

КАЗАНСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Д.Ф.Абзалилов

ЛЕКЦИИ
по математике
Часть 3

Казань – 2025

УДК 517

A14

Печатается по решению учебно-методической комиссии
Института математики и механики им. Н. И. Лобачевского.
Протокол № 5 от 10 апреля 2025 г.

Рецензент

к.ф.-м.н, доцент

Абубакиров Н.Р.

Абзалилов Д.Ф. Лекции по математике. Часть 3. – Казань: Казан. ун-т, 2025. – 194 с.

Представляет собой конспект лекций по математике, читаемых автором в 3-м семестре для студентов Химического института им. А. М. Бутлерова.

Соответствует программе курса математики для студентов 2-го курса всех форм обучения по направлениям подготовки 04.03.01 “Химия” и специальности 04.05.01 “Фундаментальная и прикладная химия”. Может быть использовано и студентами других естественно-научных специальностей.

© Казанский университет, 2025

© Абзалилов Д.Ф., 2025

Оглавление

7. Дифференциальные уравнения	6
§43. Обыкновенные дифференциальные уравнения	6
§44. Методы решения дифференциальных уравнений	14
§45. Дифференциальные уравнения высших порядков	20
§46. Уравнения с постоянными коэффициентами	27
§47. Системы дифференциальных уравнений	36
§48. Устойчивость решений и стационарные точки	47
§49. Уравнения в частных производных	55
8. Интегральное исчисление (фнип)	69
§50. Кратные интегралы	69
§51. Замена переменных в кратных интегралах	80
§52. Приложения кратных интегралов	85
§53. Криволинейные интегралы	91
§54. Поверхностные интегралы	104
§55. Элементы теории поля	119
9. Теория вероятностей и математическая статистика	127
§56. Вероятность	128
§57. Теоремы сложения и умножения вероятностей	135
§58. Повторные испытания	139
§59. Дискретные случайные величины	145
§60. Непрерывные случайные величины	152
§61. Системы нескольких случайных величин	163
§62. Математическая статистика. Статистические оценки	172
§63. Проверка статистических гипотез	182

Содержание I части

1. Линейная алгебра

- §1. Матрицы
- §2. Определители
- §3. Системы линейных уравнений
- §4. Обратная матрица
- §5. Ранг. Разрешимость систем линейных уравнений
- §6. Собственные значения и векторы
- §7. Квадратичные формы

2. Векторы и аналитическая геометрия

- §8. Системы координат
- §9. Векторы
- §10. Произведения векторов
- §11. Базис и векторные пространства
- §12. Прямая на плоскости
- §13. Плоскость в пространстве
- §14. Прямая в пространстве
- §15. Кривые второго порядка
- §16. Поверхности второго порядка

3. Дифференциальное исчисление (фоп)

- §17. Числовые последовательности
- §18. Функции одной переменной
- §19. Предел функции
- §20. Производная функции
- §21. Методы нахождения производных. Дифференциалы
- §22. Теоремы о производных
- §23. Исследование функции

Содержание II части

4. Интегральное исчисление (фоп)

- §24. Неопределённый интеграл
- §25. Методы интегрирования
- §26. Интегрирование дробно-рациональных функций
- §27. Интегрирование тригонометрических функций
- §28. Интегрирование иррациональных функций
- §29. Определённый интеграл
- §30. Приложения определённого интеграла

5. Несобственные интегралы, комплексные числа, ряды

- §31. Несобственные интегралы
- §32. Числовые ряды
- §33. Степенные ряды
- §34. Ряды Фурье
- §35. Комплексные числа

6. Дифференциальное исчисление (фнп)

- §36. Функции нескольких переменных
- §37. Полный дифференциал и градиент
- §38. Производная сложной, неявной и параметрической функции
- §39. Производные и дифференциалы высших порядков
- §40. Экстремум функции нескольких переменных
- §41. Условный экстремум. Метод множителей Лагранжа
- §42. Метод наименьших квадратов

Глава 7.

Дифференциальные уравнения

$$\begin{cases} x' = \alpha x - \beta xy, \\ y' = -\gamma y + \delta xy. \end{cases}$$

Я показал это взрослым и

спросил, не страшно ли им.

– Разве уравнения страшные? –
возразили мне.

А это были совсем не уравнения.

Это были хищники, охотившиеся
на жертв.

Лотка и Вольтерра. Маленький
принц.

Динамика огромного количества явлений в нашей жизни описывается дифференциальными уравнениями и системами этих уравнений. Они находят широкое применение при решении разнообразных задач физики, химии, биологии, экономики, социологии и т.д. В этой главе мы познакомимся как с обыкновенными дифференциальными уравнениями, так и с дифференциальными уравнениями в частных производных.

§43. Обыкновенные дифференциальные уравнения

Понятие дифференциального уравнения. Под *уравнением* в математике понимают равенство, в которое входит неизвестная величина. При решении уравнения находят числовое значение этой величины так, чтобы при подстановке этого значения в исходное уравнение получилось

верное равенство. Под *дифференциальным уравнением* понимается некоторое равенство, в которое входит неизвестная функция, а также производные от неё. Заметим, что эта функция может зависеть как от одной, так и нескольких независимых переменных. Эти переменные также могут входить в уравнение. Под *решением* дифференциального уравнения понимается конкретная функция, подстановка которой в уравнение приводит к равенству, верному при любых значениях независимых переменных из области определения этой функции.

Если входящая в уравнение функция является функцией одной переменной, то уравнение называется *обыкновенным дифференциальным уравнением*. Если независимых переменных несколько, то уравнение называется *дифференциальным уравнением в частных производных*. Важнейшей характеристикой любого дифференциального уравнения является его *порядок*, который определяется порядком старшей производной.

Итак, обыкновенное дифференциальное уравнение порядка n в общем виде записывается как $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$. Здесь x – независимая переменная, а $y(x)$ – неизвестная функция. В ряде случаев из общей записи уравнения удаётся выразить старшую производную в явном виде:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}).$$

Если все производные в обыкновенном дифференциальном уравнении заменить на дифференциалы: $y' = \frac{dy}{dx}$, $y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$, $\dots$, $y^{(n)} = \frac{d^ny}{dx^n}$, то получится ещё одна форма записи дифференциального уравнения, называемая записью в дифференциалах.

Приведём несколько примеров дифференциальных уравнений.

- $x^2(y')^2 + y^4 = x^4$ – пример уравнения первого порядка.
- $y'' = y' \cdot \sqrt{x^4 - y^4}$ – уравнение второго порядка, записанное в явном виде.
- $x^2(y')^2 + y^{(4)} = x^4$ – пример уравнения четвёртого порядка.
- $x dy - \sqrt{x^4 - y^4} dx = 0$ – уравнение первого порядка, записанное в дифференциалах.
- $x^2(y(x))^2 + (y(x+1))^4 = x^4$ – пример уравнения, которое не является дифференциальным, т.к. в нём отсутствуют производные и

дифференциалы. Уравнения такого вида называются функциональными.

- $y(x) + \int_0^1 y(t) \cdot \sqrt{x^2 + t^2} dt = x$ – пример интегрального уравнения.

Оно также не относится к дифференциальным уравнениям.

Изучение функциональных, интегральных, а также интегро-дифференциальных уравнений выходит за рамки данного курса.

Дифференциальное уравнение первого порядка. *Обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка* – соотношение, связывающее независимую переменную x , зависящую от неё функцию $y(x)$ и производную $y'(x)$. Общий вид такого уравнения: $F(x, y, y') = 0$. Вид уравнения, в котором выражена производная, называется явным: $y' = f(x, y)$. Также уравнение может быть записано через дифференциалы dx аргумента и dy функции: $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$.

Частным решением $y = \varphi(x)$ уравнения называют функцию, подстановка которой в уравнение превращает его в тождество, верное при всех значениях x из области определения этой функции. *Общим решением* уравнения называют функцию $y = \varphi(x, C)$, зависящую как от переменной x , так и произвольного параметра C . Эта функция является решением уравнения при любых допустимых значениях C . Решения дифференциальных уравнений могут быть записаны в неявном виде: частное решение – в виде $\Phi(x, y) = 0$, а общее – в виде $\Phi(x, y, C) = 0$.¹

Пример 43.1. Решить уравнение $y' = x$.

Требуется найти функцию $y(x)$, производная которой равна x . Множество таких функций хорошо известно и записывается через неопределённый интеграл:

$$y(x) = \int x dx = \frac{x^2}{2} + C.$$

¹Заметим, что кроме общих решений, дифференциальные уравнения могут иметь ещё и *особые решения*, которые не получаются из общего решения ни при каких значениях параметра.

Так выглядит общее решение. Частные решения можно получить, зафиксировав значение произвольной постоянной, например:

$$y_1(x) = \frac{x^2}{2}, \quad y_2(x) = \frac{x^2}{2} + 1, \quad y_3(x) = \frac{x^2}{2} - \sqrt{3}, \quad \dots \quad \#$$

Заметим, что если в неопределённый интеграл произвольная постоянная входит в виде слагаемого, добавляемого к первообразной функции ($y = F(x) + C$), то в общее решение дифференциального уравнения постоянная может входить в другом виде.

Пример 43.2. Решить уравнение $y' = y$.

Требуется найти функцию $y(x)$, производная которой совпадает с самой функцией. Таким свойством обладает экспонента $y(x) = e^x$. Эта функция является частным решением. Общее решение в данном примере можно найти подбором, оно имеет вид $y(x) = Ce^x$. #

Задание. Объясните, почему функция $y(x) = e^x + C$ не является решением данной задачи.

Задача Коши. В реальных задачах обычно требуется найти решение, удовлетворяющее дополнительным условиям, которые называются *начальными*. Для уравнения первого порядка обычно задаётся одно начальное условие, которое используется для нахождения произвольной постоянной в общем решении.

Задача нахождения решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего начальному условию, называется *задачей Коши*:

$$\begin{cases} y' = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$

Имеет место следующая

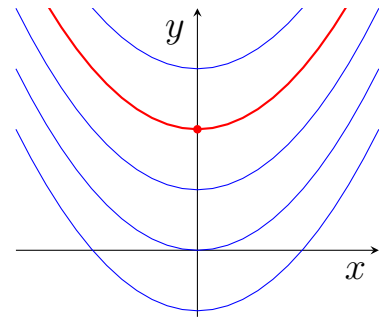
Теорема 43.1 (Теорема Коши). Если в окрестности точки (x_0, y_0) функция $f(x, y)$ и её частная производная f'_y непрерывны, то существует окрестность точки x_0 , в которой решение задачи Коши существует и единственно.

Данную теорему примем без доказательства.

Пример 43.3. Решить задачу Коши
$$\begin{cases} y' = x, \\ y(0) = 2. \end{cases}$$

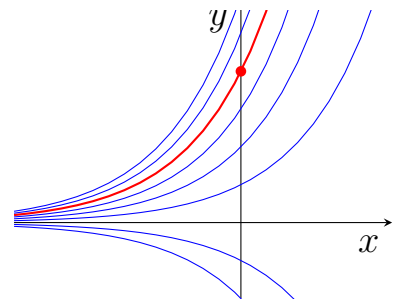
Согласно примеру 43.1, общее решение уравнения имеет вид $y = \frac{x^2}{2} + C$. Подставив это решение в начальное условие, получим $C = 2$. Значит, решение задачи Коши, удовлетворяющее дифференциальному уравнению и начальному условию, имеет вид $y = \frac{x^2}{2} + 2$. #

На рисунке показано семейство кривых, являющихся общим решением $y = \frac{x^2}{2} + C$. Через любую точку плоскости проходит единственная кривая из данного семейства. Начальному условию $y(0) = 2$ соответствует точка $(0, 2)$. Красным цветом показана эта точка и проходящая через неё кривая, являющаяся решением задачи Коши.



Пример 43.4. Решить задачу Коши
$$\begin{cases} y' = y, \\ y(0) = 2. \end{cases}$$

Согласно примеру 43.2, общее решение уравнения имеет вид $y = Ce^x$. Подставив это решение в начальное условие, получим $C = 2$. Значит, решение задачи Коши, удовлетворяющее как дифференциальному уравнению, так и начальному условию, имеет вид $y = 2e^x$. На ри-



сунке синим цветом показано семейство кривых общего решения и красным цветом – кривая, являющаяся решением задачи Коши. #

Пример 43.5. Записать уравнения, общие решения которых имеют вид:

$$A) y = x^3 + Cx^2, \quad B) y = x^3 \cdot \sqrt{x^2 + C}, \quad B) y = \frac{x^3 + C}{x^2 + C}.$$

Для решения данной обратной задачи, т.е. для нахождения дифференциального уравнения по известному общему решению, можно использовать

следующий порядок действий. Вначале, из общего решения $y = \varphi(x, C)$ находится выражение для производной $y' = \psi(x, C)$. Затем, из этих двух соотношений исключается произвольная постоянная.

Так, в пункте А) производная $y' = 3x^2 + 2Cx$. Умножив данное равенство на x и вычтя из него удвоенное исходное, получим уравнение $xy' - 2y = x^3$.

Решение пункта Б) начинаем со взятия производной: $y' = 3x^2\sqrt{x^2 + C} + \frac{x^4}{\sqrt{x^2 + C}}$. Постоянная C находится внутри радикала, который, из записи общего решения, равен $\sqrt{x^2 + C} = \frac{y}{x^3}$. Заменяя радикалы в выражении для производной дробями, получим $y' = 3x^2 \frac{y}{x^3} + \frac{x^4 \cdot x^3}{y} \Rightarrow xy' = 3y^2 + x^8$.

Для решения пункта В) выразим вначале постоянную:

$$yx^2 + Cy = x^3 + C \Rightarrow C = \frac{x^3 - yx^2}{y - 1}.$$

Продифференцировав данное выражение, получим искомое уравнение:

$$\frac{(3x^2 - 2yx - x^2y')(y - 1) - (x^3 - yx^2)y'}{(y - 1)^2} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(x - 1)y' = (y - 1)(3x - 2y). \quad \#$$

Дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными. Дифференциальным уравнением с *разделяющимися переменными* называется уравнение, которое может быть записано в виде

$$y' = f(x) \cdot g(y) \Leftrightarrow P_1(x)P_2(y)dx + Q_1(x)Q_2(y)dy = 0.$$

Для решения этого уравнения используют приём разделения переменных, т.е. уравнение приводят к форме, когда слева от знака равенства присутствует дифференциал dy и функция, зависящая от y , а справа — дифференциал dx и функция от x . Саму производную y' предварительно записывают в виде отношения дифференциалов $y' = \frac{dy}{dx}$. Далее, после разделения переменных, обе части интегрируют и, найдя оба неопределённых интеграла, получают общее решение.

$$\begin{aligned}
y' = f(x) \cdot g(y) &\Rightarrow \frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y) \Rightarrow \frac{dy}{g(y)} = f(x) dx \Rightarrow \\
&\Rightarrow \int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x) dx \Rightarrow G(y) = F(x) + C \Rightarrow y = \varphi(x, C).
\end{aligned}$$

Если общее решение не удаётся разрешить относительно y , то ответ оставляют в неявном виде $G(y) = F(x) + C$.

Пример 43.6. Решить уравнение $y' = -\frac{x}{y}$.

Используем приведённый выше алгоритм:

$$\begin{aligned}
y' = -\frac{x}{y} &\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \Rightarrow y dy = -x dx \Rightarrow \\
&\Rightarrow \int y dy = - \int x dx \Rightarrow y^2 = -x^2 + C \Rightarrow y = \pm \sqrt{C - x^2}.
\end{aligned}$$

Заметим, что общее решение представляет собой семейство окружностей с центром в начале координат. #

Составление дифференциального уравнения.¹ Заметим, что в реальных задачах дифференциальное уравнение не является чем-то данным, его вначале необходимо получить, составив математическую модель изучаемого процесса или явления. Рассмотрим примеры составления дифференциальных уравнений с последующим их решением на конкретных задачах.

Пример 43.7. Численность популяции бактерий, находящихся в благоприятной питательной среде, за 3 часа увеличилась в два раза. Во сколько раз увеличится численность популяции за 7 часов?

В качестве независимой переменной выберем время t , а в качестве искомой функции $x(t)$ – численность популяции. Тогда скорость роста популяции есть $x'(t)$. Логично предположить, что скорость роста бактерий в благоприятной среде пропорциональна их численности. Поэтому уравнение в

¹Данный раздел является факультативным.

данной задаче имеет вид $x' = kx$. Данное уравнение является уравнением с разделяющимися переменными, для решения этого уравнения используем описанный выше алгоритм

$$\frac{dx}{dt} = kx \Rightarrow \frac{dx}{x} = kdt \Rightarrow \ln x = kt + \ln C \Rightarrow x = Ce^{kt}.$$

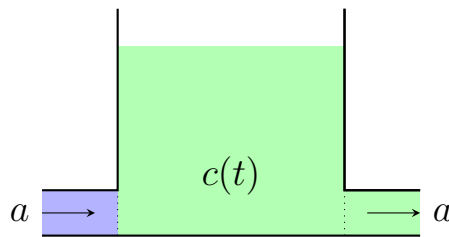
Зависимость численности популяции от времени найдена, эта функция содержит две постоянные: k и C . В условии присутствует начальное условие $x(3) = 2x(0)$. Подставив в него общее решение, получим

$$Ce^{3k} = 2Ce^0 \Rightarrow 3k = \ln 2 \Rightarrow k = \frac{1}{3} \ln 2.$$

Требуется найти отношение

$$\frac{x(7)}{x(0)} = \frac{Ce^{7k}}{Ce^0} = e^{7k} = e^{\frac{7}{3} \ln 2} = 2^{\frac{7}{3}} = 4\sqrt[3]{2} \approx 5.04. \quad \#$$

Пример 43.8. В бассейне объёма v находится водный раствор вещества с начальной концентрацией c_0 . С момента времени $t = 0$ по одной трубе в бассейн начинает поступать чистая вода со скоростью a (литров за ед. времени), жидкости мгновенно перемешиваются, и по другой трубе с той же скоростью смесь сливается. Определить концентрацию $c(t)$ вещества в бассейне в любой момент времени.



Выберем в качестве независимой переменной время t и в качестве функции – концентрацию $c(t)$. Рассмотрим малый промежуток времени $[t, t + \Delta t]$, концентрация вещества в крайние моменты будет $c(t)$ и $c(t + \Delta t)$. Запишем закон сохранения вещества:

$$(v + a\Delta t) \cdot c(t + \Delta t) = v \cdot c(t) \Rightarrow$$

$$v \cdot (c(t + \Delta t) - c(t)) + a\Delta t \cdot c(t + \Delta t) = 0 \Rightarrow$$

$$v \cdot \frac{c(t + \Delta t) - c(t)}{\Delta t} + a \cdot c(t + \Delta t) = 0.$$

Устремим $\Delta t \rightarrow 0$. При этом дробь $\frac{c(t + \Delta t) - c(t)}{\Delta t} \rightarrow c'(t)$. Записав полученное дифференциальное уравнение вместе с начальным условием, получим следующую задачу Коши:

$$\begin{cases} vc' + ac = 0, \\ c(0) = c_0. \end{cases}$$

Уравнение решим методом разделения переменных:

$$v \frac{dc}{dt} = -ac \quad \Rightarrow \quad \frac{dc}{c} = -\frac{adt}{v} \quad \Rightarrow \quad \ln c = -\frac{at}{v} + C.$$

Подставив начальное условие, найдём значение постоянной $C = \ln c_0$, поэтому

$$\ln c = -\frac{at}{v} + \ln c_0 \quad \Rightarrow \quad c(t) = c_0 e^{-\frac{at}{v}}. \quad \#$$

§44. Методы решения дифференциальных уравнений

Однородное дифференциальное уравнение. Введём понятие однородной функции. Функция $P(x, y)$ называется *однородной* степени n , если справедливо равенство

$$P(kx, ky) = k^n P(x, y).$$

Приведём примеры таких функций.

- $x^2 + xy - \frac{y^3}{x - y}$ – однородная функция степени $n = 2$.
- $\frac{1}{x} + \frac{\sqrt{xy}}{x^2 - y^2}$ – однородная функция степени $n = -1$.
- $y \sin \frac{x}{y} - \frac{x^2}{y} e^{1 + \frac{y^2}{x^2}}$ – однородная функция степени $n = 1$. Заметим, что однородная функция может содержать в себе трансцендентные функции, такие как показательная, логарифмическая, тригонометрические и обратные к ним только в том случае, если аргументы

этих функций являются однородными функциями нулевой степени.

Так, данная функция содержит синус и экспоненту с аргументами $\frac{x}{y}$ и $1 + \frac{y^2}{x^2}$ соответственно.

- $x^3 + y^2$ – пример неоднородной функции. Так, первое слагаемое является однородной функцией степени 3, а второе – степени 2. Сумма двух однородных функций разных степеней уже не является однородной функцией.

Дифференциальное уравнение называется *однородным*, если оно может быть записано в виде

$$y' = f(x, y) \quad \Leftrightarrow \quad P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0,$$

где $f(x, y)$ – однородная функция нулевой степени, а $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ – однородные функции одинаковой степени.

Для решения однородного уравнения используется замена $y = u \cdot x$, которая сводит данное уравнение к дифференциальному уравнению с разделяющимися переменными. Заметим, что производная y' в уравнении заменяется на сумму $u'x + u$.

Пример 44.1. Решить уравнение $xy' = y \ln \frac{y}{x}$.

Данное уравнение – однородное, делаем замену $y = ux$, $y' = u'x + u$:

$$x(u'x + u) = xu \ln u \quad \Rightarrow \quad xu' = u \ln u - u.$$

Последнее уравнение решим методом разделения переменных:

$$\begin{aligned} \frac{xdu}{dx} = u \ln u - u &\Rightarrow \frac{du}{u(\ln u - 1)} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{du}{u(\ln u - 1)} = \int \frac{dx}{x} \\ \Rightarrow \int \frac{d(\ln u - 1)}{\ln u - 1} = \ln |x| + \ln C &\Rightarrow \ln |\ln u - 1| = \ln |Cx| \Rightarrow \\ \Rightarrow \ln u - 1 = Cx &\Rightarrow u = e^{1+Cx} \Rightarrow y(x) = xe^{1+Cx}. \quad \# \end{aligned}$$

Линейное дифференциальное уравнение. Уравнение называется *линейным*, если оно может быть записано в виде

$$y' + p(x)y = q(x).$$

Функцию $q(x)$ в дальнейшем будем называть правой частью. Если она равна нулю, уравнение называется *линейным однородным*,¹ если же правая часть ненулевая, то уравнение – *линейное неоднородное*.

Заметим, что любое линейное однородное дифференциальное уравнение можно решить методом разделения переменных:

$$y' + p(x)y = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -p(x)y \Rightarrow \frac{dy}{y} = -p(x)dx \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = - \int p(x) dx \Rightarrow \ln |y| = -P(x) + \ln C \Rightarrow y = Ce^{-P(x)}.$$

Итак, частным решением этого уравнения является функция $v(x) = e^{-P(x)}$, а общее решение получается домножением частного решения на произвольную постоянную: $y(x) = Cv(x)$.

