УДК 514.756

СВЯЗНОСТИ НА ОСНАЩЕННОЙ ГИПЕРПОВЕРХНОСТИ В ПРОЕКТИВНО-МЕТРИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ

А.В. Столяров

Аннотация

Изучается внутренняя геометрия гиперповерхностей V_{n-1}, вложенных в проективно-метрическое пространство K_n, $n \geq 3$, и оснащенных в смысле А.П. Нордена и Э. Картана. Построены аффинные и проективные связности на V_{n-1}, индуцируемые указанными оснащениями. Найдены условия, при которых оснащение индуцирует на V_{n-1} плоскую связность.

Ключевые слова: проективно-метрическое пространство, двойственность, оснащение гиперповерхности, пространство аффинной связности, пространство проективной связности, пространство постоянной кривизны.

Известно [1, с. 81], что n-мерным пространством K_n с проективной метрикой называется проективное пространство P_n, в котором задана неподвижная гиперквадрика Q_{n-1} (абсолют); уравнение Q_{n-1} в проективном репере R записывается в виде
$$g_{\bar{I}\bar{K}} x^{\bar{I}} x^{\bar{K}} = 0, \quad g_{\bar{I}\bar{K}} = g_{\bar{K}\bar{I}}. \tag{1}$$
Согласно работе [2, с. 339] пространство K_n будем называть ниже проективно-метрическим.

Фундаментальной группой пространства K_n является стационарная подгруппа абсолюта Q_{n-1}; эта подгруппа сохраняет некоторый поляритет [1, с. 81], названный А.П. Норденом абсолютным поляритетом пространства K_n. В случае, когда абсолют Q_{n-1} овального типа, поляритет называется гиперболическим [1, с. 86].

Гиперболическое пространство K_n имеет особое значение в геометрии, ибо оно представляет собой проективную интерпретацию геометрии Лобачевского. С помощью этой интерпретации Ф. Клейн дал строгое доказательство ее непротиворечивости.

В работе изучается внутренняя геометрия гиперповерхности V_{n-1}, вложенной в проективно-метрическое пространство K_n, $n \geqslant 3$ и оснащенной: 1) в смысле А.П. Нордена полями геометрических объектов $\{G^i_n, G_i\}$ и $\{H^i_n, G_i\}$; 2) в смысле Э. Картана полем геометрического объекта $\{H^i_n, H_n\}$. Доказано, например, что пространство проективной связности $P_{n-1,n-1}$, индуцируемое оснащением в смысле Э. Картана гиперповерхности $V_{n-1} \subset K_n$, $n \geqslant 3$ полем геометрического объекта $\{H^i_n, H_n\}$, является плоским тогда и только тогда, когда ее нормализация полем объекта $\{H^i_n, G_i\}$ в касательном расслоении индуцирует риманово пространство R_{n-1} постоянной кривизны $K = -1/c$.

Настоящая работа выполнена с привлечением инвариантных методов дифференциально-геометрических исследований [1–3].

На протяжении всей работы индексы принимают следующие значения:

$$\bar I, \bar J, \bar K, \bar L = 0, \dots, n; \quad I, J, K, L = 1, \dots, n; \quad i, j, k, l, s, t = 1, \dots, n-1.$$

Оператор ∇ действует по следующему закону:

$$\nabla T^{\alpha}_{iu} = dT^{\alpha}_{iu} - T^{\alpha}_{i\nu}\omega^{\nu}_{u} - T^{\alpha}_{ju}\omega^{j}_{i} + T^{\beta}_{iu}\omega^{\alpha}_{\beta}.$$

1. Рассмотрим n-мерное проективное пространство P_n. Деривационные формулы проективного репера $R = \{B_{\bar I}\}$ записываются в виде $dB_{\bar I} = \omega^{\bar K}_{\bar I} B_{\bar K}$, где формы Пфаффа инфинитезимальных перемещений репера удовлетворяют структурным уравнениям проективного пространства P_n [3]

$$D\omega^{\bar K}_{\bar I} = \omega^{\bar L}_{\bar I} \wedge \omega^{\bar K}_{\bar L}, \quad \omega^{\bar L}_{\bar L} = 0. \tag{2}$$

Условием неподвижности гиперквадрики (1) является [2, с. 359] выполнение дифференциальных уравнений

$$dg_{\bar I\bar K} - g_{\bar I\bar L}\omega^{\bar L}_{\bar K} - g_{\bar L\bar K}\omega^{\bar L}_{\bar I} = \theta g_{\bar I\bar K}, \quad D\theta = \theta \wedge \theta^{0}_{0}. \tag{3}$$

Доказано [4], что в предположении $g_{00} \neq 0$ (последнее равносильно тому, что $B_0 \neq Q_{n-1}$) за счет нормировки коэффициентов $g_{\bar I\bar K}$ и вершин репера R уравнение (1) абсолюта Q_{n-1} и условие (3) его неподвижности можно записать соответственно в виде

$$a_{IK}x^I x^K + \frac{1}{c}(g_{I0}x^I + cx^0)^2 = 0, \tag{4}$$

$$\begin{gathered} da_{IK} - a_{IL}\omega^{L}_{K} - a_{LK}\omega^{L}_{I} = -\,\frac{1}{c}\,(a_{IL}g_{K0} + a_{KL}g_{I0})\,\omega^{L}_{0}, \\ dg_{I0} - g_{L0}\omega^{L}_{I} - c\omega^{0}_{I} = a_{IL}\omega^{L}_{0}, \end{gathered} \tag{5}$$

