УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ КАЗАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
Том 151, кн. 4 Физико-математические науки *2009*

УДК 514.764.227+514.765+517.984.56+511

СПЕКТР ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА НА КОМПАКТНЫХ ОДНОСВЯЗНЫХ ПРОСТЫХ ГРУППАХ ЛИ РАНГА ДВА

В.Н. Берестовский, В.М. Свиркин

Аннотация

Излагается алгоритм вычисления спектра лапласиана для вещественных функций на компактной односвязной простой группе Ли с биинвариантной римановой метрикой. Устанавливается связь кривизны Риччи этой метрики с указанным спектром. Посредством этого алгоритма и использования результатов теории чисел и теории бинарных квадратичных форм с целыми коэффициентами даются явные вычисления спектра для всех компактных односвязных простых групп Ли ранга два.

Ключевые слова: оператор Лапласа, спектр, представление группы, форма Киллинга, кривизна Риччи.

Введение

В работе [1] изучается спектр оператора Лапласа на гладких вещественных функциях, определенных на компактных однородных нормальных римановых многообразиях. Показано, что это изучение в определенном смысле сводится к случаю односвязных простых компактных групп Ли G с биинвариантной (то есть инвариантной относительно левых и правых сдвигов) римановой метрикой ν.

В последнем случае доказывается, что элементы каждого неприводимого (ортогонального) матричного вещественного представления r группы Ли G являются (вообще говоря, линейно зависимыми) собственными функциями лапласиана, отвечающими одному и тому же собственному значению $\lambda_r \leq 0$. Некоторые из этих функций образуют базис F всех собственных вещественных функций лапласиана в том смысле, что каждая собственная вещественная функция f лапласиана представляется единственным образом в виде конечной линейной комбинации функций из F с постоянными вещественными коэффициентами.

Собственное число λ_r выражается через размерность d_r представления r, размерность m группы Ли G, скалярное произведение $\nu(e)$ на алгебре Ли $\mathfrak{g}$ группы Ли G и ассоциированную с вещественным представлением $\rho = dr(e)$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ билинейную симметричную форму k_ρ. Описание всех неприводимых вещественных представлений ρ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ посредством неприводимых комплексных представлений комплексной оболочки $\mathfrak{k}$ вещественной простой алгебры Ли $\mathfrak{g}$ получено в книге А.Л. Онищика [2] и излагается в статье [1]. Каждое неприводимое комплексное представление алгебры Ли $\mathfrak{k}$ определяется своим старшим весом Λ. Его размерность вычисляется через Λ по известной формуле Г. Вейля; применение некоторых результатов из книги [3] позволяет также вычислить λ_r через соответствующий старший вес Λ и $\nu(e)$. Эти формулы дают алгоритм вычисления спектра лапласиана для вещественных функций на (G, ν). В качестве иллюстрации применения этого алгоритма в [1] вычисляется спектр лапласиана для вещественных функций на группе Ли $(SU(2), \nu)$, изометричной единичной евклидовой трехмерной сфере S^3.

Многие из результатов статьи [1] были известны ранее. Но статья [1] опирается лишь на простейшие результаты теории представлений групп и алгебр Ли, упомянутую формулу Г. Вейля для размерности представления алгебры Ли, немногие явно формулируемые результаты из книг [2–6]. Из книги К. Иосиды [4] нужны лишь две теоремы о спектре самосопряженного положительного неограниченного линейного оператора в гильбертовом пространстве. Используется также результат из [5], утверждающий, что сферические функции на компактной группе Ли G являются собственными функциями лапласиана и соответствующие собственные значения исчерпывают все ненулевые собственные значения лапласиана, и результат из [6], утверждающий, что всякая сферическая функция есть частное от деления характера некоторого неприводимого комплексного представления группы Ли G на его вес. Поэтому статья [1] позволяет читателю легко и независимо от других источников ознакомиться с рассматриваемым кругом вопросов.

В настоящей статье показано, что изложение из статьи [1] можно упростить и что на самом деле упомянутые выше результаты из книг [2, 5, 6] не нужны. Точнее говоря, книга [2] нужна, чтобы доказать следствие 1.3 данной статьи, а уже это следствие позволяет обойтись без книги [2]. Кроме того, в настоящей работе предлагается более простой, чем в статье [1], алгоритм вычисления спектра лапласиана для вещественных функций на простой односвязной компактной группе Ли G с биинвариантной римановой метрикой ν и устанавливается связь кривизны Риччи (эйнштейнова многообразия) (G, ν) с этим спектром. Посредством предложенного алгоритма производятся явные вычисления спектра для всех простых компактных групп ранга два и устанавливается связь полученных формул с теорией чисел и целочисленными бинарными квадратичными формами.

1. План поиска спектра лапласиана компактной односвязной простой группы Ли

Рассмотрим компактную односвязную (связную) простую группу Ли G с биинвариантной римановой метрикой ν. Множество $\mathrm{Spec}\,(G, \nu)$ всех собственных значений оператора Лапласа – Бельтрами Δ на гладких вещественных функциях, определенных на (G, ν), с учетом кратности собственных значений, то есть размерности пространств соответствующих собственных функций, называется *спектром* оператора Лапласа. Некоторые общие понятия и результаты об операторе Лапласа – Бельтрами, его собственных значениях и собственных функциях на римановых многообразиях класса C^∞ приведены в [1]. Далее l_g (соответственно, r_g) обозначает отображение $l_g : h \in G \to gh \in G$ (соответственно, $r_g : h \in G \to hg \in G$); dg – (инвариантную) вероятностную меру Хаара на G, пропорциональную мере объема μ_ν, определяемой римановой метрикой ν.

При описании плана поиска спектра лапласиана для группы Ли G будем опираться на приводимые ниже теоремы из [1].

Теорема 1.1 [1, теорема 4.4]. *Пусть G – компактная связная группа Ли с биинвариантной римановой метрикой ν, r – некоторое неприводимое вещественное представление группы G размерности d_r. Понимая r как некоторый гомоморфизм $r : G \to SO(d_r)$ групп Ли, можно утверждать, что все функции $r_{ij} : G \to r(g)_{ij}$, $i, j = 1, \dots, d_r$, являются собственными функциями оператора Лапласа Δ на (G, ν) с одним и тем же собственным значением λ_r. Линейная оболочка M_r этих функций является прямой суммой некоторого числа k_r,*

$1 \leq k_r \leq d_r$, неприводимых пространств представления $\theta : g \in G \to \theta(g)$ группы G (где $\theta(g)$ сопоставляет каждой вещественной функции f на G функцию $\theta(g)(f) := f \circ l_{g^{-1}}$), ограничение которого на каждое из них эквивалентно r. Число k_r равно d_r, $d_r/2$ или $d_r/4$ в зависимости от типа неприводимого вещественного представления (теорема 3.57 в [7]): U_m, rV_n или $rc'W_p$ соответственно, где U_m, V_n, W_p – некоторые неприводимые представления над $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ соответственно, а r, rc' – операции овеществления представлений (см. [7, п. 3.5]). Выбирая для некоторого представителя r каждого класса эквивалентности неприводимых вещественных представлений группы G некоторый ортонормированный относительно стандартного скалярного произведения $\langle\cdot,\cdot\rangle$ на $L^2(G,dg)$ базис из k_rd_r функций в M_r, получим полную в $L^2(G,dg)$ ортонормированную систему (из собственных функций оператора Δ).

Следствие 1.1. *В обозначениях приведенной выше теоремы получаем, что кратность собственного значения λ равна*

$$\sum_{r:\lambda_r=\lambda} k_r d_r, \tag{1}$$

где r пробегает все классы эквивалентности неприводимых вещественных представлений группы Ли G, отвечающих собственному числу λ.

Доказательство теоремы 1.1, данное в [1], использует в том числе упомянутые во введении результаты из книг [5] и [6]. Покажем, что полученные в [1] результаты позволяют обойтись без этого.

Доказательство. Пусть LR – компактная группа Ли, порожденная группами $L := \{l_g, g \in G\}$ и $R := \{r_g, g \in G\}$. Вследствие биинвариантности метрики ν и инвариантности оператора Δ относительно группы всех изометрий пространства (G,ν) (конечномерное) подпространство $V_\lambda \subset L^2(G,dg)$ всех (гладких) вещественных собственных функций оператора Δ с собственным значением λ раскладывается в прямую ортогональную LR-инвариантную сумму

$$V_\lambda := \oplus_{l=1}^{n(\lambda)} V_{\lambda,l}$$

LR-неприводимых подпространств. Здесь подразумевается, что каждая изометрия s пространства (G,ν) действует на $f \in V_\lambda$ по формуле $s(f) = f \circ s^{-1}$.

Далее в теореме 4.2 из [1] доказано, что для каждой прямой ортогональной θ-инвариантной суммы

$$V_{\lambda,l} := \oplus_{i=1}^{k(\lambda,l)} E_{\lambda,l,i}$$

θ-неприводимых подпространств индуцированные посредством θ на каждом слагаемом $E_{\lambda,l,i}$ действия $\theta_{\lambda,l,i}$ попарно эквивалентны (так что $E_{\lambda,l,i}$ имеют одну и ту же размерность $d_{\lambda,l}$, а $\theta_{\lambda,l,i}$ можно обозначить просто через $\theta_{\lambda,l}$), и $k(\lambda,l) \leq d_{\lambda,l}$. При этом $V_{\lambda,l}$ совпадает с пространством $M_{\theta_{\lambda,l}}$ матричных элементов представления $\theta_{\lambda,l}$. Как следствие, (неприводимые) представления $\theta_{\lambda,l}$ и $\theta_{\lambda,l'}$ не эквивалентны, если $l \neq l'$, так как характеры этих двух представлений $\chi(\theta_{\lambda,l})$, $\chi(\theta_{\lambda,l'})$, содержащиеся соответственно в $M_{\theta_{\lambda,l}} = V_{\lambda,l}$, $M_{\theta_{\lambda,l'}} = V_{\lambda,l'}$, будут ортогональны.