Линейное неоднородное дифференциальное уравнение не может быть решено методом разделения переменных. Для решения этого уравнения можно использовать метод *вариации постоянной*. Его суть состоит в том, что если общее решение соответствующего однородного уравнения имеет вид $y(x) = C \cdot v(x)$, то решение неоднородного уравнения следует искать в виде $y(x) = u(x) \cdot v(x)$. Другим словами, постоянную C , входящую в общее решение линейного однородного уравнения, следует провариировать, т.е. заменить на переменную $u(x)$. После такой замены уравнение для поиска $u(x)$ уже становится уравнением с разделяющимися переменными, оно решается по стандартной схеме. Убедимся в этом, пусть $y = uv$, $y' = u'v + uv'$:

$$y' + py = q \Rightarrow u'v + uv' + puv = q \Rightarrow u'v + u(v' + pv) = q.$$

Выражение, стоящее в скобках равно нулю, т.к. $v(x)$ – решение соответствующего линейного однородного уравнения. Поэтому неоднородное уравнение приобретает вид

$$u'v = q \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{q}{v} \Rightarrow \int du = \int \frac{q}{v} dx \Rightarrow u(x) = Q(x) + C.$$

Перемножив функции $u(x)$ и $v(x)$, получим искомую функцию $y(x)$.

¹Линейные однородные уравнения никак не связаны с однородными дифференциальными уравнениями, рассмотренными ранее.

Пример 44.2. Решить уравнение $xy' - 2y = x^4$.

Вначале решим соответствующее линейное однородное уравнение:

$$xy' - 2y = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x} \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = 2 \int \frac{dx}{x} \Rightarrow y = Cx^2.$$

Далее перейдём к решению исходного неоднородного уравнения. Для этого заменим постоянную C на переменную u , т.е. используем замену $y = ux^2$, $y' = u'x^2 + 2ux$:

$$x(u'x^2 + 2ux) - 2ux^2 = x^4 \Rightarrow u'x^3 = x^4 \Rightarrow u' = x \Rightarrow$$

$$u = \frac{x^2}{2} + C \Rightarrow y(x) = ux^2 = \frac{x^4}{2} + Cx^2. \quad \#$$

Дифференциальное уравнение Бернулли. Уравнение называется дифференциальным уравнением Бернулли, если оно может быть записано в виде

$$y' + p(x)y = q(x)y^n, \quad n \neq 0, \quad n \neq 1.$$

Такие уравнения решаются по той же схеме, что и линейные.

Пример 44.3. Решить уравнение $3xyy' = y^2 + x$.

Данное уравнение является уравнением Бернулли. Действительно, после деления на $3xy$, оно приобретает вид $y' - \frac{y}{3x} = \frac{1}{3y}$. Решим вначале соответствующее однородное уравнение:

$$y' - \frac{y}{3x} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y}{3x} \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{3x} \Rightarrow y = C\sqrt[3]{x}.$$

Далее заменим постоянную C на неизвестную функцию $u(x)$ и подставим $y = u\sqrt[3]{x}$ в исходное уравнение:

$$u'\sqrt[3]{x} + \frac{u}{3\sqrt[3]{x^2}} - \frac{u\sqrt[3]{x}}{3x} = \frac{1}{3u\sqrt[3]{x}} \Rightarrow \frac{du}{dx}\sqrt[3]{x} = \frac{1}{3u\sqrt[3]{x}} \Rightarrow$$

$$\int u \, du = \frac{1}{3} \int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} \Rightarrow u^2 = 2\sqrt[3]{x} + C \Rightarrow u = \pm \sqrt{2\sqrt[3]{x} + C}.$$

Решением исходного уравнения будет $y = u\sqrt[3]{x} = \pm \sqrt{2x + C}\sqrt[3]{x^2}. \quad \#$

Дифференциальное уравнение в полных дифференциалах.
Уравнение

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0 \quad (44.1)$$

называется дифференциальным уравнением в *полных дифференциалах*, если левая часть равенства является полным дифференциалом. Т.е. существует такая функция $u(x, y)$, что $du = Pdx + Qdy$. Если эта функция найдена, то уравнение принимает вид $du = 0$. Общее решение этого уравнения имеет вид $u(x, y) = C$.

В §39 было получено условие, при котором выражение $Pdx + Qdy$ является полным дифференциалом. Для этого требуется выполнение равенства

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}.$$

Именно при выполнении этого условия дифференциальное уравнение (44.1) будет уравнением в полных дифференциалах.

Пример 44.4. Решить уравнение $(6x^2y + 10y^4)y' + 6xy^2 = 1$.

Перейдём к дифференциалам заменой $y' = \frac{dy}{dx}$:

$$(6xy^2 - 1)dx + (6x^2y + 10y^4)dy = 0 \quad \Rightarrow \quad P = 6xy^2 - 1, \quad Q = 6x^2y + 10y^4.$$

Найдём частные производные:

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = 12xy, \quad \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} = 12xy.$$

Условие полного дифференциала выполнено, поэтому исходное уравнение является уравнением в полных дифференциалах. Восстановим функцию u :

$$6xy^2dx - dx + 6x^2ydy + 10y^4dy = 0 \quad \Rightarrow \quad 6xy(ydx + xdy) - dx + 2d(y^5) = 0$$

$$6xy \cdot d(xy) + d(2y^5 - x) = 0 \quad \Rightarrow \quad d(3(xy)^2 + 2y^5 - x) = 0.$$

Значит, решение исходного уравнения имеет вид $3x^2y^2 + 2y^5 - x = C$. #

Заметим, что если выражение $Pdx + Qdy$ было полным дифференциалом, то, после умножения его на некоторую функцию $w(x, y)$, оно может

перестать быть таковым. И наоборот, если выражение $Pdx + Qdy$ не являлось полным дифференциалом, то существует некоторая функция $w(x, y)$, домножение на которую делает выражение $(Pw)dx + (Qw)dy$ полным дифференциалом. Функция w , обладающая таким свойством, называется *интегрирующим множителем*. К сожалению, задача нахождения интегрирующего множителя в общем виде ничуть не легче задачи решения исходного дифференциального уравнения. В то же время, иногда возможно угадать вид интегрирующего множителя.

Пример 44.5. Решить уравнение $(1 + x^2y)dx + (2x^2y + x^3)dy = 0$.

Легко убедиться, что данное уравнение не является уравнением в полных дифференциалах. Попробуем преобразовать левую часть, используя свойства дифференциала:

$$x^2(ydx + xdy) + dx + 2x^2ydy = 0 \Rightarrow x^2d(xy) + dx + x^2d(y^2) = 0.$$

Разделим уравнение на x^2 :

$$\begin{aligned} d(xy) + x^{-2}dx + d(y^2) &= 0 \Rightarrow d(xy) - d(x^{-1}) + d(y^2) = 0 \Rightarrow \\ d\left(xy - \frac{1}{x} + y^2\right) &= 0 \Rightarrow xy - \frac{1}{x} + y^2 = C. \end{aligned}$$

Заметим, что после деления на x^2 правая часть уравнения стала полным дифференциалом, т.е. функция $w = x^{-2}$ является интегрирующим множителем исходного уравнения. #

Задание. Определите, к какому типу относятся следующие дифференциальные уравнения и найдите их общие решения:

1. $xy^2y' + x^3 + y^3 = 0$,
2. $x^3y^2y' + x^2y^3 + 1 = 0$,
3. $x^3(y^2 + 1)y' + x^2y^3 + y^3 = 0$,
4. $x^3y' + x^2y + 1 = 0$,
5. $(x^3y^2 + 1)y' + x^2y^3 = 0$.

Ответы: 1. одн., $y = \sqrt[3]{\frac{C - x^6}{2x^3}}$, 2. Берн., $y = \frac{\sqrt[3]{C - 3x}}{x}$, 3. с разд. пер., $\ln(x^2y^2) = \frac{1}{y^2} + \frac{1}{x^2} + C$, 4. лин., $y = \frac{1}{x^2} + \frac{C}{x}$, 5. в полн. дифф., $x^3y^3 + 3y = C$.

§45. Дифференциальные уравнения высших порядков

Дифференциальное уравнение второго порядка. В уравнение второго порядка, помимо независимой переменной x , функции $y(x)$ и её производной $y'(x)$, входит вторая производная $y''(x)$. Общий вид такого уравнения $F(x, y, y', y'') = 0$. Если уравнение удаётся разрешить относительно старшей производной, то его записывают в виде $y'' = f(x, y, y')$.

Общее решение уравнения второго порядка содержит две произвольные постоянные: $y = \varphi(x, C_1, C_2)$. Это решение может быть записано и в неявном виде: $\Phi(x, y, C_1, C_2) = 0$.

Пример 45.1. Решить уравнения А) $y'' = x$, Б) $y'' = -y$.

Для решения уравнения А) дважды последовательно проинтегрируем исходное равенство:

$$y'' = x \Rightarrow y' = \int x dx = \frac{x^2}{2} + C_1 \Rightarrow y = \frac{x^3}{6} + C_1 x + C_2.$$

Решение уравнения Б) найдём подбором. Легко догадаться, что его частными решениями будут $y_1 = \sin x$ и $y_2 = \cos x$. Общее решение является их линейной комбинацией $y = C_1 \sin x + C_2 \cos x$. #

Задача Коши для дифференциального уравнения второго порядка ставится следующим образом: из двухпараметрического множества решений уравнения найти такую функцию $y(x)$, чтобы она и её производная $y'(x)$ в некоторой точке x_0 принимали заданные значения:

$$\begin{cases} y'' = f(x, y, y'), \\ y(x_0) = y_0, \\ y'(x_0) = p_0. \end{cases}$$

Решение задачи Коши начинается с нахождения общего решения. Затем, используя начальные условия, определяются значения двух постоянных C_1 и C_2 . Справедлива

Теорема 45.1 (Теорема Коши). Если в окрестности точки (x_0, y_0) функция $f(x, y, y')$ и её частные производные по аргументам y и y' непрерывны, то существует окрестность точки x_0 , в которой решение задачи Коши существует и единственно.

Кроме задачи Коши, существуют и другие наборы условий, позволяющие находить произвольные постоянные. Задача нахождения решения, удовлетворяющего начальным условиям, называется *краевой задачей*. Приведём примеры краевых задач, отличных от задачи Коши:

$$\begin{cases} y'' = f(x, y, y'), \\ y(x_0) = y_0, \\ y(x_1) = y_1, \end{cases} \quad \begin{cases} y'' = f(x, y, y'), \\ y(x_0) = y_0, \\ y'(x_1) = p_1, \end{cases} \quad \begin{cases} y'' = f(x, y, y'), \\ y'(x_0) = p_0, \\ y'(x_1) = p_1. \end{cases}$$

Отметим, что для данных краевых задач нет теорем, аналогичных теореме Коши, гарантирующих существование и единственность их решений.

Приведём примеры решений краевых задач.

Пример 45.2. Решить задачи: А) $\begin{cases} y'' = -y, \\ y(0) = 1, \\ y'(0) = 2, \end{cases}$ Б) $\begin{cases} y'' = -y, \\ y(0) = 1, \\ y(\pi/4) = \sqrt{2}. \end{cases}$

Задача А) является задачей Коши. Общее решение уравнения было найдено в предыдущем примере, оно имело вид $y = C_1 \sin x + C_2 \cos x$. Из начальных условий следует $C_2 = 1$ и $C_1 = 2$. Поэтому решение задачи имеет вид $y = 2 \sin x + \cos x$.

Краевая задача Б) не является задачей Коши. Подстановка начальных условий в общее решение $y = C_1 \sin x + C_2 \cos x$ приводит к равенствам $C_2 = 1$, $C_1 + C_2 = 2$, откуда $C_1 = 1$. Запишем решение: $y = \sin x + \cos x$.

Задание. Измените последнее условие в задаче Б) так, чтобы

- краевая задача не имела решений,
- краевая задача имела бесконечное множество решений.

Дифференциальное уравнение второго порядка, в котором отсутствует функция y . Если дифференциальное уравнение имеет вид $y'' = f(x, y')$, т.е. в нём отсутствует искомая функция, то такое уравнение можно привести к уравнению первого порядка заменой $y'(x) = p(x)$. Действительно, тогда $y''(x) = p'(x)$, и уравнение принимает вид

$$y'' = f(x, y') \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} y' = p(x) \\ y'' = p'(x) \end{array} \right\} \Rightarrow p' = f(x, p).$$

Пример 45.3. Решить уравнение $xy'' + y' = 2x$.

В данном уравнении второго порядка отсутствует y , поэтому заменой $y' = p(x)$ приведём его к уравнению первого порядка $xp' + p = 2x$. Это уравнение является однородным и решается заменой $p = ux$.

$$\begin{aligned} xp' + p = 2x &\Rightarrow x(u + xu') + ux = 2x \Rightarrow x \frac{du}{dx} = 2 - 2u \Rightarrow \\ \frac{du}{u-1} = -2 \frac{dx}{x} &\Rightarrow \ln |u-1| = -2 \ln |x| + \ln C_1 \Rightarrow u-1 = \frac{C_1}{x^2} \Rightarrow \\ p = x + \frac{C_1}{x} &\Rightarrow y' = x + \frac{C_1}{x} \Rightarrow y = \frac{x^2}{2} + C_1 \ln |x| + C_2. \quad \# \end{aligned}$$

Дифференциальное уравнение второго порядка, в котором отсутствует независимая переменная x . Если дифференциальное уравнение имеет вид $y'' = f(y, y')$, т.е. в нём отсутствует независимая переменная, то такое уравнение можно привести к уравнению первого порядка заменой $y'(x) = p(y)$. Действительно, тогда, по формуле производной сложной функции, $y''(x) = p'(y) \cdot y'(x) = p' \cdot p$, и уравнение принимает вид

$$y'' = f(y, y') \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} y' = p(y) \\ y'' = p' \cdot p \end{array} \right\} \Rightarrow p'p = f(y, p).$$

Пример 45.4. Решить уравнение $yy'' = (y')^2$.

В данном уравнении второго порядка отсутствует x , поэтому заменой $y' = p(y)$ приведём его к уравнению первого порядка $yp'p = p^2$. Это уравнение является уравнением с разделяющимися переменными.

$$yp'p = p^2 \Rightarrow y \frac{dp}{dy} = p \Rightarrow \frac{dp}{p} = \frac{dy}{y} \Rightarrow p = C_1 y.$$

Заметим, что в результате преобразований мы поделили на p , поэтому отдельно нужно рассмотреть случай $p = 0$. Но, конкретно в этом примере, вариант $p = 0$ уже входит в общее решение $p = C_1 y$ при $C_1 = 0$. Далее перейдём к нахождению функции $y(x)$:

$$y' = C_1 y \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = C_1 y \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{y} = C_1 dx \quad \Rightarrow \quad \ln |y| = C_1 x + \ln C_2.$$

В итоге получим $y(x) = C_2 e^{C_1 x}$.

#

Дифференциальные уравнения высших порядков. Дифференциальное уравнение порядка n имеет общий вид $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$. Если уравнение удаётся разрешить относительно старшей производной, то его записывают в явном виде $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$.

Порядок уравнения также определяет число произвольных постоянных в общем решении, в явном виде такое решение записывается как $y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$. В краевых задачах к дифференциальному уравнению добавляются начальные условия, их число обычно совпадает с порядком уравнения. Так, задача Коши, являющаяся частным случаем краевой задачи, имеет вид:

$$\begin{cases} y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}), \\ y(x_0) = y_0, \\ y'(x_0) = p_0, \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = w_0. \end{cases}$$

Пример 45.5. Решить задачу Коши: $y^{IV} = \sin x + 1$, $y(0) = 1$, $y'(0) = y''(0) = y'''(0) = 0$.

Решение этой задачи будет состоять в последовательном интегрировании правой части. После каждого интегрирования сразу будем определять произвольную постоянную из соответствующего начального условия.

$$y''' = \int (\sin x + 1) dx = -\cos x + x + C_1 = \{y'''(0) = 0\} = -\cos x + x + 1.$$

$$y'' = -\sin x + \frac{x^2}{2} + x + C_2 = \{y''(0)=0\} = -\sin x + \frac{x^2}{2} + x.$$

$$y' = \cos x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + C_3 = \{y'(0)=0\} = \cos x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} - 1.$$

$$y = \sin x + \frac{x^4}{24} + \frac{x^3}{6} - x + C_4 = \{y(0)=1\} = \sin x + \frac{x^4}{24} + \frac{x^3}{6} - x + 1. \quad \#$$

Пример 45.6. Решить уравнение $y''' = \sqrt{1 - (y'')^2}$.

В данном уравнении отсутствует функция y и её первая производная y' . Поэтому это уравнение третьего порядка может быть сведено к уравнению первого порядка заменой $y'' = p(x)$, при этом $y''' = p'$. Получим

$$p' = \sqrt{1 - p^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{dp}{\sqrt{1 - p^2}} = dx \quad \Rightarrow \quad \arcsin p = x + C_1 \quad \Rightarrow$$

$$p = \sin(x + C_1) \quad \Rightarrow \quad y'' = \sin(x + C_1) \quad \Rightarrow \quad y' = -\cos(x + C_1) + C_2.$$

Проинтегрировав, запишем ответ $y = -\sin(x + C_1) + C_2x + C_3$. #

Линейные дифференциальные уравнения высших порядков.

Дифференциальное уравнение порядка n называется *линейным*, если оно может быть представлено в виде

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x) \cdot y^{(n-1)} + \dots + p_1(x) \cdot y' + p_0(x) \cdot y = q(x).$$

Если правая часть отлична от нуля, то уравнение называется *линейным неоднородным*. Если же $q(x) = 0$, то уравнение – *линейное однородное*. Если все функции $p_k(x)$ являются постоянными, т.е. независимая переменная x присутствует в уравнении только в составе функции $q(x)$, то уравнение называется *линейным с постоянными коэффициентами*. Приведём примеры линейных уравнений:

- $x^3 \cdot y''' - \sqrt{1 + x^2} \cdot y'' + e^{-x^2} \cdot y = \ln x$ – линейное неоднородное,
- $y''' + \operatorname{tg} x \cdot y' + x^3 y = 0$ – линейное однородное,
- $5y''' + 3y'' - 2y' + 9y = \cos x$ – линейное неоднородное уравнение с постоянными коэффициентами.

Теорема 45.2 (Теорема о решении линейного однородного уравнения). Если $y_1(x), y_2(x), \dots, y_k(x)$ – частные решения линейного однородного уравнения, то их линейная комбинация $y(x) = C_1 \cdot y_1(x) + C_2 \cdot y_2(x) + \dots + C_k \cdot y_k(x)$ тоже будет решением данного уравнения.

◀ Доказательство этой теоремы не представляет сложностей. Для этого, подставив в уравнение линейную комбинацию, получим равенство

$$C_1(y_1^{(n)} + p_{n-1}(x)y_1^{(n-1)} + \dots + p_1(x)y_1' + p_0(x)y_1) + \dots +$$

$$C_k(y_k^{(n)} + p_{n-1}(x)y_k^{(n-1)} + \dots + p_1(x)y_k' + p_0(x)y_k) = 0.$$

Надо доказать, что это равенство является тождеством. Заметим, что если y_1 – решение, то сумма, стоящая в скобках при множителе C_1 , равна нулю. Аналогично, из условий, что $y_2(x), \dots, y_k(x)$ – решения, следует, что выражения, стоящие в скобках при множителях $C_2, \dots, C_k$, также равны нулю. Поэтому равенство действительно является тождеством. ▶

Множество частных решений $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ называется *фундаментальной системой решений* линейного дифференциального уравнения, если, во-первых, число решений совпадает с порядком уравнения и, во-вторых, множество решений являются линейно независимым.

Следствие 45.2.1 (Вид общего решения линейного однородного уравнения). Если $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ – фундаментальная система решений линейного однородного уравнения, то общее решение этого уравнения имеет вид

$$y_0(x) = C_1 \cdot y_1(x) + C_2 \cdot y_2(x) + \dots + C_n \cdot y_n(x).$$

Теорема 45.3 (Теорема о решении линейного неоднородного уравнения). Если $\tilde{y}(x)$ – решение линейного неоднородного уравнения, а $y_0(x)$ – решение соответствующего линейного однородного уравнения, то сумма $\tilde{y}(x) + y_0(x)$ будет решением линейного неоднородного уравнения.

Задание. Докажите данную теорему, подставив сумму $\tilde{y} + y_0$ в уравнение.

Следствие 45.3.1 (Вид общего решения линейного неоднородного уравнения). Если $\tilde{y}(x)$ – частное решение линейного неоднородного уравнения, а $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ – фундаментальная система решений соответствующего линейного однородного уравнения, то общее решение линейного неоднородного уравнения имеет вид

$$y(x) = \tilde{y}(x) + C_1 \cdot y_1(x) + C_2 \cdot y_2(x) + \dots + C_n \cdot y_n(x) = \tilde{y}(x) + y_0(x).$$

Пример 45.7. Решить уравнение $x^3 y''' + 4x^2 y'' - 2xy' - 4y = 0$.

Частные решения этого линейного однородного уравнения будем искать в виде степенной функции $y = x^k$. Подставив её в уравнение, получим

$$k(k-1)(k-2)x^k + 4k(k-1)x^k - 2kx^k - 4x^k = 0 \Rightarrow$$

$$(k^3 - 3k^2 + 2k + 4k^2 - 4k - 2k - 4)x^k = 0 \Rightarrow$$

$$k^3 + k^2 - 4k - 4 = (k+1)(k^2 - 4) = 0.$$

Уравнение имеет три корня: $k_1 = -1$, $k_2 = 2$, $k_3 = -2$. Каждому корню соответствует своё частное решение: $y_1 = \frac{1}{x}$, $y_2 = x^2$, $y_3 = \frac{1}{x^2}$. Решения линейно независимы, их число равно порядку уравнения, поэтому общее решение уравнения имеет вид $y = \frac{C_1}{x} + C_2 x^2 + \frac{C_3}{x^2}$. #

Пример 45.8. Решить уравнение $x^3 y''' + 4x^2 y'' - 2xy' - 4y = 21x^5$.

Данное уравнение является линейным неоднородным. Общее решение соответствующего однородного уравнения было найдено в прошлом примере. Для решения исходного неоднородного уравнения осталось найти его частное решение. Будем искать его в виде $\tilde{y} = Ax^5$. Для нахождения значения постоянной A , подставим функцию в уравнение:

$$60Ax^5 + 80Ax^5 - 10Ax^5 - 4Ax^5 = 21x^5 \Rightarrow A = \frac{1}{6}.$$

Значит, общим решением уравнения будет: $y = \frac{x^5}{6} + \frac{C_1}{x} + C_2 x^2 + \frac{C_3}{x^2}$. #

§46. Уравнения с постоянными коэффициентами

Определение дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами. Дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами называется уравнение, которое представимо в виде

$$y^{(n)} + p_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + p_1y' + p_0y = q(x), \quad (46.1)$$

где $p_0, p_1, \dots, p_{n-1}$ – постоянные величины. Как и линейные уравнения, уравнения с постоянными коэффициентами разделяются на однородные ($q(x) = 0$) и неоднородные ($q(x) \neq 0$).

