1 и γ_2 вида (1), совпадали в нуле не только первые производные $d(h^i \circ \gamma_1)/dt|_0 = d(h^i \circ \gamma_2)/dt|_0$, но еще и вторые производные $d^2(h^i \circ \gamma_1)/dt^2|_0 = d^2(h^i \circ \gamma_2)/dt^2|_0$, получим новое отношение эквивалентности $\sim^2$ на множестве кривых (1) на M. Отношение эквивалентности $\sim^2$ не зависит от выбора карты (U, h) на M. Класс эквивалентности $[\gamma]^2$ кривой γ по отношению эквивалентности $\sim^2$ называется 2-струей кривой γ и обозначается $j^2_{x_0}\gamma$. Мы будем также называть класс $[\gamma]^2$ *2-касательным вектором* в точке $x_0 \in M$.

Пусть $T^2_x M$ – множество 2-касательных векторов к M в точке x. На множестве $T^2 M = \bigcup\limits_{x \in M} T^2_x M$ всех 2-касательных векторов к M индуцируется структура гладкого $3n$-мерного многообразия, расслоенного над M, называемого 2-касательным расслоением (касательным расслоением второго порядка) многообразия M. Эта структура задается следующим образом. Пусть $\pi^2_0 : T^2 M \ni X = j^2_x\gamma \mapsto x \in M$ – отображение, относящее 2-касательному вектору $X \in T^2_x M$ точку $x \in M$. Карта (U, h) из атласа на M индуцирует карту

$$h^2 : (\pi^2_0)^{-1}(U) \ni X = j^2_x\gamma \mapsto \{x^i, \dot{x}^i, \ddot{x}^i\} \in U^* \times \mathbf{R}^{2n}$$

на $T^2 M$, где $\dot{x}^i = d(h^i \circ \gamma)/dt|_0$, $\ddot{x}^i = \dfrac{1}{2} d^2(h^i \circ \gamma)/dt^2|_0$. Преобразованиям координат $h' \circ h^{-1}$ на пересечении областей определения $U \cap U'$ карт (U, h) и (U', h') на M, имеющим вид $x^{i'} = f^{i'}(x^i)$, на $T^2 M$ соответствуют преобразования координат $(h')^2 \circ (h^2)^{-1}$, имеющие вид:

$$x^{i'} = f^{i'}(x^i), \quad \dot{x}^{i'} = (\partial_j f^{i'})\dot{x}^j, \quad \ddot{x}^{i'} = (\partial_j f^{i'})\ddot{x}^j + \frac{1}{2}(\partial^2_{jk} f^{i'})\dot{x}^j \dot{x}^k, \tag{4}$$

где использованы обозначения

$$\partial_j f^{i'} = \partial f^{i'}/\partial x^j, \quad \partial^2_{jk} f^{i'} = \partial^2 f^{i'}/\partial x^j \partial x^k. \tag{5}$$

Обозначения для частных производных вида (5) в дальнейшем используются без специальных оговорок.

Каноническая проекция $\pi^2_0 : T^2 M \to M$ является гладким отображением, из уравнений (4) следует, что расслоение $T^2 M$ является локально тривиальным расслоением над M со стандартным слоем $\mathbf{R}^{2n}$. Имеется еще одна каноническая проекция $\pi^2_1 : T^2 M \to TM$, $\pi^2_1 : [\gamma]^2 \mapsto [\gamma]^1$, также являющаяся гладким отображением. Из уравнений (4) следует, что проекция π^2_1 определяет локально тривиальное расслоение $T^2 M$ над TM со стандартным слоем $\mathbf{R}^n$. Кроме того, расслоение $\pi^2_1 : T^2 M \to TM$ является аффинным расслоением, то есть $\pi^2_1 : T^2 M \to TM$ является расслоением со структурной группой – группой аффинных преобразований пространства $\mathbf{R}^n$. На каждом слое этого расслоения при этом возникает естественная структура аффинного пространства.

Расслоение $T^2 M$ несет на себе структуру n-мерного гладкого многообразия над алгеброй триальных чисел $\mathbf{R}(\varepsilon^2)$, то есть алгеброй размерности три над $\mathbf{R}$, элементы которой имеют вид $a + b\varepsilon + c\varepsilon^2$, $a, b, c \in \mathbf{R}$, а умножение определяется условием $\varepsilon^3 = 0$. Алгебра $\mathbf{R}(\varepsilon^2)$ может также рассматриваться как алгебра срезанных многочленов степени, меньшей или равной 2, от одной переменной, то есть как фактор-алгебра алгебры многочленов от одной переменной $\mathbf{R}[t]$ по главному идеалу $t^3\mathbf{R}[t]$ многочленов, кратных третьей степени t^3 переменной t. Структура многообразия над $\mathbf{R}(\varepsilon^2)$ на $T^2 M$ задается атласом, получающимся заменой карт $((\pi^2_0)^{-1}(U), h^2)$ на $\mathbf{R}(\varepsilon^2)^n$-карты (карты со значениями в модуле $\mathbf{R}(\varepsilon^2)^n$) [1, 6]

$$h^{\mathbf{R}(\varepsilon^2)} : (\pi^1_0)^{-1}(U) \ni v_x \mapsto \{X^i = x^i + \varepsilon \dot{x}^i + \varepsilon^2 \ddot{x}^i\} \in \mathbf{R}(\varepsilon^2)^n.$$

Преобразования $\mathbf{R}(\varepsilon^2)$-координат $\{X^i = x^i+\varepsilon\dot{x}^i+\varepsilon^2\ddot{x}^i\}$ на T^2M, соответствующие преобразованиям координат (4), имеют вид

$$x^{i'} + \varepsilon\dot{x}^{i'} + \varepsilon\ddot{x}^{i'} = f^{i'}(x^i) + \varepsilon(\partial_j f^{i'})\dot{x}^j + \varepsilon^2\left((\partial_j f^{i'})\ddot{x}^j + \frac{1}{2}(\partial^2_{jk} f^{i'})\dot{x}^j\dot{x}^k\right) \tag{6}$$

и являются $\mathbf{R}(\varepsilon^2)$-гладкими.

Расслоение $T^2\mathbf{R}^n$ естественно отождествляется с $\mathbf{R}(\varepsilon^2)$-модулем $\mathbf{R}(\varepsilon^2)^n$. При этом проекция $\pi^2_0 : T^2\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ отождествляется с проекцией

$$\pi^2_0 : \mathbf{R}(\varepsilon^2)^n \ni \{X^i = x^i + \dot{x}^i\varepsilon + \ddot{x}^i\varepsilon^2\} \to \{x^i\} \in \mathbf{R}^n.$$

Пусть $U \subset \mathbf{R}^n$ – открытое подмножество. Произвольная $R(\varepsilon^2)$-гладкая функция

$$F : (\pi^2_0)^{-1}(U) \ni \{X^i\} \to Y = F(X^i) \in \mathbf{R}(\varepsilon^2)$$

n аргументов из алгебры $\mathbf{R}(\varepsilon^2)$ имеет следующий вид (см., например, [7]):

$$F(X^i) = f(x^i)+\varepsilon\left(\dot{x}^j\partial_j f + g(x^i)\right)+\varepsilon^2\left(\ddot{x}^j\partial_j f + \frac{1}{2}\dot{x}^j\dot{x}^k\partial^2_{jk} f + \dot{x}^j\partial_j g + h(x^i)\right). \tag{7}$$

Можно считать, что $\mathbf{R}^n \subset \mathbf{R}(\varepsilon^2)^n$ и $U \subset (\pi^2_0)^{-1}(U)$. Тогда функция F, заданная уравнениями (7), полностью определяется своим ограничением $F_0 = F|\mathbf{R}^n$, $F_0(x^i) = f(x^i) + \varepsilon g(x^i) + \varepsilon^2 h(x^i)$, на $U \subset \mathbf{R}^n$. При этом функция F называется $\mathbf{R}(\varepsilon^2)$-продолжением функции F_0. В частности, $\mathbf{R}(\varepsilon^2)$-продолжение вещественной гладкой функции $f : U \to \mathbf{R}$, $y = f(x^i)$, имеет вид

$$F(X^i) = f(x^i) + \varepsilon\dot{x}^j\partial_j f + \varepsilon^2\left(\ddot{x}^j\partial_j f + \frac{1}{2}\dot{x}^j\dot{x}^k\partial^2_{jk} f\right). \tag{8}$$

$\mathbf{R}(\varepsilon^2)$-продолжения вещественных гладких функций обладают следующими легко проверяемыми свойствами [7].

