УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ КАЗАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
Том 151, кн. 4 Физико-математические науки *2009*

УДК 515.124.4

МЕТРИЧЕСКОЕ ПРОСТРАНСТВО ВСЕХ N-СЕТЕЙ ГЕОДЕЗИЧЕСКОГО ПРОСТРАНСТВА

Е.Н. Сосов

Аннотация

В работе множества всех N-сетей и всех N-сетей с повторениями геодезического пространства наделяются метриками. Найдены условия, при которых полученные пространства являются пространствами с внутренними метриками, собственными и геодезическими пространствами.

Ключевые слова: N-сеть, сегмент, геодезическое пространство, внутренняя метрика, метрика Хаусдорфа, собственное пространство.

---

1. Необходимые определения и полученные результаты

Пусть $p \in [1, \infty]$, $S(N)$ – группа всех подстановок множества из $N \geq 1$ элементов. Рассмотрим на декартовом произведении X^N из N экземпляров метрического пространства (X, ρ) метрику

$$\rho_{N,p} : X^N \times X^N \to \mathbb{R}_+,$$

$$\rho_{N,p}((x_1, \ldots, x_N), (y_1, \ldots, y_N)) = (|x_1 y_1|^p + \ldots + |x_N y_N|^p)^{1/p}$$

при $p \in [1, \infty)$ и

$$\rho_{N,\infty}((x_1, \ldots, x_N), (y_1, \ldots, y_N)) = \max\{|x_1 y_1|, \ldots, |x_N y_N|\}$$

при $p = \infty$, где $|xy| = \rho(x, y)$ для $x, y \in X$, $\mathbb{R}_+$ - – множество всех неотрицательных вещественных чисел. Зададим на X^N следующее отношение эквивалентности $\sim$:

$$(x_1, \ldots, x_N) \sim (y_1, \ldots, y_N),$$

если найдется такое $\sigma \in S(N)$, что

$$y_1 = x_{\sigma(1)}, \ldots, y_N = x_{\sigma(N)}.$$

Полученное фактор-пространство $X_N = X^N/\sim$ множества X^N по этому отношению эквивалентности есть симметризованная степень порядка N пространства X, а элементы этого множества можно отождествить с N-сетями с повторениями пространства X. Рассмотрим на этом множестве метрику

$$\alpha_p : X_N \times X_N \to \mathbb{R}_+,$$

$$\alpha_p([(x_1, \ldots, x_N)], [(y_1, \ldots, y_N)]) = \\ = \min\{\rho_{N,p}((x_1, \ldots, x_N), (y_{\sigma(1)}, \ldots, y_{\sigma(N)})) : \sigma \in S(N)\},$$

где $p \in [1, \infty]$ (при $p = \infty$, см. [1]). Ограничение этой метрики на множество

$$X_N^* = \{[(x_1, \ldots, x_N)] \in X_N : \operatorname{card}\{x_1, \ldots, x_N\} = N\},$$

где $\operatorname{card}\{x_1, \ldots, x_N\}$ – мощность множества $\{x_1, \ldots, x_N\}$, будем обозначать тем же символом α_p. Отметим также, что псевдометрика

$$\alpha_* : X_N \times X_N \to \mathbb{R}_+,$$

$$\alpha_*([(x_1, \ldots, x_N)], [(y_1, \ldots, y_N)]) = \alpha(\{x_1, \ldots, x_N\}, \{y_1, \ldots, y_N\}),$$

индуцирует на множестве X_N^* метрику, где

$$\alpha(\{x_1, \ldots, x_N\}, \{y_1, \ldots, y_N\}) = \max\{\max\{|x_i\{y_1, \ldots, y_N\}| : i \in \{1, \ldots, N\}\},$$

$$\{\max\{|y_j\{x_1, \ldots, x_N\}| : j \in \{1, \ldots, N\}\}\}$$

есть расстояние Хаусдорфа между множествами $\{x_1, \ldots, x_N\}$, $\{y_1, \ldots, y_N\}$ [2, с. 223]. Прежде чем исследовать некоторые свойства метрики α_p, напомним следующие определения.

Метрическое пространство (X, ρ) называется *пространством с внутренней метрикой* [3], если для любых $x, y \in X$, $\varepsilon > 0$ найдется конечная последовательность точек $z_0 = x$, $z_1, \ldots,$ $z_k = y$ такая, что

$$|z_i z_{i+1}| < \varepsilon \ (0 \le i \le k-1) \quad \text{и} \quad |z_0 z_1| + \cdots + |z_{k-1} z_k| < |xy| + \varepsilon.$$

Метрическое пространство (X, ρ) называется *выпуклым по Менгеру*, если для любых различных точек x, $y \in X$ найдется отличная от них такая точка $z \in X$, что $|xz| + |zy| = |xy|$ [4, с. 43].

Метрическое пространство (X, ρ) называется *собственным*, если любой его замкнутый шар компактен [5, с. 2].

Кривая, соединяющая точки x, $y \in X$, длина которой равна расстоянию между этими точками, называется *сегментом* $[x, y]$ с концами x, $y \in X$ [4, с. 42].

Метрическое пространство называется *геодезическим пространством*, если любые две его точки можно соединить сегментом [5, с. 4].

Метрическое пространство называется *метрически выпуклым пространством*, если для любых $x, y \in X$ найдется такой элемент $z \in X$, что $|xz| = |zy| = |xy|/2$ [6].

Теорема 1. *Пусть $p \in [1, \infty]$. Тогда верны следующие утверждения.*

(i) X_N^* – открытое множество пространства (X_N, α_p). На множестве X_N имеет место неравенство $\alpha_* \le \alpha_p$. Кроме того, при $N > 2$ для каждого

$$S = [(x_1, \ldots, x_N)] \in X_N^*$$

имеет место равенство $\alpha_*(S_1, S_2) = \alpha_\infty(S_1, S_2)$, где S_1, S_2 – произвольные элементы из открытого шара $B(S, \varepsilon) \subset (X_N, \alpha_*)$ радиуса

$$\varepsilon = \frac{1}{4} \min\{|x_i x_j| : i \ne j;\ i, j \in \{1, \ldots, N\}\},$$

а при $N \le 2$ имеет место равенство $\alpha_* = \alpha_\infty$.

(ii) (X, ρ) является собственным пространством тогда и только тогда, когда (X_N, α_p) – собственное пространство.

(iii) (X, ρ) является пространством с внутренней метрикой тогда и только тогда, когда (X_N, α_p), (X_N^*, α_p) – пространства с внутренней метрикой.

