УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ КАЗАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
Том 151, кн. 4 Физико-математические науки *2009*

УДК 514.763.25

ЛИФТЫ СТРУКТУР ПУАССОНА – НЕЙЕНХЕЙСА В РАССЛОЕНИЯ ВЕЙЛЯ

В.В. Шурыгин (мл.)

Аннотация

В работе показывается, что полные лифты структурных тензоров P и N многообразия Пуассона – Нейенхейса (M, P, N) в расслоение Вейля $T^{\mathbb{A}}M$ этого многообразия индуцируют на $T^{\mathbb{A}}M$ структуру многообразия Пуассона – Нейенхейса, и вычисляются модулярные векторные поля этого многообразия.

Ключевые слова: многообразие Пуассона – Нейенхейса, модулярный класс, алгебра Вейля, расслоение Вейля, полный лифт, вертикальный лифт.

---

1. Многообразия Пуассона – Нейенхейса

Пусть M – гладкое связное многообразие, удовлетворяющее второй аксиоме счетности, $\dim M = m$. Будем обозначать алгебру гладких функций на M через $C^\infty(M)$, а пространство тензорных полей типа (k, ℓ) на M – через $T^{k,\ell}(M)$. В частности, кольцо дифференциальных форм на M будем обозначать через $\Omega^*(M) = \bigoplus\limits_{k=0}^{m} \Omega^k(M)$, а пространство кососимметрических контравариантных тензорных полей (поливекторных полей) на M – через $\mathcal{V}^*(M) = \bigoplus\limits_{k=0}^{m} \mathcal{V}^k(M)$. Производную Ли в направлении векторного поля X будем обозначать $\mathcal{L}_X$.

Всюду, где не оговорено противное, по двум одинаковым индексам, стоящим на разных уровнях, подразумевается суммирование по всей области значений этих индексов.

Скобка Ли векторных полей на M может быть единственным образом продолжена до $\mathbb{R}$-линейной скобки

$$[\,\cdot\,,\,\cdot\,]_{SN} : \mathcal{V}^p(M) \times \mathcal{V}^q(M) \to \mathcal{V}^{p+q-1}(M),$$

называемой *скобкой Схоутена – Нейенхейса*, таким образом, что $\mathcal{V}^*(M)$ оказывается градуированной супералгеброй. Пусть $u \in \mathcal{V}^p(M)$ и $v \in \mathcal{V}^q(M)$ в локальных координатах (x^i) на M имеют вид

$$u = u^{i_1\dots i_p} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \wedge \dots \wedge \frac{\partial}{\partial x^{i_p}} \quad \text{и} \quad v = v^{j_1\dots j_q} \frac{\partial}{\partial x^{j_1}} \wedge \dots \wedge \frac{\partial}{\partial x^{j_q}}$$

соответственно. Тогда компоненты скобки Схоутена – Нейенхейса $[u, v]_{SN}$ имеют вид [1]

$$[u, v]_{SN}^{k_2\dots k_{p+q}} = \varepsilon^{k_2\dots k_{p+q}}_{i_2\dots i_p j_1\dots j_q} u^{r i_2\dots i_p} \frac{\partial}{\partial x^r} v^{j_1\dots j_q} + (-1)^p \varepsilon^{k_2\dots k_{p+q}}_{i_1\dots i_p j_2\dots j_q} v^{r j_2\dots j_q} \frac{\partial}{\partial x^r} u^{i_1\dots i_p},$$

где $\varepsilon^{k_1\dots k_s}_{\ell_1\dots \ell_s}$ – кососимметрический символ Кронекера.

Введем также в рассмотрение пространство

$$\Omega^*(M;TM)=\bigoplus_{k=0}^{m}\Omega^k(M;TM)$$

векторнозначных дифференциальных форм на M. Известно, что на $\Omega^*(M;TM)$ имеется операция, называемая *скобкой Фрелихера–Нейенхейса*,

$$[\,\cdot\,,\,\cdot\,]_{FN}:\Omega^k(M;TM)\times\Omega^\ell(M;TM)\to\Omega^{k+\ell}(M;TM),$$

превращающая $\Omega^*(M;TM)$ в градуированную алгебру Ли. Определение и основные свойства скобки Фрелихера–Нейенхейса можно найти в [2]. Пусть K и L – элементы $\Omega^*(M;TM)$ степени k и ℓ соответственно. В локальных координатах (x^i) на M компоненты их скобки Фрелихера–Нейенхейса имеют вид [2]

$$\begin{aligned}([K,L]_{FN})^j_{\alpha_1\dots\alpha_{k+\ell}}&=K^i_{\alpha_1\dots\alpha_k}\frac{\partial}{\partial x^i}L^j_{\alpha_{k+1}\dots\alpha_{k+\ell}}+\\&+(-1)^{k\ell+1}L^i_{\alpha_1\dots\alpha_\ell}\frac{\partial}{\partial x^i}K^j_{\alpha_{\ell+1}\dots\alpha_{k+\ell}}-k\cdot K^j_{\alpha_1\dots\alpha_{k-1}i}\frac{\partial}{\partial x^{\alpha_k}}L^i_{\alpha_{k+1}\dots\alpha_{k+\ell}}+\\&+(-1)^{k\ell}\ell\cdot L^j_{\alpha_1\dots\alpha_{\ell-1}i}\frac{\partial}{\partial x^{\alpha_\ell}}K^i_{\alpha_{\ell+1}\dots\alpha_{k+\ell}}.\end{aligned}\tag{1}$$

Пространства $\Omega^1(M;TM)$ и $T^{1,1}(M)$ естественно изоморфны друг другу. Поэтому в дальнейшем мы не будем делать различия между ними.

Определение 1 [3]. *Тензором Пуассона* (*пуассоновой структурой*) на многообразии M называется контравариантный кососимметрический тензор $P\in\mathcal{V}^2(M)$ такой, что

$$[P,P]_{SN}=0.\tag{2}$$

Пара (M,P) называется *пуассоновым многообразием.*

Определение 2 [2]. *Тензором Нейенхейса* на многообразии M называется тензор $N\in T^{1,1}(M)$ такой, что

$$[NX,NY]-N([NX,Y]+[X,NY])+N^2[X,Y]=0$$

для любых векторных полей X, Y на M. Это условие эквивалентно тому, что

$$[N,N]_{FN}=0.\tag{3}$$

Пусть (M,P) – пуассоново многообразие. Оператор

$$\sigma=\sigma_P:\mathcal{V}^k(M)\to\mathcal{V}^{k+1}(M),$$

действующий по правилу $\sigma u=[P,u]_{SN}$, называется дифференциалом Пуассона. Известно, что $\sigma\circ\sigma=0$ [3]. Пространства когомологий оператора σ называются *когомологиями Пуассона* пуассонова многообразия (M,P). Будем обозначать их символом $H^k(M,P)$. Символом H^P_f будем обозначать гамильтоново векторное поле гладкой функции f. Напомним, что $H^P_f=[P,f]_{SN}$ [3].

