УДК 517.938

ОБ ИНВАРИАНТНОСТИ МЕРЫ ДЛЯ ОДНОЙ 2-ТРАНСФОРМАЦИИ

П.И. Трошин

Аннотация

Рассматривается семейство двузначных трансформаций $S = S(a)$ специального вида на отрезке $[0,1]$ с мерой $\mu = \int p(x)\,d\lambda$, абсолютно непрерывной относительно меры Лебега λ. Трансформация S оснащается набором весовых функций $\alpha = \{\alpha_1(x), \alpha_2(x)\}$. Находится критерий инвариантности меры под действием заданной оснащенной трансформации. Этот критерий явным образом связывает три параметра: a, p и α.

Ключевые слова: многозначная динамическая система, инвариантная мера.

Введение

Зафиксируем $a \in \left(0, \dfrac{1}{2}\right]$. Рассмотрим 2-трансформацию $S = S_1 \cup S_2$ на отрезке $[0,1]$ (см. рис. 1), где

$$S_1(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1-a}x, & x \in [0, 1-a), \\ \dfrac{1}{1-a}x - \dfrac{a}{1-a}, & x \in [1-a, 1], \end{cases} \qquad S_2(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1-a}x, & x \in [0, a), \\ \dfrac{1}{1-a}x - \dfrac{a}{1-a}, & x \in [a, 1]. \end{cases}$$

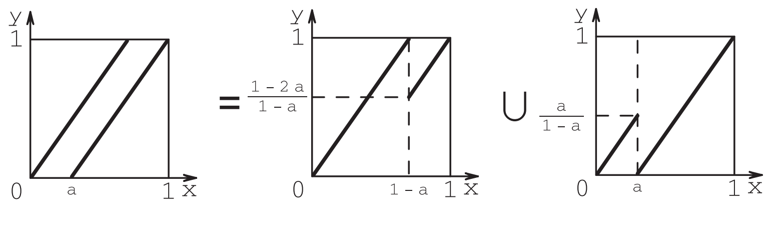

Рис. 1. Устройство 2-трансформации S

Пусть λ – мера Лебега на $[0,1]$, $\mathfrak{B}$ – σ-алгебра борелевских множеств на $[0,1]$. Пусть также $\mu(B) = \int\limits_B p(x)\,d\lambda$ – мера, абсолютно непрерывная относительно меры Лебега, $p(x) \in L^1([0,1], \mathfrak{B}, \lambda)$ и $p(x) \geq 0$. Снабдим 2-трансформацию S набором функций

$$\alpha = \{\alpha_1(x), \alpha_2(x)\}, \quad \alpha_1(x), \alpha_2(x) \in L^1([0,1], \mathfrak{B}, \lambda)$$

с условиями $\alpha_1(x) + \alpha_2(x) = 1$ и $\alpha_1(x), \alpha_2(x) \geq 0$.

Запишем выражение для новой меры μ_S на $\mathfrak{B}$ (следуя работе [1]):

$$\mu_S(B) = \int\limits_{S_1^{-1}(B)} \alpha_1(x)p(x)\,d\lambda + \int\limits_{S_2^{-1}(B)} \alpha_2(x)p(x)\,d\lambda.$$

В рассматриваемой нами конструкции присутствуют три независимых параметра: плотность $p(x)$, число a (параметр трансформации S) и оснащение $\alpha = \{\alpha_1(x), \alpha_2(x)\}$. Существует определенная связь между данными параметрами, задаваемая равенством $\mu_S = \mu$. Такая связь описана далее в лемме 1 и теореме 1. В следствии 3 отдельно рассмотрен случай меры Лебега ($p = 1$).

Заметим, что динамическая система $(([0,1], \mathfrak{B}, \lambda), S(a))$ тесно связана с теорией β-разложений и рассматривалась разными авторами в [2–4].