Решение однородного уравнения сводится к поиску фундаментальной системы решений $y_1(x), \dots, y_n(x)$. После нахождения входящих в систему функций, согласно следствию 45.2.1, общее решение записывается в виде

$$y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + \dots + C_ny_n(x).$$

Решение неоднородного уравнения сводится к поиску частного решения $\tilde{y}(x)$ неоднородного уравнения и общего решения $y_0(x)$ соответствующего однородного. Согласно следствию 45.3.1, общее решение имеет вид

$$y(x) = \tilde{y}(x) + y_0(x).$$

Далее в этом параграфе будут рассмотрены способы нахождения фундаментальной системы решений однородных уравнений и частных решений неоднородных.

Однородные уравнения первого и второго порядка с постоянными коэффициентами. Однородное уравнение первого порядка с постоянными коэффициентами имеет вид $y' + py = 0$. Для того, чтобы записать его общее решение, требуется найти одно частное решение. Его поиск сложностей не представляет, используем метод разделения переменных:

$$\frac{dy}{dx} = -py \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{y} = -pdx \quad \Rightarrow \quad \ln y = -px \quad \Rightarrow \quad y_1 = e^{-px}.$$

Перейдём к уравнению второго порядка с постоянными коэффициентами, оно имеет вид

$$y'' + py' + qy = 0.$$

Фундаментальная система решений образована двумя его частными решениями. Т.к. решение уравнения первого порядка имело вид экспоненты, частные решения уравнения второго порядка также попробуем найти в виде $y = e^{\lambda x}$. Подставив её в исходное уравнение, получим

$$e^{\lambda x}(\lambda^2 + p\lambda + q) = 0.$$

Квадратное уравнение $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ называется *характеристическим уравнением*, число его корней зависит от дискриминанта $D = p^2 - 4q$.

- $D > 0$. В этом случае характеристическое уравнение имеет два различных вещественных корня $\lambda_1 = \alpha_1$ и $\lambda_2 = \alpha_2$, каждому корню соответствует своё частное решение: $y_1 = e^{\alpha_1 x}$ и $y_2 = e^{\alpha_2 x}$. Общее решение исходного уравнения имеет вид $y = C_1 e^{\alpha_1 x} + C_2 e^{\alpha_2 x}$.
- $D = 0$. В этом случае характеристическое уравнение имеет один корень кратности 2, т.е. $\lambda_1 = \lambda_2 = \alpha$. Одного частного решения $y_1 = e^{\alpha x}$ для записи общего решения недостаточно. Поэтому, для поиска общего решения, используем метод вариации постоянной. Т.к. $y = C e^{\alpha x}$ является частным решением, общее решение будем искать в виде $y = u(x)e^{\alpha x}$, $y' = (u' + \alpha u)e^{\alpha x}$, $y'' = (u'' + 2\alpha u' + \alpha^2 u)e^{\alpha x}$. Подставив данные выражения в уравнение, получим

$$(u'' + (2\alpha + p)u' + (\alpha^2 + p\alpha + q)u)e^{\alpha x} = 0.$$

Скобка $\alpha^2 + p\alpha + q$ равна нулю, т.к. α – корень характеристического уравнения. Выражение $2\alpha + p$ также равно нулю, т.к. корень характеристического уравнения $\alpha = -p/2$.

Следовательно, уравнение принимает вид $u'' = 0$. Его решение $u = C_1 + C_2 x$. Общее решение исходного уравнения имеет вид $y = (C_1 + C_2 x)e^{\alpha x}$. Оно является линейной комбинацией частных решений $y_1 = e^{\alpha x}$ и $y_2 = x e^{\alpha x}$.

- $D < 0$. В этом случае характеристическое уравнение вещественных корней не имеет, но есть два комплексно-сопряжённых корня $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ и $\lambda_2 = \alpha - i\beta$. Им соответствуют комплексные частные решения $y_1 = e^{(\alpha+i\beta)x}$, $y_2 = e^{(\alpha-i\beta)x}$. Общее решение имеет вид $y = C_1 e^{(\alpha+i\beta)x} + C_2 e^{(\alpha-i\beta)x}$, в нём присутствует мнимая единица. Обычно в задачах требуется найти только вещественные решения, поэтому займёмся определением вида именно такого общего решения. Используя формулу Эйлера, запишем

$$y = e^{\alpha x} (C_1 e^{i\beta x} + C_2 e^{-i\beta x}) = e^{\alpha x} \left(C_1 (\cos \beta x + i \sin \beta x) + C_2 (\cos \beta x - i \sin \beta x) \right) = e^{\alpha x} \left((C_1 + C_2) \cos \beta x + i(C_1 - C_2) \sin \beta x \right).$$

Т.к. $C_1 + C_2$ и $i(C_1 - C_2)$ являются постоянными, переобозначим их в записи общего решения: $y = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$. Итак, решение записано в виде линейной комбинации вещественных частных решений $y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x$ и $y_2 = e^{\alpha x} \sin \beta x$.

Подведём итог. Общее решение уравнения с постоянными второго порядка имеет вид $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$, где вид частных решений y_1 , y_2 зависит от вида корней характеристического уравнения. Так, если характеристическое уравнение имеет

- два различных вещественных корня α_1 и α_2 , то $y_1 = e^{\alpha_1 x}$, $y_2 = e^{\alpha_2 x}$,
- один корень α кратности 2, то $y_1 = e^{\alpha x}$, $y_2 = x e^{\alpha x}$,
- два комплексно-сопряжённых корня $\alpha \pm i\beta$, то $y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x$, $y_2 = e^{\alpha x} \sin \beta x$.

Пример 46.1. Решить уравнения: А) $y'' - 4y' + 3y = 0$, Б) $y'' - 4y' + 4y = 0$, В) $y'' - 4y' + 13y = 0$.

Запишем характеристическое уравнение пункта А): $\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$. Оно имеет корни $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$. Поэтому

$$y_1 = e^x, \quad y_2 = e^{3x} \quad \Rightarrow \quad y = C_1 e^x + C_2 e^{3x}.$$

Запишем характеристическое уравнение пункта Б): $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$. Оно имеет один кратный корень $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$. Поэтому

$$y_1 = e^{2x}, \quad y_2 = x e^{2x} \quad \Rightarrow \quad y = e^{2x} (C_1 + C_2 x).$$

Характеристическое уравнение пункта В) имеет вид: $\lambda^2 - 4\lambda + 13 = 0$. Дискриминант $D = -36 = (6i)^2$. Комплексно-сопряжённые корни $\lambda_1 = 2 + 3i$, $\lambda_2 = 2 - 3i$. Поэтому

$$y_1 = e^{2x} \cos 3x, \quad y_2 = e^{2x} \sin 3x \quad \Rightarrow \quad y = e^{2x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x). \quad \#$$

Однородные уравнения порядка n с постоянными коэффициентами. Рассмотрим уравнение

$$y^{(n)} + p_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + p_1y' + p_0y = 0.$$

Его решение проходит по схеме, аналогичной решению уравнения второго порядка. Вначале записывается характеристическое уравнение

$$\lambda^n + p_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + p_1\lambda + p_0 = 0.$$

По основной теореме алгебры оно имеет ровно n корней. Каждому корню λ_k характеристического уравнения ставится в соответствие одно частное решение $y_k(x)$. Для этого используются следующие правила:

- $\lambda_1 = \alpha$ – вещественный некрatный корень. Частное решение в этом случае $y_1 = e^{\alpha x}$.
- $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_m = \alpha$ – вещественный корень кратности m . Частные решения в этом случае $y_1 = e^{\alpha x}$, $y_2 = xe^{\alpha x}$, $\dots$, $y_m = x^{m-1}e^{\alpha x}$.
- $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ – пара некрatных комплексно-сопряжённых корней. Частные решения: $y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x = \operatorname{Re}(e^{(\alpha+i\beta)x})$, $y_2 = e^{\alpha x} \sin \beta x = \operatorname{Im}(e^{(\alpha+i\beta)x})$.
- $\lambda_1 = \lambda_3 = \dots = \lambda_{2m-1} = \alpha + i\beta$, $\lambda_2 = \lambda_4 = \dots = \lambda_{2m} = \alpha - i\beta$ – пара комплексно-сопряжённых корней кратности m . Частные решения $y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x$, $y_2 = e^{\alpha x} \sin \beta x$, $\dots$, $y_{2m-1} = x^{m-1}e^{\alpha x} \cos \beta x$, $y_{2m} = x^{m-1}e^{\alpha x} \sin \beta x$.

Общее решение исходного уравнения записывается в виде линейной комбинации найденных n различных функций.

Пример 46.2. Решить уравнение $y^{\text{IV}} - y = 0$.

Характеристическое уравнение $\lambda^4 - 1 = (\lambda^2 - 1)(\lambda^2 + 1) = 0$. Записываем его корни и каждому корню ставим в соответствие частное решение:

$$\begin{array}{ll} \lambda_1 = 1, & y_1 = e^x, \\ \lambda_2 = -1, & y_2 = e^{-x}, \\ \lambda_3 = i, & y_3 = \cos x, \\ \lambda_4 = -i & y_4 = \sin x. \end{array} \Rightarrow$$

Общее решение – линейная комбинация частных:

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x. \quad \#$$

Пример 46.3. Решить уравнение $y''' + 3y'' + 3y' + y = 0$.

Характеристическое уравнение $\lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1 = (\lambda + 1)^3 = 0$. Оно имеет один корень кратности 3:

$$\begin{array}{ll} \lambda_1 = -1, & y_1 = e^{-x}, \\ \lambda_2 = -1, & y_2 = x e^{-x}, \\ \lambda_3 = -1 & y_3 = x^2 e^{-x}. \end{array} \Rightarrow$$

Решение имеет вид $y = e^{-x}(C_1 + C_2 x + C_3 x^2)$. #

Пример 46.4. Решить уравнение $y^{IV} + 2y'' + y = 0$.

Характеристическое уравнение $\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = (\lambda^2 + 1)^2 = 0$ имеет кратные комплексные корни:

$$\begin{array}{ll} \lambda_1 = i, & y_1 = \cos x, \\ \lambda_2 = -i, & y_2 = \sin x, \\ \lambda_3 = i, & y_3 = x \cos x, \\ \lambda_4 = -i & y_4 = x \sin x. \end{array} \Rightarrow$$

Решение имеет вид $y = (C_1 + C_2 x) \cos x + (C_3 + C_4 x) \sin x$. #

Неоднородное уравнение с постоянными коэффициентами с правой частью специального вида. В случае, когда правая часть $q(x)$ уравнения (46.1) отлична от нуля, для нахождения общего решения следует также найти частное решение $\tilde{y}(x)$. Для некоторых видов правых частей это можно сделать методом неопределённых коэффициентов. Данные виды правых частей будем называть *специальными*. К ним относятся:

- $q(x) = P_m(x) = a_mx^m + a_{m-1}x^{m-1} + \dots + a_1x + a_0$ – многочлен степени m . Тогда частное решение следует искать в виде

$$\tilde{y} = x^r Q_m(x) = x^r (b_mx^m + b_{m-1}x^{m-1} + \dots + b_1x + b_0),$$

где r – кратность корня $\lambda = 0$ характеристического уравнения.

- $q(x) = e^{\alpha x} P_m(x)$ – произведение экспоненты и многочлена степени m . Тогда частное решение следует искать в виде

$$\tilde{y} = x^r e^{\alpha x} Q_m(x),$$

где r – кратность корня $\lambda = \alpha$ характеристического уравнения.

- $q(x) = P_m(x) \cos \beta x + Q_m(x) \sin \beta x$ – сумма произведений тригонометрических функций и многочленов, m – их наивысшая степень. Частное решение следует искать в виде

$$\tilde{y} = x^r [M_m(x) \cos \beta x + N_m(x) \sin \beta x],$$

где r – кратность корня $\lambda = i\beta$ характеристического уравнения.

- $q(x) = e^{\alpha x} [P_m(x) \cos \beta x + Q_m(x) \sin \beta x]$. Частное решение следует искать в виде

$$\tilde{y} = x^r e^{\alpha x} [M_m(x) \cos \beta x + N_m(x) \sin \beta x],$$

где r – кратность корня $\lambda = \alpha + i\beta$ характеристического уравнения.

Если правую часть можно представить в виде суммы нескольких слагаемых, каждое из которых имеет специальный вид, то частное решение также следует искать в виде суммы соответствующих частных решений. Так, если $q(x) = x + e^{3x} + \sin 2x$, то частное решение следует искать в виде $\tilde{y} = x^{r_1}(Ax + B) + x^{r_2}Ce^{3x} + x^{r_3}(D \cos 2x + E \sin 2x)$, где r_1, r_2, r_3 – кратности корней $\lambda = 0$, $\lambda = 3$, $\lambda = 2i$ соответственно.

Пример 46.5. Решить уравнение $y''' - 2y'' = x - 4$.

Характеристическое уравнение $\lambda^3 - 2\lambda^2 = \lambda^2(\lambda - 2) = 0$. Находим его корни и частные решения однородного уравнения:

$$\begin{array}{ll} \lambda_1 = 0, & y_1 = 1, \\ \lambda_2 = 0, & \Rightarrow y_2 = x, \\ \lambda_3 = 2 & y_3 = e^{2x}. \end{array}$$

Значит, общее решение однородного уравнения имеет вид $y_0 = C_1 + C_2x + C_3e^{2x}$. Перейдём к поиску частного решения неоднородного уравнения. Т.к. $q(x) = x - 4$ — многочлен первой степени, то частное решение ищем в виде $\tilde{y} = x^r(Ax + B)$. Здесь $r = 2$ — кратность корня $\lambda = 0$ в характеристическом уравнении, поэтому $\tilde{y} = x^2(Ax + B) = Ax^3 + Bx^2$. Производные

$$\tilde{y}' = 3Ax^2 + 2Bx, \quad \tilde{y}'' = 6Ax + 2B, \quad \tilde{y}''' = 6A.$$

Подставим их в исходное уравнение:

$$6A - 2(6Ax + 2B) = x - 4 \quad \Rightarrow \quad -12Ax + (6A - 4B) = x - 4.$$

Приравняв коэффициенты при степенях x , получим систему

$$\begin{cases} -12A = 1, \\ 6A - 4B = -4 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} A = -\frac{1}{12}, \\ B = \frac{7}{8}. \end{cases}$$

Значит, $\tilde{y} = -\frac{x^3}{12} + \frac{7x^2}{8}$. Сложив его с общим решением $y_0(x)$ однородного уравнения, запишем ответ $y = C_1 + C_2x + C_3e^{2x} - \frac{x^3}{12} + \frac{7x^2}{8}$. #

Пример 46.6. Решить уравнение $y''' - 2y'' = xe^{2x}$.

Этот пример отличается от предыдущего только правой частью, поэтому общее решение однородного уравнения здесь такое же. Отличие только в виде частного решения неоднородного уравнения. Т.к. $q(x) = xe^{2x}$ и корень $\lambda = 2$ кратности $r = 1$, то $\tilde{y} = x(Ax + B)e^{2x} = (Ax^2 + Bx)e^{2x}$. Заметим, что хотя в стоящем в $q(x)$ при экспоненте многочлене ($P(x) = x$) отсутствует слагаемое при нулевой степени, в многочлен $Q(x)$ это слагаемое в следует включить. Производные

$$\begin{aligned} \tilde{y}' &= (2Ax^2 + (2A+2B)x + B)e^{2x}, \\ \tilde{y}'' &= (4Ax^2 + (8A+4B)x + 2A + 4B)e^{2x}, \\ \tilde{y}''' &= (8Ax^2 + (24A+8B)x + 12A + 12B)e^{2x}. \end{aligned}$$

Подстановка в исходное уравнение приводит к равенству

$$(8Ax + 8A + 4B)e^{2x} = xe^{2x} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 8A = 1, \\ 8A + 4B = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} A = \frac{1}{8}, \\ B = -\frac{1}{4}. \end{cases}$$

Ответом будет функция $y = C_1 + C_2x + \left(C_3 + \frac{x^2}{8} - \frac{x}{4}\right)e^{2x}$. #

Пример 46.7. Решить уравнение $y'' - 4y' + 13y = 40 \cos 3x$.

Найдём частные решения однородного уравнения:

$$\lambda^2 - 4\lambda + 13 = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \lambda_1 &= 2 + 3i, \\ \lambda_2 &= 2 - 3i \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} y_1 &= e^{2x} \cos 3x, \\ y_2 &= e^{2x} \sin 3x. \end{aligned}$$

Общее решение однородного $y_0 = e^{2x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)$. Т.к. $q(x) = 40 \cos x$, частное решение неоднородного ищем в виде $\tilde{y} = A \cos 3x + B \sin 3x$. Заметим, что хотя в $q(x)$ отсутствует функция $\sin 3x$, данную функцию в $\tilde{y}$ следует включить. Также отметим, что $r = 0$, т.к. $\lambda = 3i$ не является корнем характеристического уравнения. Производные

$$\begin{aligned} \tilde{y}' &= -3A \sin 3x + 3B \cos 3x, \\ \tilde{y}'' &= -9A \cos 3x - 9B \sin 3x. \end{aligned}$$

Подставим их в исходное уравнение:

$$\cos 3x(-9A - 12B + 13A) + \sin 3x(-9B + 12A + 13B) = 40 \cos 3x.$$

$$\begin{cases} 4A - 12B = 40, \\ 12A + 4B = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} A = 1, \\ B = -3. \end{cases}$$

Запишем ответ: $y = e^{2x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x) + \cos 3x - 3 \sin 3x$. #

Неоднородное уравнение с постоянными коэффициентами с правой частью произвольного вида.¹ Если правая часть неоднородного уравнения имеет вид, отличный от рассмотренных ранее, для нахождения частного решения можно использовать метод вариации постоянных. Так, если соответствующее однородное уравнение имеет решение

$$y_0(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \dots + C_n y_n(x),$$

то решение неоднородного уравнения ищут в виде

$$y(x) = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x) + \dots + u_n(x)y_n(x).$$

¹Данный раздел является факультативным.

Функции $u_k(x)$ находят из системы:

$$\begin{cases} u_1' y_1 + u_2' y_2 + \dots + u_n' y_n = 0, \\ u_1' y_1' + u_2' y_2' + \dots + u_n' y_n' = 0, \\ \dots \\ u_1' y_1^{(n-1)} + u_2' y_2^{(n-1)} + \dots + u_n' y_n^{(n-1)} = q(x). \end{cases}$$

Пример 46.8. Решить уравнение $y'' - y = \frac{2e^x}{e^x - 1}$.

Найдём общее решение однородного уравнения:

$$\lambda^2 - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \pm 1 \quad \Rightarrow \quad y_0(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x}.$$

Поэтому $y(x) = u_1(x)e^x + u_2(x)e^{-x}$. Для нахождения u_1 и u_2 составим систему

$$\begin{aligned} \begin{cases} u_1' e^x + u_2' e^{-x} = 0, \\ u_1' e^x - u_2' e^{-x} = \frac{2e^x}{e^x - 1} \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} u_1' e^x = \frac{e^x}{e^x - 1}, \\ u_2' e^{-x} = -\frac{e^x}{e^x - 1} \end{cases} \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{cases} u_1' = \frac{1}{e^x - 1}, \\ u_2' = -\frac{e^{2x}}{e^x - 1} \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} u_1 = \int \frac{dx}{e^x - 1}, \\ u_2 = -\int \frac{e^{2x} dx}{e^x - 1}. \end{cases} \end{aligned}$$

Оба этих интеграла вычислим заменой $t = e^x$, $dx = \frac{dt}{t}$.

$$u_1(x) = \int \frac{dx}{e^x - 1} = \int \frac{dt}{t(t-1)} = \int \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t} \right) dt =$$

$$= \ln |t-1| - \ln t = \ln |e^x - 1| - x + C_1.$$

$$u_2(x) = -\int \frac{e^{2x} dx}{e^x - 1} = -\int \frac{t}{t-1} dt = -\int \left(1 + \frac{1}{t-1} \right) dt =$$

$$= -t - \ln |t-1| = -e^x - \ln |e^x - 1| + C_2.$$

Запишем ответ

$$y(x) = \left[\ln |e^x - 1| - x + C_1 \right] e^x + \left[-e^x - \ln |e^x - 1| + C_2 \right] e^{-x} =$$

$$= C_1 e^x + C_2 e^{-x} + (e^x - e^{-x}) \ln |e^x - 1| - x e^x - 1.$$

#

§47. Системы дифференциальных уравнений

Система уравнений первого порядка. *Системой дифференциальных уравнений* первого порядка называется совокупность дифференциальных уравнений, каждое из которых содержит независимую переменную t^1 , зависящие от неё функции $x_1(t)$, $x_2(t)$, $\dots$, $x_n(t)$ и их производные:²

$$\begin{cases} F_1(t, x_1, x'_1, x_2, x'_2, \dots, x_n, x'_n) = 0, \\ F_2(t, x_1, x'_1, x_2, x'_2, \dots, x_n, x'_n) = 0, \\ \vdots \\ F_n(t, x_1, x'_1, x_2, x'_2, \dots, x_n, x'_n) = 0. \end{cases}$$

Если систему удастся разрешить относительно производных, то её записывают в *нормальном* (явном) виде:

$$\begin{cases} x'_1 = f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \\ x'_2 = f_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \\ \vdots \\ x'_n = f_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n). \end{cases}$$

Общее решение системы из n уравнений первого порядка включает в себя n произвольных постоянных: $C_1, C_2, \dots, C_n$. В практических задачах для определения этих постоянных задаются начальные условия, обычно их число также равно n . Задача нахождения решения системы, удовлетворяющего начальным условиям, называется *краевой задачей*. Краевая задача называется *задачей Коши*, если начальные условия имеют следующий вид:

¹В отличие от предыдущих параграфов, в которых независимая переменная обозначалась буквой x , в этом параграфе независимой переменной выберем t .

²Будут рассматриваться лишь системы, в которых число уравнений совпадает с числом искомых функций.

$$\begin{cases} x_1(t_0) = x_{10}, \\ x_2(t_0) = x_{20}, \\ \vdots \\ x_n(t_0) = x_{n0}. \end{cases}$$

Как и для случая одного уравнения, при выполнении условий непрерывности функций f_k и частных производных $\frac{\partial f_k}{\partial x_j}$, решение задачи Коши для системы уравнений существует и единственно.