где

$$a_{IK} = g_{IK} - \frac{g_{I0}g_{K0}}{c}, \quad a_{IK} = a_{KI}, \quad c = g_{00} = \mathrm{const} \neq 0;$$

при этом форма ω^0_0 становится главной:

$$\omega^0_0 = -\frac{g_{L0}}{c}\omega^L_0. \tag{6}$$

2. В проективно-метрическом пространстве K_n рассмотрим гиперповерхность V_{n-1}, $n \geqslant 3$, текущая точка которой не принадлежит абсолюту Q_{n-1}. В репере R первого порядка ($B_0 \in V_{n-1}$, вершины B_i репера принадлежат касательной гиперплоскости $T_{n-1}(B_0)$ к гиперповерхности в ее текущей точке B_0) дифференциальное уравнение V_{n-1} имеет вид [2, с. 359]

$$\omega^n_0 = 0. \tag{7}$$

Трехкратное продолжение уравнения (7) с использованием (2), (6) приводит к следующим дифференциальным уравнениям:

$$\omega^n_i = \Lambda^n_{ij}\omega^j_0, \quad \Lambda^n_{[ij]} = 0; \tag{8}$$

$$\nabla\Lambda^n_{ij} = \Lambda^n_{ijk}, \quad \Lambda^n_{i[jk]} = \frac{1}{c}\Lambda^n_{i[j}g_{k]0}; \tag{9}$$

$$\nabla\Lambda^n_{ijk} - \Lambda^n_{(ij}\Lambda^n_{k)s}\omega^s_n + \Lambda^n_{k(i}\omega^0_{j)} = \Lambda^n_{ijks}\omega^s_0, \quad \Lambda^n_{ij[ks]} = \frac{1}{c}\Lambda^n_{ij[k}g_{s]0}; \tag{10}$$

поля геометрических объектов $\{\Lambda^n_{ij}\}$, $\{\Lambda^n_{ijk}, \Lambda^n_{ij}\}$ относятся соответственно ко второй и третьей дифференциальным окрестностям точки $B_0 \in V_{n-1}$.

Предположим, что гиперповерхность $V_{n-1} \subset K_n$ является регулярной, то есть симметричный тензор второго порядка Λ^n_{ij} невырожден: $\Lambda \overset{def}{=} |\Lambda^n_{ij}| \neq 0$, следовательно, существует взаимный тензор Λ^{kj}_n второго порядка:

$$\Lambda^n_{ik}\Lambda^{kj}_n = \delta^j_i, \quad \nabla\Lambda^{ij}_n = -\Lambda^{ik}_n\Lambda^{sj}_n\Lambda^n_{kst}\omega^t_0, \tag{11}$$

$$d\ln\Lambda + (n+1)\omega^n_n = A_k\omega^k_0, \quad A_k = \Lambda^{st}_n\Lambda^n_{tsk} + \frac{2}{c}g_{k0}. \tag{12}$$

Двукратное продолжение уравнения (12) приводит к дифференциальным уравнениям

$$\nabla A_i - (n+1)\Lambda^n_{si}\omega^s_n = A_{ik}\omega^k_0, \quad A_{[ik]} = \frac{1}{c}A_{[i}g_{k]0},$$
$$\nabla A_{ij} + A_j\omega^0_i - \Lambda^n_{ij}A_k\omega^k_n - (n+1)(\Lambda^n_{kij}\omega^k_n + \Lambda^n_{ij}\omega^0_n) = A_{ijk}\omega^k_0, \quad A_{i[jk]} = \frac{1}{c}A_{i[j}g_{k]0}; \tag{13}$$

поля геометрических объектов $\{A_i, \Lambda^n_{ij}\}$, $\{A_{ij}, \Lambda^n_{ijk}, \Lambda^n_{ij}\}$ относятся соответственно к третьей и четвертой дифференциальным окрестностям текущей точки $B_0 \in \in V_{n-1} \subset K_n$.

3. Рассмотрим новую систему из $(n+1)^2$ форм Пфаффа $\bar\omega^{\bar K}_{\bar I}$:

$$\bar\omega^i_0 = \omega^i_0, \quad \bar\omega^n_0 = \omega^n_0 = 0, \quad \bar\omega^0_0 = \omega^0_0 - \left(\frac{A_s}{n+1} - \frac{g_{s0}}{c}\right)\omega^s_0,$$
$$\bar\omega^n_n = \omega^n_n - \left(\frac{A_s}{n+1} - \frac{g_{s0}}{c}\right)\omega^s_0, \quad \bar\omega^j_i = \omega^j_i + \left(\Lambda^{jk}_n\Lambda^n_{kis} - \delta^j_i\frac{A_s}{n+1}\right)\omega^s_0, \tag{14}$$
$$\bar\omega^n_i = -\Lambda^n_{ik}\omega^k_0, \quad \bar\omega^0_i = \Lambda^n_{ik}\omega^k_n, \quad \bar\omega^i_n = -\Lambda^{ik}_n\omega^0_k, \quad \bar\omega^0_n = \omega^0_n.$$