1. Основные результаты

Итак, зафиксируем три параметра: $a \in \left(0, \dfrac{1}{2}\right]$, $\{\alpha_1(x), \alpha_2(x)\}$ и $p(x)$. Пусть $\chi_A(x)$ – характеристическая функция множества A. Введем обозначения: $\alpha_1(x)p(x) = A_1(x)$, $\alpha_2(x)p(x) = A_2(x)$. Заметим, что при этом $A_1(x)+A_2(x) = p(x)$.

Лемма 1. *$\mu_S = \mu$ тогда и только тогда, когда почти для всех $x \in [0,1]$ по мере λ*

$$A_1((1-a)x) + \chi_{\left[\frac{1-2a}{1-a},1\right]}(x)A_1((1-a)x+a) + A_2((1-a)x+a)+ \\ + \chi_{\left[0,\frac{a}{1-a}\right)}(x)A_2((1-a)x) = \frac{p(x)}{1-a}. \quad (1)$$

Доказательство. Пусть $C_1 = \left[\dfrac{1-2a}{1-a}, 1\right]$, $C_2 = \left[0, \dfrac{a}{1-a}\right)$ и для любых $\beta \in \mathbb{R}$, $C \in \mathfrak{B}$ $\beta C = \{\beta x | x \in C\}$, $C + \beta = \{x + \beta | x \in C\}$. Тогда, сделав замену переменных в интеграле Лебега, мы получим, что для любого $B \in \mathfrak{B}$

$$\mu_S(B) = \int\limits_{S_1^{-1}(B)} A_1(x)\,d\lambda + \int\limits_{S_2^{-1}(B)} A_2(x)\,d\lambda =$$

$$= \int\limits_{(1-a)B} A_1(x)\,d\lambda + \int\limits_{(1-a)(B\cap C_1)+a} A_1(x)\,d\lambda + \int\limits_{(1-a)(B\cap C_2)} A_2(x)\,d\lambda + \int\limits_{(1-a)B+a} A_2(x)\,d\lambda =$$

$$= (1-a)\left(\int\limits_B A_1((1-a)x)\,d\lambda + \int\limits_B \chi_{C_1}(x)A_1((1-a)x+a)\,d\lambda + \right. \\ \left. + \int\limits_B \chi_{C_2}(x)A_2((1-a)x)\,d\lambda + \int\limits_B A_2((1-a)x+a)\,d\lambda\right). \quad (2)$$

Если $\mu_S = \mu$, то ввиду произвольности множества $B \in \mathfrak{B}$ из формулы (2) следует (1). И наоборот, подставляя равенство (1) в (2), мы получаем $\mu_S = \mu$. □

Пусть в дальнейшем $\dfrac{1}{n+1} < a \leq \dfrac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

Теорема 1. *$\mu_S = \mu$ тогда и только тогда, когда выполняются условия:*

$$(1-a)\sum_{k=-1}^{n-1} p(x_0 + ka) = \sum_{k=-1}^{n-2} p\left(\frac{x_0 + ka}{1-a}\right), \quad x_0 \in [a, 1-(n-1)a), \quad (3)$$

$$(1-a)\sum_{k=-1}^{n-2} p(x_1 + ka) = \sum_{k=-1}^{n-3} p\left(\frac{x_1 + ka}{1-a}\right), \quad x_1 \in [1-(n-1)a, 2a), \quad (4)$$

$$\alpha_1(x+ma)p(x+ma) = \left(\sum_{k=-1}^{m} p(x+ka) - \frac{1}{1-a}\sum_{k=-1}^{m-1} p\left(\frac{x+ka}{1-a}\right)\right), \tag{5}$$

где $x+ma \in [(m+1)a,(m+2)a)$ *при* $m=0,\dots,n-3$, $x+(n-2)a \in [(n-1)a, 1-a)$.

На промежутках $[0,a)$ *и* $[1-a,1]$ *на функцию* $\alpha_1(x)$ *ограничений нет.*

Доказательство. Рассмотрим два случая.