Кроме систем уравнений первого порядка встречаются системы уравнений второго и более высоких порядков. Но такие системы (как и уравнения высшего порядка) можно представить в виде систем первого порядка путём увеличения числа искомых функций. Приведём пример, в котором система из двух уравнений второго порядка сводится к системе из четырёх уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} y'' = y' + z, \\ z'' = z'y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = y \\ x_2 = y' \\ x_3 = z \\ x_4 = z' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'_1 = x_2, \\ x'_2 = x_2 + x_3, \\ x'_3 = x_4, \\ x'_4 = x_4 x_1. \end{cases}$$

Методы решения систем дифференциальных уравнений. Систему из n уравнений первого порядка можно свести к одному уравнению порядка n , используя метод последовательного исключения неизвестных. Например, система из двух уравнений первого порядка сводится к уравнению второго порядка:

$$\begin{cases} x' = f(t, x, y), \\ y' = g(t, x, y). \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = h(t, x, x'), \\ h'_t + h'_x \cdot x' + h'_{x'} \cdot x'' = g(t, x, h(t, x, x')). \end{cases}$$

Поэтому один из способов решения системы уравнений является её сведение к одному уравнению высокого порядка.

Пример 47.1. Решить систему
$$\begin{cases} x' = y + \cos 2t, \\ y' = -4x + 2 \sin 2t. \end{cases}$$

Из первого уравнения $y = x' - \cos 2t$. Подставим y во второе:

$$x'' + 2 \sin 2t = -4x + 2 \sin 2t \Rightarrow x'' + 4x = 0.$$

Решение данного уравнения с постоянными коэффициентами трудностей не представляет:

$$\lambda^2 + 4 = 0, \quad \lambda_{1,2} = \pm 2i, \quad x_1 = \cos 2t, \quad x_2 = \sin 2t.$$

$$x = C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t.$$

Осталось найти вторую функцию $y(t)$ из соотношения $y = x' - \cos 2t$:

$$y = (C_2 - 1) \cos 2t - C_1 \sin 2t. \quad \#$$

Другим способом решения систем является *метод интегрируемых комбинаций*. Идея данного метода состоит в том, что с помощью простых преобразований (таких как сложение, вычитание и т.п.) система сводится к одному/нескольким уравнениям относительно комбинации исходных функций.

Пример 47.2. Решить систему
$$\begin{cases} x' = x^2 + y^2 + 20, \\ y' = 2xy + 16. \end{cases}$$

Сложим эти уравнения: $(x + y)' = (x + y)^2 + 36$. Приняв $u = x + y$, получим для неё уравнение первого порядка: $u' = u^2 + 36$. Решим его.

$$\frac{du}{dt} = u^2 + 36 \Rightarrow \int \frac{du}{u^2 + 36} = \int dt \Rightarrow u = 6 \operatorname{tg}(6t + C_1).$$

Далее вычтем из первого исходного уравнения второе: $(x - y)' = (x - y)^2 + 4$. Получено уравнение для функции $v = x - y$:

$$\frac{dv}{dt} = v^2 + 4 \Rightarrow \int \frac{dv}{v^2 + 4} = \int dt \Rightarrow v = 2 \operatorname{tg}(2t + C_2).$$

Искомые функции: $x = \frac{u + v}{2}$, $y = \frac{u - v}{2}$. Запишем ответ

$$x = 3 \operatorname{tg}(6t + C_1) + \operatorname{tg}(2t + C_2), \quad y = 3 \operatorname{tg}(6t + C_1) - \operatorname{tg}(2t + C_2). \quad \#$$

Линейная система дифференциальных уравнений. Система уравнений называется *линейной*, если её можно представить в виде

$$\begin{cases} x'_1 = p_{11}(t)x_1 + p_{12}(t)x_2 + \dots + p_{1n}(t)x_n + q_1(t), \\ x'_2 = p_{21}(t)x_1 + p_{22}(t)x_2 + \dots + p_{2n}(t)x_n + q_2(t), \\ \dots \\ x'_n = p_{n1}(t)x_1 + p_{n2}(t)x_2 + \dots + p_{nn}(t)x_n + q_n(t). \end{cases} \quad (47.1)$$

В случае, когда все $q_k(t) = 0$, такая система называется *линейной однородной*. Если все функции $p_{ij}(t) = \text{const}$, то система (47.1) называется системой с *постоянными коэффициентами*.

Систему (47.1) удобно записать в виде одного матричного уравнения $X' = PX + Q$, где P – матричная функция, а X и Q – вектор-функции:

$$P(t) = \begin{pmatrix} p_{11}(t) & \dots & p_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1}(t) & \dots & p_{nn}(t) \end{pmatrix}, \quad X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \quad Q(t) = \begin{pmatrix} q_1(t) \\ \vdots \\ q_n(t) \end{pmatrix}.$$

Теорема 47.1 (Теорема о виде общего решения линейной однородной системы). *Если $X_1(t), X_2(t), \dots, X_n(t)$ – фундаментальная система решений, то общее решение линейной однородной системы имеет вид*

$$X(t) = C_1 \cdot X_1(t) + C_2 \cdot X_2(t) + \dots + C_n \cdot X_n(t).$$

Теорема 47.2 (Теорема о виде общего решения линейной неоднородной системы). *Если $\tilde{X}(t)$ – частное решение линейной неоднородной системы, а $X_0(t)$ – общее решение соответствующей линейной однородной системы, то общее решение неоднородной системы имеет вид $X(t) = \tilde{X}(t) + X_0(t)$.*

Две данные теоремы полностью аналогичны следствиям 45.2.1 и 45.3.1 о видах решений линейных уравнений и легко доказываются подстановкой решений в исходную систему.

Однородная система уравнений с постоянными коэффициентами. Рассмотрим однородную систему:

$$\begin{cases} x'_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n, \\ x'_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n, \\ \dots \\ x'_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n. \end{cases}$$

Введём в рассмотрение квадратную матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Тогда исходную систему можно записать в виде одного матричного уравнения $X' = AX$. Частное решение этого уравнения будем искать в виде $X(t) = Ve^{\lambda t}$, где λ – некоторая неизвестная постоянная, а V – неизвестный вектор:

$$V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}.$$

После подстановки функции и её производной $X' = \lambda Ve^{\lambda t}$ в матричное уравнение, получим

$$\lambda Ve^{\lambda t} = AVe^{\lambda t} \Rightarrow AV = \lambda V.$$

Последнее уравнение является задачей нахождения собственных значений и собственных векторов матрицы A . Напомним, что для нахождения собственных значений λ решается характеристическое уравнение

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

После раскрытия определителя получим алгебраическое уравнение порядка n , которое, по основной теореме алгебры, имеет ровно n корней с учётом их кратности. Заметим, что некоторые корни могут получиться комплексными. Далее, как и при решении дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, каждому собственному значению λ_k следует поставить в соответствие своё частное решение X_k . Опишем виды частных решений X_k в зависимости от типа корней:

- $\lambda_1 = \alpha$ – вещественный некратный корень, V – собственный вектор, соответствующий этому собственному значению. Тогда

$$X = Ve^{\alpha t}.$$

- $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ – пара некратных комплексно-сопряжённых корней, $V_1 = V$ и $V_2 = \bar{V}$ – пара соответствующих им комплексно-сопряжённых собственных векторов. Тогда

$$X_1 = \operatorname{Re} [Ve^{(\alpha+i\beta)t}], \quad X_2 = \operatorname{Im} [Ve^{(\alpha+i\beta)t}].$$

- $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_m = \alpha$ – вещественный корень кратности m . Пусть $r = n - \operatorname{rank}(A - \alpha E)$, тогда существует r линейно независимых собственных векторов V_k . Если $m = r$, то множество линейно независимых решений имеет вид $X_k = V_k e^{\alpha t}$. Если же $m > r$, то все решения можно найти методом неопределённых коэффициентов. Решения ищут в виде $X = (V_0 + V_1 t + \dots + V_{m-r} t^{m-r})e^{\alpha t}$. Зависимости между координатами векторов V_k определяются после подстановки X в исходную систему.

Заметим, что возможен также вариант кратных комплексно-сопряжённых корней, но мы его рассматривать не будем.

Пример 47.3. Решить систему
$$\begin{cases} x' = x - y, \\ y' = y - 4x. \end{cases}$$

Запишем характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & -1 \\ -4 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0.$$

Найдём корни этого уравнения, далее для каждого корня определим соответствующий ему собственный вектор и соответствующее ему частное решение:¹

$$\lambda_1 = -1 \Rightarrow V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{-t},$$

$$\lambda_2 = 3 \Rightarrow V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{3t}.$$

Общее решение – линейная комбинация найденных частных решений

$$X = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{-t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{3t} \Rightarrow \begin{cases} x = C_1 e^{-t} + C_2 e^{3t}, \\ y = 2C_1 e^{-t} - 2C_2 e^{3t}. \end{cases} \quad \#$$

Пример 47.4. Решить систему
$$\begin{cases} x' = 4x - y, \\ y' = 5x + 2y. \end{cases}$$

Запишем характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 4 - \lambda & -1 \\ 5 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda + 13 = 0.$$

$$\lambda_{1,2} = 3 \pm 2i \Rightarrow V_{1,2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \mp 2i \end{pmatrix}.$$

Частными решениями X_1 и X_2 являются действительная и мнимая часть комплексной функции $V_1 e^{\lambda_1 t}$. Запишем эту функцию:

$$\begin{aligned} X_1 + iX_2 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 - 2i \end{pmatrix} e^{(3+2i)t} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 - 2i \end{pmatrix} e^{3t} (\cos 2t + i \sin 2t) = \\ &= \begin{pmatrix} \cos 2t \\ \cos 2t + 2 \sin 2t \end{pmatrix} e^{3t} + i \begin{pmatrix} \sin 2t \\ \sin 2t - 2 \cos 2t \end{pmatrix} e^{3t}. \end{aligned}$$

Общее решение имеет вид

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} \cos 2t \\ \cos 2t + 2 \sin 2t \end{pmatrix} e^{3t} + C_2 \begin{pmatrix} \sin 2t \\ \sin 2t - 2 \cos 2t \end{pmatrix} e^{3t}. \quad \#$$

¹Процесс нахождения собственных векторов в описании решения опущен, с ним можно познакомиться в §6.

Пример 47.5. Решить систему
$$\begin{cases} x' = 3x - y + 3z, \\ y' = -4x + 3y - 6z, \\ z' = -2x + y - 2z. \end{cases}$$

Запишем характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 3 - \lambda & -1 & 3 \\ -4 & 3 - \lambda & -6 \\ -2 & 1 & -2 - \lambda \end{vmatrix} = -(\lambda - 2)(\lambda - 1)^2 = 0.$$

Его корни – вещественные числа $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$. Заметим, что $\text{rank}(A - E) = 1$, следовательно собственному значению $\lambda = 1$ соответствует $n - \text{rank}(A - \lambda E) = 3 - 1 = 2$ линейно независимых собственных вектора. Найдём эти собственные векторы:

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad V_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad V_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Значит, общее решение имеет вид

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t} + C_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} e^t + C_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} e^t. \quad \#$$

Пример 47.6. Решить систему
$$\begin{cases} x' = -x - 4y + 2z, \\ y' = 3x + y - 2z, \\ z' = x - 4y + z. \end{cases}$$

Запишем характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} -1 - \lambda & -4 & 2 \\ 3 & 1 - \lambda & -2 \\ 1 & -4 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = -(\lambda - 1)(\lambda^2 + 1) = 0.$$

У него один вещественный и два комплексных корня $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = i$, $\lambda_3 = -i$. Соответствующие им собственные векторы

$$V_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad V_2 = \begin{pmatrix} 3+i \\ 2-i \\ 5 \end{pmatrix}, \quad V_3 = \begin{pmatrix} 3-i \\ 2+i \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Общим решением является линейная комбинация функций $X_1 = V_1 e^t$, $X_2 = \operatorname{Re}(V_2 e^{it})$ и $X_3 = \operatorname{Im}(V_2 e^{it})$. Записав $V_2 e^{it}$ в виде суммы действительной и мнимой части, получим

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} e^t + C_2 \begin{pmatrix} 3 \cos t - \sin t \\ 2 \cos t + \sin t \\ 5 \cos t \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} \cos t + 3 \sin t \\ -\cos t + 2 \sin t \\ 5 \sin t \end{pmatrix}. \quad \#$$

Неоднородная система дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Случай функций специального вида.
Такая система имеет вид

$$\begin{cases} x'_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + q_1(t), \\ x'_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + q_2(t), \\ \dots \\ x'_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n + q_n(t). \end{cases} \quad (47.2)$$

В матричном виде она записывается как $X' = AX + Q$, где Q – вектор-столбец, содержащий функции $q_k(t)$. Согласно теореме 47.2, для записи общего решения требуется определить частное решения $\tilde{X}$ неоднородной системы. Как и в случае одного уравнения с постоянными коэффициентами, когда все функции $q_k(t)$ имеют специальный вид $e^{\alpha t}(P(t) \cos \beta t + Q(t) \sin \beta t)$, то решение $\tilde{X}$ можно найти методом неопределённых коэффициентов.

Пример 47.7. Решить систему
$$\begin{cases} x' = 3x - y + t, \\ y' = 4x - y + e^t. \end{cases}$$

Решение начнём с поиска общего решения однородной системы. Так, характеристическое уравнение имеет вид

$$\begin{vmatrix} 3 - \lambda & -1 \\ 4 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 1.$$

Имеется одно собственное значение кратности $m = 2$. Число линейно независимых собственных векторов $r = n - \text{rank}(A - \lambda E) = 2 - 1 = 1$ меньше m , поэтому решение однородной системы ищем методом неопределённых коэффициентов:

$$X_0 = \begin{pmatrix} A + Bt \\ C + Dt \end{pmatrix} e^t.$$

Подстановкой X в однородную систему $X' = AX$ находим $A = C_1$, $B = C_2$, $C = 2C_1 - C_2$, $D = 2C_2$. Поэтому

$$X_0 = \begin{pmatrix} C_1 + C_2 t \\ 2C_1 - C_2 + 2C_2 t \end{pmatrix} e^t.$$

В исходной неоднородной системе функции $q_1(t)$ и $q_2(t)$ имеют специальный вид. Так, $q_1(t) = t$ — многочлен первой степени, корней $\lambda = 0$ нет, поэтому в частном решении $\tilde{x}$ будет присутствовать слагаемое $At + B$. Во втором уравнении $q_2(t) = e^t$, есть два корня $\lambda = 1$, поэтому в $\tilde{x}$ следует добавить слагаемое $Ct^2 e^t$. Итак, $\tilde{x} = At + B + Ct^2 e^t$. Решение $\tilde{y}$ найдём из первого уравнения неоднородной системы: $\tilde{y} = 3\tilde{x} - \tilde{x}' + t = (3A + 1)t + (3B - A) + 2C(t^2 - t)e^t$. Для нахождения значений постоянных используем второе уравнение системы. Производная $\tilde{y}' = (3A + 1) + 2C(t^2 + t - 1)e^t$, с её учётом перепишем второе уравнение:

$$(3A + 1) + (2Ct^2 + 2Ct - 2C)e^t = (A - 1)t + (A + B) + (2Ct^2 + 2Ct + 1)e^t.$$

Получим $A = 1$, $B = 3$, $C = -\frac{1}{2}$. Подставив найденные значения в $\tilde{x}$ и $\tilde{y}$, запишем ответ

$$\begin{cases} x = x_0 + \tilde{x} = e^t(C_1 + C_2 t - \frac{t^2}{2}) + t + 3, \\ y = y_0 + \tilde{y} = e^t(2C_1 - C_2 + 2C_2 t - t^2 + t) + 4t + 8. \end{cases} \quad \#$$

Неоднородная система дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Общий случай.¹ Если в неоднородной системе (47.2) хотя бы одна функция $q_k(t)$ имеет вид, отличный от специального, для нахождения $\tilde{X}$ можно использовать метод вариации постоянных. Идея этого метода: если решение однородной системы имеет вид $X_0 = \sum C_k X_k$, то решение неоднородной системы ищем в виде $X = \sum u_k(t) X_k$, где функции $u_k(t)$ находят из системы $\sum u'_k X_k = Q$.

Пример 47.8. Решить систему
$$\begin{cases} x' = x - y + \frac{2}{e^t - 1}, \\ y' = y - 4x + \frac{4}{e^t + 1}. \end{cases}$$

Ранее была решена соответствующая однородная система (см. пример 47.3). Полученное решение имело вид

$$\begin{cases} x = C_1 e^{-t} + C_2 e^{3t}, \\ y = 2C_1 e^{-t} - 2C_2 e^{3t}. \end{cases}$$

Для решение неоднородной системы используем метод вариации постоянных, решение будем искать в виде

$$\begin{cases} x = u_1(t) e^{-t} + u_2(t) e^{3t}, \\ y = 2u_1(t) e^{-t} - 2u_2(t) e^{3t}. \end{cases}$$

Уравнения для нахождения функций $u_1(t)$ и $u_2(t)$ имеют вид

$$\begin{cases} u'_1 e^{-t} + u'_2 e^{3t} = \frac{2}{e^t - 1}, \\ 2u'_1 e^{-t} - 2u'_2 e^{3t} = \frac{4}{e^t + 1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'_1 = \frac{2e^{2t}}{e^{2t} - 1}, \\ u'_2 = \frac{2e^{-3t}}{e^{2t} - 1}. \end{cases}$$

Проинтегрировав данные уравнения по отдельности, получим

$$\begin{cases} u_1 = \ln(e^{2t} + 1) + C_1, \\ u_2 = \ln \frac{e^t - 1}{e^t + 1} + 2e^{-t} + \frac{2}{3}e^{-3t} + C_2. \end{cases}$$

¹Данный раздел является факультативным.

Запишем ответ:

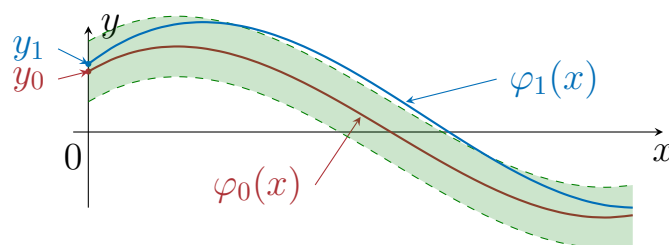
$$\begin{cases} x = [\ln(e^{2t} + 1) + C_1]e^{-t} + \left[\ln \frac{e^t - 1}{e^t + 1} + C_2 \right] e^{3t} + 2e^{2t} + \frac{2}{3}, \\ y = 2[\ln(e^{2t} + 1) + C_1]e^{-t} - 2 \left[\ln \frac{e^t - 1}{e^t + 1} + C_2 \right] e^{3t} - 4e^{2t} - \frac{4}{3}. \end{cases} \quad \#$$

§48. Устойчивость решений и стационарные точки

Определение устойчивости решения. Пусть $y = \varphi_0(x)$ – решение задачи Коши

$$\begin{cases} y' = f(x, y), \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

Выберем число $\varepsilon > 0$ и определим “коридор” $\varphi_0(x) - \varepsilon < y < \varphi_0(x) + \varepsilon$. На рисунке он показан зелёным цветом.

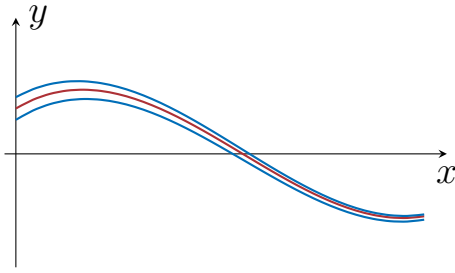


Далее определим δ -окрестность точки y_0 : $(y_0 - \delta, y_0 + \delta)$ и пусть y_1 – число из этой окрестности. Заменяя исходное начальное условие на $y(0) = y_1$, получим новую задачу Коши, решение которой $y = \varphi_1(x)$. Возникает вопрос: всегда ли при любом заданном $\varepsilon > 0$ можно подобрать такое δ , чтобы решение $\varphi_1(x)$ полностью находилось в “коридоре”?

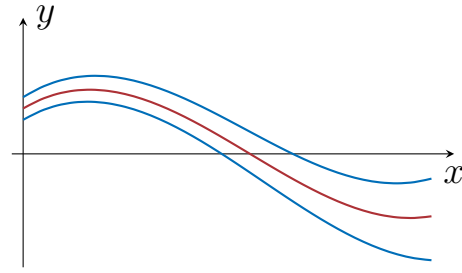
В зависимости от ответа на этот вопрос, решения дифференциальных уравнений подразделяют на:

- *Неустойчивые.* Существует такое $\varepsilon > 0$, что при любом δ существует решение $\varphi_1(x)$, которое будет выходить из “коридора”.
- *Устойчивые.* Для любого $\varepsilon > 0$ существует такое δ , что все решения $\varphi_1(x)$ будут полностью находиться в “коридоре”.

Кроме того, устойчивые решения также могут быть *абсолютно устойчивыми*, если $\varphi_1(x) \rightarrow \varphi_0(x)$ при $x \rightarrow \infty$.



Абсолютно устойчивое решение



Неустойчивое решение

Автономная система. Система дифференциальных уравнений называется *автономной*, если в её уравнения не входит независимая переменная t . Вид такой системы, разрешённый относительно производных:

$$\begin{cases} x'_1 = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ x'_2 = f_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ \dots \\ x'_n = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n). \end{cases} \quad (48.1)$$

Решение автономной системы само управляет своими изменениями, поскольку эти изменения зависят лишь от самих функций.

Стационарная точка (точка равновесия) автономной системы – набор чисел $x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}$, подстановка которых в правые части системы (48.1) обнуляет их. Если у системы есть стационарная точка, то функции

$$\begin{cases} x_1(t) = x_{10} = \text{const}, \\ x_2(t) = x_{20} = \text{const}, \\ \dots \\ x_n(t) = x_{n0} = \text{const} \end{cases}$$

будут частным решением автономной системы.

Пример 48.1. Найти стационарные точки системы

$$\begin{cases} x' = x^2 + y^2 - 17, \\ y' = 2xy - 8. \end{cases}$$

Для нахождения точек решим систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 17, \\ 2xy = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + 2xy = 25, \\ x^2 + y^2 - 2xy = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = \pm 5, \\ x - y = \pm 3. \end{cases}$$

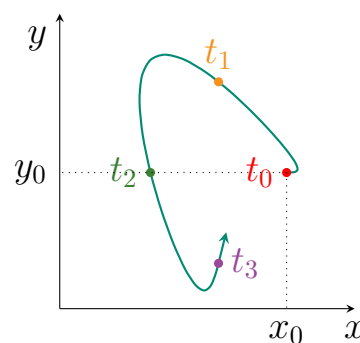
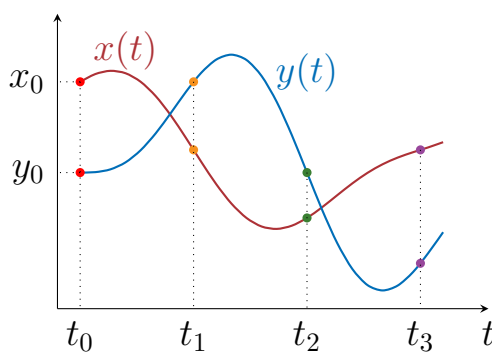
Рассмотрев различные варианты знаков, найдём 4 стационарные точки:

$$\begin{cases} x = 1, \\ y = 4, \end{cases} \quad \begin{cases} x = 4, \\ y = 1, \end{cases} \quad \begin{cases} x = -1, \\ y = -4, \end{cases} \quad \begin{cases} x = -4, \\ y = -1. \end{cases}$$

Фазовая плоскость. Рассмотрим задачу Коши для автономной системы из двух уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x, y), \\ \frac{dy}{dt} = g(x, y), \\ x(t_0) = x_0, \\ y(t_0) = y_0. \end{cases}$$

Её решением является пара функций $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t). \end{cases}$



Пример графиков этих функций изображен на рисунке слева. Эту пару функций можно воспринимать как параметрическую зависимость $y(x)$. График этой зависимости изображен на рисунке справа. Плоскость Oxy , в которой по осям координат откладываются переменные x , y , однозначно определяющие состояние автономной системы из двух уравнений, называется *фазовой плоскостью*.¹ Заметим, что на плоскости отсутствует ось,

¹В случае автономных систем с тремя уравнениями, решение можно рассматривать в фазовом пространстве.

