УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ КАЗАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
Том 151, кн. 4 Физико-математические науки *2009*

УДК 514.76

ОБ АЛГЕБРАХ ЛИ ГОЛОМОРФНЫХ АФФИННЫХ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ НА РАССЛОЕНИЯХ ВЕЙЛЯ

А.Я. Султанов

Аннотация

В работе установлены максимальные размерности алгебр Ли голоморфных аффинных векторных полей на расслоениях Вейля, снабженных голоморфными линейными связностями.

Ключевые слова: алгебра Вейля, расслоение Вейля, голоморфная функция, голоморфная линейная связность, аффинное векторное поле, алгебра Ли.

---

1. Основные определения и факты

Определение 1 [1]. Линейная алгебра $\mathbb{A}$ конечного ранга над полем $\mathbb{R}$ называется алгеброй Вейля, если выполнены следующие условия:
(1) $\mathbb{A}$ – коммутативна, ассоциативна, обладает единицей;
(2) существует идеал $\mathbb{I}$ такой, что $\mathbb{I}^p \neq \{0\}$, а $\mathbb{I}^{p+1} = \{0\}$;
(3) фактор-алгебра $\mathbb{A}/_{\mathbb{I}}$ изоморфна $\mathbb{R}$.

Число p называется высотой алгебры $\mathbb{A}$, а число m, равное размерности фактор-алгебры ${}^{\mathbb{I}}/_{\mathbb{I}^2}$, – шириной алгебры $\mathbb{A}$.

Обозначим через $\mathbb{A}$ произвольную алгебру Вейля конечного ранга над полем действительных чисел $\mathbb{R}$. Будем считать, что единица δ алгебры $\mathbb{A}$ отождествлена с единицей 1 поля $\mathbb{R}$. Тогда $\mathbb{A}$ как векторное пространство может быть представлено в виде прямой суммы $\mathbb{R}$ и идеала $\mathbb{I}$. Выберем какой-нибудь базис $\varepsilon^\alpha,\ \alpha = 0, 1, \ldots, \dim \mathbb{I}$ алгебры $\mathbb{A}$, причем $\varepsilon^0 = 1$. Наряду с $\mathbb{A}$ будем использовать дуальное пространство $\mathbb{A}^*$ линейных форм, заданных на $\mathbb{A}$, со значениями в $\mathbb{R}$. Обозначим через ε_α элементы дуального базиса к базису (ε^α), тогда $\varepsilon_\alpha(\varepsilon^\beta) = \delta_\alpha^\beta$.

Пусть M_n – n-мерное вещественное связное гладкое многообразие класса C^∞, обозначим через $C^\infty(M_n)$ алгебру гладких класса C^∞ функций, заданных на M_n и принимающих значения в $\mathbb{R}$.

Определение 2 [1]. Точкой, $\mathbb{A}$-близкой к точке $q \in M_n$, называется гомоморфизм $j_q : C^\infty(M_n) \to \mathbb{A}$, удовлетворяющий условию $j_q(f) \equiv f(q)(\bmod \mathbb{I})$.

Множество точек, $\mathbb{A}$-близких к точке $q \in M_n$, обозначим через $\Im_q(M_n)$. Объединение $\bigcup\limits_{q\in M} \Im_q(M_n)$ обозначим через $M_n^{\mathbb{A}}$. Отображение $\pi : M_n^{\mathbb{A}} \to M_n$, определенное условием $\pi(j_q) = q$, называется канонической проекцией, а тройка $(M_n^{\mathbb{A}}, \pi, M_n)$ – расслоением Вейля.

На тотальном пространстве $M_n^{\mathbb{A}}$ возникают структуры гладкого многообразия над алгеброй $\mathbb{A}$ и над алгеброй $\mathbb{R}$. Пусть f – функция класса C^∞, заданная на M_n. Функция $f^{\mathbb{A}}$, определенная условием $f^{\mathbb{A}}(j_q) = j_q(f)$, называется естественным продолжением функции f. Для каждого элемента $a^* \in \mathbb{A}^*$ функция $a^* \circ f^{\mathbb{A}} = f_{(a^*)}$ называется (a^*)-лифтом функции f с M_n на $M_n^{\mathbb{A}}$.