Остается заметить, что каждое неприводимое вещественное представление $r : G \to SO(d_r)$ эквивалентно одному из представлений вида $\theta_{\lambda,l}$. Иначе, пользуясь леммой Шура [8, с. 224], аналогично доказательству формулы (6) из теоремы 29 в [8] можно показать, что произвольный матричный элемент $(r(g))_{st}$, $g \in G$, $1 \leq s,t \leq d_r$ представления r ортогонален любому матричному элементу представления $\theta_{\lambda,l}$ при всех (λ,l). Но собственные функции оператора Δ образуют полную систему в $L^2(G, dg)$ (см. [1]). Тогда из сказанного выше следовало бы, что все функции $(r(g))_{st}$, $g \in G$, $1 \le s, t \le d_r$ тождественно равны нулю, чего не может быть. □

Предложение 1.1. *Для всякой компактной связной односвязной простой группы Ли G существует взаимно-однозначное соответствие между неприводимыми линейными вещественными представлениями r группы G и неприводимыми линейными вещественными представлениями ρ ее касательной алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Это соответствие определяется формулой $\rho = \mathrm{dr}\,(e)$.*

Определение 1.1. Билинейная (симметричная) форма k_ρ на алгебре Ли $\mathfrak{g}$, заданная формулой

$$k_\rho(u, v) = \mathrm{trace}\,(\rho(u)\rho(v)), \quad u, v \in \mathfrak{g},$$

называется *формой, ассоциированной с представлением* ρ. Форма k_{ad}, где $\mathrm{ad}\,(u)(v) := [u, v]$ – присоединенное представление алгебры Ли $\mathfrak{g}$, называется *формой Киллинга алгебры Ли* $\mathfrak{g}$.

Замечание 1.1. Компактная односвязная группа Ли G проста тогда и только тогда, когда алгебра Ли $\mathfrak{g}$ проста, что эквивалентно неприводимости присоединенного представления ad. При этом для любого неприводимого ненулевого представления ρ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ форма k_ρ отрицательно определена и пропорциональна скалярному произведению ν.

Теорема 1.2 [1, теорема 3.3]. *Если (G, ν) – связная компактная простая m-мерная группа Ли с биинвариантной римановой метрикой ν, то в условиях и обозначениях теоремы 1.1 справедливо соотношение*

$$\lambda_r \nu(e) = \frac{m}{d_r} k_\rho, \tag{2}$$

где $\rho = \mathrm{dr}\,(e)$.

Предложение 1.2. *Если (G, ν) – связная компактная простая m-мерная группа Ли с биинвариантной римановой метрикой ν, то тензор Риччи Ric пространства (G, ν) имеет вид*

$$\mathrm{Ric} = \left(-\frac{1}{4}\lambda_{\mathrm{Ad}}\right) \nu(e). \tag{3}$$

Другими словами, кривизна Риччи ric пространства (G, ν) постоянна и равна

$$\mathrm{ric} = -\frac{1}{4}\lambda_{\mathrm{Ad}}. \tag{4}$$

Доказательство. Формула (3) означает, что (G, ν) – многообразие Эйнштейна. Достаточно доказать формулу (4). Хорошо известно, что при данных предположениях секционная кривизна $K(X, Y)$ пространства (G, ν) в направлении двумерной площадки, определяемой парой $\{X, Y\}$ единичных взаимно ортогональных векторов $X, Y \in (\mathfrak{g}, \nu(e)) = (G_e, \nu(e))$, равна

$$K(X, Y) = \frac{1}{4}\nu(e)([X, Y], [X, Y]) = -\frac{1}{4}\nu(e)([X, [X, Y]], Y) = -\frac{1}{4}\nu(e)(\mathrm{ad}^2 X(Y), Y).$$

Кривизна Риччи $\mathrm{ric}(X) = \mathrm{Ric}(X, X)$ в направлении единичного вектора $X \in$ $\in (\mathfrak{g}, \nu(e))$ по определению равна $\sum\limits_{i=2}^{m} K(X, X_i)$, где $(X_1 = X,\, X_2, \ldots, X_m)$ – произвольный ортонормированный базис в $(\mathfrak{g}, \nu(e))$. Следовательно,

$$\mathrm{ric}(X) = \sum_{i=2}^{m} K(X, X_i) = -\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{m} \nu(e)(\mathrm{ad}^2 X(X_i), X_i) = -\frac{1}{4} k_{\mathrm{ad}}(X, X).$$

С учетом формулы (2) и равенства $d_{\mathrm{ad}} = m$ получаем равенство

$$\mathrm{ric}(X) = -\frac{1}{4}\lambda_{\mathrm{Ad}}\nu(e)(X, X) = -\frac{1}{4}\lambda_{\mathrm{Ad}},$$

что доказывает (4). □

Применяя последовательно теорему 1.2 и предложение 1.2, получаем

Следствие 1.2. *Если в условиях теоремы* 1.2 *положить* $\nu(e) = -k_{\mathrm{ad}}$, *то*

$$\lambda_{\mathrm{Ad}} = -1, \quad \mathrm{ric} = \frac{1}{4}. \tag{5}$$

Результаты из книги [2], где дается классификация всех неприводимых вещественных представлений вещественных простых алгебр Ли и указывается, к какому из трех упомянутых выше типов относится каждое такое представление, вместе с теоремой 1.1 и предложением 1.1 дают весьма эффективный метод вычисления чисел k_r, d_r и λ_r для неприводимого вещественного представления r компактной простой односвязной группы Ли. Приведем теорему, которая предоставляет способ вычисления λ_r и d_r через старший вес представления r, но прежде изложим необходимые для наших дальнейших вычислений сведения и результаты из [2].

Э. Картан доказал следующее утверждение.

Предложение 1.3. *Любая комплексная полупростая алгебра Ли* $\mathfrak{k}$ *допускает единственную с точностью до изоморфизма компактную вещественную форму* $\mathfrak{g}$, *причем* $\mathfrak{g}$ *полупроста, и проста тогда и только тогда, когда* $\mathfrak{k}$ *проста. Обратно, если* $\mathfrak{g}$ *(полу)простая компактная вещественная алгебра Ли, то ее комплексификация* $\mathfrak{k}$ *(полу)проста.*

Подалгебра Картана $\mathfrak{t}$ комплексной алгебры $\mathfrak{k}$ определяется как нильпотентная подалгебра в $\mathfrak{k}$, совпадающая со своим нормализатором в $\mathfrak{k}$. Далее предполагается, что алгебра $\mathfrak{k}$ проста и $\mathfrak{t}$ – некоторая ее подалгебра Картана.

Опуская детали, скажем, что система Γ всех *корней* алгебры Ли $\mathfrak{k}$ является некоторым подмножеством пространства $\mathfrak{t}^*$ всех $\mathbb{C}$-линейных отображений из $\mathfrak{t}$ в $\mathbb{C}$, и $\mathfrak{t}^*$ совпадает с $\mathbb{C}$-линейной оболочкой $\langle\Gamma\rangle_{\mathbb{C}}$ множества Γ. Некоторым естественным образом определяются подсистемы $\Gamma^+ \subset \Gamma$ *положительных корней* и $\Pi = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\} \subset \Gamma^+$ положительных (линейно независимых) *простых корней.* Определим следующее вещественное подпространство в $\mathfrak{t}$:

$$\mathfrak{t}(\mathbb{R}) = \{h \in \mathfrak{t} \mid \alpha(h) \in \mathbb{R} \quad \text{для всех} \quad \alpha \in \Gamma\}. \tag{6}$$

Тогда $\mathfrak{t}(\mathbb{R})$ – вещественная форма алгебры Ли $\mathfrak{t}$, и $\langle\Gamma\rangle_{\mathbb{R}} = \mathfrak{t}(\mathbb{R})^*$ можно рассматривать как вещественное дуальное пространство к $\mathfrak{t}(\mathbb{R})$. Ограничение формы Килинга $k = k_{\mathfrak{k}} = (\cdot, \cdot)$ на $\mathfrak{t}(\mathbb{R})$ вещественно и положительно определено, так что пара $(\mathfrak{t}(\mathbb{R}), (\cdot, \cdot))$ является вещественным евклидовым пространством.

Для любого комплексного представления $\rho : \mathfrak{k} \to \mathfrak{gl}(V)$ имеется разложение в прямую сумму *весовых подпространств*

$$V = \bigoplus_{\alpha \in \Phi_\rho} V_\alpha,$$

где $\Phi_\rho \subset \mathfrak{t}(\mathbb{R})^*$ – система *весов* для ρ, то есть ковекторов, для которых подпространство

$$V_\alpha = \{v \in V \mid \rho(h)(v) = \alpha(h)(v), h \in \mathfrak{t}\} \neq 0.$$

Отметим, в частности, что $\Phi_{\mathrm{ad}} = \Gamma \cup \{0\}$.