связанная с независимой переменной t , эту переменную следует воспринимать как параметр. Через каждую точку фазовой плоскости проходит единственная *фазовая траектория* (за исключением некоторых стационарных точек). Множество всевозможных фазовых траекторий называется *фазовым портретом* автономной системы. Фазовый портрет даёт представление о совокупности всех возможных состояний автономной системы.

Виды стационарных точек. Рассмотрим однородную систему из двух уравнений с постоянными коэффициентами:

$$\begin{cases} x' = ax + by, \\ y' = cx + dy. \end{cases} \quad (48.2)$$

Пусть $\Delta = ad - bc \neq 0$.¹ В этом случае точка $x = y = 0$ будет являться единственной стационарной точкой этой системы. Решение однородной системы с постоянными коэффициентами было получено нами ранее, его вид зависит от корней λ_1 и λ_2 характеристического уравнения. Вид решения, в свою очередь, влияет на поведение системы вблизи стационарной точки. Опишем различные виды стационарных точек данной автономной системы в зависимости от корней характеристического уравнения.

- *Устойчивый узел.* Числа λ_1 и λ_2 – вещественные и отрицательные.
- *Неустойчивый узел.* Числа λ_1 и λ_2 – вещественные и положительные.
- *Седло.* Числа λ_1 и λ_2 – вещественные, различных знаков.
- *Устойчивый фокус.* Числа λ_1 и λ_2 – комплексные, с отрицательной действительной частью.
- *Неустойчивый фокус.* Числа λ_1 и λ_2 – комплексные, с положительной действительной частью.
- *Центр.* Числа λ_1 и λ_2 – чисто-мнимые, т.е. с нулевой действительной частью.

Приведём примеры систем, в которых возникают данные типы стационарных точек и изобразим соответствующие им фазовые портреты.

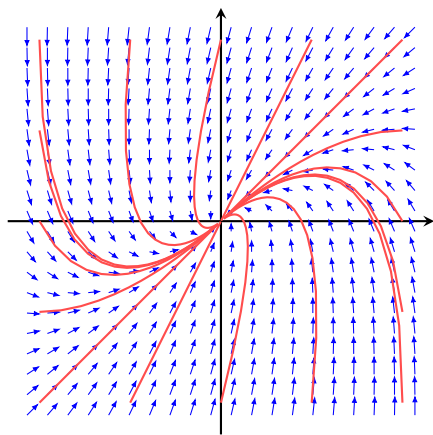
¹Случай $\Delta = 0$ является вырожденным и нами рассматриваться не будет.

Устойчивый узел:

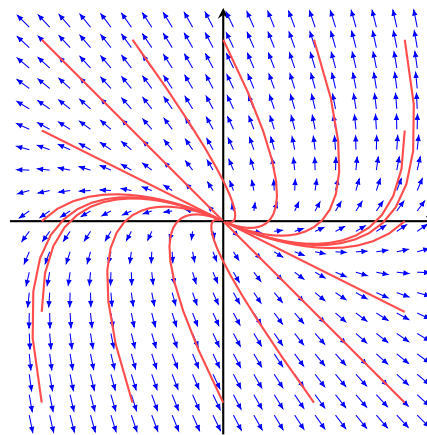
$$\begin{cases} x' = -x - y, \\ y' = 2x - 4y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -2, \\ \lambda_2 = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-3t}, \\ y = C_1 e^{-2t} + 2C_2 e^{-3t}. \end{cases}$$

Неустойчивый узел:

$$\begin{cases} x' = x - 2y, \\ y' = x + 4y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 2, \\ \lambda_2 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t}, \\ y = -C_1 e^{2t} - C_2 e^{3t}. \end{cases}$$



Устойчивый узел



Неустойчивый узел

Устойчивый фокус:

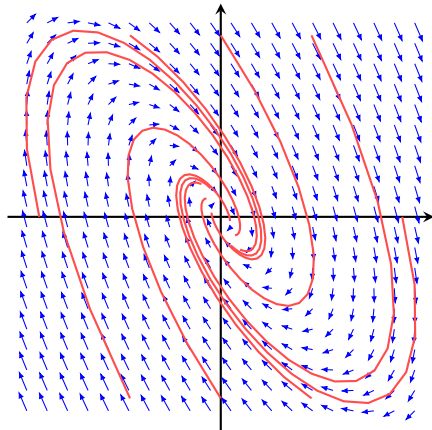
$$\begin{cases} x' = x + 2y, \\ y' = -4x - 3y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -1 + 2i, \\ \lambda_2 = -1 - 2i \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = e^{-t}(C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t), \\ y = e^{-t}(C_2 - C_1) \cos 2t - (C_1 + C_2) \sin 2t. \end{cases}$$

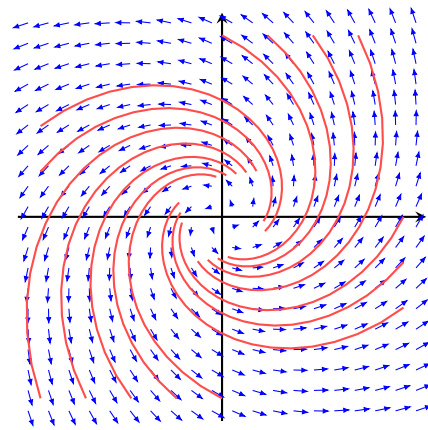
Неустойчивый фокус:

$$\begin{cases} x' = x - 2y, \\ y' = 2x + y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 1 + 2i, \\ \lambda_2 = 1 - 2i \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = e^{-t}(C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t), \\ y = e^{-t}(-C_2 \cos 2t + C_1 \sin 2t). \end{cases}$$



Устойчивый фокус



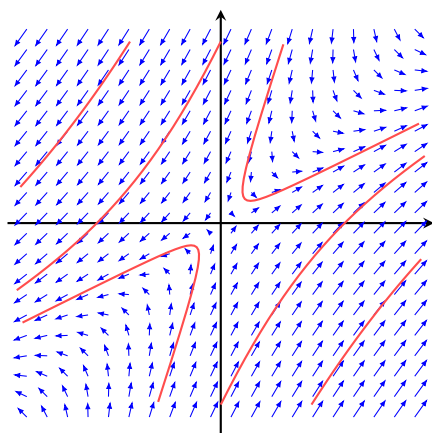
Неустойчивый фокус

Седло:

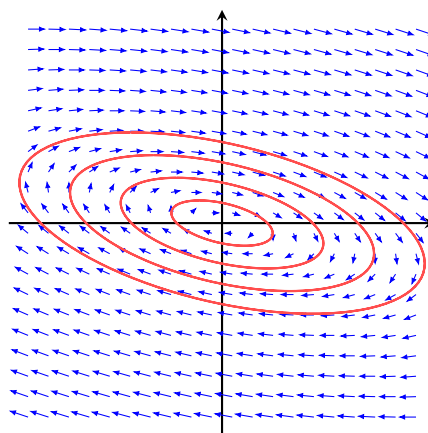
$$\begin{cases} x' = 3x - 2y, \\ y' = 3x - 4y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 2, \\ \lambda_2 = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2C_1 e^{2t} + C_2 e^{-3t}, \\ y = C_1 e^{2t} + 3C_2 e^{-3t}. \end{cases}$$

Центр:

$$\begin{cases} x' = x + 5y, \\ y' = -x - y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 2i, \\ \lambda_2 = -2i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 5C_1 \cos 2t + 5C_2 \sin 2t, \\ y = (2C_2 - C_1) \cos 2t - (2C_1 + C_2) \sin 2t. \end{cases}$$



Седло



Центр

Определение вида стационарной точки в общем случае. Если автономная система является системой с постоянными коэффициентами,

то вид её стационарной точки зависит от корней характеристического уравнения. Виды стационарных точек других автономных систем такие же, опишем процесс их определения. Пусть (x_0, y_0) – стационарная точка системы

$$\begin{cases} x' = f(x, y), \\ y' = g(x, y). \end{cases}$$

Запишем формулы Тейлора для функций $f(x, y)$ и $g(x, y)$ вблизи стационарной точки (x_0, y_0) :

$$\begin{cases} f(x, y) = f'_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f'_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0) + r_1, \\ g(x, y) = g'_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + g'_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0) + r_2. \end{cases}$$

Введём новые переменные $\tilde{x} = x - x_0$, $\tilde{y} = y - y_0$, т.е. фактически выполним параллельный сдвиг, при этом стационарная точка (x_0, y_0) перейдёт в начало координат. Заметим, что $\tilde{x}' = x'$ и $\tilde{y}' = y'$. Также отбросим остаточные члены r_1 и r_2 , которые вблизи стационарной точки имеют второй порядок малости. В результате система примет вид

$$\begin{cases} \tilde{x}' = a\tilde{x} + b\tilde{y}, & a = f'_x(x_0, y_0), \quad b = f'_y(x_0, y_0), \\ \tilde{y}' = c\tilde{x} + d\tilde{y}, & c = g'_x(x_0, y_0), \quad d = g'_y(x_0, y_0). \end{cases}$$

Отбрасывание нелинейных слагаемых в разложении функции вблизи какой-либо точки называется линеаризацией. Заметим, что после линеаризации система приобретёт вид (48.2). Определение вида стационарной точки линеаризованной системы производится по описанной ранее схеме, вид стационарной точки исходной системы считается таким же.

Пример 48.2. *Определить виды стационарных точек примера 48.1.*

Данная система является нелинейной, функции в правых частях уравнений имеют вид

$$\begin{cases} f(x, y) = x^2 + y^2 - 17, \\ g(x, y) = 2xy - 8. \end{cases}$$

Найдём частные производные в точке (x_0, y_0) :

$$f'_x = 2x_0, \quad f'_y = 2y_0, \quad g'_x = 2y_0, \quad g'_y = 2x_0.$$

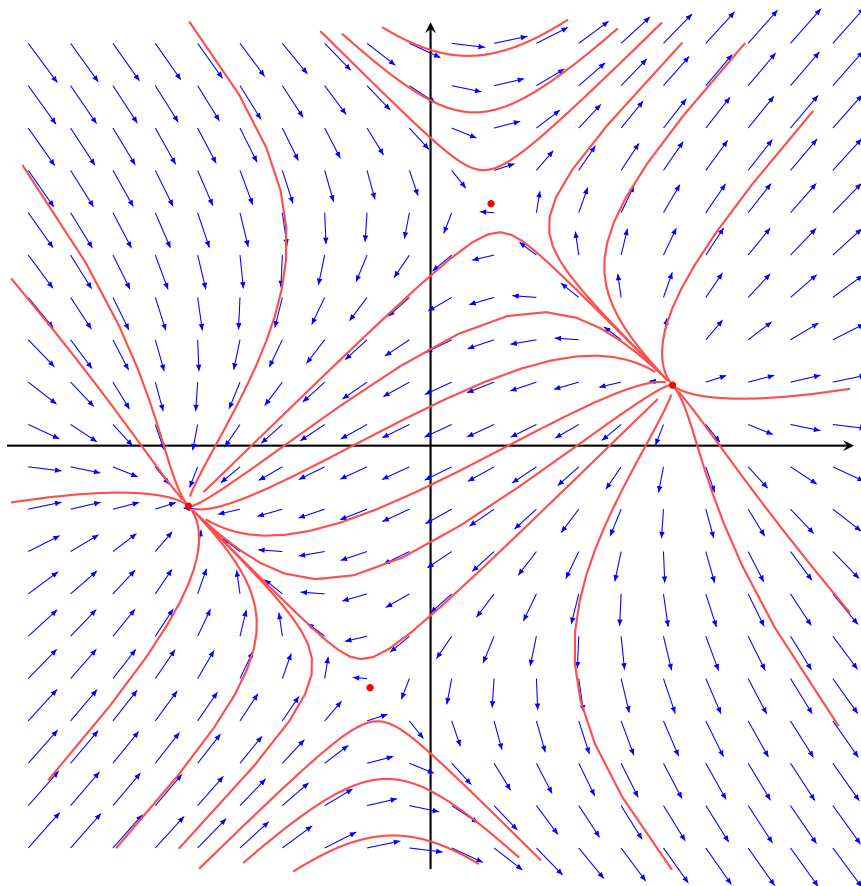
Запишем характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} 2x_0 - \lambda & 2y_0 \\ 2y_0 & 2x_0 - \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 2x_0)^2 - 4y_0^2 = (\lambda - 2(x_0 + y_0))(\lambda - 2(x_0 - y_0)) = 0.$$

Корнями будут $\lambda_1 = 2(x_0 + y_0)$, $\lambda_2 = 2(x_0 - y_0)$. Корни вещественные, определим их знаки для каждой из четырёх стационарных точек.

- Точка $(1, 4)$. Корни $\lambda_1 = 10$, $\lambda_2 = -6$, данная стационарная точка – седло.
- Точка $(4, 1)$. Корни $\lambda_1 = 10$, $\lambda_2 = 6$, стационарная точка – неустойчивый узел.
- Точка $(-1, -4)$. Корни $\lambda_1 = -10$, $\lambda_2 = 6$, стационарная точка – седло.
- Точка $(-4, -1)$. Корни $\lambda_1 = -10$, $\lambda_2 = -6$, стационарная точка – устойчивый узел.

Фазовая плоскость для данной системы изображена на рисунке.



Задание. Найдите на рисунке все четыре стационарные точки и сравните вид фазовых траекторий вблизи них с фазовыми траекториями соответствующих линейных систем.

§49. Уравнения в частных производных

Классификация уравнений в частных производных. Пусть $u = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ – функция нескольких переменных. *Дифференциальным уравнением в частных производных* называется уравнение, в которое входят независимые переменные x_k , искомая функция u , а также её частные производные:

$$F\left(x_1, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \dots\right) = 0.$$

Уравнения в частных производных классифицируют по различным признакам. Отметим основные из них:

- *Размерность* уравнения – количество независимых переменных, от которых зависит искомая функция.
- *Порядок* уравнения – порядок старшей производной, входящей в уравнение.
- *Линейность* уравнения. Уравнение в частных производных называется линейным, если оно может быть приведено к виду

$$p_0 \cdot u + p_1 \cdot \frac{\partial u}{\partial x_1} + \dots + p_n \cdot \frac{\partial u}{\partial x_n} + p_{n+1} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dots = q,$$

где p_k и q являются произвольными известными функциями от независимых переменных. Все остальные уравнения – нелинейные.

Если уравнение линейно, то дополнительно его можно классифицировать по таким признакам как “однородность/неоднородность” и “с постоянными/переменными коэффициентами”. Смысл этих признаков такой же, как и для обыкновенных линейных дифференциальных уравнений.

Приведём примеры уравнений:

- $yu''_{xx} + e^z u'_y + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \cdot u = 0$ – данное уравнение имеет размерность 3, т.к. оно содержит три независимые переменные (x, y, z).

z). Порядок равен двум, т.к. в уравнении присутствует производная второго порядка (u''_{xx}). Также это уравнение является линейным однородным.

- $u'''_{xxy}u + u''_{xx}u'_y + \sqrt{x^2 + y^2 + u^2} = 0$ – размерность данного уравнения 2 (содержит x, y), порядок равен трём (содержит u'''_{xxy}). Данное уравнение – нелинейное.
- $u''_{xx} + 2u'_y + 3u + \sin(xy) = 0$ – линейное уравнение размерности 2, порядка 2. Оно содержит слагаемое $\sin(xy)$, в котором отсутствует искомая функция или её производная, поэтому данное линейное уравнение является неоднородным. Это уравнение с постоянными коэффициентами, т.к. все множители перед функцией и её производными являются постоянными.

На практике наиболее часто встречаются уравнения второго порядка, линейные относительно старших (т.е. вторых) производных. Например, такое уравнение размерности 2 записывается в виде

$$a_{11}u''_{xx} + 2a_{12}u''_{xy} + a_{22}u''_{yy} + f(x, y, u, u'_x, u'_y) = 0.$$

Важнейшей характеристикой этого уравнения является определитель, составленный из коэффициентов при вторых производных $\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}^2$. В зависимости от знака Δ , уравнения делятся на следующие типы:

- $\Delta < 0$: гиперболический тип. Примером уравнения этого типа является волновое уравнение $u''_{tt} = a^2u''_{xx}$.
- $\Delta = 0$: параболический тип. Пример такого уравнения – уравнение диффузии $u'_t = a^2u''_{xx}$.
- $\Delta > 0$: эллиптический тип. К этому типу относится, например, уравнение Лапласа $u''_{xx} + u''_{yy} = 0$.

Пример 49.1. Решить уравнение $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0$.

Для решения данного простейшего уравнения последовательно проинтегрируем смешанную производную сначала по y , а потом по x :

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \varphi_1(x) \Rightarrow u = \int \varphi_1(x) dx + \psi(y) = \varphi(x) + \psi(y).$$

Здесь $\varphi(x)$ и $\psi(y)$ – две произвольные функции. #

Пример 49.2. Решить уравнение $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = x^2$.

Решение данного уравнения также не представляет сложностей, последовательно дважды проинтегрируем по y :

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) = x^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x^2 y + \varphi(x) \quad \Rightarrow \quad u = \frac{x^2 y^2}{2} + \varphi(x)y + \psi(x).$$

В общем решении данного уравнения также присутствует две произвольные функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$. #

Задание. Подстановкой в уравнение убедитесь, что общим решением уравнения $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ является функция $u(x, y) = \varphi(x + y) + \psi(x - y)$, где φ и ψ – произвольные функции.

Заметим, что если общее решение обыкновенного дифференциального уравнения порядка n содержало n произвольных постоянных, то общее решение уравнения в частных производных порядка n содержит n произвольных функций. Число аргументов этих функций на единицу меньше размерности уравнения. Так, если уравнение имело размерность 2, то в общее решение будут входить функции одной переменной.

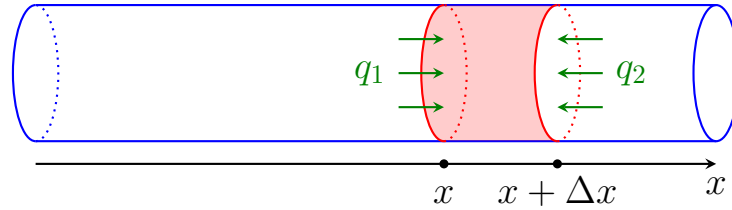
В практических задачах для однозначного определения искомой функции задают *граничные условия*. Задача нахождения функции, удовлетворяющей как дифференциальному уравнению, так и граничным условиям, называется *краевой задачей*. Если одной из независимых переменных является время t , то граничные условия, задаваемые при некотором фиксированном моменте времени называются *начальными условиями*.

Далее рассмотрим некоторые часто встречающиеся уравнения в частных производных и познакомимся с приёмами их решения.

Уравнение диффузии. Это уравнение, также иногда называемое *уравнением теплопроводности*, описывает процесс распространения вещества (тепла) в некоторой области пространства с течением времени. К независимым переменным относят время t , а также одну или несколько пространственных координат. Мы рассмотрим вариант одной пространствен-

ной координаты x , в этом случае уравнение моделирует процесс распространения тепла в стержне. Приведём вывод уравнения.

Дан однородный металлический стержень с теплоизолированной боковой поверхностью. Пусть $u(t, x)$ – температура в момент времени t участка стержня с координатой x .



Рассмотрим небольшой участок стержня, находящийся на интервале $(x, x + \Delta x)$ и запишем для него уравнение теплового баланса. Увеличение температуры участка стержня в интервале $(t, t + \Delta t)$ равно

$$c\rho S\Delta x [u(t + \Delta t, x) - u(t, x)] = q_1 + q_2,$$

где c – удельная теплоемкость, S – площадь сечения, ρ – плотность стержня. Тепловые потоки q_1 и q_2 через левое и правое сечения этого участка за время Δt равны

$$q_1 = -kS \frac{\partial u}{\partial x}(t, x) \Delta t, \quad q_2 = kS \frac{\partial u}{\partial x}(t, x + \Delta x) \Delta t.$$

Здесь k – коэффициент теплопроводности. Подставив в основное уравнение, получим

$$c\rho\Delta x [u(t + \Delta t, x) - u(t, x)] = k \left[\frac{\partial u}{\partial x}(t, x + \Delta x) - \frac{\partial u}{\partial x}(t, x) \right] \Delta t.$$

$$\frac{u(t + \Delta t, x) - u(t, x)}{\Delta t} = \frac{k}{c\rho} \cdot \frac{\frac{\partial u}{\partial x}(t, x + \Delta x) - \frac{\partial u}{\partial x}(t, x)}{\Delta x}.$$

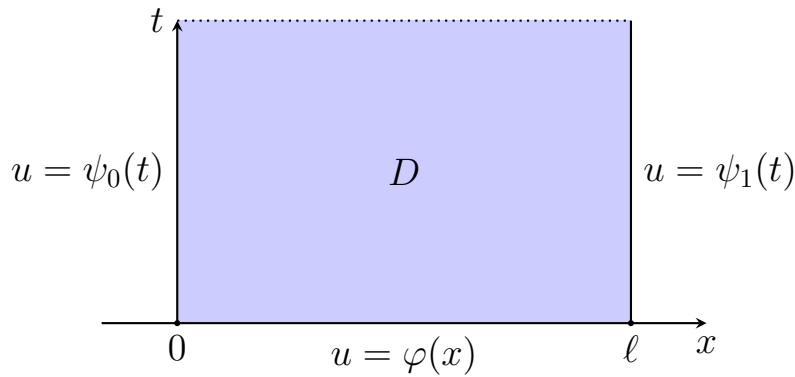
Устремим $\Delta x \rightarrow 0$, $\Delta t \rightarrow 0$. Используя определение частной производной функции, получим

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

где положительная постоянная $a^2 = \frac{k}{c\rho}$. Данное уравнение называется *уравнением диффузии* в одномерном случае. Для двух- и трёхмерного случаев уравнения выводятся аналогично и имеют вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \quad \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right).$$

Далее рассмотрим виды краевых задач для уравнения диффузии в одномерном случае. Пусть стержень имеет длину ℓ и задача решается для значений $x \in [0, \ell]$. Обозначим начальный момент времени $t = 0$ и рассмотрим интервал $t \in [0, \infty)$. Поэтому область D значений независимых переменных x и t , для которых требуется найти температуру $u(x, t)$, имеет вид полуполосы, изображенной на рисунке.