В.В. Шурыгиным доказано [2, с. 99], что всякую голоморфную функцию $\widetilde{f}$ на $M_n^{\mathbb{A}}$ можно представить в виде $\widetilde{f} = \varepsilon^\alpha f_\alpha^{\mathbb{A}}$ для некоторых функций $f_\alpha \in C^\infty(M_n)$, где ε^α – элементы некоторого базиса алгебры $\mathbb{A}$. Алгебру голоморфных функций над $\mathbb{A}$ обозначим через $\mathbb{B}$, а через $\widetilde{\mathbb{B}}$ – алгебру гладких класса C^∞ функций на расслоении $M_n^{\mathbb{A}}$, снабженном естественной гладкой C^∞-структурой над $\mathbb{R}$.

Векторное поле $\widetilde{X}$ на расслоении $M_n^{\mathbb{A}}$ называется голоморфным, если функция $\widetilde{X}\widetilde{f}$ голоморфна для каждой голоморфной функции $\widetilde{f}$.

Определение 3. Для каждого векторного поля $X \in \mathcal{T}_0^1(M_n)$ единственное векторное поле $\widetilde{X} \in \mathcal{T}_0^1(M_n^{\mathbb{A}})$, удовлетворяющее тождеству

$$\widetilde{X} f^{\mathbb{A}} = (Xf)^{\mathbb{A}},$$

называется естественным продолжением векторного поля X.

Обозначается это векторное поле через $X^{\mathbb{A}}$. Итак, $X^{\mathbb{A}} f^{\mathbb{A}} = (Xf)^{\mathbb{A}}$.

Другой подход к построению векторного поля $X^{\mathbb{A}}$ был дан в 1976 г. А. Моримото [1].

Из определения векторного поля $X^{\mathbb{A}}$ следует, что $\dfrac{\partial}{\partial (x^i)^{\mathbb{A}}} = \left(\dfrac{\partial}{\partial x^i}\right)^{\mathbb{A}}$.

Введем понятие голоморфной линейной связности.

Определение 4. Линейная связность $\widetilde{\nabla}$ на $M_n^{\mathbb{A}}$ называется голоморфной, если для любых голоморфных векторных полей $\widetilde{X}$ и $\widetilde{Y}$ векторное поле $\widetilde{\nabla}_{\widetilde{X}}\widetilde{Y}$ голоморфно.

Линейная связность $\widetilde{\nabla}$ на $M_n^{\mathbb{A}}$ голоморфна тогда и только тогда, когда для любых векторных полей X и Y, заданных на M_n, векторное поле $\widetilde{\nabla}_{X^{\mathbb{A}}} Y^{\mathbb{A}}$ голоморфно.

Предложение 1. *Линейная связность $\widetilde{\nabla}$, заданная на расслоении Вейля $M_n^{\mathbb{A}}$, голоморфна тогда и только тогда, когда на базе M_n существуют линейная связность $\nabla = \Gamma_0$, тензорные поля Γ_λ $(\lambda \neq 0)$ типа (1.2) такие, что выполняется тождество*

$$\widetilde{\nabla}_{X^{\mathbb{A}}} Y^{\mathbb{A}} = \varepsilon^\alpha (\Gamma_\alpha(X,Y))^{\mathbb{A}}.$$

Среди голоморфных линейных связностей выделим линейную связность, которая определяется тождеством

$$\overline{\nabla}_{X^{\mathbb{A}}} Y^{\mathbb{A}} = (\nabla_X Y)^{\mathbb{A}} \tag{1}$$

для $X, Y \in \mathcal{T}_0^1(M_n)$. Эта связность определяется лишь связностью ∇, заданной на базе M_n расслоения Вейля $M_n^{\mathbb{A}}$, и называется естественным продолжением линейной связности ∇ с базы M_n в расслоение $M_n^{\mathbb{A}}$. Связность, определенная тождеством (1), обозначается $\nabla^{\mathbb{A}}$; она впервые была введена А. Моримото [1].