1. Пусть сначала $0 < a \le \dfrac{1}{3}$. Тогда $\dfrac{a}{1-a} \le \dfrac{1-2a}{1-a}$ и формула (1) запишется в виде:

$$\frac{p(x)}{1-a} = \begin{cases} p((1-a)x) + A_2((1-a)x+a), & x \in \left[0, \frac{a}{1-a}\right), \\ A_1((1-a)x) + A_2((1-a)x+a), & x \in \left[\frac{a}{1-a}, \dfrac{1-2a}{1-a}\right), \\ p((1-a)x+a) + A_1((1-a)x), & x \in \left[\dfrac{1-2a}{1-a}, 1\right]. \end{cases}$$

Рассмотрим первое уравнение системы:

$$\frac{p(x)}{1-a} = p((1-a)x) + A_2((1-a)x+a), \quad x \in \left[0, \frac{a}{1-a}\right).$$

Сделаем замену $y=(1-a)x+a$, тогда при $y\in[a,2a)$

$$\frac{1}{1-a}\,p\left(\frac{y-a}{1-a}\right) = p(y-a) + A_2(y) = p(y-a) + p(y) - A_1(y).$$

Рассмотрим второе уравнение системы:

$$\frac{p(x)}{1-a} = A_1((1-a)x) + A_2((1-a)x+a), \quad x \in \left[\frac{a}{1-a}, \frac{1-2a}{1-a}\right).$$

Сделаем замену $y=(1-a)x$, тогда при $y\in[a,1-2a)$

$$\frac{1}{1-a}\,p\left(\frac{y}{1-a}\right) = A_1(y) + A_2(y+a) = p(y+a) + A_1(y) - A_1(y+a).$$

Рассмотрим третье уравнение системы:

$$\frac{p(x)}{1-a} = p((1-a)x+a) + A_1((1-a)x), \quad x \in \left[\frac{1-2a}{1-a}, 1\right].$$

Сделаем замену $y=(1-a)x$, тогда при $y\in[1-2a,1-a]$

$$\frac{1}{1-a}\,p\left(\frac{y}{1-a}\right) = p(y+a) + A_1(y).$$

Итак, получаем:

$$\begin{cases} A_1(y) = p(y-a) + p(y) - \dfrac{1}{1-a}\,p\left(\dfrac{y-a}{1-a}\right), & y\in[a,2a), \\ A_1(y+a) = A_1(y) + p(y+a) - \dfrac{1}{1-a}\,p\left(\dfrac{y}{1-a}\right), & y\in[a,1-2a), \\ A_1(y) = \dfrac{1}{1-a}\,p\left(\dfrac{y}{1-a}\right) - p(y+a), & y\in[1-2a,1-a]. \end{cases} \tag{6}$$

Заметим, что при $0 \le y < a$ или $1-a < y \le 1$ функция $\alpha_1(y)$ может быть произвольной, поскольку уравнением (1) на нее не накладывается никаких условий.

Используя первые два равенства системы (6), по индукции можно получить:

$$A_1(\tilde{y}+ma) = \sum_{k=-1}^{m} p(\tilde{y}+ka) - \frac{1}{1-a}\sum_{k=-1}^{m-1} p\left(\frac{\tilde{y}+ka}{1-a}\right), \tag{7}$$

где $m = 1, 2, \ldots$ и $\tilde{y}+ma-a \in [a, 1-2a)$. Тем самым значения функции $A_1(y)$ переносятся с промежутка $[a, 2a)$ на промежутки $[2a, 3a)$, $[3a, 4a)$,...

Пусть $\dfrac{1}{n+1} < a \le \dfrac{1}{n}$, $n = 3, 4, \ldots$, $\gamma = 1-(n-1)a$, $a \le \gamma < 2a$. Воспользуемся далее системой (6). Возьмем $y_0 \in [a, \gamma)$, тогда при $m = n-2$

$$a \le (n-2)a = a+(n-3)a \le y_0+(n-2)a-a < 1-(n-1)a+(n-3)a = 1-2a.$$

С другой стороны, поскольку $1-2a < (n-1)a \le \mathbf{y_0}+(\mathbf{n}-\mathbf{2})\mathbf{a} < 1-a$, то можно использовать формулу (7) и третье уравнение системы (6):

$$\frac{1}{1-a}p\left(\frac{y_0+(n-2)a}{1-a}\right) - p(y_0+(n-1)a) = A_1(y_0+(n-2)a) =$$
$$= \sum_{k=-1}^{n-2} p(y_0+ka) - \frac{1}{1-a}\sum_{k=-1}^{n-3} p\left(\frac{y_0+ka}{1-a}\right),$$

откуда следует формула (3).