Кроме того, X_N^* *– всюду плотное подмножество пространства* (X_N, α_p) *при* $\mathrm{card}\,(X) > 1$.

(iv) (X, ρ) *является геодезическим (метрически выпуклым, выпуклым по Менгеру) пространством тогда и только тогда, когда* (X_N, α_p) - *– геодезическое (метрически выпуклое, выпуклое по Менгеру) пространство.*

Обозначим через $\Sigma_N^*(X)$ (через $\Sigma_N(X)$) множество всех (непустых) подмножеств в (X, ρ), состоящих (не более чем) из N точек, с индуцированной метрикой Хаусдорфа α. Причем обозначение $\Sigma_1(X)$ будем заменять на X. Элементы множества $\Sigma_N(X)$ называются N-сетями [7].

Рассмотрим сюръекцию

$$f : X_N \to \Sigma_N(X), \quad f([(x_1, \ldots, x_N)]) = \{x_1, \ldots, x_N\}.$$

Очевидно, что при $N \leq 2$ сюръекция f является изометрией пространства (X_2, α_∞) на пространство $(\Sigma_2(X), \alpha)$. Используя эту изометрию, из теоремы 1 получаем

Следствие 1. (X, ρ) *– собственное пространство (пространство с внутренней метрикой, геодезическое пространство, метрически выпуклое пространство, выпуклое по Менгеру пространство) тогда и только тогда, когда* $(\Sigma_2(X), \alpha)$ *– собственное пространство (пространство с внутренней метрикой, геодезическое пространство, метрически выпуклое пространство, выпуклое по Менгеру пространство).*

Для того чтобы при $N > 2$ пространство (X_N^*, α_p) было геодезическим пространством, на пространство (X, ρ) приходится налагать более жесткие условия.

Теорема 2. *Пусть* $p \in [1, \infty]$, (X, ρ) *– геодезическое пространство, удовлетворяющее следующим двум условиям* (A_1), (A_2).

(A_1) *Каждые две различные точки пространства* (X, ρ) *можно соединить единственным сегментом.*

(A_2) *Если два сегмента имеют общий конец и общую внутреннюю точку, то один из этих сегментов есть подмножество другого сегмента.*

Тогда (X_N^*, α_p) *– геодезическое пространство.*

Пусть кроме условий (A_1), (A_2) *выполнено следующее глобальное условие* (A_3) *неположительности кривизны по Буземану* (см. [4, с. 304])

(A_3) *Для любых* x, y, $z \in X$

$$2|\omega(z, x)\omega(z, y)| \leq |xy|,$$

где $\omega(z, x)$ *– середина сегмента* $[z, x]$.

Тогда при $N > 1$ *для каждого*

$$S = [(x_1, \ldots, x_N)] \in (X_N^*, \alpha_p)$$

и для любых W, T, $D \in B(S, \varepsilon)$, *где* $B(S, \varepsilon)$ *– открытый шар пространства* (X_N^*, α_p) *радиуса*

$$\varepsilon = \frac{1}{4} \min\{|x_i x_j| : i \neq j;\ i,\ j \in \{1, \ldots, N\}\},$$

верно неравенство

$$2\alpha_p(\omega(W, D), \omega(T, D)) \leq \alpha_p(W, T),$$

где $\omega(W, D)$ *– середина сегмента* $[W, D] \subset (X_N^*, \alpha_p)$, *то есть при* $N > 1$ *пространство* (X_N^*, α_p) *удовлетворяет локальному условию неположительности кривизны по Буземану.*

Используя сюръекцию f, для каждого $p \in [1, \infty]$ построим симметрику

$$\hat{\alpha}_p : \Sigma_N(X) \times \Sigma_N(X) \to \mathbb{R}_+, \quad \hat{\alpha}_p(S, S_1) = \alpha_p(f^{-1}(S), f^{-1}(S_1)).$$

Ограничение f_1 сюръекции f на подмножество $\Delta_N \cup X_N^* \subset X_N$, где

$$\Delta_N = \{[(x_1, \ldots, x_N)] \in X_N : x_1 = \ldots = x_N\},$$

является биекцией на свой образ $X \cup \Sigma_N^*(X) \subset \Sigma_N(X)$. Следовательно, ограничение симметрики $\hat{\alpha}_p$ на множество $(X \cup \Sigma_N^*(X)) \times (X \cup \Sigma_N^*(X))$ является метрикой, и

$$f_1 : (\Delta_N \cup X_N^*, \alpha_p) \to (X \cup \Sigma_N^*(X), \hat{\alpha}_p)$$

есть изометрия. Отметим также, что $\Sigma_N^*(X)$ является открытым подмножеством пространства $(\Sigma_N(X), \alpha)$. Действительно, пусть $N > 1$ и $S \in \Sigma_N^*(X)$, тогда открытый шар $B(S, \varepsilon)$ пространства $(\Sigma_N(X), \alpha)$, где

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \min \{|xy| : x, \, y \in S, \, x \neq y\},$$

принадлежит подмножеству $\Sigma_N^*(X)$. Используя изометрию f_1, получаем следующие следствия теорем 1, 2.

Следствие 2. *Пусть $p \in [1, \infty]$. Тогда верны следующие утверждения.*

(i) На множестве $X \cup \Sigma_N^*(X)$ имеет место неравенство $\alpha \leq \hat{\alpha}_p$. Кроме того, при $N > 2$ для каждого

$$S = \{x_1, \ldots, x_N\} \in \Sigma_N^*(X)$$

имеет место равенство

$$\alpha(S_1, S_2) = \hat{\alpha}_\infty(S_1, S_2),$$

где S_1, S_2 – произвольные элементы из открытого шара $B(S, \varepsilon) \subset (\Sigma_N(X), \alpha)$ радиуса

$$\varepsilon = \frac{1}{4} \min \{|x_i x_j| : i \neq j; \, i, \, j \in \{1, \ldots, N\}\},$$

верно равенство, а при $N \leq 2$ имеет место равенство $\alpha = \hat{\alpha}_\infty$.

(ii) (X, ρ) является пространством с внутренней метрикой тогда и только тогда, когда $(\Sigma_N^*(X), \hat{\alpha}_p)$ – пространство с внутренней метрикой.

