УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ КАЗАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
Том 151, кн. 4 Физико-математические науки *2009*

УДК 514.16

ГЛАВНЫЕ НАПРАВЛЕНИЯ ГИПЕРКВАДРИКИ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В.Е. Фомин

Аннотация

У гиперповерхности $(n+1)$-мерного евклидова пространства в каждой точке существуют n главных направлений – собственных векторов оператора Вейнгартена в данной точке гиперповерхности. Алгоритм поиска главных направлений в этом случае сводится к нахождению корней характеристического полинома n-й степени и решению систем линейных уравнений. Для гиперповерхностей бесконечномерного гильбертова пространства этот алгоритм не действует. Более того, оператор Вейнгартена в этом случае может вообще не иметь собственных векторов. В данной работе к задаче поиска главных направлений гиперквадрики параболического типа мы подошли с другой стороны. Задав локальное представление произвольного ненулевого вектора, мы находим в явном виде точку на поверхности, в которой этот вектор задаёт главное направление.

Ключевые слова: гильбертово пространство, оператор Вейнгартена, главное направление гиперквадрики.

В конечномерном случае в каждой точке гиперповерхности $(n+1)$-мерного евклидова пространства существуют n главных направлений – собственных векторов тензора Вейнгартена в данной точке гиперповерхности. Алгоритм поиска главных направлений в этом случае известен и сводится к нахождению корней характеристического полинома n-й степени и решению систем линейных уравнений. Для гиперповерхностей бесконечномерного гильбертова пространства этот алгоритм не действует. Более того, оператор Вейнгартена в этом случае может вообще не иметь собственных векторов. В данной работе к задаче поиска главных направлений гиперквадрики параболического типа мы подошли с другой стороны. Задав локальное представление произвольного ненулевого вектора, мы находим в явном виде точку на поверхности, в которой этот вектор задаёт главное направление гиперквадрики. Для центральных гиперквадрик гильбертова пространства, задаваемых положительно определённой квадратичной формой с некоторыми дополнительными ограничениями, подобная задача была решена в [1].

Пусть H – полное евклидово, то есть либо конечномерное евклидово, либо гильбертово пространство над полем $\mathbb{R}$ со скалярным произведением $\langle\cdot,\cdot\rangle$. $\tilde{H} = H\times\mathbb{R}$ также будет полным евклидовым пространством со скалярным произведением:

$$\langle(x,\mu),(y,\nu)\rangle_{\tilde{H}} = \langle x,y\rangle + \mu\cdot\nu, \quad \forall (x,\mu),\ \ (y,\nu)\in\tilde{H}. \tag{1}$$

Пусть $U\subset H$ – открытое множество, $f : x\in U\mapsto f(x)\in\mathbb{R}$ – функция класса C^2 (по Фреше) [2], $\Sigma\subset\tilde{H}$ – гиперповерхность в $\tilde{H}$, задаваемая явным уравнением $\mu = f(x)$ или параметрически:

$$F : x\in U\mapsto F(x) = (x, f(x))\in\tilde{H}. \tag{2}$$

Структура многообразия класса C^2 [3] на Σ задаётся глобальной картой $c_0 = (\Sigma, \mathrm{pr}, H)$, где $\mathrm{pr} : (x, f(x)) \in \Sigma \mapsto x \in U \subset H$. При этом Σ – подмногообразие в $\tilde{H}$. Метрический тензор поверхности Σ в карте c_0 имеет локальное представление:

$$g_x(X,Y) = \langle X, Y\rangle + \mathcal{D}f_x(X) \cdot \mathcal{D}f_x(Y), \quad \forall x \in U, \ \forall X, Y \in H, \tag{3}$$

где $\mathcal{D}f_x \in \mathcal{L}(H, \mathbb{R}) = H^*$ – производная Фреше в точке x отображения f (градиент функции f). Для любого $x \in U$ пусть $\mathcal{F}_x \in H$ – вектор (контравариантный градиент функции f), существующий, единственный (см. [2, с. 142]) и удовлетворяющий тождеству:

$$\mathcal{D}f_x(Z) = \langle \mathcal{F}_x, Z\rangle, \quad \forall Z \in H. \tag{4}$$

Тогда орт нормали поверхности в точке $F(x) \in \Sigma$, $x \in U$, имеет вид:

$$n_x = \frac{(-\mathcal{F}_x, 1)}{\sqrt{\|\mathcal{F}_x\|^2 + 1}} \in \tilde{H}, \tag{5}$$