Пусть f, f_1 и f_2 – вещественные гладкие функции, заданные на $U \subset \mathbf{R}^n$, а F, F_1 и F_2 – $\mathbf{R}(\varepsilon^2)$-продолжения функций f, f_1 и f_2 соответственно. Тогда $\mathbf{R}(\varepsilon^2)$-продолжениями функций af, $f_1 + f_2$, $f_1 \cdot f_2$ и $\partial_i f$, где $a \in \mathbf{R}$, являются соответственно функции aF, $F_1{+}F_2$, $F_1{\cdot}F_2$ и $\partial_i F = \partial F/\partial X^i$ (частная производная $\mathbf{R}(\varepsilon^2)$-гладкой функции F, см., например, [7]). Кроме того, $\mathbf{R}(\varepsilon^2)$-продолжением композиции $\varphi \circ \psi$ вещественных гладких отображений $\varphi : V \to W$ и $\psi : U \to V$, $U \subset \mathbf{R}^n$, $V \subset \mathbf{R}^m$, $W \subset \mathbf{R}^k$, является композиция $\Phi \circ \Psi$ $\mathbf{R}(\varepsilon^2)$-продолжений Φ и Ψ отображений φ и ψ.

Понятия $\mathbf{R}(\varepsilon^2)$-продолжений гладких отображений естественно распространяется на случай гладких отображений между гладкими многообразиями $f : M \to M'$ и гладких отображений вида $f : M \to T^2M'$, а именно: имеется каноническое вложение

$$i : M \ni x \mapsto j^2\widetilde{x} \in T^2M \tag{9}$$

многообразия M в расслоение T^2M, относящее каждой точке $x \in M$ 2-струю $j^2\widetilde{x}$ кривой $\widetilde{x} : (-a, a) \to M$ постоянного отображения $\widetilde{x}(t) \equiv x$. Вложение (9) является сечением расслоения $\pi^2_0 : T^2M \to M$, называемым нулевым сечением расслоения T^2M. Образ $i(M) \subset T^2M$ будем отождествлять с многообразием M. Для всякого гладкого отображения $f : M \to T^2M'$ существует единственное $\mathbf{R}(\varepsilon^2)$-гладкое отображение $f^{\mathbf{R}(\varepsilon^2)} : T^2M \to T^2M'$, совпадающее с f на M. Отображение $f^{\mathbf{R}(\varepsilon^2)}$

называется $\mathbf{R}(\varepsilon^2)$-продолжением отображения f. Если f задается в локальных картах (U,h) на M и $((\pi_0^2)^{-1}(U'),(h')^{\mathbf{R}(\varepsilon^2)})$ на T^2M' уравнениями

$$Y^\alpha = f^\alpha(x^i) + \varepsilon g^\alpha(x^i) + \varepsilon^2 h^\alpha(x^i), \tag{10}$$

то $f^{\mathbf{R}(\varepsilon^2)}$ в локальных картах $((\pi_0^2)^{-1}(U),h^{\mathbf{R}(\varepsilon^2)})$ и $((\pi_0^2)^{-1}(U'),(h')^{\mathbf{R}(\varepsilon^2)})$ имеет уравнения

$$Y^\alpha = f^\alpha(x^i) + \varepsilon\left(\dot x^j\partial_j f^\alpha + g^\alpha(x^i)\right) + \\ + \varepsilon^2\left(\ddot x^j\partial_j f^\alpha + \frac{1}{2}\dot x^j\dot x^k\partial^2_{jk}f^\alpha + \dot x^j\partial_j g^\alpha + h^\alpha(x^i)\right). \tag{11}$$

Очевидно, что всякое $\mathbf{R}(\varepsilon^2)$-гладкое отображение $F : T^2M \to T^2M'$ является $\mathbf{R}(\varepsilon^2)$-продолжением ограничения $f = F|M$ отображения F на подмногообразие M.

В частности, всякое сечение $\sigma : M \to T^2M$ единственным образом продолжается до $\mathbf{R}(\varepsilon^2)$-диффеоморфизма $\sigma^{\mathbf{R}(\varepsilon^2)} : T^2M \to T^2M$. Всякий $\mathbf{R}(\varepsilon^2)$-диффеоморфизм $F : T^2M \to T^2M$ такой, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} T^2M & \xrightarrow{F} & T^2M \\ {\scriptstyle\pi_0^2}\big\downarrow & & {\scriptstyle\pi_0^2}\big\downarrow \\ M & \xrightarrow{id} & M \end{array} \tag{12}$$

коммутативна, является $\mathbf{R}(\varepsilon^2)$-продолжением некоторого сечения $\sigma : M \to T^2M$, а именно сечения $\sigma = F\circ i$, являющегося композицией F и нулевого сечения (9).

Если σ имеет уравнения

$$y^i + \varepsilon\dot y^i + \varepsilon^2\ddot y^i = x^i + \varepsilon g^i(x^k) + \varepsilon^2 h^i(x^k), \tag{13}$$

то $F = \sigma^{\mathbf{R}(\varepsilon^2)}$ имеет уравнения

$$y^i + \varepsilon\dot y^i + \varepsilon^2\ddot y^i = x^i + \varepsilon\left(\dot x^i + g^i(x^k)\right) + \varepsilon^2\left(\ddot x^i + \dot x^j\partial_j g^i + h^i(x^k)\right). \tag{14}$$

В уравнениях (13) и (14) функции g^i являются координатами некоторого векторного поля g на многообразии M – сечения $\pi_1^2\circ\sigma : M \to TM$ касательного расслоения многообразия M.

$\mathbf{R}(\varepsilon^2)$-продолжение $f^{\mathbf{R}(\varepsilon^2)} : T^2M \to T^2M'$ гладкого отображения $f : M \to$ $\to M'$ совпадает с отображением T^2f, представляющим собой результат применения функтора T^2 (функтора Вейля, соответствующего алгебре $\mathbf{R}(\varepsilon^2)$, см. [8]) к отображению f.

Предложение 1. *Пусть $g : M \to TM$ – сечение касательного расслоения многообразия M, имеющее в локальных координатах уравнения $\dot x^i = g^i(x^k)$. Тогда уравнениями*

$$\dot x^i = g^i, \quad \ddot x^i = \frac{1}{2}g^k\partial_k g^i \tag{15}$$

задается сечение $g^{(2)} : M \to T^2M$ касательного расслоения второго порядка многообразия M.

Доказательство. Для доказательства этого утверждения достаточно подставить уравнения (15) в формулы преобразования координат (4) на T^2M и убедиться в том, что уравнениями (15) для всякого $x \in M$ задается не зависящий от выбора системы координат на M элемент расслоения T^2M. С другой стороны, если $x^i = \varphi^i(t)$ – траектория потока векторного поля g, то, очевидно, $\dfrac{d\varphi^i}{dt} = g^i$ и $\dfrac{d^2\varphi^i}{dt^2} = g^k\partial_k g^i$. □

Предложение 2. *Пусть $\sigma : M \to T^2M$ – сечение касательного расслоения второго порядка многообразия M, имеющее в локальных координатах уравнения $\dot{x}^i = g^i(x^k)$, $\ddot{x}^i = h^i(x^k)$. Тогда уравнениями*

$$\dot{x}^i = h^i - \frac{1}{2}g^k\partial_k g^i \tag{16}$$

задается сечение $u : M \to TM$ касательного расслоения многообразия M.