Следствие 3. *Пусть $p \in [1, \infty]$, (X, ρ) – геодезическое пространство, удовлетворяющее условиям (A_1), (A_2) теоремы 2. Тогда $(\Sigma_N^*(X), \hat{\alpha}_p)$ – геодезическое пространство. Если, кроме условий (A_1), (A_2) выполнено условие (A_3), то при $N > 1$ для каждого*

$$S = \{x_1, \ldots, x_N\} \in (\Sigma_N^*(X), \hat{\alpha}_p)$$

и для любых W, T, $D \in B(S, \varepsilon)$, где $B(S, \varepsilon)$ – открытый шар пространства $(\Sigma_N^*(X), \hat{\alpha}_p)$ радиуса

$$\varepsilon = \frac{1}{4} \min \{|x_i x_j| : i \neq j; \, i, \, j \in \{1, \ldots, N\}\},$$

имеет место неравенство

$$2\hat{\alpha}_p(\omega(W, D), \omega(T, D)) \leq \hat{\alpha}_p(W, T),$$

то есть при $N > 1$ пространство $(\Sigma_N^*(X), \hat{\alpha}_p)$ удовлетворяет локальному условию неположительности кривизны по Буземану.

Рассмотрим на множестве X_N следующее отношение эквивалентности R: $[(x_1,\ldots,x_N)]R[(y_1,\ldots,y_N)]$, если $\{x_1,\ldots,x_N\}=\{y_1,\ldots,y_N\}$. Рассмотрим для $p\in$ $\in[1,\infty]$ псевдометрику (см. [8, с. 73])

$$\alpha_{p,R}:X_N\times X_N\to\mathbb{R}_+,$$

$$\alpha_{p,R}(S,\hat{S})=\inf\{\alpha_p(S_1,\tilde{S}_1)+\cdots+\alpha_p(S_k,\tilde{S}_k)\},$$

где точная нижняя грань берется по всем $k\in\mathbb{N}$ и таким наборам $\{S_i\}$, $\{\tilde{S}_i\}$, $1\le i\le k$, что $S_1=S$, $\tilde{S}_k=\hat{S}$ и точка $\tilde{S}_i$ R-эквивалентна точке S_{i+1} при всех $i=1,\ldots,k-1$. Стандартным образом сопоставим псевдометрическому пространству $(X_N,\alpha_{p,R})$ метрическое пространство $(X_N/R,\alpha_{p,R})$, отождествляя точки, находящиеся на нулевом расстоянии, и сохраняя обозначение $\alpha_{p,R}$ для полученной фактор-метрики. Отображение

$$g:X_N/R\to\Sigma_N(X),\quad g([[(x_1,\ldots,x_N)]]_R)=\{x_1,\ldots,x_N\}$$

является биекцией, с помощью которой мы отождествим фактор-множество X_N/R с множеством всех N-сетей $\Sigma_N(X)$ пространства X и наделим множество $\Sigma_N(X)$ фактор-метрикой $\alpha_{p,R}$.

Теорема 3. *Пусть $p\in[1,\infty]$. Тогда верны следующие утверждения.*

(i) На множестве $\Sigma_N(X)$ справедливо неравенство $\alpha\le\alpha_{p,R}$. Кроме того, при $N>2$ для каждого

$$S=\{x_1,\ldots,x_N\}\in\Sigma_N^*(X)$$

имеет место равенство

$$\alpha(S_1,S_2)=\alpha_{\infty,R}(S_1,S_2),$$

где S_1, S_2 – произвольные элементы из открытого шара $B(S,\varepsilon)\subset(\Sigma_N(X),\alpha)$ радиуса

$$\varepsilon=\frac{1}{4}\min\{|x_ix_j|:i\ne j;\,i,\,j\in\{1,\ldots,N\}\},$$

а при $N\le2$ верно равенство $\alpha=\alpha_{\infty,R}$.

(ii) (X,ρ) является собственным пространством тогда и только тогда, когда $(\Sigma_N(X),\alpha_{p,R})$ – собственное пространство.

(iii) (X,ρ) является пространством с внутренней метрикой тогда и только тогда, когда $(\Sigma_N(X),\alpha_{p,R})$, $(\Sigma_N^*(X),\alpha_{p,R})$ – пространства с внутренней метрикой. Кроме того, $\Sigma_N^*(X)$ – всюду плотное подмножество пространства $(\Sigma_N(X),\alpha_{p,R})$ при $\operatorname{card}X>1$.

(iv) (X,ρ) является геодезическим (метрически выпуклым, выпуклым по Менгеру) собственным пространством тогда и только тогда, когда $(\Sigma_N(X),\alpha_{p,R})$ – геодезическое (метрически выпуклое, выпуклое по Менгеру) собственное пространство.

Отметим для сравнения, что из предложения 1 [9] следует, что в геодезическом пространстве, удовлетворяющем условиям (A_1), (A_2), (A_3), множество всех непустых ограниченных замкнутых выпуклых множеств с метрикой Хаусдорфа является геодезическим пространством, удовлетворяющем глобальному условию неположительности кривизны по Буземану. В следующем следствии 4 теорем 2, 3 установлены полезные достаточные условия, при которых две N-сети могут быть соединены сегментом в пространстве $(\Sigma_N(X),\alpha)$.

Следствие 4. *Пусть* (X,ρ) *– геодезическое пространство.*

(i) *Если* S_1, $S_2 \in \Sigma_N^*(X)$ *и*

$$\alpha(S_1,S_2) = \hat{\alpha}_\infty(S_1,S_2),$$

то N*-сети* S_1, S_2 *могут быть соединены сегментом в пространстве* $(\Sigma_N(X),\alpha)$.

(ii) *Если* (X,ρ) *– собственное пространство,* S_1, $S_2 \in \Sigma_N(X)$ *и*

$$\alpha(S_1,S_2) = \alpha_{\infty,R}(S_1,S_2),$$

то N*-сети* S_1, S_2 *могут быть соединены сегментом в пространстве* $(\Sigma_N(X),\alpha)$.

Пример 1. Рассмотрим в евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$ две 3-сети

$$M = \{(0;0),(-a;-a),(-a;a)\}, \quad W = \{(0;0),(a;a),(a;-a)\},$$

где $a \in \mathbb{R}_+$. Тогда нетрудно найти, что

$$\alpha(M,W) = \sqrt{2}a, \quad \hat{\alpha}_\infty(M,W) = \alpha_{\infty,R}(M,W) = 2a.$$

Кроме того,

$$2\alpha(M,T) = 2\alpha(W,T) = \alpha(M,W), \quad 2\hat{\alpha}_\infty(M,D) = 2\hat{\alpha}_\infty(W,D) = \hat{\alpha}_\infty(M,W),$$

где

$$T = \{(-a/2;-a/2),(-a/2;a/2),(a/2;a/2),(a/2;-a/2)\} \in \Sigma_4(\mathbb{R}^2),$$
$$D = \{(0;0),(0;a),(0;-a)\} \in \Sigma_3(\mathbb{R}^2).$$

Теперь легко установить, что в любой окрестности 3-сети $O = \{(0;0)\} \in (\Sigma_3(\mathbb{R}^2),\alpha)$ существуют две 3-сети, несоединимые сегментом в пространстве $(\Sigma_3(\mathbb{R}^2),\alpha)$ и $\alpha \neq \hat{\alpha}$.