а локальное представление относительно карты c_0 оператора Вейнгартена A_x в точке $F(x) \in \Sigma$ [4] является решением уравнения

$$\mathcal{D}\mathcal{F}_x \circ A_x = -\mathcal{D}n_x \tag{6}$$

и имеет вид для любой точки $x \in U$ и для любого вектора $Z \in H$

$$A_x(Z) = \mathcal{D}\left(\frac{\mathcal{F}_x}{\sqrt{\|\mathcal{F}_x\|^2+1}}\right)_x (Z) = \frac{1}{(\|\mathcal{F}_x\|^2+1)^{3/2}}\left[\mathcal{D}\mathcal{F}_x(Z)\cdot(\|\mathcal{F}_x\|^2+1) - \mathcal{F}_x \cdot \langle \mathcal{F}_x, \mathcal{D}\mathcal{F}_x(Z)\rangle\right]. \tag{7}$$

Главные направления поверхности Σ в точке $F(x)$ (точнее, локальные представления главных направлений в карте c_0) – это собственные векторы оператора Вейнгартена A_x. Оператор A_x самосопряжён относительно метрического тензора g_x (3), поэтому его собственные значения и собственные векторы вещественны.

В дальнейшем мы будем рассматривать частный случай гиперповерхности Σ – гиперквадрику (параболоид), когда функция f имеет вид:

$$f(x) = \frac{1}{2}\langle x, Sx\rangle, \quad \forall x \in U = H, \tag{8}$$

где $S \in \mathcal{L}(H; H)$ – самосопряжённый линейный непрерывный оператор в H. Мы будем также в дальнейшем предполагать, что оператор S инъективен, что не ограничивает общности решаемых в дальнейшем задач. Тогда имеем:

$$\mathcal{D}f_x(Z) = \langle Z, Sx\rangle, \ \ \mathcal{F}_x = Sx, \ \ \mathcal{D}\mathcal{F}_x = S, \tag{9}$$

$$A_x(Z) = \frac{1}{(\|Sx\|^2+1)^{3/2}}\left[S(Z)\cdot(\|Sx\|^2+1) - Sx\cdot\langle Sx, SZ\rangle\right], \tag{10}$$

$$g_x(X,Y) = \langle X, Y\rangle + \langle X, Sx\rangle \cdot \langle Y, Sx\rangle. \tag{11}$$

Имеет место следующее

Предложение.

1. *Собственные векторы (точнее, их локальные представления относительно карты* c_0*) оператора Вейнгартена* A_x *параболоида* Σ *в* $\tilde{H} = H \times \mathbb{R}$*, заданного уравнением*

$$\mu = \frac{1}{2}\langle x, Sx\rangle, \quad x \in H,$$

где $S : x \in H \mapsto Sx \in H$ *– линейный непрерывный самосопряженный инъективный оператор, лежат в* $\operatorname{Im} S$*.*

2. *Пусть* $Z = SY \in \operatorname{Im} S$ *– произвольный ненулевой вектор, тогда:*

a) *если* Z *– собственный вектор оператора* S*, соответствующий собственному значению* σ*, то* Z *будет собственным вектором оператора Вейнгартена* A_x*, соответствующим собственному значению* $\alpha_x = \sigma \cdot (\|Sx\|^2 + 1)^{-1/2}$*, во всех точках* $x \in H$*, удовлетворяющих условию:* a1) $\langle x, Z\rangle = 0$ *или* a2) $x \parallel Z$*, и только в них;*

b) *если* Z *не является собственным вектором оператора* S *и*

$$\langle SZ, Z\rangle = 0, \tag{12}$$

то вектор Z *не является собственным вектором оператора Вейнгартена* A_x *ни в какой точке* $x \in H$*. Верно и обратное: вектор* Z*, не являющийся собственным вектором оператора Вейнгартена* A_x *ни в какой точке* $x \in H$*, не является собственным вектором оператора* S*, и выполняется равенство (12);*

c) *Если* $Z = SY$ *не является собственным вектором оператора* S *и*

$$\langle Y, S^3Y\rangle = \langle SZ, Z\rangle \neq 0, \tag{13}$$

то вектор Z *будет собственным вектором оператора Вейнгартена* A_x *во всех точках кривой*

$$x = x(t) = \frac{t}{\|SY\|} \cdot Y - \left(t + \frac{1}{t}\right) \cdot \frac{\|SY\|}{\langle S^3Y, Y\rangle} \cdot SY, \quad t \in \mathbb{R}\backslash\{0\}, \tag{14}$$

