УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ КАЗАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
Том 151, кн. 4 Физико-математические науки *2009*

УДК 513.7

ПОЧТИ ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ ОТОБРАЖЕНИЯ ТИПА π_1 НА ОБОБЩЕННО РИЧЧИ-СИММЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

В.Е. Березовский, Й. Микеш

Аннотация

Получены необходимые и достаточные условия для того, чтобы многообразие с линейной связностью допускало почти геодезическое отображение типа π_1 в смысле Н.С. Синюкова на обобщенно риччи-симметрическое пространство.

Ключевые слова: почти геодезическое отображение типа π_1, обобщенно риччи-симметрическое пространство, пространство аффинной связности.

Введение

Настоящая статья посвящена изучению почти геодезических отображений типа π_1 пространств аффинной связности на обобщенно риччи-симметрические пространства аффинной связности.

Почти геодезические отображения пространств аффинной связности ввел в рассмотрение Н.С. Синюков, который выделил три типа таких отображений: π_1, π_2 и π_3 (см. [1]). В работе [2] доказано, что других типов почти геодезических отображений не существует.

В работе [1] рассматривались почти геодезические отображения типа π_1 пространств аффинной связности A_n на римановы риччи-симметрические пространства. Для этого случая найдены основные уравнения в виде замкнутой системы типа Коши в ковариантных производных. Эти результаты был обобщены в работе [3] на случай, когда A_n отображается на риманово (или, что особо не оговариваем, псевдо-риманово) пространство.

В настоящей статье получено обобщение указанных выше результатов для случая канонических почти геодезических отображений типа π_1 пространств аффинной связности на обобщенно риччи-симметрические пространства аффинной связности.

1. Почти геодезические отображения типа π_1

Понятие почти геодезических отображений использовалось В.М. Чернышенко [4]. Такое же понятие (но в другом смысле) было введено в рассмотрение и изучалось Н.С. Синюковым [1, 5, 6].

Пусть A_n и $\bar{A}_n$ – пространства аффинной связности без кручения, размерность которых $n > 2$.

Определение 1 [1, 5, 6]. Диффеоморфизм $f\colon A_n \to \bar{A}_n$ называется *почти геодезическим отображением*, если каждая геодезическая линия пространства A_n переходит в почти геодезическую линию пространства $\bar{A}_n$.

Почти геодезические отображения типа π_1 в общей по отношению к отображению системе координат $\{x_i\}$ характеризуются уравнениями

$$P^h_{(ij,k)} + P^\alpha_{(ij}P^h_{k)\alpha} = a_{(ij}\delta^h_{k)} + b_{(i}P^h_{jk)}, \tag{1}$$

где $P^h_{ij}(x) \equiv \bar{\Gamma}^h_{ij}(x) - \Gamma^h_{ij}(x)$ – тензор деформации объектов связностей $\bar{\Gamma}^h_{ij}(x)$ и $\Gamma^h_{ij}(x)$ пространств A_n и $\bar{A}_n$ соответственно, δ^h_k – символ Кронекера, a_{ij} и b_i – некоторые тензоры.

Запятой здесь и далее обозначаем ковариантную производную по отношению к связности пространства A_n.

Н.С. Синюковым были выделены канонические почти геодезические отображения, которые он обозначил через $\widetilde{\pi}_1$. Эти отображения характеризуются нулевым тензором b_i. Таким образом, отображения типа $\widetilde{\pi}_1$ характеризуются уравнениями

$$P^h_{(ij,k)} + P^\alpha_{(ij}P^h_{k)\alpha} = a_{(ij}\delta^h_{k)}. \tag{2}$$

Заметим, что любое отображение типа π_1 можно представить в виде композиции отображения типа $\widetilde{\pi}_1$ и некоторого геодезического отображения.

2. Риччи-симметрические и обобщенно риччи-симметрические пространства

Риччи-симметрическим пространством называют пространство аффинной связности $\bar{A}_n$, в котором тензор Риччи абсолютно параллелен (то есть он ковариантно постоянен):

$$\bar{R}_{ij;k} = 0,$$

где “ ; ” обозначает ковариантную производную по отношению к связности пространства $\bar{A}_n$.