Пример 2. Рассмотрим на прямой $\mathbb{R}$ три 3-сети

$$M = \{0,2a,3a+b\}, \quad W = \{a,2a+b,4a+b\}, \quad T = \{a,3a+b\},$$

где a, $b \in \mathbb{R}_+$. В следующих трех случаях нетрудно подсчитать расстояния.

1. Если $b \le a$, то

$$\alpha(M,W) = \alpha_{\infty,R}(M,W) = \hat{\alpha}_\infty(M,W) = a.$$

2. Если $a < b \le 2a$, то

$$\alpha(M,W) = a < b = \hat{\alpha}_\infty(M,W) = \alpha_{\infty,R}(M,W).$$

3. Пусть $2a < b$. Если $a = 0$, то $M = W = T$. Если $a > 0$, то

$$\alpha(M,W) = a < 2a = \alpha(M,T) + \alpha(T,W) = \alpha_{\infty,R}(M,W) < b = \hat{\alpha}_\infty(M,W),$$

и не существует сегмента с концами M, W в пространстве $(\Sigma_3(\mathbb{R}),\alpha)$.

2. Доказательства полученных результатов

Доказательство теоремы 1.

(i) Нетрудно проверить, что для каждого

$$S = [(x_1, \dots, x_N)] \in X_N^*$$

открытый шар $B(S, \delta)$ пространства (X_N, α_p), где

$$\delta = \frac{1}{2} \min\{|x_i x_j| : i \neq j;\ i,\ j \in \{1, \dots, N\}\},$$

принадлежит множеству X_N^*. Следовательно, X_N^* – открытое множество пространства (X_N, α_p). Докажем, что $\alpha_* \leq \alpha_p$. Для каждого $\sigma \in S(N)$ имеем, что

$$\alpha_*([(x_1, \dots, x_N)], [(y_1, \dots, y_N)]) =$$
$$= \max\{\max\{|x_i\{y_1, \dots, y_N\}| : 1 \leq i \leq N\}, \max\{|y_j\{x_1, \dots, x_N\}| : 1 \leq j \leq N\}\} \leq$$
$$\leq \max\{\rho_{N,p}((x_1, \dots, x_N), (y_{\sigma(1)}, \dots, y_{\sigma(N)})), \rho_{N,p}((y_1, \dots, y_N), (x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(N)}))\}.$$

Осталось взять минимум по всем $\sigma \in S(N)$ в правой части неравенства и использовать определение метрики α_p.

Пусть $N > 2$ и $S_1,\ S_2 \in B(S, \varepsilon) \subset (X_N, \alpha_*)$. Тогда $\alpha_*(S_1, S_2) < 2\varepsilon$. Учитывая определения псевдометрики α_* и ε, получим, что $S_1,\ S_2 \in X_N^*$ и $\alpha_*(S_1, S_2) = \alpha_\infty(S_1, S_2)$.

Пусть теперь $N = 2$ (случай, когда $N = 1$, очевиден), и для определенности положим

$$S = [(x, y)], \quad S_1 = [(u, v)], \quad |xu| = D(S, S_1),$$

где $D(S, S_1) = \max\{|ab| : a \in \{x, y\},\ b \in \{u, v\}\}$. Тогда

$$\alpha_*(S, S_1) = \max\left\{\max\{|xv|, |y\{u, v\}|\}; \max\{|yu|, |v\{x, y\}|\}\right\}.$$

Рассмотрим два случая.

1. Если $|yu| > |yv|$, то

$$\alpha_*(S, S_1) = \max\{\max\{|xv|, |yv|\}; |yu|\} =$$
$$= \max\{|xv|, |yu|\} = \min\{\max\{|xu|, |yv|\}; \max\{|xv|, |yu|\}\} = \alpha_\infty(S, S_1).$$

2. Если $|yu| \leq |yv|$, то

$$\alpha_*(S, S_1) = \max\{\max\{|xv|, |yu|\}; \max\{|yu|, |v\{x, y\}|\}\} =$$
$$= \max\{|xv|, |yu|\} = \min\{\max\{|xu|, |yv|\}; \max\{|xv|, |yu|\}\} = \alpha_\infty(S, S_1).$$

(ii) Доказательство достаточности очевидно. Докажем необходимость. Пусть $S = [(x_1, \dots, x_N)] \in X_N$ и $(S_n = [(y_1^n, \dots, y_N^n)])$ – ограниченная последовательность пространства (X_N, α_p), то есть найдется такая вещественная константа $c > 0$, что для каждого $n \in \mathbb{N}$ $\alpha_p(S_n, S) \leq c$. Тогда для каждого $n \in \mathbb{N}$ найдется такое $\sigma_n \in S(N)$, что

$$\rho_{N,p}((x_1, \dots, x_N), (y^n_{\sigma_n(1)}, \dots, y^n_{\sigma_n(N)})) \leq c.$$

Следовательно, для каждого $k \in \{1, \dots, N\}$ найдется подпоследовательность $(y^m_{\sigma_m(k)}) \subset (y^n_{\sigma_n(k)})$, сходящаяся к некоторому $u_k \in X$ при $m \to \infty$, поскольку пространство X собственное. Положим

$$S_0 = [(u_1, \dots, u_N)].$$

Тогда
$$\alpha_p(S_m, S_0) \le \rho_{N,p}((u_1,\dots,u_N),(y^m_{\sigma_m(1)},\dots,y^m_{\sigma_m(N)})) \to 0$$
при $m \to \infty$. Таким образом, (X_N, α_p) – собственное пространство.

(iii) Доказательство достаточности для пространства (X_N, α_p) очевидно. Докажем необходимость. Пусть произвольно выбраны
$$S = [(x_1,\dots,x_N)], \quad S_1 = [(y_1,\dots,y_N)] \in X_N.$$
Используя лемму 1 [10], для каждого $\varepsilon > 0$ выберем $S_2 = [(z_1,\dots,z_N)]$, где $z_i \in \in \omega(x_i, y_{\sigma(i)}, \varepsilon_1)$ для каждого $i \in \{1,\dots,N\}$,
$$\varepsilon_1 = \begin{cases} \varepsilon N^{-1/p}, & \text{если} \quad p \in [1,\infty), \\ \varepsilon, & \text{если} \quad p = \infty, \end{cases}$$
и $\sigma \in S(N)$ такое, что $\rho_{N,p}((x_1,\dots,x_N),(y_{\sigma(1)},\dots,y_{\sigma(N)})) = \alpha_p(S,S_1)$.