Согласно соотношениям (2), (5_2), (6), (8)–(11), (13), формы $\bar\omega^{\bar K}_{\bar I}$ системы (14) удовлетворяют структурным уравнениям проективного пространства $\bar P_n$, то есть

$$D\bar\omega^{\bar K}_{\bar I} = \bar\omega^{\bar L}_{\bar I} \wedge \bar\omega^{\bar K}_{\bar L}, \quad \bar\omega^{\bar L}_{\bar L} = 0, \tag{15}$$

причем они являются формами инфинитезимального перемещения тангенциального репера $\{\xi_{\bar K}\}$: $d\xi_{\bar K} = \bar\omega^{\bar L}_{\bar K}\xi_{\bar L}$, где

$$\xi_0 = \frac{1}{\sqrt[n+1]{\Lambda}}[B_0B_1\dots B_{n-1}], \quad \xi_n = \frac{1}{\sqrt[n+1]{\Lambda}}[B_nB_1\dots B_{n-1}],$$
$$\xi_i = \frac{1}{\sqrt[n+1]{\Lambda}}\sum_{k=1}^{n-1}\Lambda^n_{ki}[B_0B_1\dots B_{k-1}B_nB_{k+1}\dots B_{n-1}]. \tag{16}$$

Согласно соотношениям (8), (14) имеем

$$\bar\omega^n_i = \bar\Lambda^n_{ik}\bar\omega^k_0, \tag{17}$$

где

$$\bar\Lambda^n_{ij} = -\Lambda^n_{ij}. \tag{18}$$

Дифференциальные уравнения (9) в силу (14), (18) можно переписать в виде

$$d\bar{\Lambda}^n_{ij} + \bar{\Lambda}^n_{ij}\bar{\omega}^n_n - \bar{\Lambda}^n_{ik}\bar{\omega}^k_j - \bar{\Lambda}^n_{kj}\bar{\omega}^k_i = \bar{\Lambda}^n_{ijk}\bar{\omega}^k_0,$$

где

$$\bar{\Lambda}^n_{ijk} = \Lambda^n_{ijk} - \Lambda^n_{ij}\left(\frac{g_{k0}}{c} + \frac{A_k}{n+1}\right). \tag{19}$$

С использованием соотношений (6), (7), (14) получим

$$\bar{\omega}^0_0 = -\frac{\bar{g}_{k0}}{c}\bar{\omega}^k_0, \tag{20}$$

где

$$\bar{g}_{k0} = \frac{c}{n+1}A_k. \tag{21}$$

Аналогично с использованием равенств (18), (19), (21) находим, что функции

$$\bar{A}_k \overset{def}{=} \bar{\Lambda}^{st}_n\bar{\Lambda}^n_{tsk} + \frac{2}{c}\bar{g}_{k0}$$

(см. (12)) имеют строение

$$\bar{A}_k = \frac{n+1}{c}g_{k0}. \tag{22}$$

Доказано [5], что: 1) преобразование $J : \omega^{\bar{K}}_{\bar{I}} \to \bar{\omega}^{\bar{K}}_{\bar{I}}$ структурных форм по закону (14) является инволютивным, то есть $J \equiv J^{-1}$; 2) регулярная гиперповерхность V_{n-1}, погруженная в проективно-метрическое пространство K_n, $n \geqslant 3$, индуцирует:

а) в третьей дифференциальной окрестности проективное пространство $\bar{P}_n$, двойственное [6] K_n относительно инволютивного преобразования структурных форм по закону (14), причем пространство $\bar{P}_n$ в четвертой дифференциальной окрестности имеет внутренним образом определяемый тангенциальный абсолют $\bar{Q}_{n-1}$, двойственный Q_{n-1}, следовательно, регулярная гиперповерхность $V_{n-1} \subset \subset K_n$ в четвертой дифференциальной окрестности внутренним образом индуцирует проективно-метрическое пространство $\bar{K}_n$, двойственное K_n;

б) во второй дифференциальной окрестности подмногообразие $\bar{V}_{n-1} \subset \bar{P}_n$, двойственное исходной гиперповерхности V_{n-1}; его дифференциальное уравнение в тангенциальном репере (16) имеет вид $\bar{\omega}^n_0 = 0$, причем тангенциальная гиперповерхность $\bar{V}_{n-1}$ представляет собой $(n-1)$-параметрическое семейство касательных гиперплоскостей к V_{n-1}.

4. Уравнения (5) в силу (7), (8) примут вид

$$\begin{gathered}
\nabla a_{ij} = -\frac{1}{c}(a_{ik}g_{j0} + a_{jk}g_{i0})\omega^k_0 + a_{ni}\omega^n_j + a_{nj}\omega^n_i,\\
\nabla a_{ni} - a_{ik}\omega^k_n = -\frac{1}{c}(a_{ik}g_{n0} + a_{nk}g_{i0})\omega^k_0 + a_{nn}\omega^n_i,\\
\nabla a_{nn} - 2a_{nk}\omega^k_n = -\frac{2}{c}a_{nk}g_{n0}\omega^k_0,
\end{gathered} \tag{23}$$

$$dg_{i0} - g_{k0}\omega^k_i - c\omega^0_i = a_{ik}\omega^k_0 + g_{n0}\omega^n_i, \quad dg_{n0} - g_{k0}\omega^k_n - g_{n0}\omega^n_n - c\omega^0_n = a_{nk}\omega^k_0.$$

Следуя Г.Ф. Лаптеву [2], в работе [7] на регулярной гиперповерхности $V_{n-1} \subset \subset K_n$ в четвертой дифференциальной окрестности найдено поле соприкасающихся гиперквадрик Q^2_{n-1}:

$$\Lambda^n_{ij}x^ix^j + 2\frac{\Lambda_i}{n+1}x^ix^n + S_n(x^n)^2 = 2x^0x^n, \tag{24}$$