На основании определения 3, предложения 1 и тождества (1) заключаем, что имеет место

Теорема 1. *Линейная связность $\widetilde{\nabla}$ на $M_n^{\mathbb{A}}$ голоморфна тогда и только тогда, когда на базе M_n расслоения существуют линейная связность ∇, тензорные поля Γ_λ $(\lambda \neq 0)$ такие, что*

$$\widetilde{\nabla} = \nabla^{\mathbb{A}} + \varepsilon^\lambda \Gamma_\lambda^{\mathbb{A}} \ (\lambda \neq 0).$$

Тензорные поля кручения $\widetilde{T}$ и кривизны $\widetilde{R}$ голоморфной линейной связности $\widetilde{\nabla} = \varepsilon^{\alpha}\Gamma_{\alpha}$ на расслоении Вейля $M_n^{\mathbb{A}}$ можно представить в виде:

$$(1)\ \widetilde{T} = \varepsilon^{\alpha} T_{\alpha}^{\mathbb{A}},$$

$$(2)\ \widetilde{R} = \varepsilon^{\alpha} R_{\alpha}^{\mathbb{A}},$$

где T_0 – тензорное поле кручения, R_0 – тензорное поле кривизны линейной связности $\Gamma_0 = \nabla$, а тензорные поля T_{λ}, R_{λ} $(\lambda \neq 0)$ определяются соответственно условиями:

$$T_{\lambda}(X,Y) = \Gamma_{\lambda}(X,Y) - \Gamma_{\lambda}(Y,X),$$

$$R_{\lambda}(X,Y,Z) = \nabla_X \Gamma_{\lambda}(Y,Z) - \nabla_Y \Gamma_{\lambda}(X,Z) + \Gamma_{\lambda}(T(X,Y),Z) + \\ + \gamma_{\lambda}^{\sigma\tau}(\Gamma_{\sigma}(X, \Gamma_{\tau}(Y,Z)) - \Gamma_{\sigma}(Y, \Gamma_{\tau}(X,Z))),$$

где по σ, τ $(\neq 0)$ ведётся суммирование, $\gamma_{\lambda}^{\sigma\tau}$ – структурные постоянные алгебры Вейля $\mathbb{A}$.

Если связность $\widetilde{\nabla}$ является естественным продолжением связности ∇ с M_n в $M_n^{\mathbb{A}}$, то

$$\widetilde{T} = T^{\mathbb{A}} \text{ и } \widetilde{R} = R^{\mathbb{A}}.$$

2. Голоморфные аффинные векторные поля

Пусть $\widetilde{\nabla}$ – голоморфная линейная связность на $M_n^{\mathbb{A}}$.

Определение 5. Голоморфное векторное поле $\widetilde{X}$, заданное на $M_n^{\mathbb{A}}$, называется аффинным относительно линейной связности $\widetilde{\nabla}$, если $L_{\widetilde{X}}\widetilde{\nabla} = 0$.

Если X – аффинное векторное поле, то тензорные поля кручения $\widetilde{T}$ и кривизны $\widetilde{R}$ связности $\widetilde{\nabla}$ удовлетворяют тождествам:

$$L_{\widetilde{X}}(\widetilde{\nabla}^k \widetilde{T}) = 0 \quad \text{и} \quad L_{\widetilde{X}}(\widetilde{\nabla}^k \widetilde{R}) = 0, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Обозначим через $g(M_n^{\mathbb{A}})$ множество всех голоморфных аффинных векторных полей относительно связности $\widetilde{\nabla}$. Из определения производной Ли линейной связности следует, что если $\widetilde{X}$, $\widetilde{Y} \in g(M_n^{\mathbb{A}})$ и a, $b \in \mathbb{A}$, то $a\widetilde{X} + b\widetilde{Y}$, $[\widetilde{X}, \widetilde{Y}]$ являются голоморфными аффинными векторными полями относительно $\widetilde{\nabla}$. Следовательно, $\mathbb{A}$-модуль $g(M_n^{\mathbb{A}})$ голоморфных аффинных векторных полей относительно связности $\widetilde{\nabla}$, снабженный операцией коммутирования, является алгеброй Ли над $\mathbb{A}$.