Возьмем теперь $y_1 \in [\gamma, 2a)$. Если $n \ge 4$, то при $m = n-3$

$$a \le 1-3a \le \mathbf{y_1}+(\mathbf{n}-\mathbf{3})\mathbf{a}-\mathbf{a} < 2a+(n-3)a-a \le 1-2a.$$

С другой стороны, поскольку $1-2a \le \mathbf{y_1}+(\mathbf{n}-\mathbf{3})\mathbf{a} < 1-a$, то можно записать:

$$\frac{1}{1-a}p\left(\frac{y_1+(n-3)a}{1-a}\right) - p(y_1+(n-2)a) = A_1(y_1+(n-3)a) =$$
$$= \sum_{k=-1}^{n-3} p(y_1+ka) - \frac{1}{1-a}\sum_{k=-1}^{n-4} p\left(\frac{y_1+ka}{1-a}\right),$$

откуда следует формула (4).

Если $n = 3$, то $y_1 \in [a, 2a) \cap [1-2a, 1-a]$, поэтому формула (4) получается приравниванием первого и третьего равенства в системе (6).

2. Пусть теперь $\dfrac{1}{3} < a \le \dfrac{1}{2}$. Тогда $\dfrac{1-2a}{1-a} < \dfrac{a}{1-a}$ и формула (1) запишется в виде:

$$\frac{p(x)}{1-a} = \begin{cases} p((1-a)x) + A_2((1-a)x+a), & x \in \left[0, \dfrac{1-2a}{1-a}\right), \\ p((1-a)x) + p((1-a)x+a), & x \in \left[\dfrac{1-2a}{1-a}, \dfrac{a}{1-a}\right), \\ p((1-a)x+a) + A_1((1-a)x), & x \in \left[\dfrac{a}{1-a}, 1\right]. \end{cases} \tag{8}$$

Делая соответствующие замены переменных в формуле (8), получим:

$$\frac{1}{1-a}p\left(\frac{y-a}{1-a}\right) = p(y-a) + A_2(y) = p(y-a) + p(y) - A_1(y), \quad y \in [a, 1-a), \tag{9}$$

$$\frac{1}{1-a}\,p\left(\frac{y-a}{1-a}\right)=p(y)+p(y-a),\quad y\in[1-a,2a),\tag{10}$$

$$A_1(y)=\frac{1}{1-a}\,p\left(\frac{y}{1-a}\right)-p(y+a),\quad y\in[a,1-a].\tag{11}$$

Приравнивая значения $A_1(y)$ из уравнений (9) и (11) при $y\in[a,1-a)$, а также учитывая уравнение (10), мы получаем формулы (3)–(5) при $n=2$.

Обратно, при выполнении условий (3)–(5) $\mu_S=\mu$. Действительно, эти условия не задают значение $\alpha_1(x)$ в точке $1-a$, но на промежутке $[a,1-a)$ они эквивалентны системе (6) (при $n\geq 3$) или условиям (9)–(11) (при $n=2$). Следовательно, почти всюду (за исключением точки $x=1$ $(y=1-a)$) верно равенство (1). □

Приведем два следствия из теоремы.

Следствие 1. *Пусть задана мера $\mu\ll\lambda$. Тогда существует оснащенная 2-трансформация $S(a)$, сохраняющая меру μ, в том и только в том случае, когда $p(x)$, a и $\{\alpha_1(x),\alpha_2(x)\}$ удовлетворяют условиям* (3)–(5).

Следствие 2. *Пусть задана оснащенная 2-трансформация $S(a)$. Тогда существует мера $\mu\ll\lambda$, сохраняемая трансформацией S, в том и только в том случае, когда $p(x)$, a и $\{\alpha_1(x),\alpha_2(x)\}$ удовлетворяют условиям* (3)–(5).