Тогда
$$\begin{aligned} &2\max\{\alpha_p(S,S_2),\alpha_p(S_2,S_1)\} \le \\ &\le 2\max\{\rho_{N,p}((x_1,\dots,x_N),(z_1,\dots,z_N)),\rho_{N,p}((z_1,\dots,z_N),(y_{\sigma(1)},\dots,y_{\sigma(N)}))\} < \\ &\qquad < \rho_{N,p}((x_1,\dots,x_N),(y_{\sigma(1)},\dots,y_{\sigma(N)})) + \varepsilon = \alpha_p(S,S_1) + \varepsilon. \end{aligned}$$
В силу леммы 1 из [10] пространство (X_N, α_p) является пространством с внутренней метрикой.

С помощью леммы 1 из [10] нетрудно доказать, что X_N^* – всюду плотное подмножество пространства (X_N, α_p) при $\operatorname{card} X > 1$. Из этих двух доказанных утверждений и леммы 1 из [10] следует теперь верность утверждения для пространства (X_N^*, α_p).

(iv) Доказательство достаточности очевидно. Докажем необходимость. Пусть произвольно выбраны
$$S = [(x_1,\dots,x_N)] \in X_N, \quad S_1 = [(y_1,\dots,y_N)]) \in X_N$$
и пусть $\sigma \in S(N)$ такое, что
$$\rho_{N,p}((x_1,\dots,x_N),(y_{\sigma(1)},\dots,y_{\sigma(N)})) = \alpha_p(S,S_1).$$
Для каждого $i \in \{1,\dots,N\}$ в силу геодезичности пространства X найдется некоторый сегмент $[x_i, y_{\sigma(i)}]$. Выберем для каждого $i \in \{1,\dots,N\}$ и для каждого $\lambda \in [0,1]$ такую точку $z_i(\lambda) \in [x_i, y_{\sigma(i)}]$, что
$$|x_i z_i(\lambda)| = \lambda |x_i y_{\sigma(i)}|.$$
Для каждого $\lambda \in [0,1]$ положим
$$S(\lambda) = [(z_1(\lambda),\dots,z_N(\lambda))]).$$
Тогда для каждого $\lambda \in [0,1]$, используя неравенство треугольника, нетрудно получить равенство
$$\alpha_p(S,S(\lambda)) + \alpha_p(S(\lambda),S_1) = \alpha_p(S,S_1).$$
Следовательно, $S(\lambda)$ при изменении параметра λ на отрезке $[0,1]$ есть параметризация некоторого сегмента с концами S, S_1 в пространстве (X_N, α_p), и это пространство геодезическое. Утверждения этого пункта теоремы 1, приведенные

в скобках, теперь нетрудно доказать, используя аналогию с доказанным случаем. Таким образом, теорема 1 доказана. □

Доказательство теоремы 2.

При $\operatorname{card} X = 1$ или $N = 1$ теорема 2, очевидно, верна. Предположим, что $\operatorname{card} X > 1$ и $N > 1$.

Пусть произвольно выбраны различные

$$S = [(x_1, \ldots, x_N)], \quad S_1 = [(y_1, \ldots, y_N)] \in X_N^*.$$

Рассмотрим сначала частный случай, когда все точки

$$\{x_1, \ldots, x_N, y_1, \ldots, y_N\}$$

принадлежат одному сегменту и $p \in [1, \infty)$. Без потери общности можно считать, что точки упорядочены следующим образом:

$$x_1 > \cdots > x_N, \quad y_1 > \cdots > y_N, \quad x_1 \geq y_1.$$

Докажем, что

$$\rho_{N,p}((x_1, \ldots, x_N), (y_1, \ldots, y_N)) = \alpha_p(S, S_1)$$

индукцией по N.

Пусть $N = 2$. Если $x_2 \leq y_1$, то нетрудно получить неравенство

$$\rho_{2,p}((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \leq \rho_{2,p}((x_1, x_2), (y_2, y_1)),$$

из которого следует требуемое равенство. Пусть $x_2 > y_1$. Заметим, что функция

$$f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+, \quad f(t) = (a+t)^p - (b+t)^p, \quad b \leq a, \quad a, b \in \mathbb{R}_+$$

неубывающая. С учетом этого требуемое равенство следует теперь из неравенств

$$|x_1y_1|^p - |x_2y_1|^p \leq (|x_1y_1| + |y_1y_2|)^p - (|x_2y_1| + |y_1y_2|)^p = |x_1y_2|^p - |x_2y_2|^p.$$

Итак, при $N = 2$ рассматриваемое равенство установлено. Предположим, что это равенство верно для всех $N \leq n-1$, и докажем его для $N = n$.

Пусть $\sigma \in S(N)$.

Рассмотрим два случая.

(i) Если $\sigma(1) = 1$, то по предположению индукции

$$\rho_{N-1,p}((x_2, \ldots, x_N), (y_2, \ldots, y_N)) \leq \rho_{N-1,p}((x_2, \ldots, x_N), (y_{\sigma(2)}, \ldots, y_{\sigma(N)}))$$

или

$$\rho_{N-1,p}((x_2, \ldots, x_N), (y_2, \ldots, y_N)) \leq \rho_{N-1,p}((y_2, \ldots, y_N), (x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(N)})).$$

Следовательно,

$$\rho_{N,p}((x_1, \ldots, x_N), (y_1, \ldots, y_N)) \leq \rho_{N,p}((x_1, \ldots, x_N), (y_{\sigma(1)}, \ldots, y_{\sigma(N)})).$$

или

$$\rho_{N,p}((x_1, \ldots, x_N), (y_1, \ldots, y_N)) \leq \rho_{N,p}((y_1, \ldots, y_N), (x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(N)})).$$

(ii) Если $\sigma(1) > 1$ и $\sigma(k) = 1$, где $k \in \{2, \dots, N\}$, то, используя установленные неравенства пункта (i) и предположение индукции, нетрудно получить неравенства:

$$\rho_{N,p}((x_1, \dots, x_N), (y_1, \dots, y_N)) \le$$
$$\le \rho_{N,p}((x_1, \dots, x_N), (y_{\sigma(k)}, \dots, y_{\sigma(k-1)}, y_{\sigma(1)}, y_{\sigma(k+1)}, \dots, y_{\sigma(N)})) \le$$
$$\le \rho_{N,p}((x_1, \dots, x_N), (y_{\sigma(1)}, \dots, y_{\sigma(N)})).$$

Следовательно, требуемое равенство доказано.