Модуль $g(M_n^{\mathbb{A}})$ обладает естественной структурой векторного пространства над полем действительных чисел $\mathbb{R}$, поэтому пара $(g(M_n^{\mathbb{A}}), [,])$ является алгеброй Ли голоморфных аффинных векторных полей над $\mathbb{R}$. Обозначим эту алгебру символом $(g(M_n^{\mathbb{A}}))^{\mathbb{R}}$, а символом $g(M_{mn}^{\mathbb{R}})$ – вещественную алгебру Ли аффинных векторных полей относительно $\nabla^{\mathbb{R}}$. Вещественная реализация $\widetilde{X}^{(\delta)}$ голоморфного векторного поля $\widetilde{X}$ определяется условием $\widetilde{X}^{(\delta)} f_{(a^*)} = (\widetilde{X} f^{\mathbb{A}})_{(a^*)}$. Вещественную реализацию алгебры $(g(M_n^{\mathbb{A}}))^{\mathbb{R}}$ обозначим через ${}^{\mathbb{R}}(g(M_n^{\mathbb{A}}))$.

Предложение 2. *Отображение $h\colon (g(M_n^{\mathbb{A}}))^{\mathbb{R}} \to g(M_{mn}^{\mathbb{R}})$, определенное условием $h(X) = X^{(\delta)}$, является инъективным гомоморфизмом.*

Следствие. *Алгебры Ли $(g(M_n))^{\mathbb{R}}$ и ${}^{\mathbb{R}}(g(M_n)) \subset g(M_{mn}^{\mathbb{R}})$ изоморфны.*

Из этого следствия получаем, что алгебра $(g(M_n))^{\mathbb{R}}$ конечномерна. Действительно, алгебра Ли $g(M^{\mathbb{R}}_{mn})$ имеет размерность, не превышающую $(mn)^2+mn$, где m – ранг алгебры $\mathbb{A}$.

Рассмотрим расслоение линейных реперов $(L(M^{\mathbb{R}}_{mn}),\pi,M^{\mathbb{R}}_{mn})$ над многообразием $M^{\mathbb{R}}_{mn}$. Известно, что соответствие $\widetilde{Z}\to\widetilde{Z}^{(0)}_{q'}$, где $\widetilde{Z}\in g(M^{\mathbb{R}}_{mn})$, $\widetilde{Z}^{(0)}_{q'}$ – значение в точке $q'\in L(M^{\mathbb{R}}_{mn})$ полного лифта векторного поля $\widetilde{Z}$ в расслоение $L(M^{\mathbb{R}}_{mn})$, является инъективным [3, с. 219].

Пусть $q\in M^{\mathbb{R}}_{mn}$ – естественная проекция точки $q'\in L(M^{\mathbb{R}}_{mn})$, то есть $q=\pi(q')$, (U,x^i_α) – карта на $M^{\mathbb{R}}_{mn}$ такая, что $q\in U$, индекс i принимает значения от 1 до n, а α – от 0 до $m-1$. На $L(M^{\mathbb{R}}_{mn})$ построим карту $(\pi^{-1}(\widetilde{U}),x^i_\alpha,x^{i\beta}_{\alpha j})$. Для любой точки $q'\in\pi^{-1}(\widetilde{U})$ матрица $\|x^{i\beta}_{\alpha j}(q')\|$ является элементом полной линейной группы $GL(mn,\mathbb{R})$.