Доказательство. Как было отмечено выше, проекция $\pi^2_1 : T^2M \to TM$ определяет аффинное расслоение, функции склейки которого задаются уравнениями (4):

$$\ddot{x}^{i'} = (\partial_j f^{i'})\ddot{x}^j + \frac{1}{2}(\partial^2_{ik} f^{i'})\dot{x}^j\dot{x}^k.$$

Функции склейки ассоциированного с этим расслоением векторного расслоения $p : E \to TM$ имеют вид

$$z^{i'} = (\partial_j f^{i'})z^j. \tag{17}$$

Таким образом, расслоение $p : E \to TM$ представляет собой обратный образ [8, 9] расслоения $\pi^1_0 : TM \to M$ по отношению к отображению $\pi^1_0 : TM \to M$:

$$\begin{tikzcd}
(\pi^1_0)^{-1}(TM) \arrow[r] \arrow[d, "p"'] & TM \arrow[d, "\pi^1_0"] \\
TM \arrow[r, "\pi^1_0"] & M.
\end{tikzcd} \tag{18}$$

Из уравнений (17) также следует, что проекция $p^E_0 = \pi^1_0 \circ p : E \to M$ определяет векторное расслоение, изоморфное сумме Уитни $TM \oplus TM$. Слой $(\pi^2_1)^{-1}(X^{(1)})$, $X^{(1)} \in TM$, аффинного расслоения $\pi^2_1 : T^2M \to TM$ является аффинным пространством, и два элемента $X^{(2)}$, $Y^{(2)}$ из этого слоя $(\pi^2_1)^{-1}(X^{(1)})$, имеющие координаты $\{x^i, \dot{x}^i, \ddot{x}^i\}$ и $\{x^i, \dot{x}^i, \ddot{y}^i\}$ соответственно, определяют вектор с началом в точке $X^{(2)}$ и концом в точке $Y^{(2)}$ – элемент Z с координатами $\{x^i, \dot{x}^i, z^i = \ddot{y}^i - \ddot{x}^i\}$ из слоя $(p)^{-1}(X^{(1)})$ расслоения $p : E \to TM$. Этот элемент Z принадлежит слою $(p^E_0)^{-1}(x)$, $x = \pi^1_0(X^{(1)})$, расслоения $p^E_0 : E \to M$ и представляет собой пару векторов из касательного пространства T_xM с координатами $\{\dot{x}^i\}$ и $\{z^i = \ddot{y}^i - \ddot{x}^i\}$. В результате получаем, что сечение $\sigma : M \to T^2M$ определяет два векторных поля: поле g с уравнениями $\dot{x}^i = g^i(x^k)$ и поле u с уравнениями $\dot{x}^i = u^i(x^k) = h^i - \dfrac{1}{2}g^k\partial_k g^i$. □

Таким образом, со всяким сечением σ расслоения T^2M ассоциируется упорядоченная пара векторных полей $\{g, u\}$.

2. $\mathbf{R}(\varepsilon^2)$-гладкие тензорные поля на T^2M

$\mathbf{R}(\varepsilon^2)$-гладкое тензорное поле типа (p,q) на касательном расслоении второго порядка T^2M задается $\mathbf{R}(\varepsilon^2)$-гладкими функциями

$$T^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q}(X^k) = t^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q}(x^k) + \varepsilon\left(\dot{x}^k\partial_k t^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q} + \hat{t}^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q}(x^k)\right) + \\ + \varepsilon^2\left((\partial_k t^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q})\ddot{x}^k + \frac{1}{2}(\partial^2_{jk} t^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q})\dot{x}^j\dot{x}^k + (\partial_k \hat{t}^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q})\dot{x}^k + \hat{\hat{t}}^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q}(x^k)\right) \quad (19)$$

$\mathbf{R}(\varepsilon^2)$-координат $\{X^i = x^i + \varepsilon\dot{x}^i + \varepsilon^2\ddot{x}^i\}$, которые на пересечении областей определения $\mathbf{R}(\varepsilon^2)$-карт связаны соотношениями [3]

$$T^{i'_1\dots i'_p}_{j'_1\dots j'_q} = T^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q}\,\partial_{i_1}X^{i'_1}\dots\partial_{i_p}X^{i'_p}\partial_{j'_1}X^{j_1}\dots\partial_{j'_q}X^{j_q}. \quad (20)$$

Из отмеченных выше свойств $\mathbf{R}(\varepsilon^2)$-продолжений вещественных гладких функций следует, что $\mathbf{R}(\varepsilon^2)$-продолжения

$$T^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q} = t^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q} + \varepsilon\dot{x}^k\partial_k t^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q} + \varepsilon^2\left((\partial_k t^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q})\ddot{x}^k + \tfrac{1}{2}(\partial^2_{jk} t^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q})\dot{x}^j\dot{x}^k\right) \quad (21)$$

координатных функций $t^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q}(x^k)$ гладкого тензорного поля t, заданного на многообразии M, определяют $\mathbf{R}(\varepsilon^2)$-гладкое тензорное поле на расслоении T^2M. Это $\mathbf{R}(\varepsilon^2)$-гладкое тензорное поле называется $\mathbf{R}(\varepsilon^2)$-*продолжением* векторного поля t.

Предложение 3 [3]. *Пусть на касательном расслоении второго порядка T^2M задано $\mathbf{R}(\varepsilon^2)$-гладкое тензорное поле T, имеющее уравнения* (19) *в локальных $\mathbf{R}(\varepsilon^2)$-координатах. Тогда функции*

$$t^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q}(x^k), \quad \hat{t}^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q}(x^k) \quad \text{и} \quad \hat{\hat{t}}^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q}(x^k)$$

задают некоторые тензорные поля t, $\hat{t}$ и $\hat{\hat{t}}$ соответственно на многообразии M.

Для доказательства этого предложения достаточно подставить уравнения (19) и (21) в формулы преобразования локальных $\mathbf{R}(\varepsilon^2)$-координат тензорных полей (20) и сравнить вещественные части выражений в левой и правой частях полученных равенств.

Тензорные поля t, $\hat{t}$ и $\hat{\hat{t}}$ на M будем называть *ассоциированными* с $\mathbf{R}(\varepsilon^2)$-гладким тензорным полем T.

Напомним понятие производной Ли тензорного поля t на гладком многообразии, которое потребуется для формулировки следующей теоремы.