и только в них. Эта кривая является гиперболой с параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x^1 = t, \\ x^2 = \dfrac{1}{t}, \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$$

в плоскости, натянутой на векторы $\{Y, SY\}$*, в аффинной системе координат*

$$\left\{0, \frac{Y}{\|SY\|} - \frac{\|SY\|}{\langle S^3Y, Y\rangle} \cdot SY, -\frac{\|SY\|}{\langle S^3Y, Y\rangle} \cdot SY\right\}.$$

Собственное значение $\alpha_{x(t)}$*, соответствующее собственному вектору* Z *оператора Вейнгартена* $A_{x(t)}$*, равно*

$$\alpha_x(t) = \frac{t^3}{(t^2+1)^{3/2}} \cdot \frac{\langle Z, SZ\rangle^2}{\|Z\|^2} \cdot \left[(t^2+1)\|Z\|^2 \cdot \|SZ\|^2 - t^2\langle Z, SZ\rangle^2\right]^{-1/2}. \tag{15}$$

В частности, если оператор S *не имеет собственных векторов, то у параболоида* Σ *в вершине* $0 \in \tilde{H}$ *нет главных направлений.*

Доказательство. Собственные векторы оператора Вейнгартена A_x совпадают с собственными векторами оператора

$$B_x(Z) = (\|Sx\|^2+1)^{1/2} \cdot A_x(Z) = SZ - Sx \cdot \frac{\langle Sx, SZ\rangle}{\|Sx\|^2+1}, \tag{16}$$

а собственные значения есть

$$\beta_x = (\|Sx\|^2+1)^{1/2} \cdot \alpha_x. \tag{17}$$

У оператора B_x нет нулевых собственных значений, так как в противном случае это привело бы к тому, что и у S есть нулевое собственное значение, что противоречило бы инъективности оператора S. Если $Z \in H$ – собственный вектор оператора B_x, соответствующий собственному значению $\beta_x \neq 0$, то из (16) следует, что $Z \in \operatorname{Im} S$, то есть собственный вектор имеет вид $Z = SY$. Тогда с учётом инъективности оператора S из (16) получим:

$$\beta_x \cdot Y = SY - x \cdot \frac{\langle Sx, S^2 Y\rangle}{\|Sx\|^2+1}, \tag{18}$$

где β_x – собственное значение оператора B_x, соответствующее собственному вектору $Z = SY$. Из (18), умножая обе части уравнения скалярно на S^2x, получим:

$$\beta_x \langle S^2x, Y\rangle = \frac{\langle Sx, S^2Y\rangle}{\|Sx\|^2+1}. \tag{19}$$

Теперь возможны следующие случаи:

A) $\langle S^2x, Y\rangle = 0$, $\langle Sx, S^2Y\rangle = 0$.

Тогда из (18) следует, что Y – собственный вектор оператора S. Но тогда и $Z = SY$ – собственный вектор оператора S, соответствующий тому же собственному значению β_x. Кроме того, предположение A) влечёт то, что $Z \perp x$ относительно $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Верно и обратное, если Z – собственный вектор оператора S, то во всякой точке $x \in H$, удовлетворяющей условию $\langle x, Z\rangle = 0$, вектор Z является собственным вектором и оператора B_x. Тем самым доказано утверждение a1) предложения.

B) $\langle S^2x, Y\rangle \neq 0$, $\langle Sx, S^2Y\rangle \neq 0$.

Тогда из (19) имеем:

$$\beta_x = \frac{\langle Sx, S^2Y\rangle}{\langle S^2x, Y\rangle(\|Sx\|^2+1)}. \tag{20}$$

Подставляя (20) в (18), получим:

$$x = \frac{\|Sx\|^2+1}{\langle Sx, S^2Y\rangle} \cdot SY - \frac{1}{\langle S^2x, Y\rangle} \cdot Y. \tag{21}$$

Возможны два случая:

B1) Вектор Y, а следовательно, и $Z = SY$, – собственные векторы оператора S. Тогда $x \parallel Z$, $x \neq 0$. Верно и обратное: если Z – собственный вектор оператора S, то в любой точке $x \in H$, удовлетворяющей условиям $x \parallel Z$, $x \neq 0$, вектор Z – собственный вектор и оператора B_x. Тем самым доказан случай a2) предложения.