Для произвольного голоморфного аффинного векторного поля $\widetilde{X}\in g(M^{\mathbb{A}}_n)$ имеем:

$$\widetilde{X}^{(\delta)}=(\widetilde{X}^i\partial_i)^{(\delta)}=(\widetilde{X}^i)_{(\varepsilon_\alpha)}\partial_i^{(\varepsilon^\alpha)}=X^i_\alpha\partial^\alpha_i.$$

Здесь ε^α, ε_β – элементы базиса алгебры $\mathbb{A}$ и дуального ему базиса в пространстве $\mathbb{A}^*$, $\widetilde{X}^i=X^i_\alpha\varepsilon^\alpha$ – координаты векторного поля $\widetilde{X}$ в карте $(\widetilde{U},\ (x^i)^{\mathbb{A}}=x^i_\alpha\varepsilon^\alpha)$. Полный лифт векторного поля $X^{(\delta)}$ имеет вид:

$$\widetilde{X}^{(0)}=(X^i_\alpha)_{(0)}(\partial^\alpha_i)^{(0)}+(X^i_\alpha)_{\binom{j}{\sigma}}(\partial^\alpha_i)_{\binom{j}{\sigma}}.$$

В точке $q'\in L(M^{\mathbb{R}}_{mn})$ будем иметь, что

$$\widetilde{X}^{(0)}_{q'}=X^i_\alpha(q)(\partial^\alpha_i)^{(0)}\Big|_{q'}+\partial^\tau_kX^i_\alpha(q)x^{k\sigma}_{\tau j}(q')\,\partial^{\alpha j}_{i\sigma}\Big|_{q'}.$$

В силу голоморфности векторного поля $\widetilde{X}\in(g(M^{\mathbb{A}}_n))^{\mathbb{R}}$ выполняются тождества (условия Шефферса):

$$\partial^\tau_kX^i_\alpha(q)=\delta_\sigma\partial^\sigma_kX^i_\mu(q)\gamma^{\mu\tau}_\alpha,$$

где $\gamma^{\mu\tau}_\alpha$ – структурные постоянные алгебры $\mathbb{A}$ относительно базиса (ε^α): $\gamma^{\mu\tau}_\alpha==\varepsilon_\alpha(\varepsilon^\mu\varepsilon^\tau)$, $\delta_\alpha\varepsilon^\alpha=\delta$.

Введем следующие обозначения: $X^i_{k\mu}=\delta_\alpha\partial^\alpha_kX^i_\mu$. Тогда

$$\widetilde{X}^{(0)}_{q'}=X^i_\alpha(q)(\partial^\alpha_i)^{(0)}\Big|_{q'}+X^i_{k\mu}(q)\gamma^{\mu\tau}_\alpha x^{k\sigma}_{\tau j}(q')\,\partial^{\alpha j}_{i\sigma}\Big|_{q'}.$$

Система векторов $(\partial^\alpha_i)^{(0)}\big|_{q'}$, $\gamma^{\mu\tau}_\alpha x^{k\sigma}_{\tau j}(q')\,\partial^{\alpha j}_{i\sigma}\Big|_{q'}$ касательного пространства $T_{q'}$ к расслоению $L(M^{\mathbb{R}}_{mn})$ линейно независима. Действительно, пусть

$$A_{i\alpha}\,(\partial^\alpha_i)^{(0)}\Big|_{q'}+A^i_{\mu k}\gamma^{\mu\tau}_\alpha x^{k\sigma}_{\tau j}(q')\,\partial^{\alpha j}_{i\sigma}\Big|_{q'}=0. \tag{2}$$

Векторы $(\partial^\alpha_i)^{(0)}\big|_{q'}$, $\partial^{\alpha j}_{i\sigma}\Big|_{q'}$ образуют базис касательного пространства $T_{q'}(L(M^{\mathbb{R}}_{mn}))$. Поэтому из (2) следуют соотношения

$$A_{i\alpha}=0,\quad A^i_{\mu k}\gamma^{\mu\tau}_\alpha x^{k\sigma}_{\tau j}(q')=0. \tag{3}$$