Пусть на гладком многообразии M заданы тензорное поле t типа (p,q) и векторное поле ξ с компонентами $t^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q}(x^k)$ и $\xi^i(x^k)$ соответственно по отношению к некоторой локальной системе координат. Тогда производная Ли тензорного поля t в направлении векторного поля ξ представляет собой тензорное поле $\mathcal{L}_\xi t$ типа (p,q) с компонентами [10]

$$\mathcal{L}_\xi t^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q} = \xi^k\partial_k t^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q} - t^{k\dots i_p}_{j_1\dots j_q}\partial_k\xi^{i_1} - \dots - t^{i_1\dots k}_{j_1\dots j_q}\partial_k\xi^{i_p} + \\ + t^{i_1\dots i_p}_{k\dots j_q}\partial_{j_1}\xi^k + \dots + t^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots k}\partial_{j_q}\xi^k. \quad (22)$$

Для векторного поля v и ковекторного поля w соответственно формула (22) принимает вид

$$\mathcal{L}_\xi v^i = \xi^k\partial_k v^i - v^k\partial_k\xi^i, \quad (23)$$

$$\mathcal{L}_\xi w_j = \xi^k\partial_k w_j + w_k\partial_j\xi^k. \quad (24)$$

Теорема 1. *При $\mathbf{R}(\varepsilon^2)$-диффеоморфизме $F : T^2M \to T^2M$, порождаемом сечением $\sigma : M \to T^2M$ с ассоциированной парой векторных полей $\{g, u\}$, $\mathbf{R}(\varepsilon^2)$-гладкое тензорное поле T типа (p, q) с ассоциированными тензорными полями t, $\hat{t}$, $\hat{\hat{t}}$ переходит в $\mathbf{R}(\varepsilon^2)$-гладкое тензорное поле S типа (p, q) с ассоциированными тензорными полями*

$$s = t, \quad \hat{s} = \hat{t} - \mathcal{L}_g t, \quad \hat{\hat{s}} = \hat{\hat{t}} - \mathcal{L}_u t - \mathcal{L}_g \hat{t} + \tfrac{1}{2}\mathcal{L}_g \mathcal{L}_g t. \tag{25}$$

Доказательство. Формулы (25) имеют локальный характер, поэтому можно считать, что тензорное поле T представляет собой сумму тензорных произведений векторных и ковекторных полей. Таким образом, на основании метода математической индукции достаточно проверить формулы (25) для векторных и ковекторных полей и показать, что если указанные формулы имеют место для некоторых тензорных полей, то они также имеют место и для суммы этих полей (при условии, что сумма определена), и для их тензорного произведения. Начнем доказательство теоремы с доказательства второго из сформулированных утверждений.

Лемма 1. *Пусть утверждение теоремы 1 выполняется для $\mathbf{R}(\varepsilon^2)$-гладких тензорных полей T и T' типа (p, q), тогда оно выполняется и для тензорного поля $W = T + T'$.*

Доказательство леммы 1. Дифференцирование Ли $\mathcal{L}_u$ в направлении фиксированного векторного поля является дифференцированием тензорной алгебры $\mathcal{T}(M)$ многообразия M [11], поэтому для доказательства леммы достаточно проверить, что для ассоциированных вещественных тензорных полей из предложения 3 выполняются соотношения $w = t + t'$, $\hat{w} = \hat{t} + \hat{t}'$, $\hat{\hat{w}} = \hat{\hat{t}} + \hat{\hat{t}}'$, справедливость которых с очевидностью следует из (19).

□

Лемма 2. *Пусть при $\mathbf{R}(\varepsilon^2)$-диффеоморфизме $F : T^2M \to T^2M$, порождаемом сечением $\sigma : M \to T^2M$, $\mathbf{R}(\varepsilon^2)$-гладкие тензорные поля T и S переходят соответственно в $\mathbf{R}(\varepsilon^2)$-гладкие тензорные поля T' и S' и при этом соответствующие ассоциированные вещественные тензорные поля связаны соотношениями (25). Тогда вещественные тензорные поля, ассоциированные с $\mathbf{R}(\varepsilon^2)$-гладкими тензорными полями $W = T \otimes S$ и $W' = T' \otimes S'$ также связаны соотношениями (25).*

Доказательство леммы 2. Из формул (19), записанных для $\mathbf{R}(\varepsilon^2)$-гладких тензорных полей T, S и $W = T \otimes S$, следует, что вещественные тензорные поля, ассоциированные с T, S и $W = T \otimes S$, связаны следующими соотношениями:

$$w = t \otimes s, \quad \hat{w} = \hat{t} \otimes s + t \otimes \hat{s}, \quad \hat{\hat{w}} = \hat{\hat{t}} \otimes s + t \otimes \hat{\hat{s}} + \hat{t} \otimes \hat{s}.$$

Таким образом, для тензорных полей w', $\hat{w}'$ и $\hat{\hat{w}}'$ получаем следующие представления (для упрощения записи опускаем знаки тензорного произведения при выводе соотношений для $\hat{w}'$ и $\hat{\hat{w}}'$):

$$w' = t' \otimes s' = t \otimes s = w,$$

$$\hat{w}' = \hat{t}'s + t\hat{s}' = (\hat{t} - \mathcal{L}_g t)s + t(\hat{s} - \mathcal{L}_g s) =$$
$$= \hat{t}s + t\hat{s} - (\mathcal{L}_g t)s - t(\mathcal{L}_g s) = \hat{t}s + t\hat{s} - \mathcal{L}_g(ts) = \hat{w} - \mathcal{L}_g w.$$

$$\hat{w}' = \hat{\hat{t}}'s + t\hat{\hat{s}}' + \hat{t}'\hat{s}' = \left(\hat{\hat{t}} - \mathcal{L}_u t - \mathcal{L}_g \hat{t} + \tfrac{1}{2}\mathcal{L}_g\mathcal{L}_g t\right) s +$$

$$+ t\left(\hat{\hat{s}} - \mathcal{L}_u s - \mathcal{L}_g \hat{s} + \tfrac{1}{2}\mathcal{L}_g\mathcal{L}_g s\right) + (\hat{t} - \mathcal{L}_g t)(\hat{s} - \mathcal{L}_g s) =$$

$$= \hat{\hat{t}}s + t\hat{\hat{s}} - (\mathcal{L}_g\hat{t})s - t(\mathcal{L}_g\hat{s}) - \mathcal{L}_u(ts) + \tfrac{1}{2}\mathcal{L}_g\mathcal{L}_g(ts) + \hat{t}\hat{s} - \hat{t}(\mathcal{L}_g s) -$$

$$- (\mathcal{L}_g t)\hat{s} - \mathcal{L}_g\mathcal{L}_g(ts) = \hat{\hat{w}} - \mathcal{L}_g\hat{w} - \mathcal{L}_u w + \tfrac{1}{2}\mathcal{L}_g\mathcal{L}_g w.$$

Лемма 2 доказана.

□

Покажем теперь, что формулы (25) имеют место для векторных полей.

Пусть на T^2M задано произвольное $\mathbf{R}(\varepsilon^2)$-гладкое векторное поле V с уравнениями $V^i = V^i(X^j)$ в локальных $\mathbf{R}(\varepsilon^2)$-координатах. При $\mathbf{R}(\varepsilon^2)$-гладком диффеоморфизме $F : T^2M \to T^2M$, $X \mapsto Y = F(X)$, порождаемом сечением σ и имеющем в $\mathbf{R}(\varepsilon^2)$-координатах уравнения $Y^i = F^i(X^j)$ вида (14), векторное поле V переходит в векторное поле W, имеющее уравнения

$$W^i(Y^k) = \frac{\partial Y^i}{\partial X^j} V^j(X^k) = \frac{\partial F^i}{\partial X^j} V^j(X^k) = \frac{\partial F^i}{\partial x^j} V^j(X^k). \tag{26}$$

Векторные поля V^i и W^i имеют в рассматриваемых локальных $\mathbf{R}(\varepsilon^2)$-координатах следующий вид:

$$V^i(X^j) = v^i(x^j) + \varepsilon(\dot{x}^j\partial_j v^i + \hat{v}^i(x^j)) +$$
$$+ \varepsilon^2\left(\frac{1}{2}(\partial^2_{jk}v^i)\dot{x}^j\dot{x}^k + (\partial_j v^i)\ddot{x}^j + (\partial_j\hat{v}^i)\dot{x}^j + \hat{\hat{v}}^i(x^j)\right) \tag{27}$$

$$W^i(X^j) = w^i(x^j) + \varepsilon(\dot{x}^j\partial_j w^i + \hat{w}^i(x^j)) +$$
$$+ \varepsilon^2\left(\frac{1}{2}(\partial^2_{jk}w^i)\dot{x}^j\dot{x}^k + (\partial_j w^i)\ddot{x}^j + (\partial_j\hat{w}^i)\dot{x}^j + \hat{\hat{w}}^i(x^j)\right) \tag{28}$$