где

$$\Lambda_i = A_i + (n+1)G_i, \quad G_i = -\frac{1}{c}g_{i0}, \tag{25_1}$$

$$\nabla\Lambda_i + (n+1)(\omega_i^0 - \Lambda_{is}^n\omega_n^s) = \Lambda_{ij}\omega_0^j, \quad S_n = \frac{1}{n^2-1}\Lambda_n^{st}\left(\Lambda_{st} - \frac{\Lambda_s\Lambda_t}{n+1} + \Lambda_s G_t\right). \tag{25_2}$$

Известно [7], что необходимым и достаточным условием вырождения гиперповерхности $V_{n-1}\subset K_n$ в гиперквадрику (24) является обращение в нуль симметричного тензора Дарбу

$$D_{ijk}^n = (n+1)(\Lambda_{ijk}^n - G_i\Lambda_{jk}^n - G_j\Lambda_{ik}^n) - \Lambda_{(ij}^n A_{k)}. \tag{26}$$

Пусть гиперповерхность $V_{n-1}\subset K_n$ нормализована [1] полями квазитензоров соответственно третьего G_n^i и первого G_i порядков, где

$$G_n^i \overset{def}{=} -\frac{1}{n+1}\Lambda_n^{ij}A_j, \quad \nabla G_n^i + \omega_n^i = G_{nk}^i\omega_0^k, \quad \nabla G_i + \omega_i^0 = G_{ik}\omega_0^k, \tag{27}$$

в силу (11), (13_1) и (23_4) имеют место соотношения

$$G_{nk}^i = \frac{1}{n+1}\Lambda_n^{is}(\Lambda_n^{lt}\Lambda_{slk}^n A_t - A_{sk}), \quad G_{ik} = -\frac{1}{c}(a_{ik} + g_{n0}\Lambda_{ik}^n). \tag{28}$$

Нетрудно заметить, что нормализация гиперповерхности $V_{n-1}\subset K_n$ полями квазитензоров G_n^i, G_i является взаимной относительно поля соприкасающихся гиперквадрик (24).

Возьмем систему форм Пфаффа $\{\overset{1}{\theta}{}^i, \overset{1}{\theta}{}_j^i\}$, где

$$\overset{1}{\theta}{}^i = \omega_0^i, \quad \overset{1}{\theta}{}_j^i = \omega_j^i - G_n^i\omega_j^n + G_j\omega_0^i - \delta_j^i\underbrace{(\omega_0^0 - G_k\omega_0^k)}_{0}, \tag{29}$$

эта система в силу (1), (6), (8), (27) удовлетворяет структурным уравнениям Картана–Лаптева [8], [2]

$$D\overset{1}{\theta}{}^i = \overset{1}{\theta}{}^k\wedge\overset{1}{\theta}{}_k^i, \quad D\overset{1}{\theta}{}_j^i = \overset{1}{\theta}{}_j^k\wedge\overset{1}{\theta}{}_k^i + \frac{1}{2}\overset{1}{r}{}_{jst}^i\overset{1}{\theta}{}^s\wedge\overset{1}{\theta}{}^t, \tag{30}$$

где

$$\overset{1}{r}{}_{jst}^i = -2\left[G_n^kG_n^i\Lambda_{j[s}^n\Lambda_{t]k}^n + \frac{1}{n+1}\Lambda_n^{ik}\left(\Lambda_n^{lp}A_p\Lambda_{kl[s}^n\Lambda_{t]j}^n - A_{k[s}\Lambda_{t]j}^n\right) - \right.$$
$$\left. - G_n^kG_k\Lambda_{j[s}^n\delta_{t]}^i + \frac{1}{c}\left(a_{j[s}\delta_{t]}^i + g_{n0}\Lambda_{j[s}^n\delta_{t]}^i\right)\right]. \tag{31}$$

Следовательно, нормализация (G_n^i, G_i) гиперповерхности $V_{n-1}\subset K_n$ индуцирует аффинную связность $\overset{1}{\nabla}$ без кручения; ее тензор кривизны имеет строение (31). Так как $2\overset{1}{r}_{[js]} = -\overset{1}{r}{}_{ijs}^i = 0$ (при доказательстве этого следует использовать тождества Риччи $\overset{1}{r}{}_{(jst)}^i = 0$ и соотношения (9), (13_1)), где $\overset{1}{r}_{js} = \overset{1}{r}{}_{jsi}^i$ – тензор Риччи, то связность $\overset{1}{\nabla}$ является эквиаффинной [1]. Таким образом, справедлива

Теорема 1. *Нормализация регулярной гиперповерхности $V_{n-1}\subset K_n$, $n\geqslant 3$, определяемая внутренним образом в третьей дифференциальной окрестности полями квазитензоров G_n^i и G_i (см. (25), (27)), является взаимной относительно поля соприкасающихся гиперквадрик (24) и индуцирует эквиаффинную связность $\overset{1}{\nabla}$ со структурными формами (29) (эквиаффинная связность первого рода).*