Считается, что в начальный момент времени распределение температуры известно

$$u|_{t=0} = \varphi(x),$$

данное условие называется начальным. Кроме того, на двух полупрямых $x = 0$ и $x = \ell$ ($t > 0$) задаются ещё два граничных условия. Приведём различные варианты граничного условия на левом конце стержня:

- $u|_{x=0} = \psi_0(t)$ – задана температура конца стержня в любой момент времени,
- $-ku'_x|_{x=0} = \mu_0(t)$ – задан тепловой поток, подводимый к этому концу стержня в любой момент времени,
- $u'_x|_{x=0} = 0$ – равенство нулю теплового потока (конец стержня теплоизолирован),

- $-ku'_x|_{x=0} = h(\tilde{u} - u|_{x=0})$ – происходит теплообмен с окружающей средой, количество тепла прямо пропорционально разности температуры $\tilde{u}$ окружающей среды и температуры u стержня.

На правом конце стержня задаются аналогичные условия, причём граничные условия на разных концах стержня могут быть различны.

Волновое уравнение. Волновое уравнение описывает процесс распространения колебаний в некоторой области, а также другие колебательные процессы в сплошных средах. К независимым переменным относят время t , а также одну или несколько пространственных координат. В случае одной пространственной координаты x уравнение моделирует колебания струны.

Мы не будем приводить вывод данного уравнения исходя из физических законов, дадим лишь его окончательный вид:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

где искомая функция $u(t, x)$ – вертикальное смещение точки струны с координатой x в момент t . Входящая в уравнение постоянная a называется фазовой скоростью.

Волновые уравнения в двух- и трёхмерном случаях имеют вид:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$$

моделируют процесс распространения колебаний в мембране и трёхмерной сплошной среде соответственно.

Далее рассмотрим виды краевых задач для волнового уравнения в одномерном случае. Область D , в которой требуется определить функцию $u(x, t)$, как и для уравнения диффузии, имеет вид полуполосы $x \in [0, \ell]$ и $t \in [0, \infty)$. Здесь ℓ – длина струны. Но, т.к. в волновом уравнении присутствует вторая производная по времени (а не первая, как в уравнении диффузии), задаётся два начальных условия: начальное положение и начальная скорость струны:

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u'_t|_{t=0} = \psi(x).$$

Кроме этого, задаются ещё и граничные условия на каждом из концов струны. Так, условия жёсткого закрепления концов струны имеют вид

$$u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=\ell} = 0.$$

Метод Фурье решения краевой задачи для уравнения диффузии. Дадим постановку задачи. Имеется однородный стержень длины ℓ , расположенный между точками $x = 0$ и $x = \ell$. В начальный момент времени ($t = 0$) известна температура $f(x)$ в каждой точке. На концах стержня поддерживается постоянная температура: w_1 при $x = 0$ и w_2 при $x = \ell$. Требуется найти температуру $w(x, t)$ стержня в любой точке в любой момент времени.

Постановка краевой задачи для функции w будет иметь вид:

$$\begin{cases} w'_t = a^2 w''_{xx}, \\ w|_{t=0} = f(x), \\ w|_{x=0} = w_1, \quad w|_{x=\ell} = w_2. \end{cases}$$

Введём новую функцию $u(t, x) = w(t, x) - w_0(x)$, где линейная функция $w_0(x) = kx + b$. Подберём параметры k и b так, чтобы функция u равнялась нулю при $x = 0$ и $x = \ell$. Это будет для $w_0(x) = w_1 + (w_2 - w_1)\frac{x}{\ell}$. Подставив в исходное уравнение сумму $w = u + w_0$, а также с учётом $(w_0)'_t = (w_0)''_{xx} = 0$, получим краевую задачу для функции u :

$$\begin{cases} u'_t = a^2 u''_{xx}, \\ u|_{t=0} = \varphi(x), \\ u|_{x=0} = u|_{x=\ell} = 0. \end{cases} \quad (49.1)$$

Здесь функция $\varphi(x) = f(x) - w_0(x) = f(x) - w_1 - (w_2 - w_1)\frac{x}{\ell}$.

Заметим, что уравнение диффузии линейно. По теореме о решениях таких уравнений (см., напр., теорему 45.2), если $u_1(t, x)$, $u_2(t, x)$, $\dots$, $u_k(t, x)$ – его частные решения, то линейная комбинация $C_1 u_1 + C_2 u_2 + \dots + C_k u_k$ тоже будет решением. Идея метода Фурье решения краевых задач с линейными уравнениями заключается в представлении решения в виде линейной

комбинации частных решений специального вида. Под специальным видом понимаются решения, представимые в виде произведения двух функций, каждая из которых зависит лишь от одной переменной: $u(t, x) = T(t)X(x)$.

Подставив данное произведение в исходное уравнение, получим:

$$T'X = a^2TX'' \Rightarrow \frac{1}{a^2} \frac{T'}{T} = \frac{X''}{X}.$$

Так, левая часть равенства является функцией t , а правая – функцией x . Такое возможно лишь в случае, когда обе части являются постоянными функциями. Обозначив эту постоянную числом $-\mu$, получим систему

$$\begin{cases} T' + a^2\mu T = 0, \\ X'' + \mu X = 0. \end{cases}$$

Далее обратим внимание на граничные условия $u|_{x=0} = u|_{x=\ell} = 0$. Потребуем, чтобы искомое частное решение тоже удовлетворяло им, что приводит к условиям $X(0) = X(\ell) = 0$. Найдём функцию $X(x)$, удовлетворяющую уравнению и двум краевым условиям

$$\begin{cases} X'' + \mu X = 0, \\ X(0) = X(\ell) = 0. \end{cases}$$

Заметим, что $X(x) = 0$ является тривиальным решением этой задачи, попробуем отыскать другие решения. Для уравнения с постоянными коэффициентами запишем характеристическое уравнение $\lambda^2 + \mu = 0$. В зависимости от знака постоянной μ возможны три случая:

- $\mu < 0$, пусть $\mu = -k^2$. Тогда $\lambda_{1,2} = \pm k$ – вещественные корни и общее решение уравнения имеет вид $X = C_1 e^{kx} + C_2 e^{-kx}$. Краевые условия приводят к линейной системе

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0, \\ C_1 e^{k\ell} + C_2 e^{-k\ell} = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 0, \\ C_2 = 0. \end{cases}$$

Значит, в данном случае нетривиальных решений нет.

- $\mu = 0$. Тогда $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ и $X = C_1 + C_2 x$. Значения постоянных, при которых удовлетворяются краевые условия также имеют вид $C_1 = C_2 = 0$. Нетривиальных решений нет.

- $\mu > 0$, пусть $\mu = k^2$. Тогда $\lambda_{1,2} = \pm ik$ – чисто мнимые корни и общее решение уравнения имеет вид $X = C_1 \cos(kx) + C_2 \sin(kx)$. Краевые условия приводят к линейной системе

$$\begin{cases} C_1 = 0, \\ C_2 \sin(k\ell) = 0. \end{cases} \Rightarrow k\ell = \pi n \Rightarrow k = \frac{\pi n}{\ell}.$$

Итак, найдена бесконечная последовательность нетривиальных решений

$$X_n(x) = \sin \frac{\pi n x}{\ell}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Далее для значений $\mu = k^2 = \left(\frac{\pi n}{\ell}\right)^2$ решим уравнение для функции $T(t)$:

$$T' + \left(\frac{a\pi n}{\ell}\right)^2 T = 0 \Rightarrow \lambda + \left(\frac{a\pi n}{\ell}\right)^2 = 0 \Rightarrow T_n(t) = e^{-\left(\frac{a\pi n}{\ell}\right)^2 t}.$$

Бесконечная последовательность частных решений, удовлетворяющая уравнению и двум краевым условиям системы (49.1), найдена:

$$u_n(t, x) = T_n(t)X_n(x) = \sin \frac{\pi n x}{\ell} \cdot e^{-\left(\frac{a\pi n}{\ell}\right)^2 t}.$$

Общее решение запишем в виде линейной комбинации полученных частных решений

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n u_n(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{\pi n x}{\ell} e^{-\left(\frac{a\pi n}{\ell}\right)^2 t}.$$

Заметим, что все u_n удовлетворяют граничным условиям $u|_{x=0} = u|_{x=\ell} = 0$, поэтому их линейная комбинация также будет удовлетворять этим условиям. Для нахождения значений постоянных C_n используем начальное условие $u|_{t=0} = \varphi(x)$, что приводит к уравнению

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{\pi n x}{\ell}.$$

Данная задача является задачей нахождения коэффициентов разложения функции в ряд Фурье по синусам (см. §34). Её решение имеет вид

$$C_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \varphi(x) \sin \frac{\pi n x}{\ell} dx.$$

Пример 49.3. Решить следующую краевую задачу

$$\begin{cases} u'_t = u''_{xx}, \\ u|_{t=0} = 1, \\ u|_{x=0} = u|_{x=\pi} = 0. \end{cases}$$

Ранее задача была решена в общем случае, используем полученное решение, взяв $\ell = \pi$, $a = 1$ и $\varphi(x) = 1$. Найдём коэффициенты

$$C_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(nx) dx = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1 - \cos(\pi n)}{n} = \begin{cases} \frac{4}{\pi n}, & n = 2k - 1, \\ 0, & n = 2k. \end{cases}$$

Запишем ответ:

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin(nx) e^{-n^2 t} = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin((2k-1)x)}{2k-1} e^{-(2k-1)^2 t}. \quad \#$$

Метод Фурье решения краевой задачи для волнового уравнения. Сформулируем задачу. Струна длины ℓ расположена между точками $x = 0$ и $x = \ell$. В начальный момент времени ($t = 0$) известно положение $\varphi(x)$ и скорость $\psi(x)$ каждой точки струны. Её концы закреплены. Требуется найти отклонение $u(x, t)$ струны в любой точке в любой момент времени.

Краевая задача имеет следующий вид

$$\begin{cases} u''_{tt} = a^2 u''_{xx}, \\ u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u'_t|_{t=0} = \psi(x), \\ u|_{x=0} = u|_{x=\ell} = 0. \end{cases}$$

Как и для уравнения диффузии, ищем частные решения, имеющие специальный вид $u(t, x) = T(t)X(x)$. Подставив данное выражение в волновое уравнение, получим

$$T''X = a^2 T X'' \Rightarrow \frac{1}{a^2} \frac{T''}{T} = \frac{X''}{X} = -k^2 = \text{const}$$

Граничным условиям $u|_{x=0} = u|_{x=\ell} = 0$ соответствуют условия $X(0) = X(\ell) = 0$. Краевая задача для функции $X(x)$

$$\begin{cases} X'' + k^2 X = 0, \\ X(0) = X(\ell) = 0 \end{cases}$$

получилась такой же, как и для уравнения диффузии. Поэтому

$$X_n(x) = \sin \frac{\pi n x}{\ell}, \quad k = \frac{\pi n}{\ell}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Решим уравнение для функции $T(t)$:

$$T'' + \left(\frac{a\pi n}{\ell}\right)^2 T = 0 \Rightarrow \lambda^2 + \left(\frac{a\pi n}{\ell}\right)^2 = 0 \Rightarrow$$

$$T_n(t) = A_n \cos \frac{a\pi n t}{\ell} + B_n \sin \frac{a\pi n t}{\ell}.$$

В итоге получим:

$$u_n(t, x) = T_n(t)X_n(x) = \left(A_n \cos \frac{a\pi n t}{\ell} + B_n \sin \frac{a\pi n t}{\ell}\right) \sin \frac{\pi n x}{\ell}.$$

Общее решение имеет вид ряда:

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{a\pi n t}{\ell} + B_n \sin \frac{a\pi n t}{\ell}\right) \sin \frac{\pi n x}{\ell}.$$

Для нахождения постоянных A_n, B_n используем начальные условия $u|_{t=0} = \varphi(x)$, $u'_t|_{t=0} = \psi(x)$, откуда

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{\pi n x}{\ell} \Rightarrow A_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \varphi(x) \sin \frac{\pi n x}{\ell} dx,$$

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{a\pi n}{\ell} \sin \frac{\pi n x}{\ell} \Rightarrow B_n = \frac{2}{a\pi n} \int_0^{\ell} \psi(x) \sin \frac{\pi n x}{\ell} dx.$$

Пример 49.4. Решить следующую краевую задачу

$$\begin{cases} u''_{tt} = u''_{xx}, \\ u'_t|_{t=0} = 1, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}, \\ u'_t|_{t=0} = 0, \quad \frac{\pi}{2} < x < \pi, \\ u|_{t=0} = u|_{x=0} = u|_{x=\pi} = 0. \end{cases}$$

Используем полученное ранее решение при условиях $a = 1$, $\ell = \pi$, $\varphi(x) = 0$, откуда $A_n = 0$ и

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(nx) \sin(nt).$$

Найдём коэффициенты разложения функции в ряд Фурье:

$$B_n = \frac{2}{\pi n} \int_0^{\pi/2} \sin(nx) dx = \frac{2}{\pi n^2} \left(1 - \cos \frac{n\pi}{2}\right) \Rightarrow$$

$$u(t, x) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left(1 - \cos \frac{n\pi}{2}\right) \sin(nx) \sin(nt). \quad \#$$

Метод Фурье решения краевой задачи для уравнения Лапласа в прямоугольнике. Дадим постановку задачи. Имеется прямоугольная пластина длины ℓ и высоты h . Температура в каждой точке всех четырёх сторон пластины известна и не меняется с течением времени: $u|_{y=0} = \varphi_0(x)$, $u|_{y=h} = \varphi_1(x)$, $u|_{x=0} = \psi_0(y)$, $u|_{x=\ell} = \psi_1(y)$. Требуется найти установившуюся температуру $u(x, y)$ в любой точке пластины.

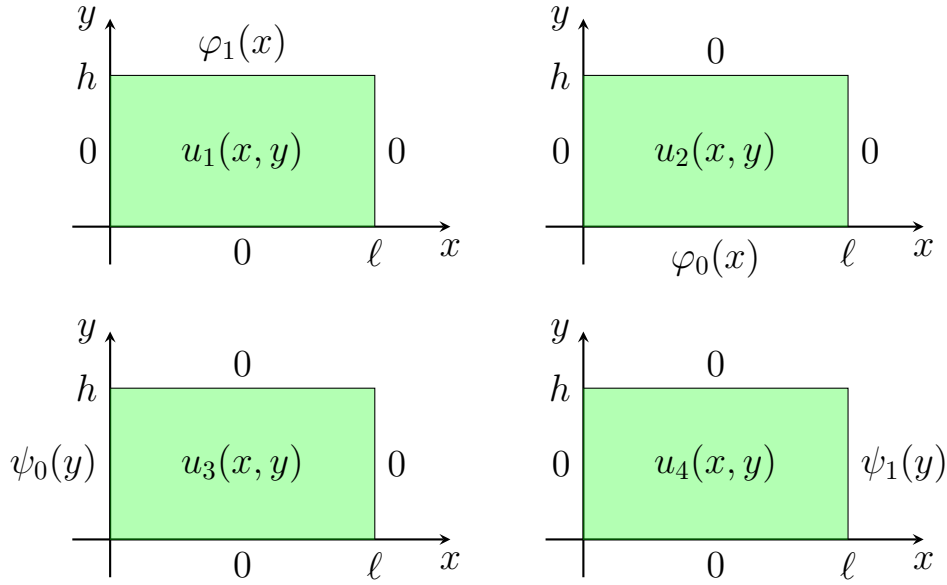
Ранее была решена задача для одномерного уравнения диффузии. В данной задаче идет речь о пластине, процесс распространения тепла в ней описывается двумерным уравнением диффузии. Но, т.к. требуется найти стационарное решение, частная производная по времени равна нулю, и уравнение приобретает вид:

$$u'_t = a^2(u''_{xx} + u''_{yy}) \Rightarrow \{u'_t = 0\} \Rightarrow u''_{xx} + u''_{yy} = 0.$$

Температура $u(x, y)$ является функцией двух пространственных переменных, в задаче присутствуют упомянутые выше 4 граничных условия.

$$\begin{cases} u''_{xx} + u''_{yy} = 0, \\ u|_{y=0} = \varphi_0(x), \quad u|_{y=h} = \varphi_1(x), \\ u|_{x=0} = \psi_0(y), \quad u|_{x=\ell} = \psi_1(y). \end{cases}$$

Упростим задачу, пусть $u(x, y) = u_1(x, y) + u_2(x, y) + u_3(x, y) + u_4(x, y)$, где каждая из функций удовлетворяет более простым граничным условиям, представленным на рисунке.



Сложив все четыре функции, получим функцию, удовлетворяющую заданным граничным условиям. Далее рассмотрим лишь задачу для функции $u_1(x, y)$, задачи для других функций рассматриваются аналогично. Задача для u_1 выглядит так:

$$\begin{cases} u''_{xx} + u''_{yy} = 0, \\ u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=\ell} = 0, \\ u|_{y=0} = 0, \quad u|_{y=h} = \varphi(x). \end{cases}$$

Ищем частные решение специального вида $u(x, y) = X(x)Y(y)$. Подставив в исходное уравнение, получим:

$$X''Y + XY'' = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = -k^2 = \text{const}.$$

Краевая задача для функции $X(x)$ с учётом граничных условий, записанных во второй строке системы, имеет знакомый вид:

$$\begin{cases} X'' + k^2 X = 0, \\ X(0) = X(\ell) = 0. \end{cases}$$

Сразу запишем её решение:

$$X_n(x) = \sin \frac{\pi n x}{\ell}, \quad k = \frac{\pi n}{\ell}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Для функций $Y_n(y)$ потребуем, чтобы они удовлетворяли дифференциальному уравнению и граничному условию на нижней стенке:

$$\begin{cases} Y'' - \left(\frac{\pi n}{\ell}\right)^2 Y = 0, \\ Y(0) = 0. \end{cases}$$

Запишем общее решение этого уравнения:

$$\lambda^2 - \left(\frac{\pi n}{\ell}\right)^2 = 0 \Rightarrow Y_n(y) = A_n e^{\frac{\pi n y}{\ell}} + B_n e^{-\frac{\pi n y}{\ell}}.$$

Граничное условие приводит к связи постоянных $A_n + B_n = 0$, откуда

$$Y_n(y) = 2A_n \operatorname{sh} \frac{\pi n y}{\ell} = C_n \operatorname{sh} \frac{\pi n y}{\ell}.$$

Общее решение запишем в виде линейной комбинации частных решений:

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n Y_n = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \operatorname{sh} \frac{\pi n y}{\ell} \sin \frac{\pi n x}{\ell}.$$

Осталось найти значения постоянных C_n , из последнего граничного условия $u|_{y=h} = \varphi(x)$ следует

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(C_n \operatorname{sh} \frac{\pi n h}{\ell} \right) \sin \frac{\pi n x}{\ell} \Rightarrow C_n = \frac{2}{\ell \operatorname{sh} \frac{\pi n h}{\ell}} \int_0^{\ell} \varphi(x) \sin \frac{\pi n x}{\ell} dx.$$

Пример 49.5. Решить следующую краевую задачу

$$\begin{cases} u''_{xx} + u''_{yy} = 0, \\ u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=\pi} = 0, \\ u|_{y=0} = 0, \quad u|_{y=1} = 1. \end{cases}$$

Запишем полученное выше общее решение, приняв $\ell = \pi$, $h = 1$:

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \operatorname{sh}(ny) \sin(nx),$$

$$C_n = \frac{2}{\pi \operatorname{sh}(n)} \int_0^{\pi} \sin(nx) dx = \begin{cases} \frac{4}{\pi n \operatorname{sh}(n)}, & n = 2k - 1, \\ 0, & n = 2k. \end{cases}$$

Подставив, получим ответ

$$u(x, y) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sh}((2k-1)y)}{\operatorname{sh}(2k-1)} \cdot \frac{\sin((2k-1)x)}{2k-1}.$$

#

Глава 8.

Интегральное исчисление (фнп)

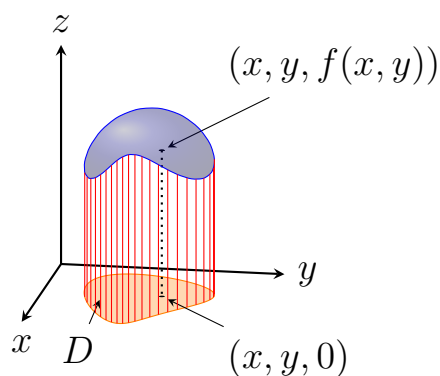
Ротор поля наподобие
дивергенции градуирует себя
вдоль спина и там, внутри,
обращает материю вопроса в
спиритуальные электрические
вихри, из коих и возникает
синекдоха отвечаия...

А. и Б. Стругацкие. Сказке о
тройке

§50. Кратные интегралы

Определение двойного интеграла. Пусть функция $z = f(x, y)$ определена в ограниченной области D площади S .

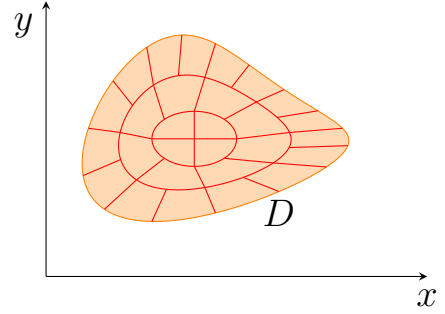
Далее, для удобства геометрической интерпретации, предположим, что эта функция является непрерывной и положительной ($f(x, y) > 0$) в данной области. Построим поверхность, являющуюся графиком этой функции, и определим так называемый криволинейный цилиндр – тело,



ограниченное снизу областью D , являющуюся частью плоскости Oxy , сверху – поверхностью $z = f(x, y)$, а с боков – цилиндрической поверхностью, образованной семейством прямых, параллельных оси Oz и проходящих через границу D . Поставим себе задачу нахождения объёма V этого тела.

Для этого проделаем следующие операции:

- Разобьём D на n частей D_k с площадями ΔS_k .
- На каждой части произвольно выберем точку $M_k(x_k, y_k)$ и вычислим $V_k = f(x_k, y_k)\Delta S_k$ – объём цилиндра с основанием D_k и высотой $z_k = f(x_k, y_k)$.
- Тело, полученное объединением всех цилиндров, назовем ступенчатым телом. Сложив все объёмы V_k , получим так называемую интегральную сумму $\sum_{k=1}^n V_k = \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k)\Delta S_k$, определяющую объём ступенчатого тела.
- Для каждой части найдём диаметр d_k – расстояние между наиболее удалёнными точками части D_k . Пусть λ – наибольший диаметр. Устремим $\lambda \rightarrow 0$, при этом $n \rightarrow \infty$. Ступенчатое тело по форме будет приближаться к криволинейному цилиндру.
- Если существует предел интегральной суммы и он не зависит от способа разбиения D и от выбора точек M_k , то такой предел называется *двойным интегралом* от функции $f(x, y)$ по области D . Этот интеграл обозначается как $\iint_D f(x, y) dS$, где dS – дифференциальный элемент площади.