Из (14) находим выражения для частных производных:

$$\frac{\partial Y^i}{\partial X^j} = \frac{\partial F^i}{\partial x^j} = \delta^i_j + \varepsilon\partial_j g^i + \varepsilon^2(\dot{x}^k\partial^2_{kj}g^i + \partial_j h^i). \tag{29}$$

Подставляя в правую часть равенства (26) выражение (27) для векторного поля V в точке X и формулы (29) для частных производных $\partial_j F^i$, получим следующие выражения для векторного поля W в точке $Y = F(X)$:

$$W^i(Y^j) = (\delta^i_j + \varepsilon\partial_j g^i + \varepsilon^2(\dot{x}^k\partial^2_{kj}g^i + \partial_j h^i))\times$$
$$\times\left(v^j + \varepsilon(\dot{x}^m\partial_m v^j + \hat{v}^j) + \varepsilon^2\left(\frac{1}{2}\dot{x}^k\dot{x}^m\partial^2_{km}v^j + \ddot{x}^m\partial_m v^j + \dot{x}^m\partial_m\hat{v}^j + \hat{\hat{v}}^j\right)\right) =$$
$$= v^i + \varepsilon(v^j\partial_j g^i + \dot{x}^m\partial_m v^i + \hat{v}^i) + \varepsilon^2\left(\dot{x}^k v^j\partial^2_{kj}g^i + v^j\partial_j h^i +\right.$$
$$\left.\dot{x}^m(\partial_m v^j)\partial_j g^i + \hat{v}^j\partial_j g^i + \ddot{x}^m\partial_m v^i + \frac{1}{2}\dot{x}^k\dot{x}^m\partial^2_{km}v^i + \dot{x}^m\partial_m\hat{v}^i + \hat{\hat{v}}^i\right). \tag{30}$$

Формула (30) представляет собой выражение координат вектора W в точке Y как функций координат точки $X = F^{-1}(Y)$. Для нахождения выражения координат вектора $W(Y)$ как функций точки Y надо подставить в (30) выражения

$$x^i + \varepsilon\dot{x}^i + \varepsilon^2\ddot{x}^i = y^i + \varepsilon(\dot{y}^i - g^i) + \varepsilon^2(\ddot{y}^i - (\dot{y}^k - g^k)\partial_k g^i - h^i), \tag{31}$$

представляющие собой уравнения $X^i = G^i(Y^j)$ для обратного отображения $G = F^{-1} : T^2M \to T^2M$. Осуществив указанную подстановку, получим

$$\begin{aligned} W^i = v^i &+ \varepsilon(v^j\partial_j g^i + (\dot{y}^m - g^m)\partial_m v^i + \hat{v}^i) + \\ &+ \varepsilon^2\Big((\dot{y}^k - g^k)v^j\partial^2_{kj}g^i + v^j\partial_j h^i + (\dot{y}^m - g^m)(\partial_m v^j)\partial_j g^i + \hat{v}^j\partial_j g^i + \\ &+ (\ddot{y}^m - (\dot{y}^k - g^k)\partial_k g^m - h^m)\partial_m v^i + \\ &+ \tfrac{1}{2}(\dot{y}^k - g^k)(\dot{y}^m - g^m)\partial^2_{km}v^i + (\dot{y}^m - g^m)\partial_m\hat{v}^i + \hat{\hat{v}}^i\Big). \end{aligned} \tag{32}$$

Формулой (32) выражаются координаты векторного поля W^i в произвольной точке $\{Y^i\}$ расслоения T^2M. Возьмем в качестве такой точки точку X с координатами $\{X^i\}$ и сравним полученное выражение с (28). Сравнение коэффициентов при ε показывает, что

$$\hat{w}^i = \hat{v}^i - g^m\partial_m v^i + v^j\partial_j g^i. \tag{33}$$

Обратное выражение имеет следующий вид:

$$\hat{v}^i = \hat{w}^i + g^m\partial_m v^i - v^j\partial_j g^i. \tag{34}$$

Подставим (34) в (32) и сравним коэффициенты при ε^2. В результате получим

$$\begin{aligned} \hat{\hat{w}}^i = \hat{\hat{v}}^i &+ v^j\partial_j h^i - h^m\partial_m v^i + \hat{w}^j\partial_j g^i - g^m\partial_m\hat{w}^i - \\ &- v^m(\partial_m g^j)\partial_j g^i + g^m(\partial_m v^j)\partial_j g^i + \frac{1}{2}g^m g^k\partial^2_{mk}v^i. \end{aligned} \tag{35}$$

Подставляя в (35) выражение $h^i = u^i - \dfrac{1}{2}g^m\partial_m g^i$ из (16) и группируя слагаемые, учитывая выражение (23) для производной Ли $\mathcal{L}_u v^i$ векторного поля, а также соответствующее выражение для второй производной Ли $\mathcal{L}_u\mathcal{L}_u v^i$, получим желаемое соотношение

$$\hat{\hat{w}}^i = \hat{\hat{v}}^i - \mathcal{L}_u v^i - \mathcal{L}_g\hat{w}^i + \frac{1}{2}\mathcal{L}_g\mathcal{L}_g v^i.$$

Остается убедиться в том, что формулы (25) имеют место для ковекторных полей.

Пусть на T^2M задано произвольное $\mathbf{R}(\varepsilon^2)$-гладкое ковекторное поле V с уравнениями $V_i = V_i(X^j)$ в локальных $\mathbf{R}(\varepsilon^2)$-координатах. При $\mathbf{R}(\varepsilon^2)$-гладком диффеоморфизме $F : T^2M \to T^2M$, имеющем уравнения $Y^i = F^i(X^j)$ вида (14), ковекторное поле V переходит в ковекторное поле W, имеющее уравнения

$$W_j(X^k) = \frac{\partial X^i}{\partial Y^j}V_i(Y^k) = \frac{\partial G^i}{\partial Y^j}V_i(Y^k) = \frac{\partial G^i}{\partial y^j}V_i(Y^k). \tag{36}$$

Ковекторные поля V_i и W_i имеют в рассматриваемых локальных $\mathbf{R}(\varepsilon^2)$-координатах следующий вид:

$$\begin{aligned} V_i(X^j) = v_i(x^j) &+ \varepsilon(\dot{x}^j\partial_j v_i + \hat{v}_i(x^j)) + \\ &+ \varepsilon^2\left(\frac{1}{2}\dot{x}^j\dot{x}^k\partial^2_{jk}v_i + \ddot{x}^j\partial_j v_i + \dot{x}^j\partial_j\hat{v}_i + \hat{\hat{v}}_i(x^j)\right), \end{aligned} \tag{37}$$

$$W_i(X^j) = w_i(x^j) + \varepsilon(\dot{x}^j\partial_j w_i + \hat{w}_i(x^j)) +$$
$$+ \varepsilon^2\left(\frac{1}{2}\dot{x}^j\dot{x}^k\partial^2_{jk}w^i + \ddot{x}^j\partial_j w_i + \dot{x}^j\partial_j\hat{w}_i + \hat{\hat{w}}_i(x^j)\right). \quad (38)$$

Из формул (31) для диффеоморфизма G получаем следующие выражения для частных производных функций $X^i = G^i(Y^j)$:

$$\frac{\partial X^i}{\partial Y^j} = \frac{\partial G^i}{\partial y^j} = \delta^i_j - \varepsilon\partial_j g^i + \varepsilon^2(-\dot{y}^k\partial^2_{kj}g^i + \partial_j(g^k\partial_k g^i) - \partial_j h^i) \quad (39)$$

Используя векторное поле $u^i = h^i - \frac{1}{2}g^m\partial_m g^i$, перепишем (39) в следующем виде:

$$\frac{\partial X^i}{\partial Y^j} = \delta^i_j - \varepsilon\partial_j g^i + \varepsilon^2(-\dot{y}^k\partial^2_{kj}g^i + \frac{1}{2}\partial_j(g^k\partial_k g^i) - \partial_j u^i). \quad (40)$$