Удобно перенести форму $(\cdot,\cdot)$ на дуальное пространство $\mathfrak{t}^*$. Рассмотрим изоморфизм векторных пространств $\eta \to u_\eta$, определенный формулой

$$(u_\eta, h) = \eta(h), \quad h \in \mathfrak{t}, \tag{7}$$

он отображает $\mathfrak{t}(\mathbb{R})^*$ на $\mathfrak{t}(\mathbb{R})$. Теперь мы определяем невырожденную форму на $\mathfrak{t}^*$ по формуле

$$(\eta, \mu) = (u_\eta, u_\mu) = \eta(u_\mu) = \mu(u_\eta), \quad \eta, \mu \in \mathfrak{t}^*. \tag{8}$$

Эта форма вещественна и положительно определена на $\mathfrak{t}(\mathbb{R})^*$. Определим также вектор

$$h_\alpha = \frac{2}{(\alpha,\alpha)} u_\alpha$$

для любого ненулевого $\alpha \in \mathfrak{t}(\mathbb{R})^*$. В частности, векторы h_α, $\alpha \in \Gamma$ называются *кокорнями*. Пусть $h_i = h_{\alpha_i}$, $i = 1,\dots,l$. Тогда эти векторы образуют базис пространства $\mathfrak{t}(\mathbb{R})$, а линейные формы $\varpi_1,\dots,\varpi_l$, составляющие дуальный базис пространства $\mathfrak{t}(\mathbb{R})^*$, называются *фундаментальными весами.*

Старший вес $\Lambda \in \Phi_\rho$ *неприводимого комплексного представления* ρ комплексной простой алгебры Ли $\mathfrak{k}$ можно определить условием, что всякий вес $\omega \in \Phi_\rho$ можно представить в виде $\Lambda - \alpha_{i_1} - \dots - \alpha_{i_j}$, где $j \geq 0$ и $1 \leq i_m \leq l$, если $1 \leq m \leq j$. Известно, что тогда $\Lambda = \sum_{i=1}^{l} \Lambda_i \varpi_i$, где $\Lambda_i = \Lambda(h_i) \in \mathbb{Z}$ и $\Lambda_i \geq 0$ для всех $i = 1,\dots,l$. Обратно, всякий элемент $\Lambda \in \mathfrak{t}(\mathbb{R})^*$ с этими свойствами является старшим весом некоторого неприводимого комплексного представления алгебры Ли $\mathfrak{k}$. При этом неприводимое комплексное представление алгебры Ли $\mathfrak{k}$ с точностью до эквивалентности определяется своим старшим весом Λ.

Предложение 1.4. *Пусть $\mathfrak{k}$ – комплексная оболочка вещественной простой алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Тогда ограничение $\rho\big|_{\mathfrak{g}}$ каждого неприводимого комплексного линейного представления ρ алгебры Ли $\mathfrak{k}$ в пространстве V на алгебру Ли $\mathfrak{g}$ определяет неприводимое вещественное представление алгебры Ли $\mathfrak{g}$ ρ_0. При этом класс представления ρ_0 однозначно определяется старшим весом Λ представления ρ. Для представления ρ_0 вещественного и кватернионного типов верно и обратное утверждение. Представлению ρ_0 комплексного типа отвечают два* различных *старших веса Λ и Λ'.*

Теорема 1.3 [1, теорема 5.2]. *Предположим, что биинвариантная риманова метрика ν на компактной односвязной (связной) группе Ли $G = G^m$ определяется скалярным произведением $\nu(e) = -k_{\mathrm{ad}}$ (минус формой Киллинга) на $\mathfrak{g}$. Пусть задано неприводимое вещественное линейное представление $r : G \to GL(d_r, \mathbb{R})$*

группы Ли G, $\rho_0 = dr(e) : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(d_r, \mathbb{R})$ – *соответствующий гомоморфизм касательных алгебр Ли* (*то есть вещественное неприводимое линейное представление алгебры Ли* $\mathfrak{g}$), *являющееся ограничением на* $\mathfrak{g}$ *некоторого неприводимого комплексного представления* ρ *комплексной оболочки алгебры Ли* $\mathfrak{g}$ *со старшим весом* Λ. *Тогда для соответствующего собственного значения лапласиана* Δ *на* (G,ν) *получим равенства*

$$\lambda_r = -[(\Lambda+\beta, \Lambda+\beta) - (\beta,\beta)], \tag{9}$$

где

$$\beta = \frac{1}{2}\sum_{\alpha\in\Gamma+}\alpha, \tag{10}$$

а

$$d_r = \dim\rho_0(\Lambda) = \prod_{\alpha\in\Gamma^+}\left(\frac{(\Lambda,\alpha)}{(\beta,\alpha)}+1\right) = \prod_{\alpha\in\Gamma^+}\frac{(\Lambda+\beta,\alpha)}{(\beta,\alpha)}, \tag{11}$$

если ρ_0 *имеет вещественный тип, и*

$$d_r = \dim\rho_0(\Lambda) = 2\prod_{\alpha\in\Gamma^+}\left(\frac{(\Lambda,\alpha)}{(\beta,\alpha)}+1\right) \tag{12}$$

в противном случае.

Если $\nu(e) = -\gamma k_{\mathrm{ad}}$, *то все числа в формуле* (9) *нужно умножить на* $1/\gamma$, *а все остальное оставить без изменений.*

Теорема 1.4. *Пусть* G – *компактная односвязная* (*связная*) *простая группа Ли с биинвариантной римановой метрикой* $\nu = -\gamma k_{\mathrm{ad}}$. *Тогда кратность собственного числа* λ *лапласиана* Δ *на* (G,ν) *равна*

$$\sum_{\Lambda:\ \lambda(\Lambda)=\gamma\lambda}\ \prod_{\alpha\in\Gamma^+}\left(\frac{(\Lambda,\alpha)}{(\beta,\alpha)}+1\right)^2, \tag{13}$$

где $\lambda(\Lambda)$ *есть правая часть формулы* (9), *а* Λ *пробегает все старшие веса неприводимых комплексных представлений комплексной оболочки алгебры Ли* $\mathfrak{g}$ *группы Ли* G, *удовлетворяющие равенству* $\lambda(\Lambda) = \gamma\lambda$.

Доказательство. Из формулы (1) следует, что доказательство утверждения сводится к проверке равенства

$$\sum_{r:\lambda_r=\lambda} k_r d_r = \sum_{\Lambda:\ \lambda(\Lambda)=\lambda}\ \prod_{\alpha\in\Gamma^+}\left(\frac{(\Lambda,\alpha)}{(\beta,\alpha)}+1\right)^2. \tag{14}$$

Для доказательства (14) достаточно построить взаимно-однозначное соответствие равных групп слагаемых этих сумм.

Рассмотрим r – элемент класса эквивалентности неприводимых вещественных представлений группы Ли G. Из теоремы 3.57 книги [7] следует, что r является представлением одного из типов: U_m, rV_n или $rc'W_p$. Из предложения 1.4 получаем искомое взаимно однозначное соответствие групп слагаемых равенства (14).

1. Слагаемому $k_r d_r$, где r имеет тип U_m, соответствует единственное комплексное представление с некоторым старшим весом Λ. Из теорем 1.1 и 1.3 следует, что

$$k_r d_r = d_r^2 = \prod_{\alpha\in\Gamma^+}\left(\frac{(\Lambda,\alpha)}{(\beta,\alpha)}+1\right)^2,$$

что совпадает со слагаемым в правой части равенства (14), отвечающим старшему весу Λ.

2. Слагаемому $k_r d_r$, где r имеет тип rV_n, соответствуют два неприводимых комплексных представления равных размерностей со старшими весами Λ и Λ'. При этом $\lambda(\Lambda) = \lambda(\Lambda')$ [1]. Из теорем 1.1 и 1.3 следует, что

$$k_r d_r = \frac{d_r^2}{2} = 2 \prod_{\alpha \in \Gamma^+} \left(\frac{(\Lambda, \alpha)}{(\beta, \alpha)} + 1 \right)^2,$$

что совпадает с суммой двух слагаемых правой части равенства (14), отвечающих старшим весам Λ и Λ'.

3. Слагаемому $k_r d_r$, где r имеет тип $rc'W_p$, соответствует единственное комплексное представление со старшим весом Λ. Из теорем 1.1 и 1.3 следует, что

$$k_r d_r = \frac{d_r^2}{4} = \prod_{\alpha \in \Gamma^+} \left(\frac{(\Lambda, \alpha)}{(\beta, \alpha)} + 1 \right)^2,$$

что совпадает со слагаемым в правой части равенства (14), отвечающим старшему весу Λ. □

Следствие 1.3. *Спектры лапласиана для пространств комплексных и вещественных функций на компактной связной односвязной простой группе Ли G с биинвариантной римановой метрикой совпадают.*

Известно, что старшим весом присоединенного представления ad комплексной оболочки алгебры Ли $\mathfrak{g}$ является максимальный по высоте (сумме компонент разложения на простые корни) корень, обозначаемый в [9] как $\widetilde{\alpha}$. На основании теорем 1.1, 1.3, 1.4 и следствия 1.2 сформулируем правило вычисления спектра лапласиана группы Ли G с биинвариантной римановой метрикой, предполагая использование табл. I–IX из [9] (в которых ρ обозначает вектор β).

Следствие 1.4. *Для вычисления спектра лапласиана односвязной компактной простой группы Ли G с биинвариантной римановой метрикой ν с условием $\nu(e) = -\gamma k_{\mathrm{ad}}$ нужно:*

1) *вычислить выражение $b = \langle \widetilde{\alpha} + \beta, \widetilde{\alpha} + \beta \rangle - \langle \beta, \beta \rangle$, предполагая, что относительно скалярного произведения $\langle \cdot, \cdot \rangle$ (на $\mathfrak{t}(\mathbb{R})$) векторы ε_i из соответствующей таблицы в [9] взаимно ортогональны и единичны, где $\widetilde{\alpha}$ – старший (максимальный) корень;*

2) *взять скалярное произведение $(\cdot, \cdot) = \frac{1}{b} \langle \cdot, \cdot \rangle$;*

3) *найти фундаментальные веса $\varpi_1, \dots, \varpi_l$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ группы Ли G (если $\mathfrak{g}$ имеет ранг l) по соответствующей таблице из [9];*

4) *для каждого старшего веса $\Lambda = \sum_{i=1}^{l} \Lambda_i \varpi_i$, где $\Lambda_i \in \mathbb{Z}$ и $\Lambda_i \geq 0$, вычислить собственное число $\lambda(\Lambda)$ оператора Лапласа, отвечающее старшему весу Λ, по формуле (9), деленной на γ.*

5) *для каждого старшего веса Λ вычислить размерность $d(\Lambda + \beta)$ неприводимого комплексного представления комплексной оболочки алгебры Ли $\mathfrak{g}$ со старшим весом Λ, применяя правую часть формулы (11);*

6) *найти кратность $\sigma(\lambda)$ каждого собственного значения λ, применяя формулу (13).*

Таким образом, получаем спектр $\mathrm{Spec}\,(G, \nu)$.