Тривиальный пример (случай $\mu=\lambda$, $p=1$) заключен в следующем следствии.

Следствие 3. *$\lambda_S=\lambda$ тогда и только тогда, когда $a=1/n$, $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$, и*

$$\alpha_1(x)=\frac{n-k}{n-1},\quad x\in\left[\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}\right),\quad k=2,\ldots,n-1.$$

На промежутках $\left[0,\dfrac{1}{n}\right)$, $\left[\dfrac{n-1}{n},1\right]$ функция $\alpha_1(x)$ выбирается произвольно.

Доказательство. Применим теорему 1 при $p(x)=1$. Условие (3) теряет смысл, так как промежуток превращается в пустое множество:

$$a=1-n/(n+1)=1/(n+1),\quad x_0\in[a,1-(n-1)a)=[1/(n+1),1/(n+1))=\emptyset.$$

Из условия (4) следует, что $a=1/n$. Условие (5) при $m=0,\ldots,n-3$ дает формулу

$$\alpha_1\left(x+\frac{m}{n}\right)=m+2-\frac{m+1}{1-\frac{1}{n}}=\frac{n-m-2}{n-1},\quad x\in\left[\frac{1}{n},\frac{2}{n}\right),$$

из которой следует требуемое.

При $m=n-2$ условие (5) теряет смысл, поскольку $[(n-1)a,1-a)=\emptyset$. В частности, при $n=2$ оснащение можно выбрать произвольным образом. □

Следствие 4. *Если $a=1/2$, то $\lambda_S=\lambda$ при любом выборе α.*

Следствие 4 согласуется с известным результатом [2]: диадическое отображение $S(x)=2x\ (\mathrm{mod}\ 1)$ сохраняет меру Лебега.

Однако наша конструкция допускает и не столь тривиальную плотность: равенства (3)–(5) возможны и в случае, когда $p(x)$ не является константой. Справедлива

Теорема 2. *Для любого* $n = 2, 3, \dots$ *существуют параметр* a, $\frac{1}{n+1} < a < \frac{1}{n}$, *плотность* $p(x)$ *и оснащение* $\{\alpha_1(x), \alpha_2(x)\}$ *такие, что* $\mu_S = \mu$. *Более того, плотность* $p(x)$ *не является константой.*

Доказательство. Рассмотрим сначала случай четного $n = 2m$. Пусть

$$a = \frac{2m+1-\sqrt{4m^2+1}}{2m} = \frac{n+1-\sqrt{n^2+1}}{n}$$

есть корень уравнения

$$\frac{ma}{1-a} = 1 - ma \quad \left(\frac{1}{n+1} < a < \frac{1}{n}, \quad \frac{1}{2m+1} < a < \frac{1}{2m}\right). \tag{12}$$

Пусть β, $\gamma > 0$. Рассмотрим плотность, заданную ступенчатой функцией

$$p(x) = \beta\chi_{[0,ma)}(x) + (\beta+\gamma)(1-ma)\chi_{[ma,1-ma)}(x) + \gamma\chi_{[1-ma,1]}(x).$$

Покажем, что она удовлетворяет равенствам (3)–(4). Для этого всюду ниже будем пользоваться условиями (12).

Рассмотрим условие (3). Пусть $x_0 \in [a, 1-(2m-1)a)$. При $-1 \le k \le m-2$

$$0 \le \frac{x_0+ka}{1-a} < \frac{1-(2m-1)a+ka}{1-a} \le \frac{1-(m+1)a}{1-a} = ma.$$