В [1] доказано, что множество всех отображений $\widetilde{\pi}_1$ пространства аффинной связности A_n на риччи-симметрические (псевдо-) римановы пространства $\bar{A}_n$, получается из решений некоторой системы дифференциальных уравнений типа Коши в ковариантных производных (более детально это объясняется в монографии [1, с. 34–35]). Следовательно, семейство всех риччи-симметрических римановых пространств, на которые допускает отображение типа $\widetilde{\pi}_1$ заданное пространство аффинной связности A_n, зависит от конечного числа параметров.

В дальнейшем этот результат мы обобщаем на случай обобщенно риччи-симметрических пространств аффинной связности.

Обобщенно риччи-симметрическим пространством $\bar{A}_n$ называем пространство аффинной связности, в котором тензор Риччи удовлетворяет условиям

$$\bar{R}_{ij;k} + \bar{R}_{ik;j} = 0. \tag{3}$$

Если тензор Риччи является симметрическим и выполняются условия (3), то он абсолютно параллельный, то есть $\bar{R}_{ij;k} = 0$, и, таким образом, $\bar{A}_n$ есть риччи-симметрическое пространство.

3. Почти геодезические отображения типа $\widetilde{\pi}_1$ на обобщенно риччи-симметрические пространства

Пусть A_n и $\bar{A}_n$ – n-мерные пространства аффинной связности. Диффеоморфизм $f\colon A_n \to \bar{A}_n$ будет каноническим почти геодезическим отображением типа $\widetilde{\pi}_1$ тогда и только тогда, когда в общей по отношению к отображению системе координат выполняются условия [1, 6]:

$$3(P^h_{ij,k} + P^h_{k\alpha}P^\alpha_{ij}) = R^h_{(ij)k} - \bar{R}^h_{(ij)k} + a_{(ij}\delta^h_{k)}, \tag{4}$$

где P^h_{ij} – тензор деформации, a_{ij} – некоторый тензор, R^h_{ijk}, $\bar{R}^h_{ijk}$ – тензоры кривизны пространств A_n и $\bar{A}_n$ соответственно.

Соотношение (4) можно рассматривать как систему уравнений в ковариатных производных относительно неизвестных функций P^h_{ij} в A_n.

Условия интегрируемости уравнений (4) имеют вид:

$$\bar{R}^h_{(ij)[k,\ell]} = R^h_{(ij)[k,\ell]} + \delta^h_{(i}a_{jk),\ell} - \delta^h_{(i}a_{j\ell),k} + 3(P^\alpha_{ij}\bar{R}^h_{\alpha k\ell} - P^h_{\alpha(j}R^\alpha_{i)k\ell}) -$$
$$- P^h_{\alpha k}(R^\alpha_{(ij)\ell} - \bar{R}^\alpha_{(ij)\ell} + \delta^\alpha_{(i}a_{j\ell)}) + P^h_{\alpha\ell}(R^\alpha_{(ij)k} - \bar{R}^\alpha_{(ij)k} + \delta^\alpha_{(i}a_{jk)}).$$

Переходим от $\bar{R}^h_{ijk,l}$ к $\bar{R}^h_{ijk;l}$ и из условий интегрируемости системы (4) в итоге получим уравнения:

$$\bar{R}^h_{(ij)[k;\ell]} = \delta^h_{(i}a_{jk),\ell} - \delta^h_{(i}a_{j\ell),k} + \Theta^h_{ijk\ell}, \tag{5}$$

где

$$\Theta^h_{ijk\ell} = R^h_{(ij)[k,\ell]} + 3(P^\alpha_{ij}\bar{R}^h_{\alpha k\ell} - P^h_{\alpha(j}R^\alpha_{i)k\ell}) -$$
$$- P^h_{\alpha k}(R^\alpha_{(ij)\ell} - \bar{R}^\alpha_{(ij)\ell} + \delta^\alpha_{(i}a_{j\ell)}) + P^h_{\alpha\ell}(R^\alpha_{(ij)k} - \bar{R}^\alpha_{(ij)k} + \delta^\alpha_{(i}a_{jk)}) -$$
$$- P^\alpha_{\ell(i}\bar{R}^h_{|\alpha|j)k} - P^\alpha_{\ell(i}\bar{R}^h_{j)\alpha k} + P^\alpha_{k(i}\bar{R}^h_{|\alpha|j)\ell} + P^\alpha_{k(i}\bar{R}^h_{j)\alpha\ell}.$$