Всякое поле бивектора $\pi\in\mathcal{V}^2(M)$ на M индуцирует скобку на пространстве 1-форм по формуле

$$[\xi,\eta]_\pi:=\mathcal{L}_{\pi\xi}\eta-\mathcal{L}_{\pi\eta}\xi-d\pi(\xi,\eta).\tag{4}$$

Определение 3 [4, 5]. Пусть P – тензор Пуассона и N – тензор Нейенхейса на гладком многообразии M. Пара (P, N) называется *структурой Пуассона – Нейенхейса*, если выполнены следующие два условия совместимости:

1) тензоры P и N перестановочны:

$$NP = PN, \tag{5}$$

так что $P_1 = NP$ также есть поле бивектора;

2) скобка $[\,\cdot\,,\,\cdot\,]_{P_1}$ на пространстве 1-форм, ассоциированная с P_1 по формуле (4), и скобка

$$[\xi, \eta]_P^N := [N\xi, \eta]_P + [\xi, N\eta]_P - N([\xi, \eta]_P)$$

совпадают:

$$[\xi, \eta]_{P_1} = [\xi, \eta]_P^N. \tag{6}$$

В этом случае тензоры P и N называются *совместимыми.* Многообразие M, наделенное структурой Пуассона – Нейенхейса, называется *многообразием Пуассона – Нейенхейса.* Будем обозначать его (M, P, N).

Пусть ξ, η – две 1-формы на M. Введем следующее обозначение [4]:

$$C(P,N)(\xi,\eta) = \mathcal{L}_{P\xi}(N\eta) - \mathcal{L}_{P\eta}(N\xi) + N\mathcal{L}_{P\eta}\xi - \\ - N\mathcal{L}_{P\xi}\eta + d\,\langle \xi, NP\eta\rangle - Nd\,\langle \xi, P\eta\rangle,$$

где $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle$ есть свертка вектора и 1-формы. Условие совместимости (6) можно переписать в виде [4, 6]

$$C(P,N) = 0.$$

Выражения для компонент $C(P,N)$ в локальных координатах имеют вид [6]

$$C_m^{kj} = P^{lj}\frac{\partial N_m^k}{\partial x^l} + P^{kl}\frac{\partial N_m^j}{\partial x^l} - N_m^l\frac{\partial P^{kj}}{\partial x^l} + N_l^j\frac{\partial P^{kl}}{\partial x^m} - P^{lj}\frac{\partial N_l^k}{\partial x^m}. \tag{7}$$

Известно, что для многообразия Пуассона – Нейенхейса

$$P_0 = P, \quad P_1 = NP, \quad P_2 = N^2P, \dots$$

есть попарно совместимые тензоры Пуассона, то есть

$$[P_i, P_j]_{SN} = 0, \quad \forall i, j = 0, 1, 2, \dots$$

2. Алгебры Вейля и расслоения Вейля

Определение 4 [2, 7]. Конечномерная ассоциативная коммутативная унитальная алгебра $\mathbb{A}$ над полем вещественных чисел $\mathbb{R}$ называется *локальной алгеброй в смысле Вейля*, или *алгеброй Вейля*, если ее радикал $\mathrm{Rad}(\mathbb{A}) = \overset{\circ}{\mathbb{A}}$ (подмножество нильпотентных элементов) является максимальным идеалом и факторалгебра $\mathbb{A}/\overset{\circ}{\mathbb{A}}$ изоморфна алгебре $\mathbb{R}$ вещественных чисел.

Одномерное линейное подпространство в $\mathbb{A}$, натянутое на единицу $1_{\mathbb{A}}$, образует подалгебру, изоморфную $\mathbb{R}$. Эту подалгебру будем отождествлять с $\mathbb{R}$, считая, что $\mathbb{R} \subset \mathbb{A}$ и $1_{\mathbb{A}} \equiv 1 \in \mathbb{R}$. При этом алгебра Вейля $\mathbb{A}$ представляется в виде полупрямой суммы $\mathbb{A} = \mathbb{R} \oplus \overset{\circ}{\mathbb{A}}$. В дальнейшем полагаем $n = \dim_{\mathbb{R}} \overset{\circ}{\mathbb{A}}$, так что $\dim \mathbb{A} = n + 1$.

Символом $\overset{\circ}{\mathbb{A}}{}^k$ будем обозначать k-ю степень идеала $\overset{\circ}{\mathbb{A}}$. Натуральное число h, определяемое соотношениями $\overset{\circ}{\mathbb{A}}{}^h \neq 0$, $\overset{\circ}{\mathbb{A}}{}^{h+1} = 0$, называется *высотой* алгебры $\mathbb{A}$.

Цепочку вложенных идеалов $\mathbb{A} \supset \overset{\circ}{\mathbb{A}} \supset \overset{\circ}{\mathbb{A}}{}^2 \supset \ldots \supset \overset{\circ}{\mathbb{A}}{}^h \supset 0$ можно дополнить до цепочки идеалов, называемой композиционным рядом Жордана – Гельдера [7]

$$\mathbb{A} \supset \overset{\circ}{\mathbb{A}} = \mathbb{I}_1 \supset \mathbb{I}_2 \supset \ldots \supset \mathbb{I}_n \supset 0,$$

где $\mathbb{I}_a/\mathbb{I}_{a+1}$ – одномерная алгебра с нулевым умножением. Используя ряд Жордана – Гельдера, можно выбрать в алгебре $\mathbb{A}$ такой базис

$$\{e_a\} = \{e_0, e_{\hat{a}}\}, \quad a = 0, 1, \ldots, n = \dim \overset{\circ}{\mathbb{A}}, \quad \hat{a} = 1, \ldots, n, \tag{8}$$