Подставляя в правую часть равенства (36) выражение (37) для ковекторного поля V в точке X и выражения (40) для частных производных $\partial_j G^i$, получим следующие выражения для ковекторного поля W в точке $Y = F(X)$:

$$W_j(Y^k) = \left(\delta^i_j - \varepsilon\partial_j g^i + \varepsilon^2\left(-\dot{y}^k\partial^2_{kj}g^i + \frac{1}{2}\partial_j(g^k\partial_k g^i) - \partial_j u^i\right)\right) \times$$
$$\times\left(v_i + \varepsilon(\dot{x}^m\partial_m v_i + \hat{v}_i) + \varepsilon^2\left(\frac{1}{2}\dot{x}^k\dot{x}^m\partial^2_{km}v_i + \ddot{x}^m\partial_m v_i + (\partial_m\hat{v}_i)\dot{x}^m + \hat{\hat{v}}_i\right)\right). \quad (41)$$

Подставляя в (41) формулы (31), записанные в виде

$$\dot{x}^i = \dot{y}^i - g^i, \quad \ddot{x}^i = \ddot{y}^i - \dot{y}^k\partial_k g^i + \frac{1}{2}g^k\partial_k g^i - u^i,$$

учитывая выражение (24) для производной Ли $\mathcal{L}_u w_i$ ковекторного поля, а также соответствующее выражение для второй производной Ли $\mathcal{L}_u\mathcal{L}_u w_i$, после сравнения полученного результата с выражением (38) для поля W_i в точке Y с координатами Y^i, получим желаемые соотношения

$$w_i = v_i, \quad \hat{w}_i = \hat{v}_i - \mathcal{L}_g v_i, \quad \hat{\hat{w}}_i = \hat{\hat{v}}_i - \mathcal{L}_u v_i - \mathcal{L}_g\hat{v}_i + \frac{1}{2}\mathcal{L}_g\mathcal{L}_g v_i,$$

что завершает доказательство теоремы. □

Определение. $\mathbf{R}(\varepsilon^2)$-гладкие тензорные поля T и S типа (p,q), заданные на $\mathbf{R}(\varepsilon^2)$-гладких многообразиях $M^{\mathbf{R}(\varepsilon^2)}$ и $N^{\mathbf{R}(\varepsilon^2)}$ соответственно, назовем эквивалентными, если существует $\mathbf{R}(\varepsilon^2)$-диффеоморфизм $F : M^{\mathbf{R}(\varepsilon^2)} \to N^{\mathbf{R}(\varepsilon^2)}$, переводящий T в S.

Следствие 1. *Пусть T – $\mathbf{R}(\varepsilon^2)$-гладкое тензорное поле типа (p,q) на расслоении T^2M и t, $\hat{t}$, $\hat{\hat{t}}$ – ассоциированные тензорные поля на многообразии M. Тензорное поле T эквивалентно $\mathbf{R}(\varepsilon^2)$-продолжению тензорного поля t тогда и только тогда, когда*

$$\hat{t} = \mathcal{L}_g t, \quad \hat{\hat{t}} = \mathcal{L}_u t - \frac{1}{2}\mathcal{L}_g\mathcal{L}_g t, \quad (42)$$

где g и u – некоторые векторные поля на многообразии M.

Доказательство. Полагаем в (25) $\hat{s} = 0$, $\hat{\hat{s}} = 0$ и приводим подобные члены. □

3. $\mathbf{R}(\varepsilon^2)$-гладкие линейные связности на T^2M

В терминах локальных координат линейная связность Γ на гладком многообразии M задается коэффициентами связности – гладкими функциями $\Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{jk}(x^m)$, которые на пересечении областей определения $U \cap U'$ двух карт связаны соотношениями [12]

$$\Gamma^{i'}_{j'k'} = \Gamma^i_{jk} \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k} \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} + \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k} \frac{\partial^2 x^k}{\partial x^{i'} \partial x^{j'}} . \tag{43}$$

$\mathbf{R}(\varepsilon^2)$-линейная связность $\bar{\Gamma}$ на касательном расслоении T^2M в терминах индуцированных $\mathbf{R}(\varepsilon^2)$-координат задается коэффициентами связности $\bar{\Gamma}^i_{jk} = \bar{\Gamma}^i_{jk}(X^m)$ – гладкими $\mathbf{R}(\varepsilon^2)$-значными функциями, которые на пересечении областей определения $(\pi^2_0)^{-1}(U) \cap (\pi^2_0)^{-1}(U')$ двух $\mathbf{R}(\varepsilon^2)$-карт связаны соотношениями [3]

$$\bar{\Gamma}^{i'}_{j'k'} = \bar{\Gamma}^i_{jk} \frac{\partial X^{i'}}{\partial X^i} \frac{\partial X^j}{\partial X^{j'}} \frac{\partial X^k}{\partial X^{k'}} + \frac{\partial X^{i'}}{\partial X^i} \frac{\partial^2 X^i}{\partial X^{j'} \partial X^{k'}} . \tag{44}$$

$\mathbf{R}(\varepsilon^2)$-линейная связность $\bar{\Gamma}$ называется $\mathbf{R}(\varepsilon^2)$-гладкой или *голоморфной*, если коэффициенты $\bar{\Gamma}^i_{jk}(X^m)$ являются $\mathbf{R}(\varepsilon^2)$-гладкими функциями. Из свойств $\mathbf{R}(\varepsilon^2)$-продолжений вещественных гладких функций и формул (43), (44) следует, что $\mathbf{R}(\varepsilon^2)$-продолжения

$$\bar{\Gamma}^i_{jk}(X^m) = \Gamma^i_{jk}(x^m) + \varepsilon \dot{x}^\ell \partial_\ell \Gamma^i_{jk} + \varepsilon^2 \left(\frac{1}{2} \dot{x}^\ell \dot{x}^p \partial^2_{\ell p} \Gamma^i_{jk} + \ddot{x}^\ell \partial_\ell \Gamma^i_{jk} \right) \tag{45}$$

коэффициентов $\Gamma^i_{jk}(x^m)$ линейной связности Γ, заданной на многообразии M, определяют $\mathbf{R}(\varepsilon^2)$-гладкую $\mathbf{R}(\varepsilon^2)$-линейную связность $\Gamma^{\mathbf{R}(\varepsilon^2)}$ на расслоении T^2M, называемую $\mathbf{R}(\varepsilon^2)$-продолжением линейной связности Γ. Ее реализация [3] называется *полным лифтом* связности Γ [1].

Коэффициенты произвольной $\mathbf{R}(\varepsilon^2)$-гладкой $\mathbf{R}(\varepsilon^2)$-линейной связности на расслоении T^2M имеют следующий вид:

$$\bar{\Gamma}^i_{jk}(X^m) = \Gamma^i_{jk}(x^m) + \varepsilon \left(\dot{x}^\ell \partial_\ell \Gamma^i_{jk} + \hat{\Gamma}^i_{jk}(x^m) \right) + \\ + \varepsilon^2 \left(\frac{1}{2} \dot{x}^l \dot{x}^p \partial^2_{\ell p} \Gamma^i_{jk} + \ddot{x}^\ell \partial_\ell \Gamma^i_{jk} + \dot{x}^\ell \partial_\ell \hat{\Gamma}^i_{jk} + \hat{\hat{\Gamma}}^i_{jk}(x^m) \right) . \tag{46}$$

Предложение 4 [3]. *Пусть на касательном расслоении второго порядка T^2M задана $\mathbf{R}(\varepsilon^2)$-гладкая $\mathbf{R}(\varepsilon^2)$-линейная связность $\bar{\Gamma}$ с коэффициентами* (46) *в локальных $\mathbf{R}(\varepsilon^2)$-координатах. Тогда функции*

$$\Gamma^i_{jk}(x^m), \quad \hat{\Gamma}^i_{jk}(x^m) \quad \text{и} \quad \hat{\hat{\Gamma}}^i_{jk}(x^m)$$

задают соответственно некоторые линейную связность Γ и тензорные поля $\hat{\Gamma}$ и $\hat{\hat{\Gamma}}$ типа $(1,2)$ на многообразии M.