Выберем для каждого $\lambda \in [0, 1]$ и для каждого $k \in \{1, \dots, N\}$ такую точку $z_k(\lambda) \in [x_k, y_k]$, что

$$|x_k z_k(\lambda)| = \lambda |x_k y_k|.$$

Тогда для каждого $\lambda \in [0, 1]$ справедливы неравенства:

$$z_1(\lambda) > \ldots > z_N(\lambda).$$

Положим для каждого $\lambda \in [0, 1]$

$$S(\lambda) = [(z_1(\lambda), \dots, z_N(\lambda))].$$

Так же, как и при доказательстве утверждения (iv) теоремы 1, используя доказанные выше неравенства, получаем, что $S(\lambda)$ при изменении параметра λ на отрезке $[0, 1]$ есть параметризация некоторого сегмента с концами S, S_1 в пространстве (X_N^*, α_p). Таким образом, в частном случае теорема 2 верна.

Рассмотрим общий случай. Пусть $p \in [1, \infty]$ и

$$\Xi = \left\{\sigma \in S(N) : \rho_{N,p}((x_1, \dots, x_N), (y_{\sigma(1)}, \dots, y_{\sigma(N)})) = \alpha_p(S, S_1)\right\}.$$

Индукцией по N докажем следующее вспомогательное утверждение (C).

(C) Найдется такое $\sigma \in \Xi$, что для любых различных i, $j \in \{1, \dots, N\}$, для каждого $\lambda \in [0, 1]$ справедливо неравенство $z_i(\lambda) \ne z_j(\lambda)$, где точка $z_k(\lambda) \in$ $\in [x_k, y_{\sigma(k)}]$ при $k \in \{i, j\}$ такая, что

$$|x_k z_k(\lambda)| = \lambda |x_k y_{\sigma(k)}|,$$

а сегмент $[x_k, y_{\sigma(k)}]$ существует и является единственным в силу условия (A_1).

Пусть $N = 2$. Предположим противное. Тогда для каждого $\sigma \in \Xi$ найдется такое $\lambda \in (0, 1)$, что $z_1(\lambda) = z_2(\lambda)$. Используя определение точек $z_1(\lambda)$, $z_2(\lambda)$ и неравенство треугольника, получим:

$$\rho_{2,p}((x_1, x_2), (y_{\sigma(2)}, y_{\sigma(1)})) \le \rho_{2,p}((x_1, x_2), (y_{\sigma(1)}, y_{\sigma(2)})).$$

Если это неравенство строгое, то в силу определений множества Ξ и метрики α_p получили противоречие. Если имеет место равенство, то в силу условий (A_1), (A_2) точки x_1, x_2, $y_{\sigma(1)}$, $y_{\sigma(2)}$ принадлежат одному сегменту и $\Xi = S(2)$. Тогда в силу определений точек $z_1(\lambda)$, $z_2(\lambda)$ и метрики α_p снова получили противоречие.

Допустим, что утверждение (C) верно для всех $N \le n - 1$, и докажем его для $N = n$. Предположим противное. Тогда для каждого $\sigma \in \Xi$ найдутся такие различные i, $j \in \{1, \dots, N\}$ и такое $\lambda \in (0, 1)$, что $z_i(\lambda) = z_j(\lambda)$. В этом случае пару сегментов $\{[x_i, y_{\sigma(i)}], [x_j, y_{\sigma(j)}]\}$ назовем отмеченной.

Пусть $\sigma \in \Xi$ и $p \in [1, \infty)$. В семействе сегментов

$$D = ([x_k, y_{\sigma(k)}])_{k \in \{1, \dots, N\}}$$

заменим отмеченную пару $\{[x_i, y_{\sigma(i)}], [x_j, y_{\sigma(j)}]\}$ на пару $\{[x_i, y_{\sigma(j)}], [x_j, y_{\sigma(i)}]\}$. Это приводит к новой подстановке π, полученной перестановкой $\sigma(i)$ и $\sigma(j)$ в подстановке σ, в частности, $\pi(i) = \sigma(j)$, $\pi(j) = \sigma(i)$. Тогда, учитывая установленное неравенство при $N = 2$, получим

$$\rho_{N,p}((x_1, \ldots, x_N), (y_{\pi(1)}, \ldots, y_{\pi(N)})) \leq \rho_{N,p}((x_1, \ldots, x_N), (y_{\sigma(1)}, \ldots, y_{\sigma(N)})).$$

Если полученное неравенство строгое, то в силу определения множества Ξ и метрики α_p получили противоречие. Если имеет место равенство, то в силу условий (A_1), (A_2) точки x_i, $y_{\pi(i)}$, x_j, $y_{\pi(j)}$ принадлежат одному сегменту. Кроме того, $\pi \in \Xi$ и пара $\{[x_i, y_{\pi(i)}], [x_j, y_{\pi(j)}]\}$ – неотмеченная. Учитывая предположение индукции, можно считать, что если удалить из семейства сегментов

$$\Delta_1 = ([x_k, y_{\pi(k)}])_{k \in \{1, \ldots, N\}}$$

сегменты $[x_i, y_{\pi(i)}]$, $[x_j, y_{\pi(j)}]$, то в оставшемся семействе не останется отмеченных пар сегментов. Если в семействе Δ_1 нет отмеченных пар сегментов, то в силу определения множества Ξ и метрики α_p получаем противоречие. Предположим для определенности, что пара $\{[x_i, y_{\pi(i)}], [x_l, y_{\pi(l)}]\}$ – отмеченная. Заменив ее в семействе Δ на пару $\{[x_i, y_{\pi(l)}], [x_l, y_{\pi(i)}]\}$, получим новое семейство сегментов Δ_2. Аналогично предыдущему, вводя новую подстановку и повторяя предыдущие рассуждения, мы либо сразу получаем противоречие, либо получаем, что точки x_i, $y_{\pi(i)}$, x_j, $y_{\pi(j)}$, x_l, $y_{\pi(l)}$ принадлежат одному сегменту L. Учитывая доказанный частный случай, можно считать, что на сегменте L нет отмеченных пар сегментов. А по предположению индукции можно считать, что нет отмеченных пар сегментов и среди сегментов семейства Δ_1, расположенных вне сегмента L. Продолжая такую процедуру замены отмеченных пар сегментов, мы через конечное число шагов получим противоречие, поскольку для точек, расположенных на одном сегменте, теорема 2 доказана и группа подстановок – конечная.