что $e_0 = 1 \in \mathbb{R}$, $e_{\hat{a}} \in \mathbb{I}_{\hat{a}}$, $e_{\hat{a}} \notin \mathbb{I}_{\hat{a}+1}$, называемый базисом Жордана – Гельдера. Разложение элемента $X \in \mathbb{A}$ по базису (8) будем записывать в виде $X = x^a e_a = x^0 + x^{\hat{a}} e_{\hat{a}}$. Обозначим $\overset{\circ}{X} = x^{\hat{a}} e_{\hat{a}}$, тогда $X = x^0 + \overset{\circ}{X}$. Разложение единицы алгебры $\mathbb{A}$ по базису (8) будем записывать следующим образом: $1_{\mathbb{A}} = \delta^a e_a$. Разложения $e_a e_b = \gamma^c_{ab} e_c$ задают структурный тензор (γ^c_{ab}) алгебры $\mathbb{A}$. Компоненты этого тензора удовлетворяют соотношениям

$$\gamma^b_{a0} = \delta^b_a, \quad \gamma^c_{a\hat{b}} = 0 \ \text{ при } \ a \geq c. \tag{9}$$

Условия коммутативности и ассоциативности алгебры $\mathbb{A}$ в терминах структурного тензора принимают вид $\gamma^c_{ab} = \gamma^c_{ba}$ и $\gamma^c_{ab}\gamma^b_{ef} = \gamma^b_{ae}\gamma^c_{bf}$ соответственно.

Пусть $\mathbb{A}^m = \mathbb{A} \times \ldots \times \mathbb{A}$ есть $\mathbb{A}$-модуль m-строк элементов из $\mathbb{A}$. Для нумерации вещественных координат на $\mathbb{A}^m$ будем использовать двойные индексы ia, jb, … Гладкая функция $f : U \subset \mathbb{A}^m \to \mathbb{A}$, $f : \{X^i = x^{ia} e_a\} \mapsto f(X^i) = f^b(x^{ia}) e_b$, называется $\mathbb{A}$-*гладкой*, если ее дифференциал df является $\mathbb{A}$-линейным. Условия $\mathbb{A}$-гладкости функции f, называемые *условиями Шефферса*, имеют вид [7]:

$$\frac{\partial f^b}{\partial x^{ia}} = \gamma^b_{ac} \delta^d \frac{\partial f^c}{\partial x^{id}}. \tag{10}$$

При выполнении условий (10) дифференциал функции f представляется в виде $df = f_i dX^i$, функции $f_i = \delta^a \dfrac{\partial f}{\partial x^{ia}}$ называются частными производными по X^i и обозначаются через $\dfrac{\partial f}{\partial X^i}$. Итак,

$$\frac{\partial f}{\partial X^i} = \delta^a \, \frac{\partial f}{\partial x^{ia}}. \tag{11}$$

Каждая функция $\dfrac{\partial f}{\partial X^i}(X^j)$ при этом также является $\mathbb{A}$-гладкой.

Пусть $\varphi : U \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^\ell$ – гладкое отображение. Оно может быть естественным образом продолжено до $\mathbb{A}$-гладкого отображения $\Phi : U \times \overset{\circ}{\mathbb{A}}{}^k \to \mathbb{A}^\ell$ следующим образом [7]. Пусть (x^i) и $(x^{i'})$ – координаты в $\mathbb{R}^k$ и $\mathbb{R}^\ell$ и $\varphi : (x^i) \mapsto (x^{i'} = \varphi^{i'}(x^i))$. Тогда отображение Φ задается формулой

$$X^{i'} = \varphi^{i'}(x^i) + \sum_{|p|=1}^{h} \frac{1}{p!} \frac{D^p \varphi^{i'}(x^i)}{Dx^p} \overset{\circ}{X}{}^p,$$

где $p = (p_1, \ldots, p_k)$ – мультииндекс длины k, $p! = p_1! \ldots p_k!$, $X^i = x^i + \overset{\circ}{X}{}^i$ – разложение в соответствии с (8), $\overset{\circ}{X}{}^p = (\overset{\circ}{X}{}^1)^{p_1} \ldots (\overset{\circ}{X}{}^k)^{p_k}$. Отображение Φ называется *аналитическим продолжением* отображения φ и обозначается $\varphi^{\mathbb{A}}$. Операция аналитического продолжения сохраняет сумму, произведение, композицию отображений, а также операцию взятия частной производной [7].

Определение 5. *Фробениусовой алгеброй Вейля* будем называть пару $(\mathbb{A}, q)$, где $\mathbb{A}$ – алгебра Вейля, $q : \mathbb{A} \times \mathbb{A} \to \mathbb{R}$ – невырожденная билинейная форма, удовлетворяющая условию ассоциативности $q(XY, Z) = q(X, YZ)$, $X, Y, Z \in \mathbb{A}$.

Форма q называется *фробениусовой формой*. В базисе (8) условие ассоциативности принимает вид $q_{bc}\gamma^c_{ef} = \gamma^c_{be} q_{cf}$. Фробениусова форма q определяет *фробениусов ковектор* (*1-форму*) $p : \mathbb{A} \to \mathbb{R}$ соотношением $p(X) = q(X, 1_{\mathbb{A}})$. В базисе (8) координаты ковектора p удовлетворяют соотношениям $p_a \gamma^a_{bc} = q_{bc}$.

Пусть q^{ab} – компоненты матрицы, обратной к матрице формы q в базисе (8). Введем в рассмотрение базис $\{e^a = q^{ab} e_b\}$ в $\mathbb{A}$. Обратное преобразование базиса имеет вид $e_a = q_{ab} e^b$. Символами γ^{ab}_c обозначим компоненты структурного тензора алгебры $\mathbb{A}$ в базисе $\{e^a\}$. Выполняются следующие соотношения [8]:

$$\begin{gathered} p(e_a e_b) = q_{ab}, \quad p(e^a e^b) = q^{ab}, \quad p(e_a e^c) = \delta^c_a, \\ p(e_a e_b e^c) = \gamma^c_{ab}, \quad p(e^a e^b e_c) = \gamma^{ab}_c. \end{gathered} \tag{12}$$

Для $\mathbb{A}$-гладкой функции $F : U \subset \mathbb{A} \to \mathbb{A}$, $F = F^a(x^b) e_a = F_a(x^b) e^a$ справедливы следующие соотношения:

$$F^a p_a = F_b \delta^b, \quad \frac{\partial(\delta^a F_a)}{\partial x^b} = \delta^c \frac{\partial F_b}{\partial x^c}. \tag{13}$$

$\mathbb{A}$-гладким многообразием называется гладкое многообразие, картирующие отображения которого принимают значения в конечномерном $\mathbb{A}$-модуле, а функции склейки являются $\mathbb{A}$-гладкими. Примером $\mathbb{A}$-гладкого многообразия служит тотальное пространство $T^{\mathbb{A}}M$ расслоения Вейля $\pi_{\mathbb{A}} : T^{\mathbb{A}}M \to M$ гладкого многообразия M [2, 7]. Для локальной карты (U, x^i) на M функции $X^i = (x^i)^{\mathbb{A}} = x^{ia} e_a$ задают систему $\mathbb{A}$-значных локальных координат на $T^{\mathbb{A}}U \subset T^{\mathbb{A}}M$, а функции (x^{ia}) – систему вещественных локальных координат на $T^{\mathbb{A}}U$, причем $x^{i0} = x^i \circ \pi_{\mathbb{A}}$.