Так как $\|x^{k\sigma}_{\tau j}(q')\|\in GL(mn,\mathbb{R})$, то из (3) получим:

$$A^i_{\mu k}\gamma^{\mu\tau}_\alpha=0.$$

Свернув эти соотношения с δ_τ, придем к следующим равенствам:

$$A^i_{\alpha k} = 0.$$

Отсюда следует, что подпространство пространства $T_{q'}(L(M^{\mathbb{R}}_{mn}))$, натянутое на векторы $(\partial^\alpha_i)^{(0)}\big|_{q'}$, $\gamma^{\mu\tau}_\alpha x^{k\sigma}_{\tau j}(q')\,\partial^{\alpha j}_{i\sigma}\Big|_{q'}$, имеет размерность $m(n^2+n)$.

Таким образом, доказана

Теорема 2. *Размерность алгебры Ли над $\mathbb{R}$ голоморфных аффинных векторных полей относительно связности ∇ на $M^{\mathbb{A}}_n$ не больше, чем $m(n^2+n)$, где m – ранг алгебры $\mathbb{A}$.*

Определение 6. Рангом элемента a алгебры $\mathbb{A}$ называется ранг линейного оператора $L_a : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$, действующего по правилу $L_a(x) = ax$.

Обозначим ранг элемента a через $\operatorname{rank} a$.

Для любого ненулевого элемента a алгебры Вейля $\operatorname{rank} a \geq 1$, причем оценка эта точная. Действительно, если a является элементом идеала $\mathbb{I}^p$ алгебры Вейля $\mathbb{A}$ высоты p, то $\operatorname{rank} a = 1$.

В данной работе мы будем рассматривать лишь линейные связности $\widetilde{\nabla}$, не имеющие кручения, то есть $\widetilde{T} = 0$.

Обозначим через $\widetilde{W}$ тензорное поле Вейля связности $\widetilde{\nabla}$. Тензорное поле $\widetilde{W}$ определяется аналогично, как и тензорное поле Вейля проективной кривизны вещественной линейной связности без кручения.

Если (U, x^i) – карта $\mathbb{A}$-гладкого атласа на $M^{\mathbb{A}}_n$, то обозначим через $\widetilde{W}^h_{ijk}$ составляющие тензорного поля $\widetilde{W}$. Эти компоненты удовлетворяют следующим тождествам:

$$\widetilde{W}^h_{ijk} = -\widetilde{W}^h_{ikj},$$

$$\widetilde{W}^s_{ijs} = 0 \text{ (по } s \text{ ведется суммирование)}$$

и тождеству Бианки

$$\widetilde{W}^h_{ijk} + \widetilde{W}^h_{jki} + \widetilde{W}^h_{kij} = 0.$$

Как и в случае вещественной линейной связности, тензорное поле $\widetilde{W}$ обладает следующим свойством: тензор $\widetilde{W}_q$, $q \in M^{\mathbb{A}}_n$, отличен от нуля тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих условий:

а) существует карта (U, x^i), $q \in U$ такая, что $\widetilde{W}^1_{223}(q) \neq 0$;

б) для всех карт, области которых содержат точку q, все составляющие вида $\widetilde{W}^h_{iij}$ в точке q равны нулю, но существует карта (U, x^i), $q \in U$, в которой $\widetilde{W}^1_{234}(q) \neq$ $\neq 0$.

Эти условия были использованы И.П. Егоровым при исследовании алгебр Ли инфинитезимальных аффинных и проективных преобразований [4, с. 19–20].

Имеет место

Предложение 3 [5]. *Пусть $\widetilde{\nabla}$ – голоморфная линейная связность на $M^{\mathbb{A}}_n$ и $\widetilde{T} = 0$. Если существует карта (U, x^i) $\mathbb{A}$-гладкого атласа на $M^{\mathbb{A}}_n$ такая, что $\widetilde{W}^1_{223}(q) = a \neq 0$ и $r = rank\ a$, то*

$$\dim_{\mathbb{R}} (g(M_n))^{\mathbb{R}} \leq m(n^2+n) - r(3n-5).$$

Поскольку $\operatorname{rank} a \geq 1$, из этого предложения следует

Предложение 4. *Максимальная вещественная размерность алгебр Ли голоморфных аффинных векторных полей на $M^{\mathbb{A}}_n$ с $\mathbb{A}$-гладкими линейными связностями $\widetilde{\nabla}$, тензорные поля Вейля $\widetilde{W}$ которых имеют в некоторой карте отличные от нуля составляющие вида $\widetilde{W}^h_{iij}$, равна $m(n^2+n) - (3n-5)$, $m = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{A}$.*