Пусть $\sigma \in \Xi$ и $p = \infty$. В семействе сегментов D выберем сегмент $[x_i, y_{\sigma(i)}]$ длины $\alpha_p(S, S_1)$. Учитывая предположение индукции, можно считать, что если удалить этот сегмент из семейства D, то в оставшемся семействе не останется отмеченных пар сегментов. Пусть пара $\{[x_i, y_{\sigma(i)}], [x_j, y_{\sigma(j)}]\}$ – отмеченная. Если в D такого сегмента $[x_j, y_{\sigma(j)}]$ не существует, то в силу определения множества Ξ и метрики α_p сразу получаем противоречие. Заменив в семействе D отмеченную пару $\{[x_i, y_{\sigma(i)}], [x_j, y_{\sigma(j)}]\}$ на пару $\{[x_i, y_{\sigma(j)}], [x_j, y_{\sigma(i)}]\}$, получим семейство сегментов $D(1)$. Это приводит к новой подстановке π, полученной перестановкой $\sigma(i)$ и $\sigma(j)$ в подстановке σ. Длины сегментов $[x_i, y_{\sigma(j)}]$, $[x_j, y_{\sigma(i)}]$ строго меньше, чем $\alpha_p(S, S_1)$. В семействе $D(1)$ выберем новый сегмент длины $\alpha_p(S, S_1)$ и повторим рассуждения. Через конечное число шагов получим противоречие, поскольку группа подстановок – конечная и на каждом шаге сегменты из отмеченных пар заменяются на сегменты меньшей длины, чем $\alpha_p(S, S_1)$. Таким образом, утверждение (C) доказано.

Пусть $\sigma \in \Xi$ такое, как описано в (C). Для каждого $\lambda \in [0, 1]$ положим

$$S(\lambda) = [(z_1(\lambda), \ldots, z_N(\lambda))].$$

Так же, как и в доказательстве утверждения (iv) теоремы 1, получаем, что $S(\lambda)$ при изменении параметра λ на отрезке $[0, 1]$ есть параметризация некоторого сегмента с концами S, S_1 в пространстве (X_N^*, α_p).

Докажем теперь последнее утверждение теоремы. Пусть S, W, T, D выбраны в соответствии с условиями теоремы. Тогда из неравенства $\alpha_p(S, T) < \varepsilon$, неравенства треугольника и определения ε следует, что для каждого $t \in f(T)$ найдется единственный элемент $x(t) \in f(S)$ такой, что $|tx(t)| < \varepsilon$, а также для каждого $x \in \in f(S)$ найдется такой элемент $u \in f(T)$, что $|ux| < \varepsilon$. Учтем также, что $S \in X_N^*$. Тогда получим, что для каждого $x \in f(S)$ в шаре $B(x, \varepsilon)$ содержится точно один элемент $t(x) \in f(T)$. Аналогичное рассуждение справедливо и для W, D. Соответствующие элементы обозначим через $w(x) \in f(W)$, $d(x) \in f(D)$. Тогда для каждого $x \in f(S)$ имеем:

$$2|\omega(w(x), d(x))\omega(t(x), d(x))| \leq |w(x)t(x)|.$$

Теперь нетрудно проверить, что

$$2\alpha_p(\omega(W, D), \omega(T, D)) \leq \alpha_p(W, T).$$

Таким образом, теорема 2 доказана. □

Доказательство теоремы 3.

(i) Нетрудно понять, что для доказательства неравенства $\alpha \leq \alpha_{p,R}$ достаточно доказать неравенство $\alpha_* \leq \alpha_{p,R}$ для псевдометрик на множестве X_N. Выберем произвольное $\varepsilon > 0$. Пусть S, $\hat{S} \in X_N$. В силу определения псевдометрики $\alpha_{p,R}$ найдутся такие

$$S_1, \ldots, S_k, \tilde{S}_1, \ldots, \tilde{S}_k \in X_N,$$

что $S_1 = S$, $\tilde{S}_k = \hat{S}$, $\tilde{S}_i R S_{i+1}$ при всех $i = 1, \ldots, k-1$ и

$$\alpha_p(S_1, \tilde{S}_1) + \ldots + \alpha_p(S_k, \tilde{S}_k) \leq \alpha_{p,R}(S, \hat{S}) + \varepsilon.$$

Тогда, используя неравенство треугольника и утверждение (i) теоремы 1, получим:

$$\begin{aligned}\alpha_*(S, \hat{S}) \leq& \\ \leq \alpha_*(S_1, \tilde{S}_1) &+ \alpha_*(\tilde{S}_1, S_2) + \alpha_*(S_2, \tilde{S}_2) + \cdots + \alpha_*(\tilde{S}_{k-1}, S_k) + \alpha_*(S_k, \tilde{S}_k) = \\ &= \alpha_*(S_1, \tilde{S}_1) + \alpha_*(S_2, \tilde{S}_2) + \cdots + \alpha_*(S_k, \tilde{S}_k) \leq \\ &\leq \alpha_p(S_1, \tilde{S}_1) + \cdots + \alpha_p(S_k, \tilde{S}_k) \leq \alpha_{p,R}(S, \hat{S}) + \varepsilon.\end{aligned}$$

Используя произвол в выборе $\varepsilon > 0$, получим требуемое неравенство. Оставшиеся равенства следуют из соответствующих равенств утверждения (i) следствия 2, если учесть доказанное неравенство и следующее простое неравенство для псевдометрики и метрики на X_N: $\alpha_{p,R} \leq \alpha_p$ для $p \in [1, \infty]$.