При $m-1 \le k \le n-2$

$$1 - ma = \frac{ma}{1-a} \le \frac{a+ka}{1-a} \le \frac{x_0+ka}{1-a} < 1.$$

При $-1 \le k \le m-2$

$$0 \le x_0 + ka < 1-(2m-1)a+ka < (2m+1)a-(2m-1)a+ka = a(2+k) \le ma.$$

При $k = m-1$

$$ma = (k+1)a \le x_0+ka < 1-(2m-1)a+ka = 1-ma.$$

При $m \le k \le n-1$

$$1-ma < (2m+1)a - ma = ma + a \le x_0 + ka < 1.$$

Тогда получаем:

$$\frac{\sum\limits_{k=-1}^{n-2} p\left(\frac{x_0+ka}{1-a}\right)}{\sum\limits_{k=-1}^{n-1} p(x_0+ka)} = \frac{m\beta+m\gamma}{m\beta+(\beta+\gamma)(1-ma)+m\gamma} = \frac{m}{1-ma+m} = 1-a.$$

Рассмотрим условие (4). Пусть $x_1 \in [1-(2m-1)a, 2a)$. Тогда

$$\frac{x_1+ka}{1-a} \in \begin{cases} (0, ma), & -1 \le k \le m-3, \\ [ma, 1-ma), & k = m-2, \\ (1-ma, 1), & m-1 \le k \le n-3, \end{cases}$$

$$x_1 + ka \in \begin{cases} (0, ma), & -1 \le k \le m-2, \\ [1-ma, 1), & m-1 \le k \le n-2, \end{cases}$$

$$\frac{\sum\limits_{k=-1}^{n-3} p\left(\dfrac{x_1+ka}{1-a}\right)}{\sum\limits_{k=-1}^{n-2} p(x_1+ka)} = \frac{(m-1)\beta + (\beta+\gamma)(1-ma) + (m-1)\gamma}{m\beta + m\gamma} = \frac{m(1-a)}{m} = 1-a.$$

Случай нечетного $n = 2m-1$, $m = 2, 3, \ldots$, опишем менее подробно. Пусть

$$a = \frac{m - \sqrt{m^2-m}}{m} = \frac{n+1-\sqrt{n^2-1}}{n+1}$$

есть корень уравнения

$$\frac{(m-1)a}{1-a} = 1 - ma \qquad \left(\frac{1}{n+1} < a < \frac{1}{n}\right).$$

Пусть $p(x) = \beta\chi_{[0,1-ma)}(x) + (\beta+\gamma)(1-ma)\chi_{[1-ma,ma)}(x) + \gamma\chi_{[ma,1]}(x)$, где $\beta, \gamma > 0$. Покажем, что $p(x)$ удовлетворяет равенствам (3)–(4).

Рассмотрим условие (3). Пусть $x_0 \in [a, 1-(2m-2)a)$. Тогда

$$\frac{x_0+ka}{1-a} \in \begin{cases} [0, 1-ma), & -1 \le k \le m-3; \\ [1-ma, ma), & k = m-2, \\ (ma, 1), & m-1 \le k \le n-2, \end{cases}$$

$$x_0 + ka \in \begin{cases} [0, 1-ma), & -1 \le k \le m-2, \\ [ma, 1), & m-1 \le k \le n-1, \end{cases}$$

$$\frac{\sum\limits_{k=-1}^{n-2} p\left(\dfrac{x_0+ka}{1-a}\right)}{\sum\limits_{k=-1}^{n-1} p(x_0+ka)} = \frac{(m-1)\beta + (\beta+\gamma)(1-ma) + (m-1)\gamma}{m\beta + m\gamma} = \frac{m(1-a)}{m} = 1-a.$$

Рассмотрим условие (4). Пусть $x_1 \in [1-(2m-2)a, 2a)$. Тогда

$$\frac{x_1+ka}{1-a} \in \begin{cases} (0, 1-ma), & -1 \le k \le m-3, \\ [ma, 1), & m-2 \le k \le n-3, \end{cases}$$

$$x_1 + ka \in \begin{cases} (0, 1-ma), & -1 \le k \le m-3, \\ [1-ma, ma), & k = m-2, \\ (ma, 1), & m-1 \le k \le n-2, \end{cases}$$

$$\frac{\sum\limits_{k=-1}^{n-3} p\left(\dfrac{x_1+ka}{1-a}\right)}{\sum\limits_{k=-1}^{n-2} p(x_1+ka)} = \frac{(m-1)\beta + (m-1)\gamma}{(m-1)\beta + (\beta+\gamma)(1-ma) + (m-1)\gamma} = \frac{m-1}{m-ma} = 1-a.$$

Осталось показать, что для $\alpha_1(x)$, найденного по формуле (5), выполняется условие $0 \le \alpha_1(x) \le 1$. Укажем $\alpha_1(x)$ в явном виде. При этом мы используем выведенные выше неравенства на числа $x+ka$ и $\dfrac{x+ka}{1-a}$.