Имеет место следующее

Предложение 5 [5]. *Если в каждой карте составляющие вида* $\widetilde{W}^h_{iij}$ $(h \neq i, j,$ $i \neq j)$ *тензорного поля Вейля равны нулю и* $\widetilde{W}^1_{234}(q) = \lambda_2 \neq 0$, $\widetilde{W}^1_{342}(q) = \lambda_3$, $\widetilde{W}^1_{423}(q) = \lambda_4$ *и* $q \in M^{\mathbb{A}}_n$, *то* $\dim_{\mathbb{R}}(g(M^{\mathbb{A}}_n))^{\mathbb{R}} \leq m(n^2+n) - r(4n-12) - 2r_1$, *где* $r = \operatorname{rank} A = (A_2, A_3, A_4)$, A_i *– матрица линейного оператора* L_{λ_i}

$$r_1 = \operatorname{rank} \begin{pmatrix} A_2 - A_3 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 - A_4 & 0 \\ 0 & 0 & A_4 - A_3 \end{pmatrix}.$$

Поскольку $\operatorname{rank} a \geq 1$, то $r \geq 1$, $r_1 \geq 2$. Поэтому из предложения 5 следует

Предложение 6. *Если в каждой карте составляющие вида* $\widetilde{W}^h_{iij}$ $(h \neq i, j,\ i \neq$ $\neq j)$ *тождественно равны нулю, а* $\widetilde{W} \neq 0$, *то наибольшая вещественная размерность алгебры Ли голоморфных аффинных векторных полей таких пространств* $(M^{\mathbb{A}}_n, \widetilde{\nabla})$ *равна* $m(n^2+n) - 4(n-2)$, $m = dim_{\mathbb{R}}\mathbb{A}$.

Для доказательства точности оценки рассмотрим

Пример. На $\mathbb{A}$-гладком многообразии $\mathbb{A}^n = (\mathbb{R}^n)^{\mathbb{A}}$ линейную связность зададим соотношениями:

$$\widetilde{\nabla}_{\partial_2}\partial_3 = \widetilde{\nabla}_{\partial_3}\partial_2 = bx^4, \quad \widetilde{\nabla}_{\partial_3}\partial_4 = \widetilde{\nabla}_{\partial_4}\partial_3 = 2bx^2, \text{ остальные } \widetilde{\nabla}_{\partial_j}\partial_k = 0,$$

где $b \in \mathbb{A}$ и $\operatorname{rank} b = 1$.

Тогда $\widetilde{R}^1_{234} = -b$, $\widetilde{R}^1_{342} = -b$, $\widetilde{R}^1_{423} = 2b$, $\widetilde{R}^1_{243} = b$, $\widetilde{R}^1_{324} = b$, $\widetilde{R}^1_{432} = -2b$, другие составляющие $\widetilde{R}^i_{jkl} = 0$.

Можно установить, что $\widetilde{\nabla}^k \widetilde{R} = 0$ для каждого натурального числа k. Поэтому соотношения $L_{\widetilde{X}} \widetilde{\nabla}^k \widetilde{R} = 0$ будут являться следствиями соотношения $L_{\widetilde{X}} \widetilde{R} = 0$. Последнее равносильно следующей системе равенств:

$$bX^h_1 = 0 \ \ (h > 1), \quad bX^2_l = 0, \quad bX^3_l = 0, \quad bX^4_l = 0 \ \ (l > 4),$$
$$bX^4_2 = 0 \quad bX^4_3 = 0, \quad bX^2_4 = 0, \quad bX^3_4 = 0,$$
$$b(X^2_2 + X^3_3 + X^4_4 - X^1_1) = 0.$$