Здесь символ $|\alpha|$ обозначает, что индекс α не участвует в циклическом суммировании. Используя тождества Риччи, условия (5) можно записать в виде

$$\bar{R}^h_{i\ell k;j} + \bar{R}^h_{j\ell k;i} = \delta^h_{(i}a_{jk),\ell} - \delta^h_{(i}a_{j\ell),k} + \Theta^h_{ijk\ell}.$$

Свертывая последнее соотношение по индексам h и k, получим следующее соотношение для ковариантных производных тензора Риччи пространства $\bar{A}_n$:

$$\bar{R}_{i\ell;j} + \bar{R}_{j\ell;i} = (n+1)a_{ij,\ell} - a_{\ell(i,j)} + \Theta^\alpha_{ij\alpha\ell}. \tag{6}$$

В дальнейшем мы предполагаем, что пространство $\bar{A}_n$ является обобщенно риччи-симметрическим пространством. Поэтому тензор Риччи этого пространства удовлетворяет условиям (3). Тогда (6) можно записать в виде

$$(n+1)a_{ij,\ell} - a_{\ell i,j} - a_{\ell j,i} = -\Theta^\alpha_{ij\alpha\ell}. \tag{7}$$

Из уравнений (7) в силу (3) получим:

$$a_{\ell i,j} + a_{\ell j,i} = -\frac{1}{n}\Theta^\alpha_{(i|\ell\alpha|j)} + \frac{2}{n}a_{ij,\ell}.$$

С учетом этого равенства уравнение (7) можно записать в виде

$$\frac{n^2+n-2}{n}\,a_{ij,\ell} = -\,\Theta^\alpha_{ij\alpha\ell} - \frac{1}{n}\Theta^\alpha_{(i|\ell\alpha|j)}. \tag{8}$$

Условия интегрируемости (5) ковариантно продифференцируем в пространстве $\bar{A}_n$ и в правой части перейдем от ковариантной производной в $\bar{A}_n$ к ковариантной производной в A_n. Применив тождества Риччи для вторых ковариантных производных $\bar{R}^h_{(ij)l;km}$, получим

$$\bar{R}^h_{(ij)k;\ell m} - \bar{R}^h_{(ij)\ell;mk} = \delta^h_{(i}a_{jk),\ell m} - \delta^h_{(i}a_{j\ell),km} + T^h_{ijk\ell m}, \tag{9}$$

где

$$T^h_{ijk\ell m} = \bar R^h_{\alpha mk}\bar R^\alpha_{(ij)\ell} - \bar R^\alpha_{\ell mk}\bar R^h_{(ij)\alpha} - \bar R^\alpha_{jmk}\bar R^h_{(i\alpha)\ell} - \bar R^\alpha_{imk}\bar R^h_{(j\alpha)\ell} -$$
$$- P^h_{m\alpha}\delta^\alpha_{(i}a_{jk),\ell} - P^\alpha_{mj}\delta^h_{(i}a_{\alpha k),\ell} - P^\alpha_{mi}\delta^h_{(\alpha}a_{jk),\ell} - P^\alpha_{mk}\delta^h_{(\alpha}a_{ij),\ell} - P^\alpha_{ml}\delta^h_{(i}a_{jk),\alpha} -$$
$$- P^h_{m\alpha}\delta^\alpha_{(i}a_{j\ell),k} + P^\alpha_{mi}\delta^h_{(\alpha}a_{j\ell),k} + P^\alpha_{mj}\delta^h_{(i}a_{\alpha\ell),k} + P^\alpha_{mk}\delta^h_{(i}a_{j\ell),\alpha} - P^\alpha_{ml}\delta^h_{(i}a_{j\alpha),k} -$$
$$- \Theta^h_{ijk\ell,m} + P^h_{\alpha m}\Theta^\alpha_{ijk\ell} - P^\alpha_{mi}\Theta^h_{\alpha jk\ell} - P^\alpha_{mj}\Theta^h_{i\alpha k\ell} - P^\alpha_{mk}\Theta^h_{ij\alpha\ell} - P^\alpha_{m\ell}\Theta^h_{ijk\alpha}.$$