Замечание 1.2. В формулах (11) и (13), применяемых в п. 5) и п. 6) следствия 1.4, вместо $(\cdot,\cdot)$ можно использовать любое пропорциональное ему скалярное произведение, в частности $\langle\cdot,\cdot\rangle$ из п. 1) следствия 1.4.

Ниже, используя следствие 1.4, найдем спектры групп $\mathbf{SU(3)}$, $\mathbf{Spin(5)}$ и $\mathbf{G_2}$.

2. Вычисление спектра группы $\mathbf{SU(3)}$

Группе $\mathbf{SU(3)}$ соответствует система корней A_2. Применяем табл. I из [9]. Простые корни имеют вид: $\{\alpha_1=\varepsilon_1-\varepsilon_2, \alpha_2=\varepsilon_2-\varepsilon_3\}$; $\widetilde{\alpha}=\beta=\alpha_1+\alpha_2=\varepsilon_1-\varepsilon_3$.

1) $b=\langle\widetilde{\alpha}+\beta,\widetilde{\alpha}+\beta\rangle-\langle\beta,\beta\rangle=3\langle\widetilde{\alpha},\widetilde{\alpha}\rangle=6=3!$

2) $(\cdot,\cdot)=\dfrac{1}{6}\langle\cdot,\cdot\rangle$.

3) Фундаментальные веса имеют вид: $\{\varpi_1=(2\varepsilon_1-(\varepsilon_2+\varepsilon_3))/3,\ \varpi_2=(\varepsilon_1+\varepsilon_2-2\varepsilon_3)/3\}$. Удобно работать с фундаментальными весами. Находим, что

$$\alpha_1=2\varpi_1-\varpi_2,\quad \alpha_2=2\varpi_2-\varpi_1,\quad \widetilde{\alpha}=\beta=\varpi_1+\varpi_2,$$

$$(\varpi_1,\varpi_1)=\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{3},\quad (\varpi_1,\varpi_2)=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{3},\quad (\varpi_2,\varpi_2)=\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{3}.$$

Пусть $\Lambda=\Lambda_1\varpi_1+\Lambda_2\varpi_2$, где $\Lambda_1,\Lambda_2\in\mathbb{Z}$ и $\Lambda_1,\Lambda_2\geq 0$. Тогда

$$\Lambda+\beta=(\Lambda_1+1)\varpi_1+(\Lambda_2+1)\varpi_2=\nu_1\varpi_1+\nu_2\varpi_2,$$

где

$$\nu_1=\Lambda_1+1,\quad \nu_2=\Lambda_2+1,\quad \nu_1,\nu_2\in\mathbb{N}.$$

4) Найдем собственное значение $\lambda(\Lambda)$, соответствующее старшему весу Λ, разделив на γ правую часть формулы (9):

$$\lambda(\Lambda)=-\frac{1}{6\gamma}[\langle\Lambda+\beta,\Lambda+\beta\rangle-\langle\beta,\beta\rangle]=$$

$$=-\frac{1}{6\gamma}[\langle\nu_1\varpi_1+\nu_2\varpi_2,\nu_1\varpi_1+\nu_2\varpi_2\rangle-\langle\varpi_1+\varpi_2,\varpi_1+\varpi_2\rangle]=$$

$$=-\frac{1}{6\gamma}\left(\frac{2}{3}\nu_1^2+\frac{2}{3}\nu_1\nu_2+\frac{2}{3}\nu_2^2-2\right)=-\frac{1}{9\gamma}\left[(\nu_1^2+\nu_1\nu_2+\nu_2^2)-3\right].$$

Таким образом,

$$\lambda(\Lambda)=-\frac{1}{9\gamma}\left[(\nu_1^2+\nu_1\nu_2+\nu_2^2)-3\right]. \tag{15}$$

5) Теперь вычислим размерность $d(\Lambda+\beta)$ представления $\rho(\Lambda)$, отвечающего старшему весу Λ, по формуле (11):

$$d(\Lambda+\beta)=\frac{(\nu_1\varpi_1+\nu_2\varpi_2,2\varpi_1-\varpi_2)}{(\varpi_1+\varpi_2,2\varpi_1-\varpi_2)}\cdot\frac{(\nu_1\varpi_1+\nu_2\varpi_2,2\varpi_2-\varpi_1)}{(\varpi_1+\varpi_2,2\varpi_2-\varpi_1)}\times$$

$$\times\frac{(\nu_1\varpi_1+\nu_2\varpi_2,\varpi_1+\varpi_2)}{(\varpi_1+\varpi_2,\varpi_1+\varpi_2)},$$

следовательно,

$$d(\Lambda+\beta)=\frac{1}{2}\nu_1\nu_2(\nu_1+\nu_2). \tag{16}$$

6) Применяя формулу (13) и полученные до этого результаты, находим

$$\sigma(\lambda) = \frac{1}{(2!)^2} \sum_{\substack{\nu^2+\nu\eta+\eta^2=3-9\gamma\lambda;\\ \nu,\eta\in\mathbb{N}}} [\nu\eta(\nu+\eta)]^2. \tag{17}$$

Наименьшее по модулю ненулевое собственное значение лапласиана равно $-2/(9\gamma)$ и соответствует неприводимым комплексным представлениям группы Ли $\mathbf{SU(3)}$ со старшими весами ϖ_1 и ϖ_2. Размерности этих представлений равны 3. Следовательно, кратность собственного значения $-2/(9\gamma)$ равна $3^2+3^2=18$.

3. Вычисление спектра группы $\mathbf{Spin(5)} = \mathbf{Sp(2)}$

Группе $\mathbf{Spin(5)}$ соответствует система корней B_2. Применяем табл. II из [9]. Простые корни имеют вид: $\{\alpha_1 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2, \alpha_2 = \varepsilon_2\}$; $\widetilde{\alpha} = \alpha_1 + 2\alpha_2 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$. Дополнительный положительный корень $\overline{\alpha} = \alpha_1 + \alpha_2 = \varepsilon_1$. Сумма положительных корней равна $2\beta = 3\varepsilon_1 + \varepsilon_2$, так что $\beta = \frac{1}{2}(3\varepsilon_1+\varepsilon_2)$, $\widetilde{\alpha}+\beta = \frac{1}{2}(5\varepsilon_1+3\varepsilon_2)$.

1) $b = \langle\widetilde{\alpha}+\beta, \widetilde{\alpha}+\beta\rangle - \langle\beta,\beta\rangle = 6 = 3!$

2) $(\cdot,\cdot) = \frac{1}{6}\langle\cdot,\cdot\rangle$.

3) Фундаментальные веса имеют вид: $\{\varpi_1 = \varepsilon_1,\ \varpi_2 = (\varepsilon_1+\varepsilon_2)/2\}$.

Вместо ϖ_1 будем использовать $\omega = \varpi_1 - \varpi_2 = (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)/2$. Тогда

$$(\omega,\omega) = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}, \quad (\omega,\varpi_2) = 0,\ (\varpi_2,\varpi_2) = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2},$$

$$\alpha_1 = 2\omega, \quad \alpha_2 = \varpi_2 - \omega, \quad \overline{\alpha} = \varpi_2 + \omega, \quad \widetilde{\alpha} = 2\varpi_2, \quad \beta = \omega + 2\varpi_2.$$

Пусть $\Lambda = \Lambda_1\varpi_1 + \Lambda_2\varpi_2$, где $\Lambda_1, \Lambda_2 \in \mathbb{Z}$ и $\Lambda_1, \Lambda_2 \geq 0$. Тогда

$$\Lambda + \beta = (\Lambda_1+1)\omega + (\Lambda_1+\Lambda_2+2)\varpi_2 = \xi_1\omega + \xi_2\varpi_2,$$

где

$$\xi_1 = \Lambda_1 + 1, \quad \xi_2 = \Lambda_1 + \Lambda_2 + 2, \quad \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{N}, \quad \xi_2 > \xi_1.$$

4) Далее,

$$\lambda(\Lambda) = -\frac{1}{6\gamma}\left(\langle\xi_1\omega+\xi_2\varpi_2, \xi_1\omega+\xi_2\varpi_2\rangle - \langle\omega+2\varpi_2, \omega+2\varpi_2\rangle\right) = -\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2\gamma}(\xi_1^2+\xi_2^2-5).$$

Таким образом,

$$\lambda(\Lambda) = -\frac{1}{12\gamma}(\xi_1^2+\xi_2^2-5). \tag{18}$$

5) Имеем:

$$d(\Lambda+\beta) = \frac{(\xi_1\omega+\xi_2\varpi_2, 2\omega)}{(2\varpi_2+\omega, 2\omega)}\cdot\frac{(\xi_1\omega+\xi_2\varpi_2, \varpi_2-\omega)}{(2\varpi_2+\omega, \varpi_2-\omega)}\times$$

$$\times\frac{(\xi_1\omega+\xi_2\varpi_2, \varpi_2+\omega)}{(2\varpi_2+\omega, \varpi_2+\omega)}\cdot\frac{(\xi_1\omega+\xi_2\varpi_2, 2\varpi_2)}{(2\varpi_2+\omega, 2\varpi_2)},$$

следовательно,

$$d(\Lambda+\beta) = \frac{1}{3!}\xi_1\xi_2(\xi_2-\xi_1)(\xi_1+\xi_2). \tag{19}$$

6) Наконец, вычисляем

$$\sigma(\lambda) = \frac{1}{(3!)^2} \sum_{\substack{\xi^2+\eta^2=5-12\gamma\lambda;\\ \xi,\eta\in\mathbb{N},\ \xi>\eta}} [\xi\eta(\xi-\eta)(\xi+\eta)]^2. \tag{20}$$

Наименьшее по модулю ненулевое значение лапласиана равно $-5/(12\gamma)$ и соответствует неприводимому комплексному представлению группы Ли $\mathbf{Spin(5)}$ со старшим весом ϖ_2. Размерность этого представления равна 4. Следовательно, кратность собственного значения $-5/(12\gamma)$ равна $4^2 = 16$.