Пусть $M_{\mathbb{A}}$ есть $\mathbb{A}$-гладкое многообразие. Обозначим символом $T^{k,\ell}_{\mathbb{A}-\mathrm{diff}}(M_{\mathbb{A}})$ пространство $\mathbb{A}$-гладких тензорных полей типа (k, ℓ) на $M_{\mathbb{A}}$ [8]. Тензорное поле $t \in$ $\in T^{k,\ell}_{\mathbb{A}-\mathrm{diff}}(M_{\mathbb{A}})$ имеет координатное представление

$$t = t^{j_1 \ldots j_\ell}_{i_1 \ldots i_k} dX^{i_1} \otimes \ldots \otimes dX^{i_k} \otimes \frac{\partial}{\partial X^{j_1}} \otimes \ldots \otimes \frac{\partial}{\partial X^{j_\ell}},$$

где функции $t^{j_1 \ldots j_s}_{i_1 \ldots i_r} = t^{j_1 \ldots j_s}_{i_1 \ldots i_r}(X^k)$ являются $\mathbb{A}$-гладкими.

Всюду в дальнейшем алгебра Вейля $\mathbb{A}$ предполагается фробениусовой.

Пусть $\mathbb{L}$ – конечномерный свободный модуль над $(\mathbb{A}, q)$ и пусть t есть $\mathbb{A}$-линейный тензор на $\mathbb{L}$. *Реализацией* тензора t называется вещественный тензор $R(t) = p \circ t$ на $\mathbb{L}$.

Пусть M есть гладкое многообразие и $t \in T^{k,\ell}(M)$ – тензорное поле на M. Его аналитическое продолжение $t^{\mathbb{A}}$ есть $\mathbb{A}$-гладкое тензорное поле на $T^{\mathbb{A}}M$. *Полным лифтом* поля t на тотальное пространство многообразия $T^{\mathbb{A}}M$ называется тензорное поле

$$t^C := R(t^{\mathbb{A}})$$

на $T^{\mathbb{A}}M$. Если в локальных координатах (x^i) на M поле t имеет компоненты $t^{j_1 \ldots j_\ell}_{i_1 \ldots i_k}$, то в соответствующих локальных координатах (x^{ia}) на $T^{\mathbb{A}}M$ компоненты поля t^C вычисляются по следующей формуле (см. [8]):

$$t^{j_1 b_1 \ldots j_\ell b_\ell}_{i_1 a_1 \ldots i_k a_k} := p(t^{j_1 \ldots j_\ell}_{i_1 \ldots i_k} e_{a_1} \ldots e_{a_k} e^{b_1} \ldots e^{b_\ell}).$$

В работе [8] показано, что фробениусова алгебра Вейля $(\mathbb{A}, q)$ высоты h обладает следующими свойствами: $\dim \mathring{\mathbb{A}}^h = 1$ и $p|_{\mathring{\mathbb{A}}^h} \neq 0$. Это позволяет однозначно выбрать элемент $\varepsilon \in \mathring{\mathbb{A}}^h$ такой, что $p(\varepsilon) = 1$. *Вертикальным лифтом* поля $t \in T^{k,\ell}(M)$ на тотальное пространство многообразия $T^{\mathbb{A}}M$ называется тензорное поле

$$t^V := R(\varepsilon t^{\mathbb{A}})$$

на $T^{\mathbb{A}}M$.

Предложение 1 [8]. *Пусть M – гладкое многообразие. Для любых $u, v \in \mathcal{V}^*(M)$ имеют место соотношения*

$$\begin{aligned} &1)\ ([u,v]_{SN})^C = [u^C, v^C]_{SN};\\ &2)\ ([u,v]_{SN})^V = [u^V, v^C]_{SN} = [u^C, v^V]_{SN};\\ &3)\ [u^V, v^V]_{SN} = 0. \end{aligned}$$

3. Лифты структур Пуассона – Нейенхейса

Пусть $M_{\mathbb{A}}$ есть $\mathbb{A}$-гладкое многообразие. Обозначим символом

$$\Omega^*_{\mathbb{A}-\mathrm{diff}}(M_{\mathbb{A}}, TM_{\mathbb{A}}) = \bigoplus_{k=0}^{\dim_{\mathbb{A}} M_{\mathbb{A}}} \Omega^k_{\mathbb{A}-\mathrm{diff}}(M_{\mathbb{A}}, TM_{\mathbb{A}})$$

пространство векторнозначных $\mathbb{A}$-гладких внешних форм на $M_{\mathbb{A}}$. Естественным образом операция скобки Фрелихера – Нейенхейса распространяется случай $\mathbb{A}$-гладких внешних форм.

Предложение 2. *Пусть $M_{\mathbb{A}}$ есть $\mathbb{A}$-гладкое многообразие и пусть $K \in \Omega^k_{\mathbb{A}-\mathrm{diff}}(M_{\mathbb{A}}, TM_{\mathbb{A}})$ и $L \in \Omega^\ell_{\mathbb{A}-\mathrm{diff}}(M_{\mathbb{A}}, TM_{\mathbb{A}})$. Тогда*

$$[R(K), R(L)]_{FN} = R([K,L]_{FN}).$$

Доказательство. Пусть в локальных координатах (X^i) формы K и L имеют компоненты $K^i_{\alpha_1\ldots\alpha_k}$ и $L^j_{\beta_1\ldots\beta_\ell}$ соответственно. Для компонент скобки Фрелихера – Нейенхейса $\mathbb{A}$-гладких форм выполняются соотношения, аналогичные (1):

$$\begin{aligned} ([K,L]_{FN})^j_{\alpha_1\ldots\alpha_{k+\ell}} = K^i_{\alpha_1\ldots\alpha_k} \frac{\partial}{\partial X^i} L^j_{\alpha_{k+1}\ldots\alpha_{k+\ell}} + \\ + (-1)^{k\ell+1} L^i_{\alpha_1\ldots\alpha_\ell} \frac{\partial}{\partial X^i} K^j_{\alpha_{\ell+1}\ldots\alpha_{k+\ell}} - k \cdot K^j_{\alpha_1\ldots\alpha_{k-1}i} \frac{\partial}{\partial X^{\alpha_k}} L^i_{\alpha_{k+1}\ldots\alpha_{k+\ell}} + \\ + (-1)^{k\ell} \ell \cdot L^j_{\alpha_1\ldots\alpha_{\ell-1}i} \frac{\partial}{\partial X^{\alpha_\ell}} K^i_{\alpha_{\ell+1}\ldots\alpha_{k+\ell}}. \end{aligned} \tag{14}$$