Проальтернируем уравнения (9) по индексам ℓ, m. Имеем:

$$\bar R^h_{(ij)m;\ell k} - \bar R^h_{(ij)\ell;mk} = \delta^h_{(i}a_{jm),k\ell} - \delta^h_{(i}a_{j\ell),km} + T^h_{ijk[lm]} +$$
$$+ \bar R^h_{(i|\alpha k|}\bar R^\alpha_{j)m\ell} + \bar R^h_{(ij)\alpha}\bar R^\alpha_{km\ell} - \bar R^\alpha_{(ij)k}\bar R^h_{\alpha m\ell} + \bar R^h_{\alpha(i|k|}\bar R^\alpha_{j)m\ell} +$$
$$+ \delta^h_{(\alpha}a_{jk)}R^\alpha_{i\ell m} + \delta^h_{(\alpha}a_{ik)}R^\alpha_{j\ell m} + \delta^h_{(i}a_{j\alpha)}R^\alpha_{k\ell m} - \delta^h_{(i}a_{jk)}R^\alpha_{\alpha\ell m}. \quad (10)$$

Учитывая свойства тензора Римана $\bar R^h_{ijk}$, условия (10) можно привести к виду

$$\bar R^h_{im\ell;jk} + \bar R^h_{jm\ell;ik} = \delta^h_{(i}a_{j\ell),km} - \delta^h_{(i}a_{jm),k\ell} - N^h_{ijk\ell m}, \quad (11)$$

где

$$N^h_{ijk\ell m} = T^h_{ijk[\ell m]} + \bar R^\alpha_{im\ell}\bar R^h_{(\alpha j)k} + \bar R^\alpha_{jm\ell}\bar R^h_{(\alpha i)k} + \bar R^\alpha_{km\ell}\bar R^h_{(ij)\alpha} -$$
$$- \bar R^h_{\alpha m\ell}\bar R^\alpha_{(ij)k} + \delta^h_{(\alpha}a_{jk)}R^\alpha_{i\ell m} + \delta^h_{(\alpha}a_{ik)}R^\alpha_{j\ell m} + \delta^h_{(\alpha}a_{ij)}R^\alpha_{k\ell m} - a_{(ij}R^h_{k)\ell m}.$$

Проальтернируем (11) по j и k. Получим

$$\bar R^h_{jm\ell;ik} - \bar R^h_{km\ell;ij} = \delta^h_{(i}a_{j\ell),km} - \delta^h_{(i}a_{jm),k\ell} - \delta^h_{(i}a_{k\ell),jm} + \delta^h_{(i}a_{km),j\ell} -$$
$$- N^h_{i[jk]\ell m} + \bar R^h_{\alpha m\ell}\bar R^\alpha_{ikj} + \bar R^h_{i\alpha\ell}\bar R^\alpha_{mkj} + \bar R^h_{im\alpha}\bar R^\alpha_{\ell kj} - \bar R^\alpha_{im\ell}\bar R^h_{\alpha kj}. \quad (12)$$

В соотношении (11) поменяем местами индексы i и k, а затем сложим с (12). В результате получим

$$2\bar R^h_{jm\ell;ik} = \delta^h_{(i}a_{j\ell),km} - \delta^h_{(i}a_{jm),k\ell} - \delta^h_{(k}a_{jm),i\ell} +$$
$$+ \delta^h_{(i}a_{km),j\ell} - \delta^h_{(i}a_{k\ell),jm} + \delta^h_{(j\ell}a_{k),im} + \Omega^h_{ijk\ell m}, \quad (13)$$