4. Вычисление спектра группы $\mathbf{G_2}$

Группе $\mathbf{G_2}$ соответствует система корней G_2. Применим табл. IX из [9].

Простые корни имеют вид: $\{\alpha_1 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2, \alpha_2 = -2\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3\}$; $\widetilde{\alpha} = \varpi_2 = -\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + 2\varepsilon_3$. Остальные положительные корни имеют вид:

$$\alpha_1 + \alpha_2 = -\varepsilon_1 + \varepsilon_3, \quad \varpi_1 = 2\alpha_1 + \alpha_2 = -\varepsilon_2 + \varepsilon_3, \quad 3\alpha_1 + \alpha_2 = \varepsilon_1 - 2\varepsilon_2 + \varepsilon_3.$$

Кроме того,

$$\beta = -\varepsilon_1 - 2\varepsilon_2 + 3\varepsilon_3, \quad \widetilde{\alpha} + \beta = \varpi_2 - \varepsilon_1 - 2\varepsilon_2 + 3\varepsilon_3 = -2\varepsilon_1 - 3\varepsilon_2 + 5\varepsilon_3.$$

1) $b = \langle \widetilde{\alpha} + \beta, \widetilde{\alpha} + \beta \rangle - \langle \beta, \beta \rangle = 4!$

2) $(\cdot,\cdot) = \dfrac{1}{4!}\langle \cdot,\cdot \rangle$.

3) Фундаментальные веса указаны выше.

Вместо ϖ_2 будем использовать $\omega = \varpi_2 - \varpi_1 = -\varepsilon_1 + \varepsilon_3 = \alpha_1 + \alpha_2$. Тогда

$$(\varpi_1, \varpi_1) = \frac{2}{4!}, \quad (\omega, \varpi_1) = \frac{1}{4!}, \quad (\omega, \omega) = \frac{2}{4!},$$

$$\alpha_1 = \varpi_1 - \omega, \quad \alpha_2 = -\varpi_1 + 2\omega, \quad \alpha_1 + \alpha_2 = \omega, \quad 2\alpha_1 + \alpha_2 = \varpi_1,$$

$$3\alpha_1 + \alpha_2 = 2\varpi_1 - \omega, \quad \widetilde{\alpha} = 3\alpha_1 + 2\alpha_2 = \varpi_1 + \omega, \quad \beta = 2\varpi_1 + \omega.$$

Пусть $\Lambda = \Lambda_1\varpi_1 + \Lambda_2\varpi_2$, где $\Lambda_1, \Lambda_2 \in \mathbb{Z}$ и $\Lambda_1, \Lambda_2 \geq 0$. Тогда

$$\Lambda + \beta = (\Lambda_1 + \Lambda_2 + 2)\varpi_1 + (\Lambda_2 + 1)\omega = \nu_1\varpi_1 + \nu_2\omega,$$

где

$$\nu_1 = \Lambda_1 + \Lambda_2 + 2, \quad \nu_2 = \Lambda_2 + 1, \quad \nu_1, \nu_2 \in \mathbb{N}, \quad \nu_1 > \nu_2.$$

4) Собственное число $\lambda(\Lambda)$ имеет вид

$$\lambda(\Lambda) = -\frac{1}{\gamma}[(\Lambda + \beta, \Lambda + \beta) + (\beta, \beta)] = -\frac{1}{\gamma}[(\nu_1\varpi_1 + \nu_2\omega, \nu_1\varpi_1 + \nu_2\omega) - (\beta, \beta)],$$

следовательно,

$$\lambda(\Lambda) = -\frac{1}{12\gamma}(\nu_1^2 + \nu_1\nu_2 + \nu_2^2 - 7). \tag{21}$$

5) Вычисляем размерность $d(\Lambda + \beta)$. Имеем:

$$d(\Lambda + \beta) = \frac{(\nu_1\varpi_1 + \nu_2\omega, \varpi_1 - \omega)}{(2\varpi_1 + \omega, \varpi_1 - \omega)} \cdot \frac{(\nu_1\varpi_1 + \nu_2\omega, 2\omega - \varpi_1)}{(2\varpi_1 + \omega, 2\omega - \varpi_1)} \cdot \frac{(\nu_1\varpi_1 + \nu_2\omega, \omega)}{(2\varpi_1 + \omega, \omega)} \times$$

$$\times \frac{(\nu_1\varpi_1 + \nu_2\omega, \varpi_1)}{(2\varpi_1 + \omega, \varpi_1)} \cdot \frac{(\nu_1\varpi_1 + \nu_2\omega, 2\varpi_1 - \omega)}{(2\varpi_1 + \omega, 2\varpi_1 - \omega)} \cdot \frac{(\nu_1\varpi_1 + \nu_2\omega, \varpi_1 + \omega)}{(2\varpi_1 + \omega, \varpi_1 + \omega)},$$

откуда
$$d(\Lambda+\beta)=\frac{1}{5!}(\nu_1-\nu_2)\nu_2(\nu_1+2\nu_2)(2\nu_1+\nu_2)\nu_1(\nu_1+\nu_2). \tag{22}$$

6) Кратность равна
$$\sigma(\lambda)=\frac{1}{(5!)^2}\sum_{\substack{\nu^2+\nu\eta+\eta^2=7-12\gamma\lambda;\\ \nu,\eta\in\mathbb{N},\eta>\nu}}[\nu\eta(\nu+\eta)(\eta-\nu)(\nu+2\eta)(2\nu+\eta)]^2. \tag{23}$$

Наименьшее по модулю ненулевое значение лапласиана равно $-1/(2\gamma)$ и соответствует неприводимому комплексному представлению группы Ли $\mathbf{G_2}$ со старшим весом ϖ_1. Размерность этого представления равна 7. Следовательно, кратность собственного значения $-1/(2\gamma)$ равна $7^2=49$.

5. Размерность, диаметр и радиус инъективности

Предложение 1.2 говорит о том, что в рассматриваемых случаях одна из геометрических величин риманова многообразия, кривизна Риччи ric, прямо выражается через спектр лапласиана. Известно, что это верно также для размерности и объема. Поэтому уместно привести здесь данные о трех других геометрических величинах рассматриваемых многообразий, а именно, размерности dim, диаметре diam и радиусе инъективности i. В статьях [10, 11] вычислены diam и i для компактных неприводимых симметрических пространств (являющихся эйнштейновыми многообразиями) в случае $\mathrm{ric}=1/2$. Всякая группа Ли G с биинвариантной римановой метрикой ν является симметрическим пространством, неприводимым, если группа Ли G простая. Используя результаты [10] и применяя перенормировку метрики и следствие 1.2, легко находим diam и i для трех рассмотренных групп Ли в случае, когда $\nu(e)=-k_{\mathrm{ad}}$. Как известно, $\dim(\mathrm{G})=\dim(\mathfrak{g})$ равно сумме ранга и числа всех корней алгебры Ли $\mathfrak{g}$. В результате получаем следующие величины:

I. $\mathbf{SU(3)}$: $\quad \dim=8, \quad \mathrm{diam}=4\pi, \quad i=2\sqrt{3}\pi.$

II. $\mathbf{Spin(5)}$: $\quad \dim=10, \quad \mathrm{diam}=2\sqrt{6}\pi, \quad i=2\sqrt{3}\pi.$

III. $\mathbf{G_2}$: $\quad \dim=14, \quad \mathrm{diam}=\dfrac{8}{\sqrt{3}}\pi, \quad i=4\pi.$

6. Промежуточные итоги и новые вопросы

Может показаться, что мы полностью решили задачу о спектре лапласиана (для вещественных и комплексных функций) на компактных односвязных простых группах Ли G ранга два с данной биинвариантной римановой метрикой ν. Более глубокий анализ показывает, что это не так. При решении указанной задачи мы должны последовательно (и реально!) решить следующие частные задачи.

1) Является ли данное отрицательное число λ собственным значением лапласиана?

2) Если является, то требуется найти все старшие вектора Λ такие, что
$$\lambda(\Lambda)=\lambda. \tag{24}$$

3) Для каждого (известного) Λ из п. 2) необходимо вычислить размерность $d(\Lambda+\beta)$.

4) После того, как решены задачи 1) и 2), нужно вычислить кратность $\sigma(\lambda)$ собственного значения λ.

5) Кроме того, чтобы гарантировать, что в п. 2 мы нашли все решения уравнения (24), весьма желательно заранее знать число таких решений.

Из предыдущего рассмотрения ясно, что решение задачи 3) не вызывает никаких затруднений. Заметим попутно, что функция $d(\cdot)$, определенная на $\mathfrak{t}(\mathbb{R})$, является произведением линейных функций; число линейных сомножителей равно числу положительных корней; функция равна нулю на каждой прямой, ортогональной одному из этих корней; при этом значение $d(\widetilde{\alpha}+\beta)$ равно размерности рассматриваемой алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Этими условиями функция $d(\cdot)$ определяется однозначно, что существенно облегчает ее вычисление. Эти утверждения с заменой прямых на гиперплоскости верны для всех простых алгебр Ли.