Умножим обе части равенства (14) на $e_{a_1}\ldots e_{a_{k+\ell}} e^b$ и затем свернем его с p. В левой части мы получим компоненту $(R([K,L]_{FN}))^{jb}_{\alpha_1 a_1\ldots\alpha_{k+\ell}a_{k+\ell}}$. Рассмотрим первое слагаемое в правой части.

Пусть

$$K^i_{\alpha_1\ldots\alpha_k} e_{a_1}\ldots e_{a_k} e^c = (K^{ic}_{\alpha_1 a_1\ldots\alpha_k a_k})_m e^m,$$

$$L^j_{\alpha_{k+1}\ldots\alpha_{k+\ell}} e_{a_{k+1}}\ldots e_{a_{k+\ell}} e^b = (L^{jb}_{\alpha_{k+1}a_{k+1}\ldots\alpha_{k+\ell}a_{k+\ell}})_c e^c$$

суть разложения по базису $\{e^a\}$.

Используя (11) и (13), получим:

$$K^i_{\alpha_1\dots\alpha_k}\frac{\partial}{\partial X^i}L^j_{\alpha_{k+1}\dots\alpha_{k+\ell}}e_{a_1}\dots e_{a_{k+\ell}}e^b =$$
$$= K^i_{\alpha_1\dots\alpha_k}e_{a_1}\dots e_{a_k}\delta^g\frac{\partial}{\partial x^{ig}}L^j_{\alpha_{k+1}\dots\alpha_{k+\ell}}e_{a_{k+1}}\dots e_{a_{k+\ell}}e^b =$$
$$= K^i_{\alpha_1\dots\alpha_k}e_{a_1}\dots e_{a_k}\delta^g\frac{\partial}{\partial x^{ig}}(L^{jb}_{\alpha_{k+1}a_{k+1}\dots\alpha_{k+\ell}a_{k+\ell}})_c e^c =$$
$$= (K^{ic}_{\alpha_1a_1\dots\alpha_ka_k})_m e^m\delta^g\frac{\partial}{\partial x^{ic}}(L^{jb}_{\alpha_{k+1}a_{k+1}\dots\alpha_{k+\ell}a_{k+\ell}})_g.$$

Свертывая последнее выражение с p, имеем:

$$K^{ic}_{\alpha_1a_1\dots\alpha_ka_k}\frac{\partial}{\partial x^{ic}}L^{jb}_{\alpha_{k+1}a_{k+1}\dots\alpha_{k+\ell}a_{k+\ell}}.$$

Аналогично, после свертки с p второе слагаемое приобретает вид

$$(-1)^{k\ell+1}L^{ic}_{\alpha_1a_1\dots\alpha_\ell a_\ell}\frac{\partial}{\partial x^{ic}}K^{jb}_{\alpha_{\ell+1}a_{\ell+1}\dots\alpha_{k+\ell}a_{k+\ell}}.$$

Пусть $L^i_{\alpha_{k+1}\dots\alpha_{k+\ell}} = (L^i_{\alpha_{k+1}\dots\alpha_{k+\ell}})^s e_s$. Вычислим компоненту $L^{ic}_{\alpha_{k+1}a_{k+1}\dots\alpha_{k+\ell}a_{k+\ell}}$. Введем обозначение

$$e_{a_1}\dots e_{a_m} = \gamma^b_{a_1\dots a_m}e_b.$$

Имеем:

$$L^{ic}_{\alpha_{k+1}a_{k+1}\dots\alpha_{k+\ell}a_{k+\ell}} = p(L^i_{\alpha_{k+1}\dots\alpha_{k+\ell}}e_{a_{k+1}}\dots e_{a_{k+\ell}}e^c) =$$
$$= p((L^i_{\alpha_{k+1}\dots\alpha_{k+\ell}})^s e_s e_{a_{k+1}}\dots e_{a_{k+\ell}}e^c) = (L^i_{\alpha_{k+1}\dots\alpha_{k+\ell}})^s\gamma^c_{sa_{k+1}\dots a_{k+\ell}}. \quad (15)$$

С учетом (10) и (15) после свертки с p третье слагаемое примет вид

$$p(k\cdot K^j_{\alpha_1\dots\alpha_{k-1}i}\delta^g\frac{\partial}{\partial x^{\alpha_kg}}(L^i_{\alpha_{k+1}\dots\alpha_{k+\ell}})^s e_s e_{a_1}\dots e_{a_{k+\ell}}e^b) =$$
$$= k\cdot p(K^j_{\alpha_1\dots\alpha_{k-1}i}\delta^g\frac{\partial}{\partial x^{\alpha_kg}}(L^i_{\alpha_{k+1}\dots\alpha_{k+\ell}})^s\gamma^m_{sa_k}e_m e_{a_{k+1}}\dots e_{a_{k+\ell}}e_{a_1}\dots e_{a_{k-1}}e^b) =$$
$$= k\cdot\frac{\partial}{\partial x^{\alpha_ka_k}}(L^i_{\alpha_{k+1}\dots\alpha_{k+\ell}})^m p(K^j_{\alpha_1\dots\alpha_{k-1}i}e_{a_1}\dots e_{a_{k-1}}e^b\gamma^c_{ma_{k+1}\dots a_{k+\ell}}e_c) =$$
$$= k\cdot\frac{\partial}{\partial x^{\alpha_ka_k}}L^{ic}_{\alpha_{k+1}a_{k+1}\dots\alpha_{k+\ell}a_{k+\ell}}p(K^j_{\alpha_1\dots\alpha_{k-1}i}e_{a_1}\dots e_{a_{k-1}}e_c e^b) =$$
$$= k\cdot K^{jb}_{\alpha_1a_1\dots\alpha_{k-1}a_{k-1}ic}\frac{\partial}{\partial x^{\alpha_ka_k}}L^{ic}_{\alpha_{k+1}a_{k+1}\dots\alpha_{k+\ell}a_{k+\ell}}.$$