Итак, по определению, двойной интеграл – это число, равное пределу интегральной суммы:

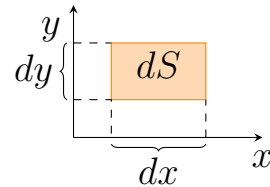
$$\iint_D f(x, y) dS = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k) \Delta S_k. \quad (50.1)$$

В случае, когда $f(x, y)$ – непрерывная положительная функция, значение двойного интеграла равно объёму V криволинейного цилиндра. Но предел (50.1) может также существовать и для других функций, поэтому непрерывность и положительность функции не является необходимым условием для существования двойного интеграла.

Задание. Вспомните определение определённого интеграла (§29) и найдите общие принципы, по которым определяются два данных типа интеграла.

Эти принципы также будут использоваться при определении и других интегралов – тройного, криволинейных и поверхностных.

В случае прямоугольных координат дифференциальный элемент площади dS записывают как произведение дифференциалов независимых переменных $dS = dxdy$. Функция $f(x, y)$ называется *интегрируемой* в области D , если существует соответствующий двойной интеграл. В



закключение приведём без доказательства две теоремы.

Теорема 50.1 (Достаточное условие интегрируемости). *Если функция $f(x, y)$ непрерывна в области D , то она интегрируема по этой области.*

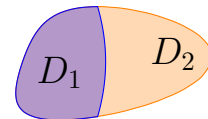
Теорема 50.2 (Необходимое условие интегрируемости). *Если функция $f(x, y)$ интегрируема по области D , то она ограничена в этой области.*

Свойства двойного интеграла.

1. Интегрирование по области с нулевой площадью. Пусть S – площадь области D . Если $S = 0$, то $\iint_D f(x, y) dxdy = 0$.

2. Аддитивность. Разобьём область интегрирования D на две подобласти: $D = D_1 \cup D_2$. Тогда

$$\iint_D f dxdy = \iint_{D_1} f dxdy + \iint_{D_2} f dxdy.$$



3. Линейность. Справедливы следующие свойства:

$$\iint_D Af(x, y) dxdy = A \iint_D f(x, y) dxdy,$$

$$\iint_D [f(x, y) + g(x, y)] dxdy = \iint_D f(x, y) dxdy + \iint_D g(x, y) dxdy.$$

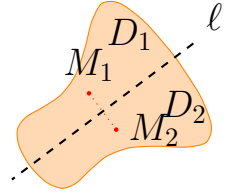
4. Монотонность. Пусть $f(x, y) \geq g(x, y)$. Тогда

$$\iint_D f(x, y) dxdy \geq \iint_D g(x, y) dxdy.$$

Отсюда, в частности, следует, что если $f(x, y) \geq 0$, то двойной интеграл также является неотрицательным числом.

5. Интеграл по симметричной области.

Если область D симметрична относительно некоторой прямой ℓ , то D можно представить как объединение двух подобластей D_1 и D_2 . Пусть M_1 – произвольная точка из D_1 , а M_2 – симметричная ей точка в D_2 .



Если $f(M_1) = -f(M_2)$ (аналог нечётной функции), то $\iint_D f \, dx dy = 0$.

Если $f(M_1) = f(M_2)$ (аналог чётной функции), то $\iint_D f \, dx dy = 2 \iint_{D_1} f \, dx dy$.

Область D называется *связной*, если любые две точки этой области можно соединить кривой, полностью лежащей внутри этой области. Для связных областей ещё одно свойство сформулируем в виде теоремы.

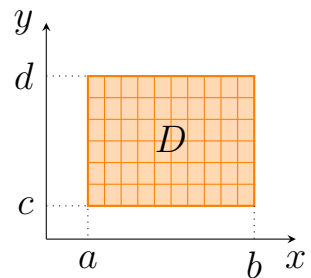
Теорема 50.3 (Теорема о среднем для двойного интеграла). Если функция $f(x, y)$ непрерывна в некоторой связной области D площади S , то существует такая точка $M(x_m, y_m) \in D$, что

$$\iint_D f(x, y) \, dx dy = f(x_m, y_m) \cdot S.$$

Теорему примем без доказательства. *Интегральным средним значением* M функции $f(x, y)$ в области D называют число

$$M = \frac{1}{S} \iint_D f(x, y) \, dx dy.$$

Вычисление двойного интеграла. Пусть D – прямоугольник, стороны которого параллельны осям координат. В качестве разбиения этой области выберем разбиение на прямоугольники со сторонами Δx_i и Δy_j . Обозначим также $\lambda_x = \max(\Delta x_i)$, $\lambda_y = \max(\Delta y_j)$.



Определим функцию $I(x) = \int_c^d f(x, y) \, dy$.

По определению двойного интеграла

$$\begin{aligned} \iint_D f(x, y) dx dy &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(x_i, y_j) \Delta x_i \Delta y_j = \\ &= \lim_{\lambda_x \rightarrow 0} \sum_{i=1}^m \left(\lim_{\lambda_y \rightarrow 0} \sum_{j=1}^n f(x_i, y_j) \Delta y_j \right) \Delta x_i. \end{aligned}$$

Выражение, стоящее в скобках, представляет собой предел интегральной суммы определённого интеграла $I(x)$ (см. §29), т.е. справедливо равенство

$$\lim_{\lambda_y \rightarrow 0} \sum_{j=1}^n f(x, y_j) \Delta y_j = I(x).$$

Поэтому
$$\iint_D f(x, y) dx dy = \lim_{\lambda_x \rightarrow 0} \sum_{i=1}^m I(x_i) \Delta x_i = \int_a^b I(x) dx.$$

По аналогичной схеме можно также показать, что

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d J(y) dy, \quad \text{где } J(y) = \int_a^b f(x, y) dx.$$

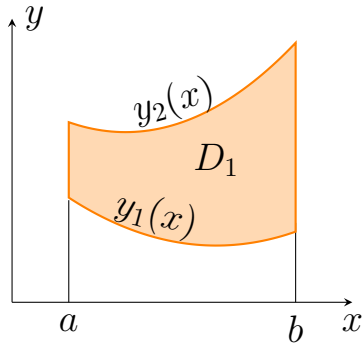
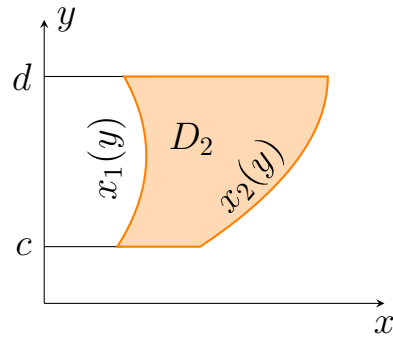
Итак, если областью интегрирования является прямоугольник $x \in [a, b]$, $y \in [c, d]$, то двойной интеграл можно вычислить через определённые:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy.$$

Данная формула называется сведением двойного интеграла к повторным. В дальнейшем, чтобы не ставить скобки, дифференциал y внешнего интеграла мы будем писать не в конце, а сразу после знака интеграла:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx.$$

Простой областью по x называется область, если каждая прямая, параллельная оси y , либо пересекает границу области не более чем в двух точках, либо имеет на этой границе целый отрезок. Аналогично вводится определение *простой области по y* .

Простая область по x Простая область по y

Задание. Обоснуйте, почему первая область на рисунке не будет являться простой по y и почему вторая область не будет простой по x .

Пусть D_1 – простая область по x . Тогда

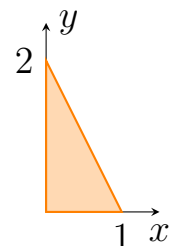
$$\iint_{D_1} f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy.$$

Аналогично, если D_2 – простая область по y , то

$$\iint_{D_2} f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y) dx.$$

Области, не являющиеся простыми, называются *сложными*. Для вычисления двойных интегралов по таким областям можно использовать свойство аддитивности, т.е. разбивать сложную область на несколько простых. Тогда интеграл по сложной области будет равен сумме интегралов по всем простым областям.

Пример 50.1. Вычислить интеграл от функции $f(x, y) = x^2 + 2xy$ по треугольнику D , образованному прямой $y = 2 - 2x$ и осями координат.

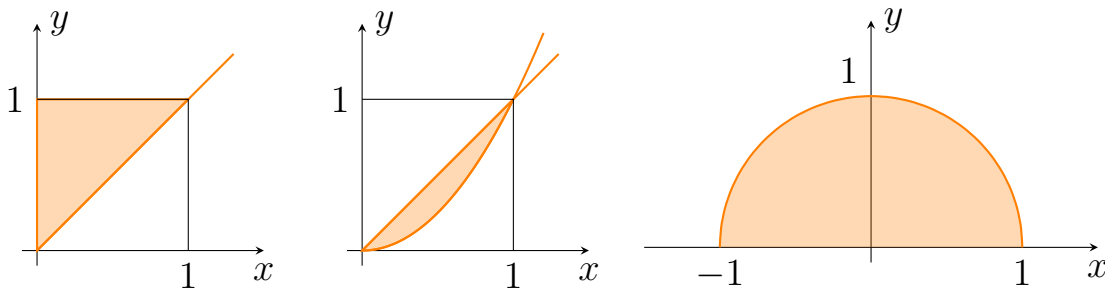


Данная область является простой как по x , так и по y . Используем формулу для простой области по x :

$$\iint_D (x^2 + 2xy) dx dy = \int_0^1 dx \int_0^{2-2x} (x^2 + 2xy) dy = \int_0^1 dx (x^2 y + xy^2) \Big|_0^{2-2x} =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 (x^2(2-2x) + x(2-2x)^2) dx = \int_0^1 (2x^2 - 2x^3 + 4x - 8x^2 + 4x^3) dx = \\
&= \int_0^1 (4x - 6x^2 + 2x^3) dx = \frac{4x^2}{2} - \frac{6x^3}{3} + \frac{2x^4}{4} \Big|_0^1 = 2x^2 - 2x^3 + \frac{x^4}{2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2}. \quad \#
\end{aligned}$$

Пример 50.2. Записать двойные интегралы для изображенных на рисунке областей через повторные двумя различными способами:



$$I_1 = \int_0^1 dx \int_x^1 f dy = \int_0^1 dy \int_0^y f dx.$$

$$I_2 = \int_0^1 dx \int_{x^2}^x f dy = \int_0^1 dy \int_y^{\sqrt{y}} f dx.$$

$$I_3 = \int_{-1}^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f dy = \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f dx. \quad \#$$

Определение тройного интеграла Пусть функция $f(x, y, z)$ определена в ограниченной области T . Дадим определение тройного интеграла, используя шаги, аналогичные тем, которые использовались при определении двойного интеграла.

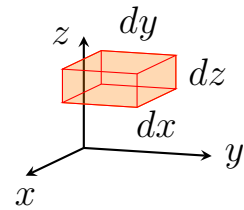
- Разобьём T на n частей T_k с объёмами ΔV_k .
- В каждой части T_k выберем произвольную точку $M_k(x_k, y_k, z_k)$.
- Составим интегральную сумму $\sum_{k=1}^n f(x_k, y_k, z_k) \Delta V_k$.

- Для каждой части найдём диаметр d_k – расстояние между наиболее удалёнными точками части T_k . Пусть λ – наибольший диаметр. Устремим $\lambda \rightarrow 0$, при этом $n \rightarrow \infty$.
- Если существует предел интегральной суммы, не зависящий от способа разбиения T и выбора точек M_k , то такой предел называется *тройным интегралом* от функции $f(x, y, z)$ по области T . Этот интеграл обозначается как $\iiint_T f(x, y, z) dV$, где dV – дифференциальный элемент объёма.

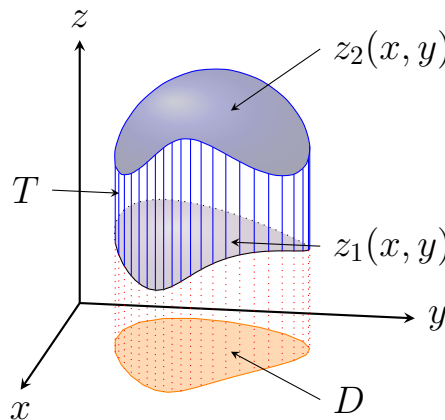
Итак, по определению, тройной интеграл – это число, равное пределу

$$\iiint_T f(x, y, z) dV = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k, z_k) \Delta V_k.$$

В случае прямоугольных координат дифференциальный элемент объёма dV записывают как произведение дифференциалов независимых переменных $dV = dxdydz$.



Сведение тройного интеграла к повторным. Пусть область T – цилиндр, заданный уравнением: $z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y)$, где $(x, y) \in D$, т.е. D – проекция области T на плоскость Oxy .



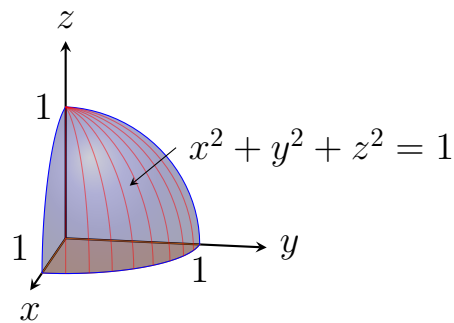
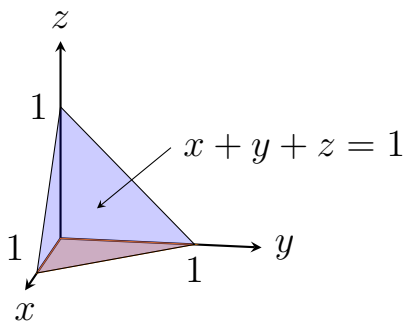
Тогда тройной интеграл можно свести к повторным:

$$\iiint_T f(x, y, z) dxdydz = \iint_D \left(\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z) dz \right) dxdy =$$

$$= \int_a^b \left[\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \left(\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z) dz \right) dy \right] dx = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z) dz.$$

Здесь считается, что D – простая область по x , а графики функций $y_1(x)$ и $y_2(x)$ являются её нижней и верхней границами.

Пример 50.3. Записать тройные интегралы через повторные для следующих областей:



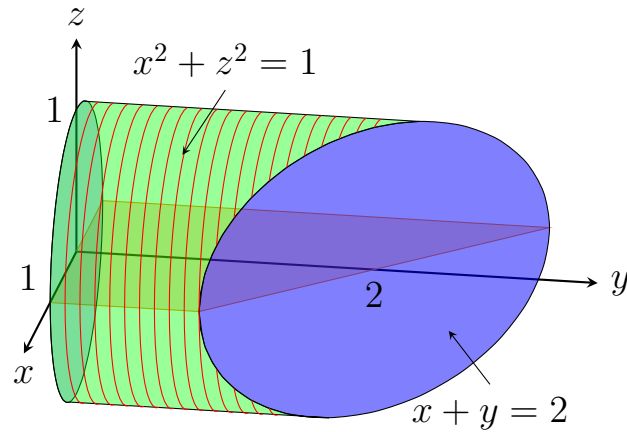
В первом случае областью D является прямоугольный треугольник с единичными катетами, а во втором случае D – четверть окружности единичного радиуса. Поэтому

$$I_1 = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} f(x, y, z) dz,$$

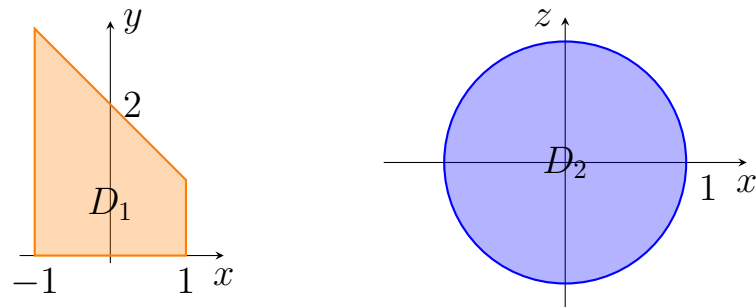
$$I_2 = \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} f(x, y, z) dz. \quad \#$$

Заметим, что приведённый порядок интегрирования – вначале по z , потом по y и в конце по x – не является обязательным. Возможно интегрирование и в другом порядке, всего существует $3! = 6$ различных способов сведения тройного интеграла к повторным.

Пример 50.4. Записать тройной интеграл различными способами через повторные для следующей области, являющейся усечённым цилиндром:



Для удобства сделаем проекции области на координатные плоскости Oxy и Oxz . Обозначим эти области как D_1 и D_2 :



$$I = \int_{-1}^1 dx \int_0^{2-x} dy \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y, z) dz,$$

$$I = \int_0^1 dy \int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y, z) dz + \int_1^3 dy \int_{-1}^{2-y} dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y, z) dz,$$

$$I = \int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dz \int_0^{2-x} f(x, y, z) dy,$$

$$I = \int_{-1}^1 dz \int_{-\sqrt{1-z^2}}^{\sqrt{1-z^2}} dx \int_0^{2-x} f(x, y, z) dy.$$

#

Задание. Какие ещё два способа записи данного тройного интеграла через повторные существуют?

Свойства тройного интеграла. Тройной интеграл обладает свойствами, аналогичными свойствам двойного интеграла. К ним относят интегрирование по области нулевого объёма, аддитивность, линейность, монотонность, свойства симметрии. Также, для тройного интеграла справедлива

Теорема 50.4 (Теорема о среднем для тройного интеграла). *Если функция $f(x, y, z)$ непрерывна в связной области T объёма V , то существует такая точка $M(x_m, y_m, z_m) \in T$, что*

$$\iiint_T f(x, y, z) \, dx dy dz = f(x_m, y_m, z_m) \cdot V.$$

Интегральным средним значением M функции $f(x, y, z)$ в области T называют число

$$M = \frac{1}{V} \iiint_T f(x, y, z) \, dx dy dz.$$

Пример 50.5. Найти интегральное среднее M функции $f(x, y, z) = xy^2z^3$ в параллелепипеде $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 2$, $0 \leq z \leq 3$.

Запишем тройной интеграл через повторные. Областью интегрирования является параллелепипед, поэтому все пределы интегрирования будут постоянными. Подынтегральная функция является произведением трёх функций, каждая из которых зависит от своей независимой переменной. В этом случае каждый из повторных интегралов можно вычислить независимо от других:

$$\begin{aligned} M &= \frac{1}{V} \iiint_T xy^2z^3 \, dx dy dz = \frac{1}{6} \int_0^1 dx \int_0^2 dy \int_0^3 xy^2z^3 dz = \\ &= \frac{1}{6} \int_0^1 x dx \cdot \int_0^2 y^2 dy \cdot \int_0^3 z^3 dz = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{3} \cdot \frac{81}{4} = \frac{9}{2}. \end{aligned} \quad \#$$

§51. Замена переменных в кратных интегралах

Пусть $f(x, y)$ – непрерывная в области D функция. Согласно достаточному условию интегрируемости, существует двойной интеграл

$$\iint_D f(x, y) dx dy.$$

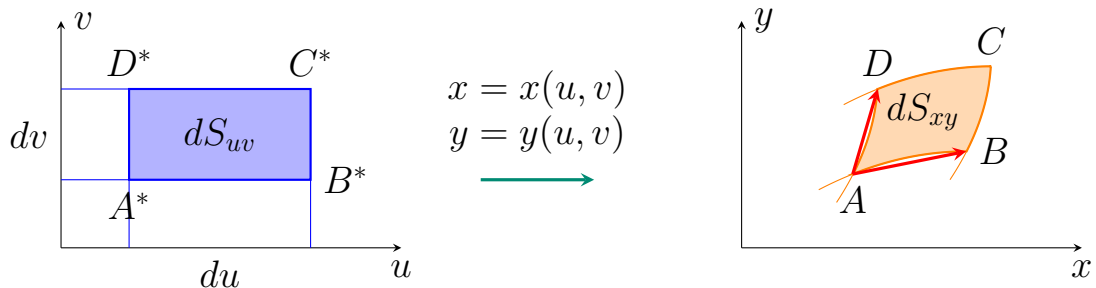
Перейдём к новым переменным u и v , которые связаны со старыми соотношениями $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$. Обе эти функции будем считать дифференцируемыми, т.е. имеющими непрерывные частные производные. Области D , расположенной в плоскости Oxy , будет соответствовать некоторая область D^* , расположенная в плоскости Ouv . Тогда для двойного интеграла справедлива формула

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D^*} f(x(u, v), y(u, v)) \cdot |J| \cdot du dv,$$

где $|J|$ – модуль якобиана¹

$$J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

Докажем эту формулу.



В плоскости Ouv рассмотрим прямоугольник со сторонами du и dv и площадью $dS_{uv} = du dv$. В плоскости Oxy , согласно формулам связи координат $x = x(u, v)$ и $y = y(u, v)$, этому прямоугольнику соответствует

¹Понятие якобиана было дано в §38.

некоторая фигура площади dS_{xy} . Пусть точка $A^*(u_0, v_0)$ переходит в точку $A(x_0, y_0)$. Рассмотрим произвольную точку (u, v) из малой окрестности точки A . Эта точка перейдет в точку с координатами

$$\begin{aligned}x &= x_0 + dx = x_0 + \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv, \\y &= y_0 + dy = y_0 + \frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv,\end{aligned}$$

где $du = u - u_0$, $dv = v - v_0$.

Поэтому точка $B^*(u_0 + du, v_0)$ перейдет в точку $B(x_0 + \frac{\partial x}{\partial u} du, y_0 + \frac{\partial y}{\partial u} du)$; точка $C^*(u_0 + du, v_0 + dv)$ перейдет в точку $C(x_0 + \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv, y_0 + \frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv)$; точка $D^*(u_0, v_0 + dv)$ перейдет в точку $D(x_0 + \frac{\partial x}{\partial v} dv, y_0 + \frac{\partial y}{\partial v} dv)$.

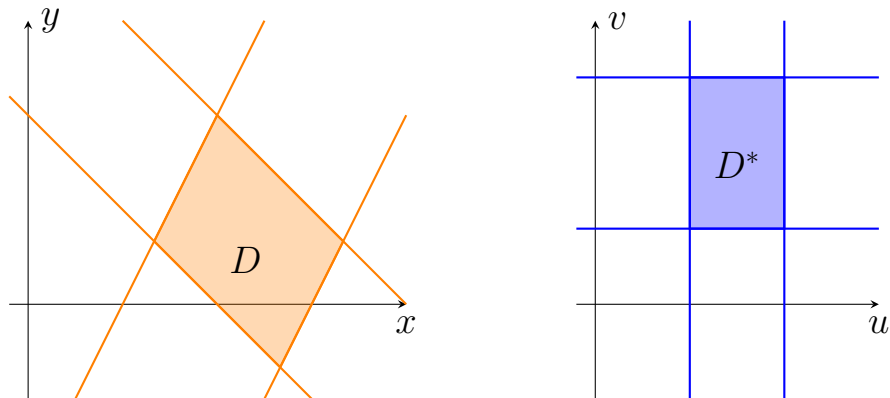
Вычислим площадь dS_{xy} параллелограмма $ABCD$, используя геометрический смысл определителя второго порядка. Площадь этого параллелограмма равна модулю определителя, столбцы которого составлены из координат векторов $\overrightarrow{AB} \left\{ \frac{\partial x}{\partial u} du, \frac{\partial y}{\partial u} du \right\}$ и $\overrightarrow{AD} \left\{ \frac{\partial x}{\partial v} dv, \frac{\partial y}{\partial v} dv \right\}$:

$$dS_{xy} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} du & \frac{\partial x}{\partial v} dv \\ \frac{\partial y}{\partial u} du & \frac{\partial y}{\partial v} dv \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} dudv = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| \cdot dS_{uv}. \quad (51.1)$$

Формула замены переменных в двойном интеграле доказана. Для тройного интеграла формула выглядит аналогично, при переходе от переменных (x, y, z) к переменным (u, v, w) дифференциальный элемент объёма $dV = dxdydz = |J| \cdot dudv dw$, где якобиан J представляет собой определитель матрицы третьего порядка.