Ясно, что никто не будет предъявлять нам явно всех решений уравнения (24), так что мы не будем обсуждать задачу 4). То же справедливо и для задачи 2). Конечно, если бы это было возможно, имело бы смысл найти решение следующей сверхзадачи, которая снимала бы все предыдущие вопросы:

6) Найти кратность $\sigma(\lambda)$, не зная решений задач 1) и 2).

Мы не знаем решения этого вопроса, и, скорее всего, его и не существует.

Далее будут рассматриваться оставшиеся две задачи, а именно задачи 1) и 5). В частности, будут даны полное решение задачи 1) для всех изучаемых групп и задачи 5) для группы $\mathbf{Spin(5)}$ в предположении, что известно решение основного вопроса теории чисел: вопроса о разложении натурального числа на простые множители. Правда, стоит заметить, что отсутствие практической возможности такого разложения для (очень) больших чисел является одной из основных причин существования науки криптографии и ее практических приложений.

Средства для решения задач 1) и 5) дают имеющиеся в теории чисел классические решения следующей задачи:

7) Задача представления натуральных чисел значениями положительно определенных (бинарных) целых квадратичных форм на целочисленных двумерных векторах.

До того как применить эти средства, необходимо дать итоговую формулировку результатов предыдущих трех разделов, связанных с вопросами 1) и 5), и на основании этого конкретно сформулировать возникающие варианты задачи 7). Нетрудно понять, что задачи 1) и 5) достаточно решить в случае $\gamma = 1$ (см. следствие 1.4) что мы и будем далее предполагать.

Предложение 6.1. *Пусть* (G,ν) *– одна из следующих групп:* а) $\mathbf{Spin(5)}$, б) $\mathbf{SU(3)}$, в) $\mathbf{G_2}$ *с биинвариантной римановой метрикой* ν *такой, что* $\nu(e) = -k_{\mathrm{ad}}$. *Тогда число* $\lambda \leq 0$ *является собственным значением лапласиана в том и только том случае, когда существует вектор* (x,y) *с натуральными координатами такой, что выполняются соответственно следующие условия:*

а) $x^2+y^2 = 5-12\lambda,\quad y > x,$

б) $x^2+xy+y^2 = 3-9\lambda,$

в) $x^2+xy+y^2 = 7-12\lambda,\quad x > y.$

Задача 1) состоит в том, чтобы в зависимости от случая для произвольного данного числа $\lambda \leq 0$ определить, имеет ли соответствующее диофантово уравнение а), б) или в) (правая его часть автоматически должна быть некоторым натуральным числом k, где в зависимости от рассматриваемого случая а) $k \geq 5$, б) $k \geq 3$ или в) $k \geq 7$) натуральные решения-векторы (x,y), удовлетворяющие дополнительно неравенству $y > x$ для а) и неравенству $x > y$ для в).

Задача 5) заключается в следующем: если такие решения есть, то необходимо найти число таких решений для фиксированного натурального числа k.

7. Целочисленные бинарные квадратичные формы

В этом разделе приводятся все необходимые сведения о (классических) решениях задачи 7), применяемых в следующем разделе для решения поставленных нами конкретных задач теории чисел (см. предыдущий раздел). Практически все сведения даются по книге Э. Ландау [12]. Поэтому параллельно дается и широко используется нумерация определений, теорем и следствий согласно этой книге.

Определение 7.1 [12, определение 32]. Если a, b и c являются целыми числами, то выражение

$$F = F(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$$

называется *бинарной квадратичной формой*, или для краткости *формой*. Будем использовать следующее обозначение: $F = (a, b, c)$. *Дискриминантом* формы называется число $d = b^2 - 4ac$. Форма $F = (a, b, c)$ называется *примитивной*, если НОД $(a, b, c) = 1$.

Всегда выполняется сравнение $d \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 4)$ или $1 (\mathrm{mod}\ 4)$. Форма $F = (a, b, c)$ положительно определена тогда и только тогда, когда $a > 0$ и $d < 0$. Далее будем рассматривать главным образом примитивные положительно определенные формы. Ясно, что для любого целочисленного ненулевого вектора (x, y) число $F(x, y) = k$ является положительным целым (то есть натуральным) числом; в этом случае вектор (x, y) можно понимать как решение диофантова уравнения $F(x, y) = k$ для фиксированного числа $k \in \mathbb{N}$. Нас будут интересовать только такие решения.

Определение 7.2 [12, определение 35]. Будем говорить, что $F(x, y) = k$ является собственным представлением числа k формой F (для данного целочисленного вектора (x, y)), если НОД $(x, y) = 1$, и несобственным, если НОД $(x, y) >$ > 1.

Следующие теоремы дают число представлений числа k формой $F_{-4} = x^2 + y^2$.

Теорема 7.1 [12, теорема 164]. *Натуральное число k может быть представлено в виде суммы двух квадратов*

$$k = x^2 + y^2 \tag{25}$$

тогда и только тогда, когда k не имеет никакого простого делителя p с условием $p \equiv 3 (\mathrm{mod}\ 4)$, входящего в его разложение на простые множители в нечетной степени.

Теорема 7.2 [12, теорема 163]. *Для фиксированного натурального числа k такого, что диофантово уравнение* (25) *имеет решение, число решений уравнения* (25) *равно учетверенной разности количеств (натуральных) делителей d числа k вида $d \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 4)$ и делителей d числа k вида $d \equiv 3 (\mathrm{mod}\ 4)$.*

Если

$$U = \begin{pmatrix} r & t \\ s & u \end{pmatrix} \in GL(2, \mathbb{Z})$$

(то есть U – матрица с целочисленными элементами и определителем $\det(U) = \pm 1$) и $(x, y) = (X, Y)U$, то легко доказать, что

$$F(x, y) = F'(X, Y), F' = (a', b', c') \in \mathbb{Z}^3.$$

Определение 7.3 [12, определение 33]. Будем говорить, что форма $F = (a, b, c)$ является (собственно) эквивалентной форме $F' = (a', b', c')$, если существует матрица $U \in GL(2, \mathbb{Z})$ (соответственно, $U \in SL(2, \mathbb{Z})$) такая, что F переводится в F' описанным выше способом.

Имеют место следующие утверждения.

Теорема 7.3 [12, теоремы 191–194)]. *(Собственная) эквивалентность бинарных квадратичных форм является рефлексивным, симметричным и транзитивным отношением. Если форма $F = (a, b, c)$ эквивалентна форме $F' = (a', b', c')$, то $d' = b'^2 - 4a'c' = d$ и $aa' > 0$.*

Теорема 7.4 [12, теорема 195]. *Эквивалентные формы представляют одни и те же числа. Более точно, (конечное) количество представлений заданного числа $k \in \mathbb{N}$ формами, то есть число решений соответствующих диофантовых уравнений, одно и то же.*

Теорема 7.5 [12, теорема 196]. *Каждый класс (собственно эквивалентных форм) содержит форму, для которой*

$$|b| \leq |a| \leq |c|.$$

Теорема 7.6 [12, теорема 198]. *Если $d < 0$, то каждый класс (собственно эквивалентных форм) содержит ровно одну форму, для которой $-a < b \leq a < c$ или $0 \leq b \leq a = c$.*

Из этих теорем следует, что число классов собственно эквивалентных форм с фиксированным дискриминантом d, так называемое *число класса* $h(d)$, конечно. Более того, теорема 198 из [12] позволяет, в принципе, вычислить число класса $h(d)$ для положительно определенных форм с $d < 0$. Из этой теоремы можно непосредственно вывести следующее утверждение.

Следствие 7.1. *Для положительно определенных форм $h(-3) = 1$ и $h(-4) = 1$. Соответствующие (так называемые сокращенные) формы – это $F_{-3}(x, y) = x^2 + xy + y^2$ и $F_{-4}(x, y) = x^2 + y^2$.*

Из этого следствия и теорем 203 и 204 из [12] вытекает следующая теорема.

Теорема 7.7. *Пусть k – натуральное число, $d = -3$ (соответственно, $d = -4$) и* НОД$(k, d) = 1$. *Тогда число $\psi(k)$ представлений числа k формой $F_{-3}(x, y) = x^2 + xy + y^2$ (соответственно, $F_{-4}(x, y) = x^2 + y^2$) конечно, и его значение находится из равенства*

$$\psi(k) = w \sum_{n|k} \left(\frac{d}{n}\right), \tag{26}$$

где $w = 6$ (соответственно, $w = 4$), $n|k$ означает, что n – делитель числа k, а $\left(\frac{d}{n}\right)$ – символ Кронекера.

Напомним определение символа Кронекера только для $d = -3$.

Определение 7.4. (Символ Кронекера) (ниже p всегда обозначает простое число). Пусть n – натуральное число. Тогда $\left(\frac{-3}{n}\right)$ понимается в следующем смысле: $\left(\frac{-3}{2}\right) = -1$; $\left(\frac{-3}{p}\right) = 1$ (соответственно, -1) для $p > 3$, если сравнение $x^2 \equiv -3(\text{mod } p)$ имеет (соответственно, не имеет) целочисленного решения x; $\left(\frac{-3}{n}\right) = \prod_{r=1}^{v}\left(\frac{-3}{p_r}\right)$ для $n = \prod_{r=1}^{v} p_r$ (в частности, равно 1 для $n = 1$).