Аналогично, после свертки с p четвертое слагаемое примет вид

$$(-1)^{k\ell}\ell\cdot L^{jb}_{\alpha_1a_1\dots\alpha_{\ell-1}a_{\ell-1}ic}\frac{\partial}{\partial x^{\alpha_\ell a_\ell}}K^{ic}_{\alpha_{\ell+1}a_{\ell+1}\dots\alpha_{k+\ell}a_{k+\ell}}.$$

□

Из Предложения 2 вытекает следующее

Предложение 3. *Пусть M – гладкое многообразие, $K, L \in \Omega^*(M, TM)$. Имеют место следующие соотношения:*

$$\begin{aligned} &1)\ ([K,L]_{FN})^C = [K^C, L^C]_{FN},\\ &2)\ ([K,L]_{FN})^V = [K^C, L^V]_{FN} = [K^V, L^C]_{FN},\\ &3)\ [K^V, L^V]_{FN} = 0. \end{aligned} \tag{16}$$

Доказательство. Докажем второе соотношение; первое и третье доказываются аналогично. Пусть $K^{\mathbb{A}}$ и $L^{\mathbb{A}}$ – аналитические продолжения форм K и L соответственно. Тогда $R(\varepsilon[K,L]^{\mathbb{A}}_{FN}) = R([\varepsilon K^{\mathbb{A}}, L^{\mathbb{A}}]_{FN}) = R([K^{\mathbb{A}}, \varepsilon L^{\mathbb{A}}]_{FN})$. □

Теорема 1. *Пусть (P, N) – структура Пуассона – Нейенхейса на гладком многообразии M, $(\mathbb{A}, q)$ – фробениусова алгебра Вейля. Тогда (P^C, N^C) есть структура Пуассона – Нейенхейса на расслоении Вейля $T^{\mathbb{A}}M$.*

Доказательство. Тот факт, что P^C есть тензор Пуассона, а N^C – тензор Нейенхейса на $T^{\mathbb{A}}M$, следует из Предложений 1 и 3 и соотношений (2) и (3). Покажем, что эти тензоры совместимы.

Условие совместимости (5) в локальных координатах на M имеет следующий вид:

$$P^{lj}N^k_l + P^{lk}N^j_l = 0.$$

Пусть $P^{\mathbb{A}}$ и $N^{\mathbb{A}}$ – аналитические продолжения P и N на $T^{\mathbb{A}}M$ соответственно. Тогда

$$(P^{\mathbb{A}})^{lj}(N^{\mathbb{A}})^k_l + (P^{\mathbb{A}})^{lk}(N^{\mathbb{A}})^j_l = 0. \tag{17}$$

Пусть $(P^{\mathbb{A}})^{lj} = (P^{lj})^s e_s$, $(N^{\mathbb{A}})^k_l = (N^k_l)^d e_d$ – разложения по базису (8). Вычислим компоненты P^{lcja} и N^{kb}_{lc} тензоров P^C и N^C. С учетом (12) имеем:

$$P^{lcja} = p((P^{\mathbb{A}})^{lj}e^c e^a) = p((P^{lj})^s e_s e^c e^a) = (P^{lj})^s p(e_s e^c e^a) = (P^{lj})^s \gamma^{ca}_s.$$

Аналогично,

$$N^{kb}_{lc} = p((N^{\mathbb{A}})^k_l e^b e_c) = p((N^k_l)^d e_d e^b e_c) = (N^k_l)^d \gamma^b_{dc}.$$

Итак,

$$P^{lcja} = (P^{lj})^s \gamma^{ca}_s, \quad N^{kb}_{lc} = (N^k_l)^d \gamma^b_{dc}. \tag{18}$$

Умножим обе части равенства (17) на $e^a e^b$ и свернем результат с p. Тогда первое слагаемое примет вид:

$$\begin{aligned} p((P^{\mathbb{A}})^{lj}(N^{\mathbb{A}})^k_l e^a e^b) &= p((P^{lj})^s (N^k_l)^d e_s e_d e^a e^b) = \\ &= (P^{lj})^s (N^k_l)^d \gamma^{ac}_s p(e_c e_d e^b) = (P^{lj})^s (N^k_l)^d \gamma^{ac}_s \gamma^b_{cd} = P^{lcja}N^{kb}_{lc}. \end{aligned}$$

Второе слагаемое при этом примет вид $P^{lckb}N^{ja}_{lc}$. Отсюда $P^C N^C = N^C P^C$.

Теперь покажем, что выполняется условие совместимости (6), то есть что

$$C(P^C, N^C) = 0.$$

Запишем выражения (7) для аналитических продолжений $P^{\mathbb{A}}$ и $N^{\mathbb{A}}$, умножим их на $e^a e^b e_c$ и свернем с p. Рассмотрим первое слагаемое. С учетом (13) имеем

$$\begin{aligned} (P^{\mathbb{A}})^{lj} \frac{\partial (N^{\mathbb{A}})^k_m}{\partial X^l} e^a e^b e_c &= (P^{\mathbb{A}})^{lj} e^a \delta^d \frac{\partial (N^{\mathbb{A}})^k_m}{\partial x^{ld}} e^b e_c = \\ &= (P^{\mathbb{A}})^{lj} e^a \delta^d \frac{\partial}{\partial x^{ld}} (N^{kb}_{mc})_s e^s = (P^{\mathbb{A}})^{lj} e^a \frac{\partial}{\partial x^{ls}} \delta^d (N^{kb}_{mc})_d e^s = (P^{\mathbb{A}})^{lj} e^a e^s \frac{\partial N^{kb}_{mc}}{\partial x^{ls}}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$p((P^{\mathbb{A}})^{lj}\,\frac{\partial (N^{\mathbb{A}})^k_m}{\partial X^l}e^a e^b e_c) = P^{lsja}\,\frac{\partial N^{kb}_{mc}}{\partial x^{ls}}.$$

Второе и третье слагаемые рассматриваются аналогично.