5. Согласно [6] нормализация одной из регулярных гиперповерхностей $V_{n-1} \subset K_n$ и $\bar{V}_{n-1} \subset \bar{K}_n$ равносильна нормализации другой; при этом компоненты полей оснащающих объектов $\{G_n^i, G_i\}$, $\{\bar{G}_n^i, \bar{G}_i\}$ связаны соотношениями

$$\bar{G}_n^i = -\Lambda_n^{ij} G_j, \quad \bar{G}_i = \Lambda_{ij}^n C_n^j, \tag{32}$$

эти функции в силу (9), (11), (14) удовлетворяют дифференциальным уравнениям вида (27):

$$d\bar{G}_n^i - \bar{G}_n^i \bar{\omega}_n^n + \bar{G}_n^j \bar{\omega}_j^i + \bar{\omega}_n^i = \bar{G}_{nj}^i \bar{\omega}_0^j, \quad d\bar{G}_i - \bar{G}_j \bar{\omega}_i^j + \bar{\omega}_i^0 = \bar{G}_{ij} \bar{\omega}_0^j, \tag{33}$$

где

$$\bar{G}_{nj}^i = \Lambda_n^{ik} \left(\frac{1}{c} a_{kj} - G_k G_j \right) + \frac{1}{c} g_{n0} \delta_j^i, \quad \bar{G}_{ij} = G_n^k \left(\Lambda_{ik}^n \frac{A_j}{n+1} - \Lambda_{kij}^n \right). \tag{34}$$

По аналогии с (29) возьмем систему форм Пфаффа $\{\overset{2}{\theta}{}^i, \overset{2}{\theta}{}_j^i\}$, где

$$\overset{2}{\theta}{}^i = \bar{\omega}_0^i, \quad \overset{2}{\theta}{}_j^i = \bar{\omega}_j^i - \bar{G}_n^i \bar{\omega}_j^n + \bar{G}_j \bar{\omega}_0^i - \delta_j^i (\bar{\omega}_0^0 - \bar{G}_k \bar{\omega}_0^k). \tag{35}$$

Согласно (15), (33) система форм (35) удовлетворяет структурным уравнениям пространства аффинной связности без кручения, поскольку

$$D\overset{2}{\theta}{}^i = \overset{2}{\theta}{}^k \wedge \overset{2}{\theta}{}_k^i, \quad D\overset{2}{\theta}{}_j^i = \overset{2}{\theta}{}_j^k \wedge \overset{2}{\theta}{}_k^i + \frac{1}{2} \overset{2}{r}{}_{jst}^i \overset{2}{\theta}{}^s \wedge \overset{2}{\theta}{}^t \tag{36}$$

тензор кривизны $\overset{2}{r}{}_{jst}^i$ аффинной связности $\overset{2}{\nabla}$ имеет строение

$$\overset{2}{r}{}_{jst}^i = 2 \left[G_k G_n^k \Lambda_{j[s}^n \delta_{t]}^i + \frac{1}{c} (\Lambda_n^{ik} a_{k[s} \Lambda_{t]j}^n + g_{n0} \delta_{[s}^i \Lambda_{t]j}^n) - G_n^k \Lambda_{kj[s}^n \delta_{t]}^i - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{n+1} \left(\frac{1}{n+1} A_j A_{[s} \delta_{t]}^i + A_{j[s} \delta_{t]}^i \right) \right]. \tag{37}$$

В силу (9), (13_1), (37) справедливо $\overset{2}{r}{}_{ist}^i = 0$, то есть тензор Риччи $\overset{2}{r}{}_{st}$ связности $\overset{2}{\nabla}$ симметричен; следовательно, аффинная связность $\overset{2}{\nabla}$ является эквиаффинной.

Из строений (29), (35) форм $\overset{1}{\theta}{}_j^i$ и $\overset{1}{\theta}{}_j^i$ с использованием (14), (32) находим

$$\overset{2}{\theta}{}_j^i = \overset{1}{\theta}{}_j^i + G_n^i \omega_j^n - G_j \omega_0^i + \Lambda_n^{ik} (\Lambda_{kjs}^n \omega_0^s - G_k \omega_j^n) + \Lambda_{jk}^n G_n^k \omega_0^i + \delta_j^i G_n^k \omega_k^n. \tag{38}$$

Теперь дифференциальные уравнения (9) с использованием (29), (38) запишутся в виде

$$d\Lambda_{ij}^n - \Lambda_{ik}^n \overset{2}{\theta}{}_j^k - \Lambda_{kj}^n \overset{1}{\theta}{}_i^k = -\Lambda_{ij}^n (\omega_n^n + G_n^k \omega_k^n), \tag{39}$$

это говорит о том, что аффинные связности $\overset{1}{\nabla}$ и $\overset{2}{\nabla}$ сопряжены [1] относительно поля тензора Λ_{ij}^n.

Аффинная связность $\overset{0}{\nabla}$, средняя [1] по отношению к связностям $\overset{1}{\nabla}$ и $\overset{2}{\nabla}$, определяется системой структурных форм $\left\{ \omega_0^i, \overset{0}{\theta}{}_j^i = \frac{1}{2} \big(\overset{1}{\theta}{}_j^i + \overset{2}{\theta}{}_j^i \big) \right\}$. Для средней связности из уравнений (39) имеем

$$d\Lambda_{ij}^n - \Lambda_{ik}^n \overset{0}{\theta}{}_j^k - \Lambda_{kj}^n \overset{0}{\theta}{}_i^k = -\Lambda_{ij}^n \underbrace{(\omega_n^n + G_n^k \omega_k^n)}_{\Theta}. \tag{40}$$

Последние уравнения говорят о том, что средняя аффинная связность является вейлевой [1] с полем метрического тензора Λ^n_{ij}. Отметим, что средняя связность $\overset{0}{\nabla}$, как и связности $\overset{1}{\nabla}$ и $\overset{2}{\nabla}$, является эквиаффинной; последнее подтверждается и тем, что дополнительная форма Θ (см. (40)) в силу (2), (7), (34) есть полный дифференциал некоторой функции: $D\Theta = 0$. Следовательно, средняя аффинная связность $\overset{0}{\nabla}$ является римановой с полем метрического тензора Λ^n_{ij}.