При $n=2m$, $x \in [a, 1-(n-1)a)$

$$\alpha_1(x+sa) = \begin{cases} s+2-\dfrac{s+1}{1-a}, & 0 \le s \le m-2, \\ \dfrac{\gamma}{\beta+\gamma}, & s = m-1, \\ \dfrac{a(n-s-1)}{1-a}, & m \le s \le n-2. \end{cases}$$

При $n=2m$, $x \in [1-(n-1)a, 2a)$

$$\alpha_1(x+sa) = \begin{cases} s+2-\dfrac{s+1}{1-a}, & 0 \le s \le m-2, \\ \dfrac{a(n-s-2)}{1-a}, & m-1 \le s \le n-3. \end{cases}$$

При $n=2m-1$, $x \in [a, 1-(n-1)a)$

$$\alpha_1(x+sa) = \begin{cases} s+2-\dfrac{s+1}{1-a}, & 0 \le s \le m-2, \\ \dfrac{a(n-s-1)}{1-a}, & m-1 \le s \le n-2. \end{cases}$$

При $n=2m-1$, $x \in [1-(n-1)a, 2a)$

$$\alpha_1(x+sa) = \begin{cases} s+2-\frac{s+1}{1-a}, & 0 \le s \le m-3, \\ \dfrac{\gamma}{\beta+\gamma}, & s = m-2, \\ \dfrac{a(n-s-2)}{1-a}, & m-1 \le s \le n-3. \end{cases}$$

Итак, $0 < \alpha_1(x) < 1$, поскольку при $k=1,2$

$$0 < \frac{1-ma}{1-a} \le s+2-\frac{s+1}{1-a} = \frac{1-2a-sa}{1-a} \le \frac{1-2a}{1-a} < 1, \quad 0 \le s \le m-2,$$

$$0 < \frac{a}{1-a} \le \frac{a(n-s-k)}{1-a} \le \frac{am}{1-a} < 1, \quad m-1 \le s \le n-3.$$

По теореме 1 для оснащения α, заданного формулой (5), $\mu_S = \mu$. □

Замечание. В теореме 2 мы нашли сразу семейство плотностей, зависящее от двух параметров β, $\gamma > 0$.

Summary

P.I. Troshin. On Measure Invariance for a 2-valued Transformation.

We consider a family of 2-valued transformations of special form on the interval $[0,1]$ with measure $\mu = \displaystyle\int p(x)\,d\lambda$ which is absolutely continuous with respect to the Lebesgue measure. We endow S with a set of weight functions $\alpha = \{\alpha_1(x), \alpha_2(x)\}$ and find a criterion of measure invariance under the transformation. This criterion relates the three parameters a, p, α to each other.

Key words: multivalued dynamical system, invariant measure.

Литература

1. *Трошин П.И.* Многозначные динамические системы с весами // Изв. вузов. Матем. – 2009. – № 7. – С. 35–50.

2. *Rényi A.* Representations for real numbers and their ergodic properties // Acta. Math. Acad. Sci. Hung. – 1957. – V. 8. – P. 477–493.

3. *Parry W.* On the β-expansions of real numbers // Acta. Math. Acad. Sci. Hung. – 1957. – V. 11. – P. 401–416.

4. *Игудесман К.Б.* Верхние адреса для одного семейства систем итерированных функций на отрезке // Изв. вузов. Матем. – 2009. – № 9. – С. 75–81.

Поступила в редакцию
10.08.09

Трошин Павел Игоревич – аспирант кафедры геометрии Казанского государственного университета.

E-mail: *Paul.Troshin@gmail.com*