Рассмотрим четвертое слагаемое. С учетом (11) и (18) получим

$$(N^{\mathbb{A}})^j_l\,\frac{\partial (P^{\mathbb{A}})^{kl}}{\partial X^m}e^a e^b e_c = (N^{\mathbb{A}})^j_l\delta^d\,\frac{\partial (P^{kl})^g}{\partial x^{md}}e_g e^a e^b e_c =$$

$$= (N^{\mathbb{A}})^j_l\delta^d\,\frac{\partial (P^{kl})^g}{\partial x^{md}}\gamma^f_{cg}e_f e^a e^b = (N^{\mathbb{A}})^j_l e_f e^a e^b\,\frac{\partial (P^{kl})^f}{\partial x^{mc}} =$$

$$= (N^{\mathbb{A}})^j_l e_s e^a\gamma^{bs}_f\,\frac{\partial (P^{kl})^f}{\partial x^{mc}} = (N^{\mathbb{A}})^j_l e_s e^a\,\frac{\partial P^{kbls}}{\partial x^{mc}}.$$

Поэтому

$$p\left((N^{\mathbb{A}})^j_l\,\frac{\partial (P^{\mathbb{A}})^{kl}}{\partial X^m}e^a e^b e_c\right) = N^{ja}_{ls}\,\frac{\partial P^{kbls}}{\partial x^{mc}}.$$

Наконец, пятое слагаемое приводится к виду

$$(P^{\mathbb{A}})^{lj}\,\frac{\partial (N^{\mathbb{A}})^k_l}{\partial X^m}e^a e^b e_c = (P^{\mathbb{A}})^{lj}\delta^g\,\frac{\partial (N^k_l)^d}{\partial x^{mg}}e_d e_c e^a e^b =$$

$$= (P^{\mathbb{A}})^{lj}\delta^g\,\frac{\partial (N^k_l)^d}{\partial x^{mg}}\gamma^f_{cd}e_f e^a e^b =$$

$$= (P^{\mathbb{A}})^{lj}\,\frac{\partial (N^k_l)^f}{\partial x^{mc}}\gamma^b_{fs}e^s e^a = (P^{\mathbb{A}})^{lj}\,\frac{\partial N^{kb}_{ls}}{\partial x^{mc}}e^s e^a.$$

Отсюда

$$p((P^{\mathbb{A}})^{lj}\,\frac{\partial (N^{\mathbb{A}})^k_l}{\partial X^m}e^a e^b e_c) = P^{lsja}\,\frac{\partial N^{kb}_{ls}}{\partial x^{mc}}.$$

□

Предложение 4. *Пусть $M_{\mathbb{A}}$ – $\mathbb{A}$-гладкое многообразие и $N \in T^{1,1}_{\mathbb{A}-\mathrm{diff}}(M_{\mathbb{A}})$. Тогда для любого $\mathbb{A}$-гладкого контравариантного тензорного поля $T \in T^{0,k}_{\mathbb{A}-\mathrm{diff}}(M_{\mathbb{A}})$ имеет место равенство*

$$R(NT) = R(N)R(T).$$

Доказательство. Пусть в локальных координатах

$$N = N^i_j dX^j \otimes \frac{\partial}{\partial X^i},\quad T = T^{i_1\ldots i_k}\,\frac{\partial}{\partial X^{i_1}}\otimes\ldots\otimes\frac{\partial}{\partial X^{i_k}}.$$

Обозначим $S = NT$. Имеем

$$S^{ii_1\ldots i_{k-1}} = N^i_j T^{ji_1\ldots i_{k-1}}. \tag{19}$$

Умножим обе части равенства (19) на $e^a e^{a_1}\ldots e^{a_{k-1}}$. Тогда правая часть этого равенства примет вид

$$N^i_j T^{ji_1\ldots i_{k-1}}e^a e^{a_1}\ldots e^{a_{k-1}} =$$

$$= (N^i_j)^d e_d e^a T^{ji_1\ldots i_{k-1}}e^{a_1}\ldots e^{a_{k-1}} = (N^i_j)^d\gamma^a_{dc}T^{ji_1\ldots i_{k-1}}e^c e^{a_1}\ldots e^{a_{k-1}}.$$

После свертки полученного равенства с p в левой части получим $R(S)^{iai_1a_1\ldots i_{k-1}a_{k-1}}$, а в правой – соответственно

$$(N^i_j)^d\gamma^a_{dc}T^{jci_1a_1\ldots i_{k-1}a_{k-1}} = N^{ia}_{jc}T^{jci_1a_1\ldots i_{k-1}a_{k-1}}.$$

□

Следствие 1. *Пусть M – гладкое многообразие, $N \in T^{1,1}(M)$, $T \in T^{0,k}(M)$. Имеют место следующие соотношения:*

$$
\begin{aligned}
(NT)^C &= N^C T^C, \\
(NT)^V &= N^C T^V = N^V T^C.
\end{aligned}
\tag{20}
$$

Пусть (M,P) – пуассоново многообразие и μ – форма объема на M. Напомним, что дивергенция $\mathrm{div}_\mu X$ векторного поля X определяется соотношением $\mathcal{L}_X\mu = (\mathrm{div}_\mu X)\mu$. Оператор X_μ, определенный равенством

$$X_\mu = X_{\mu,P} : f \in C^\infty(M) \longmapsto \mathrm{div}_\mu H_f^P \in C^\infty(M),$$

является дифференцированием на $C^\infty(M)$ и, следовательно, задает векторное поле на M [9]. Это векторное поле называется *модулярным векторным полем* пуассоновой структуры P (или пуассонова многообразия (M,P)). Модулярное векторное поле есть коцикл оператора σ_P. Класс когомологий $[X_\mu] \in H^1(M,P)$ не зависит от выбора формы объема μ и называется *модулярным классом* пуассонова многообразия (M,P).

В работе [8] показано, что форма объема μ индуцирует форму объема $\overline{\mu}$ на $T^{\mathbb{A}}M$ и модулярное векторное поле пуассонова многообразия $(T^{\mathbb{A}}M, P^C)$ имеет вид:

$$X_{\overline{\mu},w^C} = (n+1)X_\mu^V. \tag{21}$$

Пусть теперь (M,P,N) – многообразие Пуассона–Нейенхейса с формой объема μ. Обозначим символом X_μ^k модулярное векторное поле пуассоновой структуры P_k. И. Косманн-Шварцбах и Ф. Магри [6] ввели в рассмотрение векторные поля

$$X^{(k)} = X_\mu^k - NX_\mu^{k-1}, \quad k = 1,2,\ldots \tag{22}$$

Ими было показано, что для каждого k поле $X^{(k)}$ не зависит от μ и что $X^{(k)}$ есть коцикл оператора σ_{P_k}. Кроме того, было доказано, что

$$X^{(k)} = -\frac{1}{2}H_{I_k}^P, \quad k \geq 1, \tag{23}$$

где $I_k = \frac{1}{k}\mathrm{Tr}\, N^k$, $k \geq 1$. Поле $X^{(k)}$ называется *k-м модулярным векторным полем* многообразия (M,P,N), а класс $[X_\mu^k] \in H^1(M,P_k)$ – *k-м модулярным классом* многообразия (M,P,N). Последовательность $X^{(k)}$, $k \geq 1$, называется *иерархией* модулярных векторных полей. П. Дамиану и Р.Л. Фернандес [5] назвали поле $X_N = X^{(1)}$ *модулярным векторным полем многообразия Пуассона–Нейенхейса* (M,P,N).