(ii) Доказательство достаточности очевидно. Для доказательства необходимости достаточно проверить, что произвольный замкнутый шар $B[[S]_R, r]$ в пространстве $(\Sigma_N(X), \alpha_{p,R})$ компактен. Рассмотрим полный прообраз $M = \pi^{-1}(B[[S]_R, r])$ этого шара относительно канонической проекции

$$\pi : X_N \to \Sigma_N(X), \quad \pi(S) = [S]_R.$$

Из непрерывности канонической проекции следует, что множество M замкнуто. Кроме того, $M \subset B[S, r_1] \subset (X_N, \alpha_p)$, где $S \in [S]_R$, $r_1 = (N)^{1/p}(r + D(f(S)))$, $D(f(S))$ – диаметр множества $f(S) \subset (X, \rho)$. Действительно, используя определения метрик α, α_p, сюръекции f, доказанное утверждение (i) и неравенство треугольника, для каждого $\hat{S} \in M$ получим неравенства

$$\begin{aligned}\alpha_p(S, \hat{S}) \leq (N)^{1/p}\alpha_\infty(S, \hat{S}) \leq (N)^{1/p}(\alpha(f(S), f(\hat{S})) + D(f(S))) \leq& \\ (N)^{1/p}(\alpha_{p,R}(f(S)), f(\hat{S})) + D(f(S))) \leq r_1.&\end{aligned}$$

Следовательно, множество M ограничено и замкнуто в пространстве (X_N, α_p). В силу утверждения (ii) теоремы 1, M компактно в пространстве (X_N, α_p). Тогда его образ относительно непрерывного отображения $\pi(M) = B[[S]_R, r]$ является компактным множеством в пространстве $(\Sigma_N(X), \alpha_{p,R})$.

(iii) Доказательство достаточности для пространства $(\Sigma_N(X), \alpha_{p,R})$ очевидно. Докажем необходимость. Пусть произвольно выбраны

$$S = [(x_1, \ldots, x_N)], \quad \hat{S} = [(y_1, \ldots, y_N)]$$

в псевдометрическом пространстве $(X_N, \alpha_{p,R})$. Для произвольно выбранного $\varepsilon > 0$ найдутся такие

$$S_1, \ldots, S_k, \tilde{S}_1, \ldots, \tilde{S}_k \in X_N,$$

что $S_1 = S$, $\tilde{S}_k = \hat{S}$, $\tilde{S}_i R S_{i+1}$ при всех $i = 1, \ldots, k-1$ и

$$C = \alpha_p(S_1, \tilde{S}_1) + \cdots + \alpha_p(S_k, \tilde{S}_k) < \alpha_{p,R}(S, \hat{S}) + \varepsilon.$$

Найдем такое $j \in \{1, \ldots, k-1\}$, что

$$\alpha_p(S_1, \tilde{S}_1) + \cdots + \alpha_p(S_j, \tilde{S}_j) \leq C/2$$

и

$$\alpha_p(S_1, \tilde{S}_1) + \cdots + \alpha_p(S_{j+1}, \tilde{S}_{j+1}) > C/2.$$

Пусть

$$\varepsilon_1 = \alpha_{p,R}(S, \hat{S}) + \varepsilon - C > 0.$$

Используя утверждение (iii) теоремы 1 и лемму 1 [10], выберем такое

$$S^* = [(z_1, \ldots, z_N)] \in X_N,$$

что

$$2 \max\{\alpha_p(S_{j+1}, S^*), \alpha_p(S^*, \tilde{S}_{j+1})\} < \alpha_p(S_{j+1}, \tilde{S}_{j+1}) + \varepsilon_1.$$

Тогда

$$\alpha_p(S_1, \tilde{S}_1) + \ldots + \alpha_p(S_j, \tilde{S}_j) + \alpha_p(S_{j+1}, S^*) + \alpha_p(S^*, \tilde{S}_{j+1}) +$$
$$+ \alpha_p(S_{j+2}, \tilde{S}_{j+2}) + \ldots + \alpha_p(S_k, \tilde{S}_k) < C + \varepsilon_1 = \alpha_{p,R}(S, \hat{S}) + \varepsilon.$$

Теперь нетрудно проверить, что

$$2 \max\{\alpha_{p,R}(S, S^*), \alpha_{p,R}(S^*, \hat{S})\} < \alpha_{p,R}(S, \hat{S}) + \varepsilon.$$

Следовательно, в силу леммы 1 [10] $(\Sigma_N(X), \alpha_{p,R})$ – пространство с внутренней метрикой.

С помощью леммы 1 [10] нетрудно доказать, что $\Sigma_N^*(X)$ – всюду плотное подмножество пространства $(\Sigma_N(X), \alpha_{p,R})$ при $\operatorname{card} X > 1$. Из этих двух доказанных утверждений и леммы 1 [10] следует теперь справедливость утверждения для пространства $(\Sigma_N(X), \alpha_{p,R})$.

(iv) Доказательство достаточности очевидно, а необходимость является следствием доказанного утверждения (iii) и известной теоремы Хопфа – Ринова и Кон – Фоссена (см. [8, с. 60]). Таким образом, теорема 3 доказана. □

Summary

E.N. Sosov. Metric Space of All N-nets of a Geodesic Space.

In this paper we endow the sets of all N-nets and of all N-nets with repetitions of a geodesic space with metrics. We find the conditions under which these spaces are spaces with intrinsic metrics, proper and geodesic spaces.

Key words: N-net, segment, geodesic space, intrinsic metric, Hausdorff metric, proper space.

Литература

1. *Федорчук В.В., Филиппов В.В.* Топология гиперпространств и ее приложения // Матем. кибернетика. – 1989. – № 4. – С. 1–48.

2. *Куратовский К.* Топология. Т. 1. – М.: Мир, 1966. – 594 с.

3. *Бураго Ю.Д., Громов М.Л., Перельман Г.Д.* Пространства А.Д. Александрова с ограниченными снизу кривизнами // Усп. матем. наук. – 1992. – Т. 47, Вып. 2. – С. 3–51.

4. *Буземан Г.* Геометрия геодезических. – М.: Физматгиз, 1962. – 503 с.

5. *Bridson M.R., Haefliger A.* A. Metric spaces of non- positive curvature. Ser. A / Series of Comprehensive Stadies in Mathematics. – Berlin: Springer-Verlag, 1999. – V. 319. – 643 p.

6. *Bing R.H.* A convex metric with unique segments // Proc. AMS. – 1953. – No 4. – P. 167–174.

7. *Гаркави А.Л.* О наилучшей сети и наилучшем сечении множеств в нормированном пространстве// Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1962. – Т. 26, № 1. – С. 87–106.

8. *Бураго Д.Ю., Бураго Ю.Д., Иванов С.В.* Курс метрической геометрии. - Москва–Ижевск: Ин-т компьют. исслед., 2004. – 496 с.

9. *Foertsch T.* Isometries of spaces of convex compact subsets of $CAT(0)$-spaces. – arXiv:math.MG/0404380 v1. – 2004. 21 Apr.

10. *Sosov E.N.* On Hausdorff intrinsic metric // Lobachevskii J. of Math. – 2001. – V. 8. – P. 185–189.

Поступила в редакцию
10.09.09

Сосов Евгений Николаевич – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры геометрии Казанского государственного университета.

E-mail: *Evgenii.Sosov@ksu.ru*