Интегрируя систему $L_{\widetilde{X}} \widetilde{\nabla}(\partial^{\mathbb{A}}_j, \partial^{\mathbb{A}}_k) = 0$, получим, что алгебра Ли голоморфных аффинных векторных полей пространства $(\mathbb{A}^n, \widetilde{\nabla})$ состоит из всевозможных векторных полей вида:

$$\widetilde{X} = (c^t_s x^s + c^t)\partial_t - (c^3_2 b(x^2)^2 x^4 + c^2_3 b(x^3)^2 x^4 + c^4 b x^2 x^3 + 2c^2 b x^3 x^4)\partial_1,$$

где $c^t_s = c^t_{s\alpha}\varepsilon^\alpha$, $c^t = c^t_\alpha \varepsilon^\alpha$ – произвольные элементы алгебры $\mathbb{A}$, координаты $c^t_{s\alpha}$, c^t_α удовлетворяют системе однородных уравнений

$$A^\beta_\tau c^h_{1\beta} = 0 \ \ (h > 1),$$
$$A^\beta_\tau c^a_{l\beta} = 0 \ \ (a = 2, 3, 4; \ \ l > 4),$$
$$A^\beta_\tau c^4_{a\beta} = 0, \quad A^\beta_\tau c^a_{4\beta} = 0 \ \ (a = 2, 3),$$
$$A^\beta_\tau (c^2_{2\beta} + c^3_{3\beta} + c^4_{4\beta} - c^1_{1\beta}) = 0,$$

где $A^\beta_\tau = b_\nu \gamma^{\nu\alpha}_\beta$, $b_\nu \varepsilon^\nu = b$. Ранг рассматриваемой системы равен $4(n-2)$. Отсюда следует, что число произвольных параметров $c^t_{s\alpha}$, c^t_α равно $m(n^2+n) - 4(n-2)$. Значит,

$$\dim_{\mathbb{R}}(g(\mathbb{A}^n))^{\mathbb{R}} = m(n^2+n) - 4(n-2).$$

Из предложений 4 и 5 следует

Теорема 3. *Максимальная вещественная размерность алгебр Ли голоморфных аффинных векторных полей на расслоениях Вейля* $M_n^{\mathbb{A}}$ *с голоморфными линейными связностями с* $\widetilde{T} = 0$ *и* $\widetilde{W} \neq 0$ *равна* $m(n^2 + n) - 3n + 5$ $(n \geq 3)$, $m = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{A}$.

Summary

A. Ya. Sultanov. On Lie Algebras of Holomorphic Affine Vector Fields on Weil Bundles.

We establish maximal dimensions of Lie algebras of holomorphic affine vector fields on Weil bundles endowed with holomorphic linear connections.

Key words: Weil algebra, Weil bundle, holomorphic function, holomorphic linear connection, affine vector field, Lie algebra.

Литература

1. *Morimoto A.* Prolongation of connections to bundles of infinitely near points // J. Differ. Geom. – 1976. – V. 11, No 4. – P. 479–498.

2. *Вишневский В.В., Широков А.П., Шурыгин В.В.* Пространства над алгебрами. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1984. – 262 с.

3. *Кобаяси Ш.* Основы дифференциальной геометрии. – М.: Наука, 1981. – Т. 1. – 344 с.

4. *Егоров И.П.* Движения а пространствах аффинной связности // Движения в пространствах аффинной связности. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1965. – С. 5–179.

5. *Султанов А.Я.* О вещественных размерностях алгебр Ли голоморфных аффинных векторных полей // Изв. вузов. Матем. – 2007. – № 4. – С. 54–67.

Поступила в редакцию
05.08.09

Султанов Адгам Яхиевич – кандидат физико-математических наук, профессор кафедры алгебры Пензенского государственного педагогического университета имени В.Г. Белинского.

E-mail: *sultanovaya@rambler.ru*