Предложение 5. *Пусть (M,P,N) – многообразие Пуассона–Нейенхейса и $X^{(k)}$, $k \geq 1$, – иерархия его модулярных векторных полей. Для иерархии модулярных векторных полей $\overline{X}^{(k)}$, $k \geq 1$, многообразия $(T^{\mathbb{A}}M, P^C, N^C)$ выполняются соотношения*

$$\overline{X}^{(k)} = (n+1)(X^{(k)})^V, \quad k \geq 1. \tag{24}$$

Доказательство. Из формулы (20) следует, что для любого $k \geq 1$ тензор Пуассона $\overline{P}_k = (N^C)^k P^C$ на $T^{\mathbb{A}}M$ совпадает с полным лифтом тензора Пуассона $P_k = N^k P$. С учетом (24) это означает, что модулярное векторное поле $\overline{X}_{\overline{\mu}}^k$ структуры $\overline{P}_k$ есть $(n+1)(X_\mu^k)^V$. Поэтому в силу (22) и (20) $\overline{X}^{(k)} = \overline{X}_{\overline{\mu}}^k - N^C \overline{X}_{\overline{\mu}}^{k-1} = (n+1)((X_\mu^k)^V - N^C(X_\mu^{k-1})^V) = (n+1)(X^{(k)})^V$. □

Из формулы (23) следует, что модулярное векторное поле X_N является гамильтоновым векторным полем по отношению к пуассоновой структуре P. П. Дамиану и Р.Л. Фернандес [5] доказали, что если тензор N невырожден, то поле X_N является *бигамильтоновым*, то есть, гамильтоновым также и по отношению к пуассоновой структуре P_1, а именно: выполняется равенство $X_N = -\dfrac{1}{2}H^{P_1}_{\log(|\det N|)}$. Более того, в этом случае каждое модулярное векторное поле $X^{(k)}$ оказывается *мультигамильтоновым*, то есть, гамильтоновым по отношению к каждой из пуассоновых структур P_i, $i = 0, \ldots, k$.

Предложение 6. *Если $N \in \Omega^1(M; TM)$ – невырожденный тензор, то $N^C \in \Omega^1(T^{\mathbb{A}}M; TT^{\mathbb{A}}M)$ – также невырожденный тензор.*

Доказательство. Пусть $N^{\mathbb{A}}$ – аналитическое продолжение тензора N и пусть $(N^i_j)^{\mathbb{A}} = (N^i_j)^c e_c$ – разложение по базису (8). Тогда для компонент тензора N^C по формуле (18) имеем: $N^{ia}_{jb} = (N^i_j)^c \gamma^a_{bc}$. Из формул (9) следует, что

$$N^{ia}_{ja} = N^i_j, \quad N^{ia}_{jb} = 0, \quad \text{если } a < b.$$

Таким образом, матрица тензора N^C имеет блочную форму вида

N^i_j	$*$	$*$	$\cdots$	$*$	$*$
0	N^i_j	$*$	$\cdots$	$*$	$*$
0	0	$\ddots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$	$\ddots$	$\ddots$	$\ddots$	$\ddots$	$\vdots$
0	0	$\cdots$	0	N^i_j	$*$
0	0	$\cdots$	0	0	N^i_j

,

где звездочкой обозначены блоки, не имеющие существенного значения для настоящего рассмотрения. Поэтому

$$\det N^C = (n+1)\det N.$$

□

Следствие 2. *Если тензор N невырожден, то модулярное векторное поле X_{N^C} многообразия $(T^{\mathbb{A}}M, P^C, N^C)$ является бигамильтоновым.*

Summary

V. V. Shurygin, jr. Lifts of Poisson – Nijenhuis Structures to Weil Bundles.

In the present paper we show that the complete lifts of the structure tensors P and N of a Poisson – Nijenhuis manifold (M, P, N) to the Weil bundle $T^{\mathbb{A}}M$ induce a structure of Poisson – Nijenhuis manifold on $T^{\mathbb{A}}M$. We compute the modular vector fields of this manifold.

Key words: Poisson – Nijenhuis manifold, modular class, Weil algebra, Weil bundle, complete lift, vertical lift.

Литература

1. *de Azcarraga J.A., Perelomov A.M., Perez Bueno J.C.* The Schouten-Nijenhuis bracket, cohomology and generalized Poisson structures // J. Phys. A: Math. Gen. – 1996, – V. 29, No 24. – P. 7993–8009.

2. *Kolář I., Michor P.W., Slovák J.* Natural operations in differential geometry. – Springer, 1993. – 434 p.

3. *Vaisman I.* Lectures on the Geometry of Poisson Manifolds. Progress in Math. V. 118. – Basel: Birkhäuser, 1994, – 205 p.

4. *Kosmann-Schwarzbach Y., Magri F.* Poisson – Nijenhuis structures // Ann. Inst. Poincaré Serie A. – 1990. – V. 53, No 1. – P. 35–81.

5. *Damianou P.A., Fernandes R.L.* Integrable hierarchies and the modular class. – URL: arXiv:math.DG/0607784, version 2.

6. *Kosmann-Schwarzbach Y., Magri F.* On the modular classes of Poisson – Nijenhuis manifolds. – URL: arXiv:math.SG/0611202.

7. *Shurygin V.V.* The structure of smooth mappings over Weil algebras and the category of manifolds over algebras // Lobachevskii J. of Math. – 1999. – No 5. – P. 29–55.

8. *Shurygin V.V., jr.* Lifts of Poisson structures to Weil bundles. – URL: arXiv:0907.5560.

9. *Weinstein A.* The modular automorphism group of a Poisson manifold // J. Geom. Phys. – 1997. – V. 23, No 3. – P. 379–394.

Поступила в редакцию
21.05.09

Шурыгин Вадим Вадимович – кандидат физико-математических наук, научный сотрудник НИИММ им. Н.Г. Чеботарева Казанского государственного университета.

E-mail: *vshjr@yandex.ru*