Таким образом, справедливы следующие предложения.

Теорема 2. *Нормализация регулярной гиперповерхности $V_{n-1} \subset K_n$, $n \geqslant 3$, внутренним образом определяемая в третьей дифференциальной окрестности полями квазитензоров G^i_n и G_i, кроме эквиаффинной связности первого рода $\overset{1}{\nabla}$ индуцирует эквиаффинную связность второго рода $\overset{2}{\nabla}$, двойственную первой.*

Теорема 3. *Эквиаффинные связности первого $\overset{1}{\nabla}$ и второго $\overset{2}{\nabla}$ родов, индуцируемые на гиперповерхности V_{n-1} в проективно-метрическом пространстве K_n, нормализованной полями квазитензоров G^i_n и G_i, являются сопряженными относительно поля асимптотического тензора Λ^n_{ij}.*

Заметим, что тензоры кривизны (31) и (37) аффинных связностей $\overset{1}{\nabla}$ и $\overset{2}{\nabla}$ связаны соотношениями

$$\overset{2}{r}{}^i_{jst} = -\Lambda^{il}_n \Lambda^n_{kj} \overset{1}{r}{}^k_{lst},$$

которые получаются в результате замыкания уравнений (39).

Теорема 4. *Аффинная связность $\overset{0}{\nabla}$, средняя по отношению к эквиаффинным связностям первого $\overset{1}{\nabla}$ и второго $\overset{2}{\nabla}$ родов, является римановой с полем метрического тензора Λ^n_{ij}.*

Теорема 5. *Двойственные аффинные связности $\overset{1}{\nabla}$ и $\overset{2}{\nabla}$, индуцируемые нормализацией регулярной гиперповерхности $V_{n-1} \subset K_n$, $n \geqslant 3$, полями квазитензоров G^i_n, G_i, совпадают тогда и только тогда, когда гиперповерхность вырождается в гиперквадрику* (24).

Последнее предложение непосредственно следует из соотношений

$$\overset{2}{\theta}{}^i_j = \overset{1}{\theta}{}^i_j + \frac{1}{n+1}\Lambda^{ik}_n D^n_{kjs}\omega^s_0,$$

которые получаются из (38) с использованием (26) строения тензора Дарбу гиперповерхности.

6. Пусть гиперповерхность $V_{n-1} \subset K_n$ оснащена в смысле Э. Картана [9] полем геометрического объекта $\{\nu^i_n, \nu_n\}$:

$$\nabla\nu^i_n + \omega^i_n = \nu^i_{nk}\omega^k_0, \quad \nabla\nu_n + \nu^k_n\omega^0_k + \omega^0_n = \nu_{nk}\omega^k_0. \tag{41}$$

Система n^2 форм Пфаффа $\{\Theta^{\bar{i}}_{\bar{j}}\}$, где

$$\Theta^i_0 = \omega^i_0, \quad \Theta^0_0 = G_k\omega^k_0, \quad \Theta^i_j = \omega^i_j - \nu^i_n\omega^n_j, \quad \Theta^0_j = \omega^0_j - \nu_n\omega^n_j, \tag{42}$$

в силу (2), (41) удовлетворяет структурным уравнениям Картана–Лаптева [2, 8]

$$D\Theta^{\bar{i}}_{\bar{j}} = \Theta^{\bar{k}}_{\bar{j}} \wedge \Theta^{\bar{i}}_{\bar{k}} + \frac{1}{2}R^{\bar{i}}_{\bar{j}st}\omega^s_0 \wedge \omega^t_0, \tag{43}$$

а следовательно, определяет пространство проективной связности $P_{n-1,n-1}$ без кручения ($R^i_{0st}\equiv 0$). Тензор кривизны-кручения $R^{\bar{i}}_{\bar{j}st}$ пространства $P_{n-1,n-1}$ имеет строение

$$\begin{aligned} &R^i_{0st}=0, \quad R^i_{jst}=2\left(\nu_n\Lambda^n_{j[s}\delta^i_{t]}-\nu^k_n\nu^i_n\Lambda^n_{j[s}\Lambda^n_{t]k}-\nu^i_{n[s}\Lambda^n_{t]j}\right), \\ &R^0_{0st}=0, \quad R^0_{jst}=2\left(\nu_n\Lambda^n_{j[s}G_{t]}-\nu^k_n\nu_n\Lambda^n_{j[s}\Lambda^n_{t]k}-\nu_{n[s}\Lambda^n_{t]j}\right). \end{aligned} \tag{44}$$

Замыкая квадратичные уравнения $D\Theta^{\bar{i}}_0=\Theta^{\bar{k}}_0\wedge\Theta^{\bar{i}}_{\bar{k}}$ (см. (43), ($44_{1,3}$)), имеем тождества $R^{\bar{i}}_{(kst)}\equiv 0$.