Теорема 7.8 [12, теорема 201]. *Пусть $F(x,y) = k$ является собственным представлением натурального числа k. Тогда существует единственный способ выбора целых чисел r, s, l, удовлетворяющих условиям*

$$\begin{vmatrix} x & r \\ y & s \end{vmatrix} = 1,$$

$$l^2 \equiv d(\text{mod } 4k), \quad 0 \le l < 2k. \tag{27}$$

и F переходит в форму (k,l,m) посредством преобразования $\begin{pmatrix} x & r \\ y & s \end{pmatrix}$, где m – число, которое в соответствии с (27) определяется равенством $l^2 - 4km = d$.

В случае собственных представлений может быть полезна следующая теорема, которая вытекает из следствия 7.1 и теорем 201, 203 из [12].

Теорема 7.9. *Количество собственных представлений*

$$x^2 + xy + y^2 = k \tag{28}$$

натурального числа k равно ушестеренному количеству решений отношений

$$l^2 \equiv -3(\text{mod } 4k), \quad 0 < l < 2k. \tag{29}$$

В основном теорема 7.9 нам интересна, когда НОД$\,(k,3) \neq 1$.

Предложение 7.1. *Если $k = 3^{2r}m$ или $k = 3^{2r+1}m$, где r является натуральным числом и* НОД$\,(3,m) = 1$, *то k не имеет собственных представлений формой (28). Более того, любое решение (x,y) диофантова уравнения (28) имеет вид $(x,y) = 3^r(X,Y)$, где $(X,Y) \in \mathbb{Z}^2$ и $F_{-3}(X,Y) = m$ или $F_{-3}(X,Y) = 3m$.*

Доказательство. Для этих значений k первое соотношение в (29) принимает вид $l^2 \equiv -3(\text{mod } 4(3^{2r}m))$ или $l^2 \equiv -3(\text{mod } 4(3^{2r+1}m))$. Тогда $l = 3s$ для некоторого натурального числа s, и получаем, сокращая на 3, что $3s^2 \equiv -1(\text{mod } 4(3^{2r}m))$ или $3s^2 \equiv -1(\text{mod } 4(3^{2r}m))$, что невозможно. Из теоремы 7.9 следует, что k не имеет собственного представления формой (28). Используя теорему 7.9, можно легко доказать второе утверждение предложения индукцией по числу делителей в разложении на простые множители числа k. □

Замечание 7.1. Теорема 7.7 и предложение 7.1 показывают, что ответ на вопрос о числе представлений числа k в форме (28) известен полностью в случае, если в разложение числа k на простые множители число 3 входит в четной степени. В остальных случаях все сводится к случаю, когда $k = 3m$ и НОД$\,(m,3) = 1$. Тогда отношения (29) принимают следующий вид:

$$l^2 \equiv -3(\text{mod } 12m)), \quad 0 < l < 6m. \tag{30}$$

Число шесть (соответственно, четыре), появляющееся в теоремах 7.7 и 7.9 (соответственно, в теоремах 7.7 и 7.2), связано с тем фактом, что целочисленные решетки, определенные базисом $\{\varpi_1, \varpi_2\}$ для $\mathbf{SU(3)}$ и $\{\varpi_1, \omega\}$ для $\mathbf{G_2}$ (соответственно, базисом $\{\omega, \varpi_2\}$ для $\mathbf{Spin(5)}$), являются регулярными шестиугольными решетками (соответственно, квадратной решеткой), и поэтому эти решетки имеют циклическую группу поворотных симметрий порядка шесть (соответственно, четыре). Заметим, что если k не имеет делителя вида n^2, где $n > 1$, то диофантово уравнение (28) не имеет несобственных решений.

Отметим книги по теории чисел и теории квадратичных форм [13–18], посвященные вопросам, близким к рассматриваемым в настоящей работе.

8. Заключение

Теорема 8.1. *Пусть $G = \mathbf{Spin(5)}$ с биинвариантной римановой метрикой ν такой, что $\nu(e) = -k_{\mathrm{ad}}$. Тогда верны следующие утверждения.*

I) *Число $\lambda \leq 0$ является собственным значением лапласиана на (G, ν) тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:*

1) *12λ является целым (неположительным) числом;*

2) *натуральное число $k = 5 - 12\lambda$ представимо в виде суммы квадратов двух различных натуральных чисел.*

II) *Утверждение 2) верно тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:*

3) *k не имеет никакого простого делителя p с условием $p \equiv 3 (\mathrm{mod}\ 4)$, входящего в его разложение на простые множители в нечетной степени;*

4) *если $k = n^2$ или $k = 2n^2$, то дополнительно $\phi(k) > 1$, где $\phi(k)$ равно разности количеств (натуральных) делителей d числа k вида $d \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 4)$ и делителей d числа k вида $d \equiv 3 (\mathrm{mod}\ 4)$.*

III) *Пусть верны все перечисленные выше утверждения. Тогда число старших векторов Λ таких, что $\lambda(\Lambda) = \lambda$, равно $(\phi(k) - 1)/2$, если $k = n^2$ или $k = 2n^2$ для некоторого натурального числа n, и $\phi(k)/2$ в противоположном случае.*

Доказательство. Утверждение I) является вариантом соответствующей задачи 1) из разд. 6. Утверждения II) и III) непосредственно следуют из теорем 7.1 и 7.2 соответственно, так как мы должны подсчитывать только целочисленные векторы-решения (x, y) уравнения (25), лежащие в секторе $y > x > 0$, а в декартовых прямоугольных координатах ортогональные отражения относительно прямых $x = 0$, $y = 0$, $y = x$, $y = -x$ дают для каждого такого решения еще семь решений; при этом нужно отбросить все решения уравнения (25), лежащие на этих прямых. □

Теорема 8.2. *Пусть $G = \mathbf{SU(3)}$ с биинвариантной римановой метрикой ν такой, что $\nu(e) = -k_{\mathrm{ad}}$. Тогда верны следующие утверждения.*

I) *Число $\lambda \leq 0$ является собственным значением лапласиана на (G, ν) тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:*

1) *9λ является целым (неположительным) числом;*

2) *натуральное число $k = 3 - 9\lambda$ представимо в виде суммы*

$$k = x^2 + xy + y^2 \tag{31}$$

с натуральными числами x, y.

II) *Утверждение 2) верно тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих условий:*

3а) *k не имеет простого делителя 3 и не равно квадрату натурального числа,* 3б) *$\psi(k)$ из формулы (26) положительно;*

4а) *k не имеет простого делителя* 3 *и равно квадрату натурального числа,* 4б) $\psi(k) > 6$*;*

5а) $k = 3^{2r}m$ *для некоторых натуральных чисел* r, m*, причем* НОД$(m,3) = 1$, 5б) *m удовлетворяет условию* 3) *или* 4) *при замене k на m;*

6а) $k = 3^{2r+1}m$ *для некоторого натурального числа m и неотрицательного целого числа r, где* НОД$(m,3) = 1$, 6б) *существуют натуральные числа s и n такие, что $m = sn^2$ и существуют решения сравнения* $l^2 \equiv -3 (\mathrm{mod}\ 12s)$, *с целым l,* $0 < l < 6s$.

III) *Пусть выполняются условие* 1) *и одно из условий* 3), 4), 5). *Тогда число старших векторов Λ таких, что $\lambda(\Lambda) = \lambda$, равно $\psi(k)/6$ в случае* 3), $(\psi(k)-6)/6$ *в случае* 4), *а в случае* 5), *равно $\psi(m)/6$, если m удовлетворяет условию* 3), *и* $(\psi(m)-6)/6$, *если m удовлетворяет условию* 4).

Доказательство. Утверждение I) является вариантом соответствующей задачи 1) из разд. 6 для группы $G = \mathbf{SU(3)}$.

II) На евклидовой плоскости введем базис из векторов α, β со скалярными произведениями $(\alpha,\alpha) = (\beta,\beta) = 1$, $(\alpha,\beta) = 1/2$. Тогда квадрат длины любого вектора $v = x\alpha + y\beta$ с целыми координатами x, y равен неотрицательному целому (натуральному, если $v \neq 0$) числу $F(x,y) = x^2 + xy + y^2$. Рассмотрим решетку всех таких векторов. Нас интересует только сектор $x > 0$, $y > 0$ этой решетки, который мы будем обозначать S. Вращением этого сектора вокруг начала координат на углы, кратные $\pi/3$, получаются все точки решетки, кроме точек, лежащих на прямых $x = 0$, $y = 0$, $x = -y$.

Докажем необходимость сформулированных условий. Каждое натуральное число k обладает одним из свойств 3а), 4а), 5а), 6а). Предположим, что k обладает свойством 2). Тогда в случаях 3а) и 4а) должно быть $\psi(k) > 0$ вследствие теоремы 7.7. В случае 4а) нужно отбросить все решения, лежащие на прямых $x = 0$, $y = 0$, $x = -y$. Таких решений ровно шесть. Поэтому вследствие теоремы 7.7 должно быть $\psi(k) > 6$. В случае 5а) вследствие предложения 7.1 всякое решение уравнения (31) имеет вид $(x,y) = 3^r(X,Y)$, где (X,Y) – натуральное решение уравнения $X^2 + XY + Y^2 = m$. Тогда m имеет вид 3а) или 4а). Применяя уже проведенные рассуждения, видим, что должно выполняться и условие 5б). Если не выполняется ни одно из условий 3а), 4а), 5а), то мы находимся в условиях 6а). Если $r > 0$, то вследствие предложения 7.1 всякое решение уравнения (31) имеет вид $(x,y) = 3^r(X,Y)$, где (X,Y) – натуральное решение уравнения $X^2 + XY + Y^2 = 3m$. Если (X,Y) – собственное решение, то на основании теоремы 7.9 выполнено условие 6б) для $n = 1$ и $s = m$. Иначе $(X,Y) = n(X_1,Y_1)$ с натуральными $n > 1$ и X_1, Y_1, причем НОД$(X_1,Y_1) = 1$, $X_1^2 + X_1Y_1 + Y_1^2 = s$, где $s \in \mathbb{N}$ и $m = sn^2$. Применяя теорему 7.9 к (X_1,Y_1), видим, что выполнено условие 6б). Если $r = 0$, то для решения (x,y) справедливы рассуждения, проведенные для (X,Y).