B2) Вектор Y, а следовательно, и $Z = SY$, не являются собственными векторами оператора S. Тогда в (21) векторы Y и SY линейно независимы, а

$$x = aY + bSY. \tag{22}$$

Умножая обе части уравнения (21) скалярно на S^2Y, получим:

$$\frac{\langle Sx, S^2Y\rangle}{\|Sx\|^2+1} = \frac{\langle SY, S^2Y\rangle}{\|SY\|^2+\langle Sx, SY\rangle^2}\cdot\langle Sx, SY\rangle. \tag{23}$$

Подставляя (23) в (21), получим:

$$\langle SY, S^2Y\rangle\langle Sx, SY\rangle\cdot x + \langle SY, S^2Y\rangle\cdot Y - (\|SY\|^2+\langle Sx, SY\rangle^2)\cdot SY = 0. \tag{24}$$

Подставляя (22) в (24), получим:

$$\langle SY, S^2Y\rangle(a\|SY\|^2+b\langle S^2Y, SY\rangle)\cdot(aY+bSY)+ \\ \langle SY, S^2Y\rangle\cdot Y - (\|SY\|^2+(a\|SY\|^2+b\langle S^2Y, SY\rangle)^2)\cdot SY = 0. \tag{25}$$

При этом

$$\langle SY, S^2Y\rangle \neq 0, \tag{26}$$

так как в противном случае из (24) следует равенство $SY = 0$, что невозможно. Тем самым доказана достаточность утверждения b) предложения. Так как в рассматриваемом случае Y и SY линейно независимы, то из (25), приравнивая нулю коэффициенты при Y и SY, получим:

$$\begin{cases} a\cdot(a\cdot\|SY\|^2+b\cdot\langle SY, S^2Y\rangle) = -1, \\ \|SY\|^2+\dfrac{1}{a^2}+\langle SY, S^2Y\rangle\cdot\dfrac{b}{a} = 0. \end{cases} \tag{27}$$

Общее решение этой системы

$$\begin{cases} a = \dfrac{t}{\|SY\|}, \\ b = -\dfrac{(1+t^2)\|SY\|}{t\langle SY, S^2Y\rangle}\cdot SY \end{cases}, \quad t\in\mathbb{R}\backslash\{0\}, \tag{28}$$

при подстановке в (22) даёт (14).

Верно и обратное: в точках кривой (14) при выполнении условия (26) вектор $Z = SY$ является собственным вектором оператора Вейнгартена, что проверяется непосредственной подстановкой (14) в (18). Тем самым доказано утверждение c) предложения. Из a) и c) следует необходимость условия b). Выражение (15) для собственного значения $\alpha_{x(t)} = (\|Sx\|^2+1)^{-1/2}\cdot\beta_{x(t)}$, соответствующего собственному вектору оператора Вейнгартена в точке $x(t)$, получается при подстановке (14) в (20). □

Summary

V.E. Fomin. Principal Directions of Hyperquadric of Parabolic Type in Hilbert Space.

In the finite dimensional case, a hypersurface Σ in $(n+1)$-dimensional Euclidean space has n principal directions: the eigenvectors of the Weingarten operator at a given point of Σ. The algorithm for finding the principal directions is well known for this case: one needs to find the roots of the characteristic polynomial n-th degree and to solve a system of linear equations. For the hypersurfaces of the infinite dimensional Hilbert space this algorithm fails. Moreover, it is possible that the Weingarten operator has no eigenvalues at all. In the present paper, we use another approach to the problem of finding principal directions of a hyperquadric of parabolic type. Given a local representation of an arbitrary nonzero vector, we explicitly find a point of the surface at which this vector has a principal direction.

Key words: Hilbert space, Weingarten operator, principal direction of hyperquadric.

Литература

1. *Фомин В.Е.* О главных направлениях гиперквадрики в гильбертовом пространстве // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2005. – Т. 147, кн. 1. – С. 173–180.

2. *Дьёдонне Ж.* Основы современного анализа. – М.: Мир, 1964. – 432 с.

3. *Ленг С.* Введение в теорию дифференцируемых многообразий. – М.: Мир, 1967. – 204 с.

4. *Торп Дж.* Начальные главы дифференциальной геометрии. Современная математика. Вводные курсы. – М.: Мир, 1982. – 360 с.

Поступила в редакцию
11.08.09

Фомин Виктор Егорович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры геометрии Казанского государственного университета.

E-mail: *Victor.Fomin@ksu.ru*