Предположим, что симметричный тензор a_{ij} (см. (23)) невырожден, следовательно, существует обратный тензор a^{ij}, компоненты которого определяются из соотношений $a_{ik}a^{kj}=\delta^j_i$ и удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$da^{ij}+a^{ik}\omega^j_k+a^{kj}\omega^i_k=a^{ij}_k\omega^k_0, \tag{45}$$

где

$$a^{ij}_k=\frac{1}{c}(a^{is}\delta^j_k+a^{sj}\delta^i_k)g_{s0}-(a^{is}a^{jt}+a^{js}a^{it})a_{ns}\Lambda^n_{ik}. \tag{46}$$

Согласно уравнениям ($23_{2,5}$), (27_2), (45), поле геометрического объекта $\{H^i_n, H_n\}$, где

$$\begin{aligned} H^i_n=-a^{ik}a_{nk}, \quad H_n=G_kH^k_n-\frac{g_{n0}}{c}, \\ \nabla H^i_n+\omega^i_n=H^i_{nk}\omega^k_0, \quad \nabla H_n+H^k_n\omega^0_k+\omega^0_n=H_{nk}\omega^k_0, \end{aligned} \tag{47}$$

в первой дифференциальной окрестности внутренним образом определяет оснащение в смысле Э. Картана гиперповерхности $V_{n-1}\subset K_n$; оснащающая точка S_n имеет разложение

$$S_n=B_n+H^k_nB_k+H_nB_0. \tag{48}$$

В уравнениях (47) функции H^i_{nk} и H_{nk} с учетом (28_2), (47_2) имеют следующие строения:

$$\begin{aligned} H^i_{nk}=-H_n\delta^i_k+(H^i_nH^s_n-T_{nn}a^{is})\Lambda^n_{sk}, \\ H_{nk}=H_n(H^s_n\Lambda^n_{sk}-G_k)-T_{nn}G_ia^{is}\Lambda^n_{sk}, \quad T_{nn}=a_{nn}-a^{ts}a_{nt}a_{ns}. \end{aligned} \tag{49}$$

Заметим, что в соотношениях (49) функция T_{nn} есть относительный инвариант. Так как

$$dS_n=(\omega^n_n+H^k_n\omega^n_k)S_n-T_{nn}a^{ks}(\omega^n_sB_k+G_s\omega^n_kB_0), \tag{50}$$

то справедлива

Теорема 6. *Относительный инвариант T_{nn} обращается в нуль тогда и только тогда, когда гиперповерхность $V_{n-1}\subset K_n$, $n\geqslant 3$, есть проективная гиперсфера с центром в точке S_n (см. (48)).*

При оснащении в смысле Э. Картана гиперповерхности $V_{n-1}\subset K_n$ полем геометрического объекта $\{H^i_n, H_n\}$ компоненты тензора кривизны-кручения пространства проективной связности $P_{n-1,n-1}$ в силу (44), (47), (49) имеют строение

$$R^0_{0st}=R^i_{0st}=0, \quad R^i_{jst}=2T_{nn}a^{il}\Lambda^n_{l[s}\Lambda^n_{t]j}, \quad R^0_{jst}=G_lR^l_{jst}. \tag{51}$$

Соотношения (51) с учетом теоремы 6 доказывают следующее предложение:

Теорема 7. *Пространство проективной связности $P_{n-1,n-1}$, индуцируемое оснащением в смысле Э. Картана гиперповерхности $V_{n-1} \subset K_n$, $n \geqslant 3$, полем геометрического объекта $\{H_n^i, H_n\}$, является плоским тогда и только тогда, когда подмногообразие V_{n-1} есть проективная гиперсфера с центром в точке S_n.*

7. Предположим, что гиперповерхность V_{n-1} проективно-метрического пространства K_n нормализована полями квазитензоров H_n^i и G_i (см. (47) и (27)). Возьмем систему форм Пфаффа $\{\Omega^i, \Omega_j^i\}$, где

$$\Omega^i = \omega_0^i, \quad \Omega_j^i = \omega_j^i - H_n^i \omega_j^n + G_j \omega_0^i; \tag{52}$$

эта система в силу уравнений (27), (47) удовлетворяет структурным уравнениям Картана–Лаптева [2, с. 315], [8, с. 82]:

$$D\Omega^i = \Omega^k \wedge \Omega_k^i, \quad D\Omega_j^i = \Omega_j^k \wedge \Omega_k^i + \frac{1}{2} \mathfrak{R}_{jst}^i \Omega^s \wedge \Omega^t,$$

где

$$\mathfrak{R}_{jst}^i = 2 \left[T_{nn} a^{ip} \Lambda_{p[s}^n \Lambda_{t]j}^n - \frac{1}{c} a_{j[s} \delta_{t]}^i \right]. \tag{53}$$

Следовательно, система форм (52) определяет пространство аффинной связности $\overset{0}{A}_{n-1,n-1}$ без кручения, тензор кривизны $\mathfrak{R}_{jst}^i$ этого пространства имеет строение (53).