Как и в случае предложения 3, для доказательства предложения 4 достаточно подставить уравнения (46) и (45) в формулы преобразования коэффициентов $\mathbf{R}(\varepsilon^2)$-линейной связности (43) и сравнить вещественные части выражений в левой и правой частях полученных равенств.

Линейную связность Γ и тензорные поля $\hat{\Gamma}$, $\hat{\hat{\Gamma}}$ на M будем называть *ассоциированными* с $\mathbf{R}(\varepsilon^2)$-гладкой $\mathbf{R}(\varepsilon^2)$-линейной связностью $\bar{\Gamma}$.

Пусть, как и ранее, $F : T^2M \to T^2M$ – $\mathbf{R}(\varepsilon^2)$-гладкий диффеоморфизм, порождаемый некоторым сечением $\sigma : M \to T^2M$, $Y^i = F^i(X^\alpha)$ – уравнения вида (14) диффеоморфизма F в локальных $\mathbf{R}(\varepsilon^2)$-координатах, а $X^\alpha = G^\alpha(Y^i)$ – уравнения обратного диффеоморфизма $G = F^{-1}$. Отметим, что здесь и в последующем греческие индексы $\alpha, \beta, \dots$ пробегают ту же область значений $1, \dots, n$, что и латинские индексы $i, j, \dots$.

При рассматриваемом диффеоморфизме F $\mathbf{R}(\varepsilon^2)$-линейная связность $\bar{\Gamma}$ с коэффициентами $\bar{\Gamma}^\alpha_{\beta\gamma}(X^\sigma)$ переходит в $\mathbf{R}(\varepsilon^2)$-линейную связность $\bar{\Gamma}'$ с коэффициентами $\bar{\Gamma}'^i_{jk}(Y^m)$, где

$$\bar{\Gamma}'^i_{jk} = \bar{\Gamma}^\alpha_{\beta\gamma}\frac{\partial Y^i}{\partial X^\alpha}\frac{\partial X^\beta}{\partial Y^j}\frac{\partial X^\gamma}{\partial Y^k} + \frac{\partial Y^i}{\partial X^\alpha}\frac{\partial^2 X^\alpha}{\partial Y^j \partial Y^k}. \tag{47}$$

Напомним понятие производной Ли объекта линейной связности Γ на гладком многообразии.

Пусть на гладком многообразии M заданы линейная связность Γ и векторное поле ξ с коэффициентами Γ^i_{jk} и компонентами ξ^k соответственно по отношению к некоторой локальной системе координат. Тогда производная Ли объекта связности Γ^i_{jk} в направлении векторного поля ξ представляет собой тензорное поле $\mathcal{L}_\xi G$ типа $(1,2)$ с компонентами [10]

$$\mathcal{L}_\xi\Gamma^i_{jk} = g^m\partial_m\Gamma^i_{jk} - \partial_m\xi^i\Gamma^m_{jk} + \partial_j\xi^m\Gamma^i_{mk} + \partial_k\xi^m\Gamma^i_{jm} + \partial^2_{jk}\xi^i. \tag{48}$$

Теорема 2. *При $\mathbf{R}(\varepsilon^2)$-диффеоморфизме $F : T^2M \to T^2M$, порождаемом сечением $\sigma : M \to T^2M$ с ассоциированной парой векторных полей $\{g, u\}$, $\mathbf{R}(\varepsilon^2)$-гладкая $\mathbf{R}(\varepsilon^2)$-линейная связность $\bar{\Gamma}$ с ассоциированными линейной связностью Γ и тензорными полями $\hat{\Gamma}$ и $\hat{\hat{\Gamma}}$ переходит в $\mathbf{R}(\varepsilon^2)$-гладкую $\mathbf{R}(\varepsilon^2)$-линейную связность $\bar{\Gamma}'$ с ассоциированными линейной связностью Γ' и тензорными полями $\hat{\Gamma}'$, $\hat{\hat{\Gamma}}'$, имеющими соответственно вид:*

$$\Gamma'^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} \quad \hat{\Gamma}'^i_{jk} = \hat{\Gamma}^i_{jk} - \mathcal{L}_g\Gamma^i_{jk} \tag{49}$$

$$\hat{\hat{\Gamma}}'^i_{jk} = \hat{\hat{\Gamma}}^i_{jk} - \mathcal{L}_u\Gamma^i_{jk} - \mathcal{L}_g\hat{\Gamma}^i_{jk} + \frac{1}{2}\mathcal{L}_g\mathcal{L}_g\Gamma^i_{jk}. \tag{50}$$

Доказательство. Пусть ${}^1\Gamma$ и ${}^2\Gamma$ – две линейные связности на многообразии M и

$${}^1\Gamma^i_{jk} - {}^2\Gamma^i_{jk} = T^i_{jk}$$

– тензор деформации [12]. Из выражений для производных Ли (48) и (22) получаем следующее соотношение:

$$\mathcal{L}_\xi{}^1\Gamma^i_{jk} = \mathcal{L}_\xi{}^2\Gamma^i_{jk} + \mathcal{L}_\xi T^i_{jk}.$$

Из формул (25) теоремы 1 следует, что если соотношения (49) и (50) выполняются для некоторой $\mathbf{R}(\varepsilon^2)$-гладкой $\mathbf{R}(\varepsilon^2)$-линейной связности ${}^1\bar{\Gamma}$ на T^2M, то они будут выполняться и для любой другой $\mathbf{R}(\varepsilon^2)$-гладкой $\mathbf{R}(\varepsilon^2)$-линейной связности ${}^2\bar{\Gamma}$. Кроме того, поскольку соотношения (49) и (50) имеют локальный характер, то их достаточно доказать для некоторой связности ${}^1\bar{\Gamma}$, заданной на множестве $(\pi^2_0)^{-1}(U)$, где U – область определения некоторой карты на M. В качестве такой связности естественно взять связность $\bar{\Gamma}$ на $(\pi^2_0)^{-1}(U)$, для которой ассоциированная связность Γ на U является плоской с нулевыми коэффициентами связности Γ^i_{jk}. В этом случае связность $\bar{\Gamma}$ имеет следующие коэффициенты:

$$\bar{\Gamma}^i_{jk}(X^m) = \varepsilon\hat{\Gamma}^i_{jk}(x^m) + \varepsilon^2(\dot{x}^m\partial_m\hat{\Gamma}^i_{jk} + \hat{\hat{\Gamma}}^i_{jk}(x^m)). \tag{51}$$

Для связности Γ с компонентами $\Gamma^i_{jk} = 0$ производная Ли (48) в направлении векторного поля g принимает вид:

$$\mathcal{L}_g \Gamma^i_{jk} = \partial^2_{jk} g^i. \tag{52}$$

Пользуясь формулами (22), находим вторую производную Ли $\mathcal{L}_g \mathcal{L}_g \Gamma^i_{jk}$:

$$\mathcal{L}_g \mathcal{L}_g \Gamma^i_{jk} = g^m \partial_m (\partial^2_{jk} g^i) - (\partial_m g^i) \partial^2_{jk} g^m + (\partial_j g^m) \partial^2_{mk} g^i + (\partial_k g^m) \partial^2_{jm} g^i. \tag{53}$$