где

$$\Omega^h_{ijk\ell m} = -N^h_{ijk\ell m} + N^h_{k[ij]k\ell m} - \bar R^h_{\alpha m\ell}\bar R^\alpha_{(kj)i} + \bar R^h_{j\alpha\ell}\bar R^\alpha_{mik} + \bar R^h_{jm\alpha}\bar R^\alpha_{\ell ik} -$$
$$- \bar R^h_{\alpha i(j}\bar R^\alpha_{k)m\ell} + \bar R^h_{j\alpha\ell}\bar R^\alpha_{mik} + \bar R^h_{jm\alpha}\bar R^\alpha_{\ell ik} - \bar R^h_{\alpha m\ell}\bar R^\alpha_{ikj} - \bar R^h_{i\alpha\ell}\bar R^\alpha_{mkj} + \bar R^\alpha_{im[\ell}\bar R^h_{\alpha]kj}.$$

В левой части соотношений (13) перейдем от ковариантной производной в $\bar A_n$ к ковариантной производной в A_n. Имеем:

$$2\bar R^h_{jm\ell,ik} = \delta^h_{(i}a_{j\ell),km} - \delta^h_{(i}a_{jm),k\ell} - \delta^h_{(k}a_{jm),i\ell} + \delta^h_{(i}a_{km),j\ell} - \delta^h_{(i}a_{k\ell),jm} - \delta^h_{(k}a_{j\ell),im} + S^h_{ijk\ell m},$$

где

$$S^h_{ijk\ell m} = \Omega^h_{ijk\ell m} - 2\Big[\bar R^\alpha_{jm\ell,i}P^h_{\ell k} - \bar R^h_{\alpha m\ell,i}P^\alpha_{jk} -$$

$$- \bar R^h_{j\alpha\ell,i}P^\alpha_{mk} - \bar R^h_{jm\alpha,i}P^\alpha_{\ell k} - \bar R^h_{jm\ell,\alpha}P^\alpha_{ik} +$$

$$+ (\bar R^\alpha_{jm\ell}P^\beta_{\alpha i} - \bar R^h_{\alpha m\ell}P^\alpha_{ij} - \bar R^h_{j\alpha\ell}P^\alpha_{im} - \bar R^h_{jm\alpha}P^\alpha_{i\ell})P^h_{\beta k} -$$

$$- (\bar R^\alpha_{jm\ell}P^h_{\alpha\beta} - \bar R^h_{\alpha m\ell}P^\alpha_{\beta j} - \bar R^h_{j\alpha\ell}P^\alpha_{\beta m} - \bar R^h_{jm\alpha}P^\alpha_{\beta\ell})P^\beta_{ik} -$$

$$- (\bar R^\alpha_{\beta m\ell}P^h_{\alpha i} - \bar R^h_{\alpha m\ell}P^\alpha_{\beta i} - \bar R^h_{\beta\alpha\ell}P^\alpha_{im} - \bar R^h_{\beta m\alpha}P^\alpha_{i\ell})P^\beta_{jk} -$$

$$- (\bar R^\alpha_{j\beta\ell}P^h_{\alpha i} - \bar R^h_{\alpha\beta\ell}P^\alpha_{ji} - \bar R^h_{j\alpha\ell}P^\alpha_{\beta i} - \bar R^h_{j\beta\alpha}P^\alpha_{i\ell})P^\beta_{km} -$$

$$- (\bar R^\alpha_{jm\beta}P^h_{\alpha i} - \bar R^h_{\alpha m\beta}P^\alpha_{ji} - \bar R^h_{j\alpha\beta}P^\alpha_{mi} - \bar R^h_{jm\alpha}P^\alpha_{\beta i})P^\beta_{k\ell}\Big].$$

Введем в рассмотрение тензорное поле типа $(1,4)$ следующим образом

$$\bar R^h_{jm\ell i} \equiv \bar R^h_{jm\ell,i}, \tag{14}$$

и с учетом последнего запишем ковариантную производную этого тензорного поля в пространстве A_n:

$$2\bar R^h_{jm\ell i,k} = \delta^h_{(i}a_{j\ell),km} - \delta^h_{(i}a_{jm),k\ell} - \delta^h_{(k}a_{jm),i\ell} + \delta^h_{(i}a_{km),j\ell} - \delta^h_{(i}a_{k\ell),jm} + \delta^h_{(k}a_{j\ell),im} + S^h_{ijk\ell m}. \tag{15}$$

Заметим, что в левой части (15) можно заменить вторые ковариантные производные тензора a_{ij}, используя (8).