Так как тензор Риччи $\mathfrak{R}_{js} = \mathfrak{R}_{jsi}^i$ удовлетворяет соотношениям $2\mathfrak{R}_{[js]} = -\mathfrak{R}_{ijs}^i$ (последнее непосредственно следует из тождеств Риччи $\mathfrak{R}_{(jst)}^i = 0$), то из (53) находим $\mathfrak{R}_{[js]} = 0$, то есть пространство $\overset{0}{A}_{n-1,n-1}$ является эквиаффинным. Кроме того, пространство $\overset{0}{A}_{n-1,n-1}$ является вейлевым с полем невырожденного тензора a_{ij}, ибо уравнения (23_1) в силу (52) можно переписать в виде

$$da_{ij} - a_{ik} \Omega_j^k - a_{kj} \Omega_i^k = 0.$$

Таким образом, справедлива

Теорема 8. *В случае невырожденного симметричного тензора a_{ij} (см. (23_1) поля квазитензоров H_n^i и G_i нормализуют гиперповерхность V_{n-1} проективно-метрического пространства K_n взаимно относительно его абсолюта Q_{n-1} (см. (4)), причем эта нормализация индуцирует риманову связность ∇ с полем метрического тензора a_{ij}, при этом структурные формы и тензор кривизны этой связности имеют соответственно строения (52) и (53).*

В условиях теоремы 8 из (53) следует, что тензор кривизны $\mathfrak{R}_{jst}^i$ риманова пространства R_{n-1} имеет строение

$$\mathfrak{R}_{jst}^i = -\frac{2}{c} a_{j[s} \delta_{t]}^i \tag{54}$$

тогда и только тогда, когда относительный инвариант T_{nn} (см. (49_2)) обращается в нуль. Известно [1], что риманово пространство R_{n-1} постоянной кривизны $K = -1/c$ характеризуется строением (54) его тензора кривизны $\mathfrak{R}_{jst}^i$. Доказана

Теорема 9. *Нормализация гиперповерхности V_{n-1}, вложенной в проективно-метрическое пространство K_n, $n \geqslant 3$, полями квазитензоров H_n^i, G_i индуцирует риманово пространство R_{n-1} постоянной кривизны K тогда и только тогда, когда относительный инвариант T_{nn} обращается в нуль, при этом $K = -1/c$.*

Замечание. Из (54) следует, что тензор Риччи $\mathfrak{R}_{js}$ пространства R_{n-1} постоянной кривизны пропорционален метрическому тензору a_{js} с постоянным коэффициентом пропорциональности: $\mathfrak{R}_{js} = -\dfrac{n-2}{c} a_{js}$, следовательно, пространство R_{n-1} является эйнштейновым [10, с. 268].

Теорема 9 с учетом теорем 6, 7 эквивалентна следующему результату:

Теорема 10. *Пространство проективной связности $P_{n-1,n-1}$, индуцируемое оснащением в смысле Э. Картана гиперповерхности $V_{n-1} \subset K_n$, $n \geqslant 3$, полем геометрического объекта $\{H_n^i, H_n\}$, является плоским тогда и только тогда, когда ее нормализация полем объекта $\{H_n^i, G_i\}$ в касательном расслоении индуцирует риманово пространство R_{n-1} постоянной кривизны $K = -1/c$.*

Summary

A. V. Stolyarov. Connections on a Hypersurface in a Projectively Metric Space.

We study intrinsic geometry of hypersurfaces embedded into a projectively metric space K_n, $n \geq 3$, and normalized in the sense of A.P. Norden and E. Cartan. We construct affine and projective connections on V_{n-1} induced by normalizations of the indicated types and find conditions under which the induced connections are flat.

Key words: projectively metric space, duality, normalizations of a hypersurface, affinely connected space, projectively connected space, space of constant curvature.

Литература

1. *Норден А.П.* Пространства аффинной связности. – М.: Наука, 1976. – 432 с.
2. *Лаптев Г.Ф.* Дифференциальная геометрия погруженных многообразий // Тр. Моск. матем. о-ва. – 1953. – Т. 2. – С. 275–382.
3. *Фиников С.П.* Метод внешних форм Картана. – М.-Л.: ГИТТЛ, 1948. – 432 с.
4. *Столяров А.В.* Внутренняя геометрия проективно-метрического пространства // Дифференциальная геометрия многообразий фигур. – Калининград: Калинингр. гос. ун-т, 2001. – Вып. 32. – С. 94–101.
5. *Столяров А.В.* Двойственные проективно-метрические пространства, определяемые регулярной гиперповерхностью // Вестн. Чуваш. гос. пед. ун-та. – 2009. – № 1 (61). – С. 29–36.
6. *Столяров А.В.* Двойственная теория оснащенных многообразий. – Чебоксары: Чуваш. гос. пед. ун-т, 1994. – 290 с.
7. *Абруков Д.А.* Внутренняя геометрия поверхностей и распределений в проективно-метрическом пространстве. – Чебоксары: Чуваш. гос. пед. ун-т, 2003. – 140 с.
8. *Евтушик Л.Е.* Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях // Итоги науки и техники. Проблемы геометрии. – М.: ВИНИТИ, 1979. – Т. 9. – 246 с.
9. *Cartan E.* Les espaces a connexion projective // Тр. семинара по векторн. и тензорн. анализу. – 1937. – Вып. 4. – С. 147–159.

10. *Кобаяси Ш.* Основы дифференциальной геометрии. – М.: Наука, 1981. – Т. 1. – 344 с.

Поступила в редакцию
02.09.09

Столяров Алексей Васильевич – доктор физико-математических наук, профессор кафедры геометрии Чувашского государственного педагогического университета, г. Чебоксары.

E-mail: *StolyarovAV@chgpu.edu.ru*