Дифференцируя уравнения (40), получим следующие выражения для вторых частных производных $\partial^2_{jk} X^\alpha$:

$$\frac{\partial^2 X^\alpha}{\partial Y^j \partial Y^k} = -\varepsilon \partial^2_{jk} g^\alpha + \varepsilon^2 \big(- \dot{y}^m \partial^3_{mjk} g^\alpha + \\ + \frac{1}{2} (\partial^2_{kj} g^m) \partial_m g^\alpha + (\partial_j g^m) \partial^2_{km} g^\alpha + (\partial_k g^m) \partial^2_{jm} g^\alpha + g^m \partial^3_{jkm} g^\alpha - \partial^2_{jk} u^\alpha \big). \tag{54}$$

Подставим в уравнения (47)

$$\bar{\Gamma}'^i_{jk} = \varepsilon \hat{\Gamma}'^i_{jk} + \varepsilon^2 (\dot{y}^m \partial_m \hat{\Gamma}'^i_{jk} + \hat{\hat{\Gamma}}'^i_{jk}), \quad \bar{\Gamma}^\alpha_{\beta\gamma} = \varepsilon \hat{\Gamma}^\alpha_{\beta\gamma} + \varepsilon^2 (\dot{x}^m \partial_m \hat{\Gamma}^\alpha_{\beta\gamma} + \hat{\hat{\Gamma}}^\alpha_{\beta\gamma})$$

и выражения (39), (54), (29) для частных производных, затем осуществим замены $\dot{x}^i = \dot{y}^i - g^i$, $h^i = u^i - \dfrac{1}{2} g^m \partial_m g^i$ и раскроем скобки. Сравнение коэффициентов при ε и ε^2 в левой и правой частях полученного равенства приводит к следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} \hat{\Gamma}'^i_{jk} &= \hat{\Gamma}^i_{jk} - \partial^2_{jk} g^i, \\ \hat{\hat{\Gamma}}'^i_{jk} &= \hat{\hat{\Gamma}}^i_{jk} - \hat{\Gamma}^i_{\beta k} \partial_j g^\beta - \hat{\Gamma}^i_{j\gamma} \partial_k g^\gamma + \hat{\Gamma}^\alpha_{jk} \partial_\alpha g^i + \\ &+ \frac{1}{2} \Big((\partial^2_{jk} g^m) \partial_m g^\alpha + (\partial_j g^m) \partial^2_{km} g^\alpha + (\partial_k g^m) \partial^2_{jm} g^\alpha + g^m \partial^3_{jkm} g^\alpha \Big) - \\ &- (\partial_m g^i) \partial^2_{jk} g^m - \partial^2_{jk} u^i - g^m \partial_m \hat{\Gamma}^i_{jk}. \end{aligned}$$

Формулы (49) и (50) следуют теперь из (52) и (53).

□

Определение. $\mathbf{R}(\varepsilon^2)$-гладкие $\mathbf{R}(\varepsilon^2)$-линейные связности $\bar{\Gamma}$ и $\bar{\Gamma}'$, заданные на $\mathbf{R}(\varepsilon^2)$-гладких многообразиях $M^{\mathbf{R}(\varepsilon^2)}$ и $N^{\mathbf{R}(\varepsilon^2)}$ соответственно, назовем эквивалентными, если существует $\mathbf{R}(\varepsilon^2)$-диффеоморфизм $F : M^{\mathbf{R}(\varepsilon^2)} \to N^{\mathbf{R}(\varepsilon^2)}$, переводящий $\bar{\Gamma}$ в $\bar{\Gamma}'$.

Следствие 2. *Пусть $\bar{\Gamma}$ – $\mathbf{R}(\varepsilon^2)$-гладкая $\mathbf{R}(\varepsilon^2)$-линейная связность на расслоении T^2M с ассоциированными линейной связностью Γ и тензорными полями $\hat{\Gamma}$, $\hat{\hat{\Gamma}}$. Связность $\bar{\Gamma}$ эквивалентна $\mathbf{R}(\varepsilon^2)$-продолжению связности Γ тогда и только тогда, когда*

$$\hat{\Gamma} = \mathcal{L}_g \Gamma, \quad \hat{\hat{\Gamma}} = \mathcal{L}_u \Gamma - \frac{1}{2} \mathcal{L}_g \mathcal{L}_g \Gamma, \tag{55}$$

где g и u – некоторые векторные поля на многообразии M.

Доказательство. Полагаем в соотношениях (49) и (50) $\hat{\Gamma}' = 0$, $\hat{\hat{\Gamma}}' = 0$ и приводим подобные члены. □

Summary

F.R. Gainullin, V.V. Shurygin. Holomorphic Tensor Fields and Linear Connections on a Second Order Tangent Bundle.

The second order tangent bundle T^2M of a smooth manifold M carries a natural structure of a smooth manifold over the algebra $\mathbf{R}(\varepsilon^2)$ of truncated polynomials of degree 2. A section σ of T^2M induces an $\mathbf{R}(\varepsilon^2)$-smooth diffeomorphism $\Sigma : T^2M \to T^2M$. Conditions are obtained under which an $\mathbf{R}(\varepsilon^2)$-smooth tensor field and an $\mathbf{R}(\varepsilon^2)$-smooth linear connection on T^2M can be transfered by a diffeomorphism of the form Σ, respectively, into the lift of a tensor field and the lift of a linear connection given on M.

Key words: tangent bundle of second order, lift of a linear connection, lift of a tensor field, holomorphic connection, Lie derivative.

Литература

1. *Широков А.П.* Замечание о структурах в касательных расслоениях // Труды геометр. семинара. – М.: ВИНИТИ АН СССР, 1974. – Т. 5. – С. 311–318.
2. *Morimoto A.* Prolongation of connections to tangent bundles of higher order // Nagoya Math. J. – 1970. – V. 40. – P. 99–120.
3. *Вишневский В.В., Широков А.П., Шурыгин В.В.* Пространства над алгебрами. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1984. – 264 с.
4. *Широков А.П., Шурыгин В.В.* Структуры в касательных расслоениях, определяемые локальными алгебрами // Всесоюз. геометр. шк. «Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях и их приложения»: сборник. – Черновцы, 1991. – С. 156–164. – Деп. в ВИНИТИ 05.02.91, № 562-В91.
5. *Вишневский В.В.* Интегрируемые аффинорные структуры и их плюральные интерпретации // Проблемы геометрии (Итоги науки и техники ВИНИТИ). Т. 73: Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. – М., 2002. – С. 5–64.
6. *Евтушик Л.Е., Лумисте Ю.Г., Остиану Н.М., Широков А.П.* Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях // Проблемы геометрии (Итоги науки и техн. ВИНИТИ). – М., 1979. – Т. 9. – 247 с.
7. *Шурыгин В.В.* Гладкие многообразия над локальными алгебрами и расслоения Вейля // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз. – М.: ВИНИТИ, 2002. – Т. 73. – С. 162–236.
8. *Kolář I., Michor P.W., Slovák J.* Natural operations in differential geometry. – Springer, 1993. – 434 p.
9. *Поммаре Ж.* Системы уравнений с частными производными и псевдогруппы Ли. – М.: Мир, 1983. – 400 с.
10. *Лаптев Б.Л.* Дифференцирование Ли // Алгебра. Топология. Геометрия. 1965 (Итоги науки ВИНИТИ). – М., 1967. – С. 429–465.
11. *Кобаяси Ш., Номидзу К.* Основания дифференциальной геометрии. – М.: Наука, 1981. – Т. 1. – 344 с.
12. *Норден А.П.* Пространства аффинной связности. – М.: Наука, 1976. – 432 с.

Поступила в редакцию
30.07.09

Гайнуллин Фарид Расилевич – системный администратор ООО «Айтиплюс».
E-mail: *faridgainullin@gmail.com*

Шурыгин Вадим Васильевич – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой геометрии Казанского государственного университета.
E-mail: *Vadim.Shurygin@ksu.ru*