Таким образом, заключаем, что уравнения (4), (8), (14) и (15) для функций $P^h_{ij}(x)$, $a_{ij}(x)$, $\bar R^h_{ijk}(x)$ и $\bar R^h_{ijkm}(x)$ в пространстве A_n образуют систему дифференциальных уравнений в ковариантных производных типа Коши. Указанные выше функции должны также удовлетворять дополнительным алгебраическим условиям:

$$\begin{gathered} P^h_{ij}(x) = P^h_{ji}(x), \quad a_{ij}(x) = a_{ji}(x), \\ \bar R^h_{i(jk)}(x) = \bar R^h_{(ijk)}(x) = 0, \quad \bar R^h_{i(jk)\ell}(x) = \bar R^h_{(ijk)\ell}(x) = 0. \end{gathered} \tag{16}$$

Итак, справедлива

Теорема 1. *Для того чтобы пространство аффинной связности A_n допускало каноническое почти геодезическое отображение типа π_1 на обобщенные риччи-симметрические пространства $\bar A_n$, необходимо и достаточно, чтобы в нем существовало решение смешанной системы типа Коши* (4), (8), (14), (15), *и* (16) *относительно функций $P^h_{ij}(x)$, $a_{ij}(x)$, $\bar R^h_{ijk}(x)$ и $\bar R^h_{ijkm}(x)$.*

Теорема 1 обобщает результаты полученные Н.С. Синюковым [6].

Как следствие получим

Предложение 1. *Семейство всех обобщенно риччи-симметрических пространств аффинной связности, которые являются образом заданного пространства аффинной связности A_n относительно отображений типа $\widetilde{\pi}_1$, зависит не более чем от $\frac{1}{6}\, n(n+1)^2\,(2n^2-2n+3)$ параметров.*

Работа выполнена при поддержке гранта MSM 6198959214 Чешской Республики.

Summary

V.E. Berezovski, J. Mikeš. Almost Geodesic Mappings of Type π_1 onto Generalized Ricci-symmetric Spaces.

We deduce necessary and sufficient conditions in order that a manifold with linear connection admit an almost geodesic mapping of type π_1 in the sense of N.S. Sinyukov onto a generalized Ricci-symmetric manifold.

Key words: almost geodesic mapping of type π_1, generalized Ricci-symmetric manifold, affinely connected space.

Литература

1. *Синюков Н.С.* Геодезические отображения римановых пространств. – М.: Наука, 1979. – 256 с.
2. *Berezovsky V., Mikeš J.* On a classification of almost geodesic mappings of affine connection spaces // Acta Univ. Palacki. Olomuc., Fac. Rerum Nat., Math. – 1996. – V. 35. – P. 21–24.
3. *Berezovski V.E., Mikeš J. Vanžurová A.* Canonical almost geodesic mappings of type π_1 onto pseudo-Riemannian manifolds // Diff. Geom. and its Appl. Proc. Conf., Olomouc, August, 2007. – World Sci. Publ. Comp., 2008. – P. 65–76.
4. *Чернышенко В.М.* Пространства аффинной связности с соответствующим комплексом геодезических // Науч. зап. Днепр. ун-та. – 1961. – Т. 55, № 6. – С. 105–118.
5. *Синюков Н.С.* Почти геодезические отображения пространств аффинной связности и римановых пространств // Докл. АН СССР. – 1963. – Т. 151, № 4. – С. 781–782.
6. *Синюков Н.С.* Почти геодезические отображения пространств аффинной связности и римановых пространств // Итоги науки и техн. Сер. Проблемы геометрии. – М.: ВИНИТИ, 1982. – Т. 13. – С. 3–26.

Поступила в редакцию
19.08.09

Березовский Владимир Евгеньевич – кандидат физико-математических наук, заведующий кафедрой математики Уманского государственного аграрного университета, г. Умань, Украина.

E-mail: *berez.volod@rambler.ru*

Микеш Йозеф – доктор физико-математических наук, профессор кафедры алгебры и геометрии естественно-научного факультета Университета им. Ф. Палацкого, г. Оломоуц, Чешская Республика.

E-mail: *mikes@inf.upol.cz*