Докажем достаточность. Пусть выполняется одно из условий 3)–6). В случае 3) уравнение (31) не имеет решений вида $(x,0)$ или $(0,y)$, и вследствие наличия указанных выше поворотных симметрий решетки нет решений ни на одной из прямых $x = 0$, $y = 0$, $x = -y$, но на основании теоремы 7.7 есть натуральное решение уравнения (31). В случае 4), используя симметрии решетки и теорему 7.7, видим, что есть ровно шесть решений уравнения (31), лежащих на прямых $x = 0$, $y = 0$, $x = -y$, и, следовательно, есть натуральное решение уравнения (31). В случае 5) на основании проведенных выше рассуждений существуют натуральные (X,Y) такие, что $X^2 + XY + Y^2 = m$. Тогда $x^2 + xy + y^2 = k$ для $(x,y) = 3^r(X,Y)$. В случае 6) вследствие теоремы 7.9 существуют натуральные (X,Y) такие, что $X^2 + XY + Y^2 = s$. Тогда $x^2 + xy + y^2 = k$ для $(x,y) = 3^r n(X,Y)$.

III) Пусть выполняются условие 1) и одно из условий 3), 4), 5). В случаях 3) и 4) достаточно применить соображения симметрии и теорему 7.7, а в случае 5) – то же самое и дополнительно предложение 7.1. □

Теорема 8.3. *Пусть $G = \mathbf{G_2}$ с биинвариантной римановой метрикой ν такой, что $\nu(e) = -k_{\mathrm{ad}}$. Тогда верны следующие утверждения.*

I) *Число $\lambda \leq 0$ является собственным значением лапласиана на (G, ν) тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:*

1) *12λ является целым (неположительным) числом;*
2) *натуральное число $k = 7 - 12\lambda$ представимо в виде суммы*

$$k = x^2 + xy + y^2 \tag{32}$$

с натуральными числами x, y, где $x > y$.

II) *Утверждение* 2) *верно тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих условий:*

3а) *k не имеет простого делителя 3 и не равно квадрату натурального числа,* 3б) *$\psi(k)$ из формулы* (26) *положительно;*

4а) *k не имеет простого делителя 3 и равно квадрату натурального числа,* 4б) *$\psi(k) > 6$;*

5а) *$k = 3^{2r}m$ для некоторых натуральных чисел r, m, причем* НОД$(m, 3) = 1$, 5б) *m удовлетворяет условию* 3) *или* 4) *при замене k на m;*

6а) *$k = 3^{2r+1}m$ для некоторого натурального числа $m > 1$ и неотрицательного целого числа r, где* НОД$(m, 3) = 1$, 6б) *существуют натуральные числа $s > 1$ и n такие, что $m = sn^2$, и существуют решения сравнения $l^2 \equiv -3 (\mathrm{mod}\ 12s)$ с целым l, $0 < l < 6s$.*

III) *Пусть выполняются условие* 1) *и одно из условий* 3), 4), 5). *Тогда число старших векторов Λ таких, что $\lambda(\Lambda) = \lambda$, равно $\psi(k)/12$ в случае* 3), *$(\psi(k) - 6)/12$ в случае* 4), *а в случае* 5) *равно $\psi(m)/12$, если m удовлетворяет условию* 3), *и равно $(\psi(m) - 6)/12$, если m удовлетворяет условию* 4).

Доказательство. Практически все утверждения и рассуждения из теоремы 8.2 сохраняются. Отличие состоит в том, что дополнительно нужно отбросить решения вида (x, y), где $x = y$ или $y > x$. Изменения в формулировке состоят в том, что в условиях 6а) и 6б) дополнительно предполагается, что m, $s > 1$ (потому что уравнение (31) для $k = 3$ не имеет решения с $x > y$), а в утверждении III) число $1/6$ заменено числом $1/12$ (потому что из двух решений (x, y), где $x \neq y$, мы должны выбрать только одно). К симметриям из доказательства предыдущей теоремы нужно добавить перестановки координат.

Ясно, что утверждение I) не требует доказательства. Если (x, y), где $x = y$, есть решение уравнения (31), то $k = 3n^2$ с натуральным n. Тогда таких решений нет в случаях 3), 4), 5). Поэтому доказательства утверждения II) в этих случаях и всего утверждения III) не изменяются, за исключением дополнительного применения перестановки координат.

Таким образом, остается доказать необходимость и достаточность нового условия 6) в случае, когда $k = 3^{2r+1}m$ и НОД$(m, 3) = 1$, при доказательстве утверждения II). Докажем необходимость. Как и в доказательстве предыдущей теоремы, все сводится к случаю $k = 3m$. Как говорилось выше, случай $m = 1$ невозможен. Следовательно, выполнено условие 6а). Пусть есть (x, y) – решение уравнения (31) с условием $x > y$. Если (x, y) – собственное решение, то вследствие теоремы 7.9 выполнено условие 6б) для $s = m$ и $n = 1$. Иначе $(x, y) = n(X, Y)$ с натуральными $n > 1$ и $X > Y$, причем НОД$(X, Y) = 1$, $X^2 + XY + Y^2 = 3s$, где $s \in \mathbb{N}$

и $m = sn^2$. При этом $s > 1$, так как $X > Y$. Применяя теорему 7.9 к (X, Y), видим, что выполнено условие 6б). Докажем достаточность. Пусть соблюдается условие 6). Из теоремы 7.9 следует существование собственного решения (X, Y) уравнения $X^2 + XY + Y^2 = 3s$ с $s > 1$. При этом $X \neq Y$. Иначе $X = Y > 1$ и (X, Y) не является собственным решением. Тогда можно считать, что $X > Y$. Следовательно, $(x, y) = n(X, Y)$ – требуемое решение уравнения (31). $\square$

Summary

V.N. Berestovskii, V.M. Svirkin. The Laplace Operator Spectrum on Compact Simply Connected Rank Two Lie Groups.

In the paper, we suggest an algorithm for calculation of the Laplace operator spectrum for real-valued functions defined on a compact simply connected simple Lie group with a bi-invariant Riemannian metric and establish a connection of the Ricci curvature of this metric with the spectrum. By means of the algorithm suggested and with the use of results of the number theory and the theory of integral binary quadratic forms, an explicit calculation of the spectrum for all compact simply connected simple Lie groups of rank two is given.

Key words: Laplace operator, spectrum, group representation, Killing form, Ricci curvature.

Литература

1. *Берестовский В.Н., Свиркин В.М.* Оператор Лапласа на однородных нормальных римановых многообразиях // Матем. труды. – 2009. – Т. 12, № 2. – С. 3–40.

2. *Onishchik A.L.* Lectures on Real Semisimple Lie Algebras and Their Representations. ESI Lectures in Mathematics and Physics. – Zurich, Switzerland: Europ. Math. Soc., 2004. – 86 p.

3. *Onishchik A.L.*, Topology of Transitive Transformation Groups. – Leipzig, Berlin, Heidelberg: Johann Ambrosius Bart, 1994. – 300 p.

4. *Иосида К.* Функциональный анализ. – М.: Мир, 1967. – 624 с.

5. *Хелгасон С.* Дифференциальная геометрия и симметрические пространства. – М.: Мир, 1964. – 534 с.

6. *Вейль А.* Интегрирование в топологических группах и его применения. – М.: Иностр. лит., 1950. – 220 с.

7. *Адамс Дж.* Лекции по группам Ли. – М.: Наука, 1979. – 144 с.

8. *Понтрягин Л.С.* Непрерывные группы. – М.: Наука, 1973. – 520 с.

9. *Бурбаки Н.* Группы и алгебры Ли. Главы IV–VI. – М.: Мир, 1972. – 334 с.

10. *Yang L.* Injectivity radius and Cartan polyhedron for simply connected symmetric spaces. – arXiv:math/0609627 [math.DG]. – 2006. – 22 Sep. – 16 p.

11. *Yang L.* Injectivity radius for non-simply connected symmetric spaces via Cartan polyhedron // Osaka J. Math. – 2008. – V. 45. – P. 511–540.

12. *Landau L.* Elementary Number Theory. – N. Y.: Chealsea Publ. Comp., 1966. – 256 p.

13. *Дэвенпорт Г.* Высшая арифметика. Введение в теорию чисел. – М.: Наука, 1965. – 176 с.

14. *Касселс Дж.* Рациональные квадратичные формы. – М.: Мир, 1982. – 438 с.

15. *Buchmann J., Vollmer U.* Binary Quadratic Forms (An Algorithmic Approach). – Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2007. – 318 p.

16. *Buell D.A.* Binary Quadratic Forms (Classical Theory and Modern Computations). – New York, Berlin, Heidelberg, London, Paris, Tokyo, Hong Kong: Springer-Verlag, 1989. – 247 p.

17. *Conway J.H.* The Sensual (quadratic) Form. – Washington DC: Math. Assoc. Amer., 1997. – 152 p.

18. *Gerstein L.J.* Basic Quadratic Forms. Graduate Studies in Mathematics. V. 90. – Providence, Rhode Island: Amer. Math. Soc., 2008. – 255 p.

Поступила в редакцию
12.08.09

Берестовский Валерий Николаевич – доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник Омского филиала Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН.

E-mail: *berestov@ofim.oscsbras.ru*

Свиркин Виктор Михайлович – аспирант Омского филиала Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН.

E-mail: *svirkin@ofim.oscsbras.ru*