Пример 51.1. Вычислить интеграл $\iint_D (2x - y) dxdy$, где D – параллелограмм $1 \leq x + y \leq 2$, $1 \leq 2x - y \leq 3$.

Изобразим область интегрирования D в плоскости Oxy . Она представляет собой параллелограмм.



Введём новые переменные: $u = x + y$, $v = 2x - y$. Область D^* задаётся неравенствами $1 \leq u \leq 2$, $1 \leq v \leq 3$ и представляет собой прямоугольник. Найдём формулы обратного перехода и вычислим якобиан:

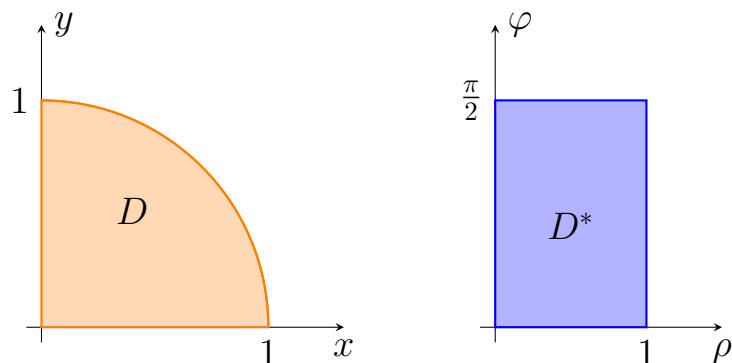
$$\begin{cases} u = x + y, \\ v = 2x - y, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{u+v}{3}, \\ y = \frac{2u-v}{3}, \end{cases} \Rightarrow J = \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{vmatrix} = -\frac{1}{3}.$$

Делаем замену переменных в двойном интеграле:

$$\iint_D (2x - y) dx dy = \iint_{D^*} \frac{v}{3} du dv = \frac{1}{3} \int_1^2 du \int_1^3 v dv = \frac{1}{3} \left(\frac{9}{2} - \frac{1}{2} \right) = \frac{4}{3}. \quad \#$$

Пример 51.2. Вычислить интеграл $\iint_D e^{x^2+y^2} dx dy$, где D – четверть круга $x^2 + y^2 = 1$, расположенная в первом квадранте.

Перейдём к полярным координатам $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$. В плоскости Ouv областью интегрирования будет прямоугольник $0 \leq \rho \leq 1$, $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$.



Якобиан перехода к полярным координатам

$$J = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\rho \sin \varphi \\ \sin \varphi & \rho \cos \varphi \end{vmatrix} = \rho \cos^2 \varphi + \rho \sin^2 \varphi = \rho.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \iint_D e^{x^2+y^2} dx dy &= \iint_{D^*} e^{\rho^2} \rho d\rho d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^1 e^{\rho^2} \rho d\rho = \\ &= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{e-1}{2} = \frac{\pi(e-1)}{4}. \end{aligned} \quad \#$$

Пример 51.3. Вычислить интеграл $I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$.

Данный несобственный интеграл называется интегралом Эйлера – Пуассона. Иногда его также называют интегралом Гаусса, т.к. под знаком интеграла стоит функция Гаусса $f(x) = e^{-x^2}$. Неопределённый интеграл от функции Гаусса не выражается в элементарных функциях, поэтому определённый интеграл нельзя вычислить по формуле Ньютона – Лейбница. Рассмотрим двойной интеграл, где областью интегрирования является вся плоскость Oxy :

$$I^2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy.$$

Перейдём к полярным координатам:

$$I^2 = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-\rho^2} \rho d\rho d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} e^{-\rho^2} \rho d\rho = -2\pi \frac{e^{-\rho^2}}{2} \Big|_0^{\infty} = \pi.$$

Поэтому значение интеграла Эйлера – Пуассона

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}. \quad \#$$

Пример 51.4. Найти якобиан перехода к сферическим координатам.

Напомним, что связь сферических и прямоугольных координат выражается формулой

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi, \\ y = r \sin \theta \sin \varphi, \\ z = r \cos \theta. \end{cases}$$

Найдём якобиан разложением по третьей строке

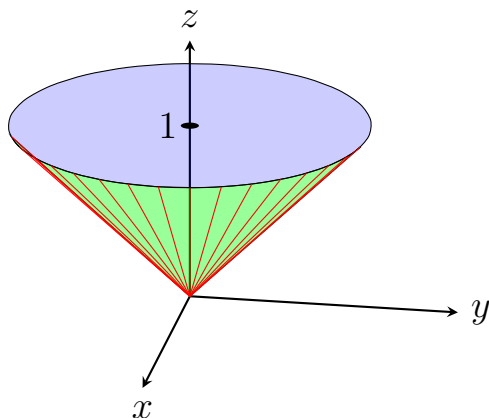
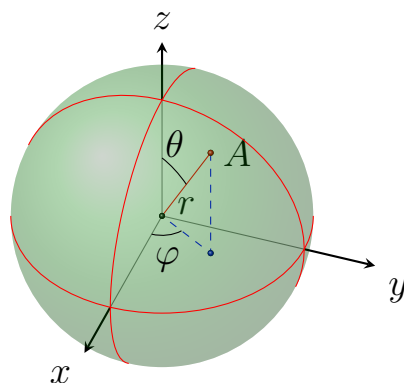
$$\begin{aligned} J &= \begin{vmatrix} \sin \theta \cos \varphi & r \cos \theta \cos \varphi & -r \sin \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & r \cos \theta \sin \varphi & r \sin \theta \cos \varphi \\ \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \end{vmatrix} = \\ &= \cos \theta \cdot (r^2 \cos \theta \sin \theta) + r \sin \theta \cdot (r \sin^2 \theta) = r^2 \sin \theta. \end{aligned} \quad \#$$

Задание. Покажите, что якобиан перехода к цилиндрическим координатам равен ρ , т.е. совпадает с якобианом перехода к полярным координатам.

Пример 51.5. Вычислить интеграл $\iiint_T \sqrt{x^2 + y^2} \, dx dy dz$, где T – конус $\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 1$.

Область интегрирования показана на рисунке, для вычисления интеграла используем переход к цилиндрическим координатам. При этом область интегрирования будет задаваться неравенствами $\rho \leq z \leq 1$:

$$\begin{aligned} I &= \iiint_{T^*} \rho^2 \, d\rho d\varphi dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho^2 d\rho \int_{\rho}^1 dz = 2\pi \int_0^1 \rho^2 d\rho \cdot (1 - \rho) = \\ &= 2\pi \int_0^1 (\rho^2 - \rho^3) \, d\rho = 2\pi \cdot \left(\frac{\rho^3}{3} - \frac{\rho^4}{4} \right) \Big|_0^1 = \frac{\pi}{6}. \end{aligned} \quad \#$$

Область T в примере 51.5Область T в примере 51.6

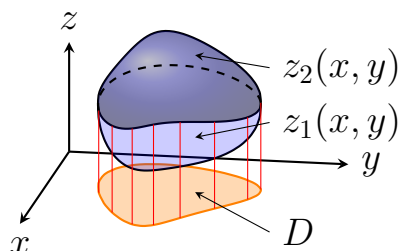
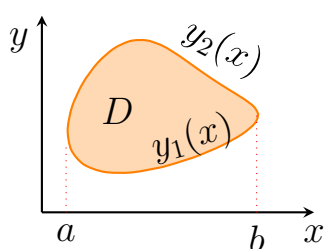
Пример 51.6. Вычислить интеграл $\iiint_T (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz$, где T – шар $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$.

Перейдём в сферические координаты. Якобиан был вычислен ранее. Заметим, что уравнение шара в сферических координатах $0 \leq r \leq R$, поэтому

$$\begin{aligned} I &= \iiint_{T^*} r^2 \cdot r^2 \sin \theta \cdot dr d\theta d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^R r^4 dr = \\ &= 2\pi \cdot (-\cos \theta) \Big|_0^\pi \cdot \frac{r^5}{5} \Big|_0^R = 2\pi \cdot 2 \cdot \frac{R^5}{5} = \frac{4\pi R^5}{5}. \end{aligned} \quad \#$$

§52. Приложения кратных интегралов

Вычисление площадей и объёмов. Заметим, что если подынтегральная функция в двойном интеграле равна единице, то интеграл будет равен площади области. Аналогично, тройной интеграл от единицы равен объёму интегрируемой области.



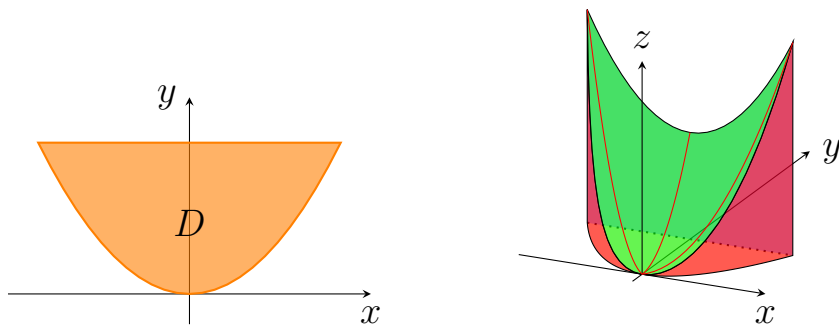
$$S = \iint_D dx dy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy = \int_a^b (y_2(x) - y_1(x)) dx.$$

$$V = \iiint_T dx dy dz = \iint_D dx dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} dz = \iint_D (z_2(x,y) - z_1(x,y)) dx dy.$$

Заметим также, что при вычислении площадей и объёмов можно пользоваться симметрией тела и вычислять площадь/объём лишь части тела. Как правило, границы частей тела, являющиеся плоскостями симметрии, имеют более простые уравнения.

Пример 52.1. Вычислить объём тела, ограниченного поверхностями $z = x^2 + y^2$, $y = x^2$, $z = 0$, $y = 1$.

Данное тело в направлении оси z расположено между плоскостью $z_1 = 0$ и параболоидом $z_2 = x^2 + y^2$. Поверхности $y = x^2$ и $y = 1$ определяют проекцию D тела на плоскость Oxy . Построим эту проекцию и само тело:

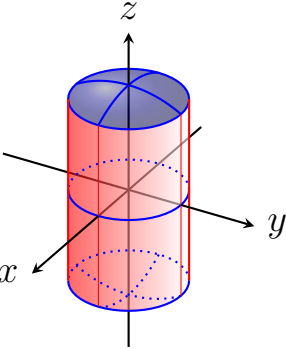


При вычислении объёма используем симметрию и рассмотрим интеграл только по половине тела, лежащей в области $x \geq 0$.

$$\begin{aligned} V &= \iint_D (x^2 + y^2) dx dy = 2 \int_0^1 dx \int_{x^2}^1 (x^2 + y^2) dy = 2 \int_0^1 dx \left(x^2 y + \frac{y^3}{3} \right) \Big|_{x^2}^1 = \\ &= 2 \int_0^1 \left(x^2 - x^4 + \frac{1 - x^6}{3} \right) dx = 2 \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x}{3} - \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{21} \right) \Big|_0^1 = \frac{88}{105}. \quad \# \end{aligned}$$

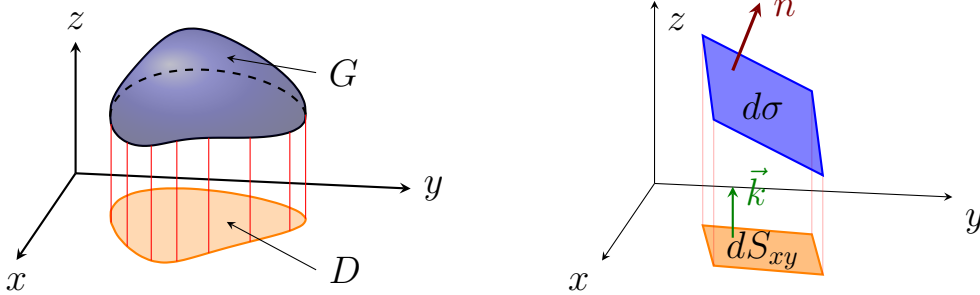
Пример 52.2. Вычислить объём части шара $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$, находящегося внутри цилиндра $x^2 + y^2 \leq r^2$, $0 \leq r \leq R$.

Запишем объём в виде тройного интеграла и перейдём в цилиндрическую систему координат. Также используем симметрию тела относительно трёх координатных плоскостей:



$$\begin{aligned}
 V &= \iiint_T dx dy dz = \iiint_{T^*} \rho d\rho d\varphi dz = \\
 &= 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^r \rho d\rho \int_0^{\sqrt{R^2 - \rho^2}} dz = 4\pi \int_0^r \rho \sqrt{R^2 - \rho^2} d\rho = \\
 &= -\frac{4\pi}{3} \sqrt{(R^2 - \rho^2)^3} \Big|_0^r = \frac{4\pi}{3} \left(R^3 - \sqrt{(R^2 - r^2)^3} \right). \quad \#
 \end{aligned}$$

Вычисление площади криволинейной поверхности. Рассмотрим задачу нахождения площади S поверхности G , которая является графиком функции $z = f(x, y)$. Проекцию поверхности на плоскость Oxy обозначим через D .



Пусть $d\sigma$ – дифференциальный элемент площади поверхности, а dS_{xy} – элемент площади её проекции на плоскость Oxy . Найдём зависимость между ними. Т.к. эти элементы бесконечно малые, можно считать их плоскими. Площадь проекции плоской фигуры равна

$$dS_{xy} = d\sigma \cdot \cos(\widehat{\vec{n}, \vec{k}}) = d\sigma \cdot \frac{(\vec{n}, \vec{k})}{|\vec{n}|}. \quad (52.1)$$

Здесь $\vec{k}$ – единичный вектор оси z , $\vec{n}$ – нормаль к поверхности. Если поверхность задана в явном виде $z = f(x, y)$, то её нормаль имеет координаты $\left\{-\frac{\partial z}{\partial x}, -\frac{\partial z}{\partial y}, 1\right\}$ (см., напр., §37.). Поэтому

$$dS_{xy} = \frac{d\sigma}{\sqrt{z_x'^2 + z_y'^2 + 1}} \Rightarrow d\sigma = \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2} \cdot dS_{xy}. \quad (52.2)$$

Формула для вычисления площади поверхности имеет вид

$$S = \iint_D d\sigma = \iint_D \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2} dx dy.$$

Заметим, что площадь можно вычислить и по проекциям на координатные плоскости Oxz и Oyz .

Если поверхность задана в параметрическом виде $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$, то её нормаль имеет координаты $\vec{n} = \left\{\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}, \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}, \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right\}$ (см., напр., §38). Поэтому, согласно (52.1),

$$dS_{xy} = \frac{|n_z| d\sigma}{\sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2}} \Rightarrow d\sigma = \sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2} \cdot dS_{uv}. \quad (52.3)$$

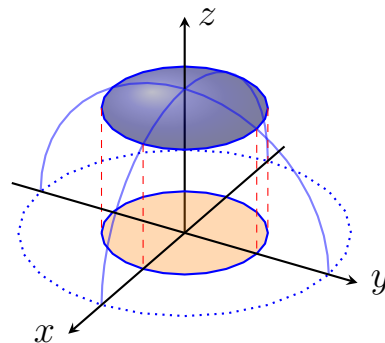
Здесь мы учли связь элементов площадей $dS_{xy} = |n_z| dS_{uv}$ (51.1). Поэтому

$$S = \iint_D d\sigma = \iint_D \sqrt{\left(\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right)^2} du dv.$$

Пример 52.3. Вычислить площадь сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, лежащей выше плоскости $z = h$, $0 \leq h \leq R$.

Запишем уравнение верхней части сферы и найдём производные:

$$\begin{aligned} z &= \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}, \\ z'_x &= \frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}, \\ z'_y &= \frac{-y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}. \end{aligned}$$



Упростим подынтегральную функцию

$$\sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2 - y^2} + \frac{y^2}{R^2 - x^2 - y^2}} = \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}.$$

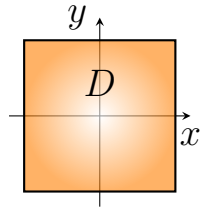
Проекцией D искомой части сферы на координатную плоскость Oxy является круг с центром в начале координат и радиусом $\sqrt{R^2 - h^2}$. В процессе интегрирования сделаем переход в полярную систему координат.

$$\begin{aligned} S &= \iint_D \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} dx dy = \iint_{D^*} \frac{R}{\sqrt{R^2 - \rho^2}} \rho d\rho d\varphi = \\ &= R \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{R^2 - h^2}} \frac{\rho d\rho}{\sqrt{R^2 - \rho^2}} = -2\pi R \sqrt{R^2 - \rho^2} \Big|_0^{\sqrt{R^2 - h^2}} = 2\pi R(R - h). \quad \# \end{aligned}$$

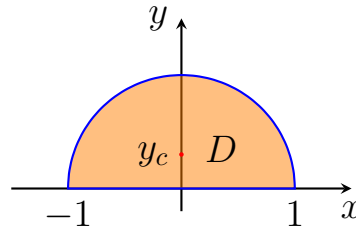
Физические приложения кратных интегралов. Пусть D – плоская пластина, $\rho(x, y)$ – её поверхностная плотность в точке с координатами (x, y) . Тогда масса m пластины и координаты x_c , y_c центра тяжести этой пластины запишутся через двойные интегралы:

$$m = \iint_D \rho(x, y) dx dy, \quad x_c = \frac{1}{m} \iint_D x \rho(x, y) dx dy, \quad y_c = \frac{1}{m} \iint_D y \rho(x, y) dx dy.$$

Пример 52.4. Вычислить массу квадратной пластинки $-a \leq x, y \leq a$, если плотность в каждой точке равна $\rho = x^2 + y^2$.



Область D примера 52.4



Область D примера 52.5

Вычислим массу пластины, используя симметрию:

$$\begin{aligned} m &= \iint_D \rho dx dy = 4 \int_0^a dx \int_0^a (x^2 + y^2) dy = 4 \int_0^a dx \left(x^2 y + \frac{y^3}{3} \right) \Big|_0^a = \\ &= 4 \int_0^a \left(ax^2 + \frac{a^3}{3} \right) dx = 4 \left(\frac{ax^3}{3} + \frac{a^3}{3} x \right) \Big|_0^a = 4 \left(\frac{a^4}{3} + \frac{a^4}{3} \right) = \frac{8}{3} a^4. \quad \# \end{aligned}$$

Пример 52.5. Вычислить координаты центра тяжести однородной пластинки в виде полукруга $x^2 + y^2 \leq R^2$, $y \geq 0$.

Заметим, что координаты центра тяжести не зависят от значения плотности. Возьмём, для определённости, плотность $\rho = 1$, тогда масса пластины численно будет равна её площади: $m = \pi R^2/2$. Из соображений симметрии следует, что центр тяжести лежит на оси Oy , т.е. $x_c = 0$. Найдём вторую координату центра тяжести. В процессе интегрирования сделаем переход в полярную систему координат.

$$y_c = \frac{1}{m} \iint_D y \, dx dy = \frac{1}{m} \int_0^\pi \sin \varphi \, d\varphi \int_0^R \rho^2 \, d\rho = \frac{2}{\pi R^2} \cdot 2 \cdot \frac{R^3}{3} = \frac{4R}{3\pi}. \quad \#$$

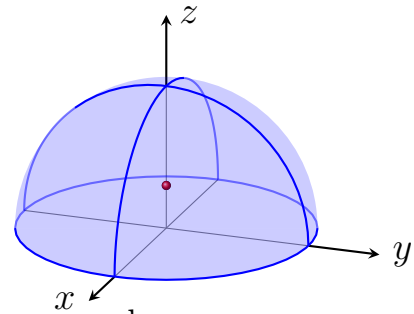
Пусть T – трёхмерное тело, $\rho(x, y, z)$ – объёмная плотность в точке с координатами (x, y, z) . Тогда масса m тела и координаты x_c , y_c , z_c центра его тяжести запишутся через тройные интегралы:

$$m = \iiint_T \rho(x, y, z) \, dx dy dz, \quad x_c = \frac{1}{m} \iiint_T x \rho(x, y, z) \, dx dy dz.$$

Задание. Запишите формулы для координат y_c и z_c центра тяжести тела.

Пример 52.6. Вычислить координаты центра тяжести верхней половины однородного шара $x^2 + y^2 \leq R^2$, $z \geq 0$.

Для определённости, возьмём плотность $\rho = 1$, тогда масса пластины численно будет равна её объёму: $m = 2\pi R^3/3$. Из соображений симметрии следует, что центр тяжести лежит на оси Oz , т.е. $x_c = y_c = 0$. Найдём третью координату центра тяжести. В процессе интегрирования сделаем переход в сферическую систему координат.



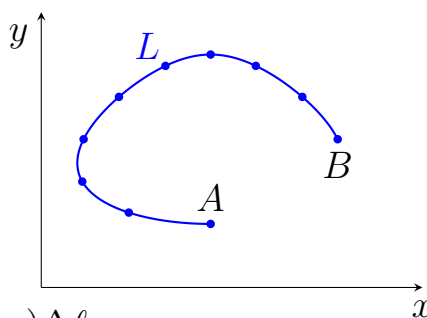
$$\begin{aligned} z_c &= \frac{1}{m} \iiint_T z \, dx dy dz = \frac{1}{m} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \sin \theta \cos \theta \, d\theta \int_0^R r^3 \, dr = \\ &= \frac{3}{2\pi R^3} \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{R^4}{4} = \frac{3}{8}R. \end{aligned} \quad \#$$

§53. Криволинейные интегралы

Криволинейные интеграл – обобщение определённого интеграла, когда интегрирование идет не по отрезку прямой, а по некоторой криволинейной линии. Данное обобщение можно сделать двумя различными способами, поэтому разделяют криволинейные интегралы I и II рода.

Криволинейный интеграл I рода. Пусть $f(x, y)$ – функция, определённая для всех точек плоской кривой L .

- Разобьём кривую L на n частей L_k с длинами $\Delta\ell_k$.
- На каждой части произвольно выберем точку $M_k(x_k, y_k)$ и вычислим $f(x_k, y_k)$ – значение функции в выбранной точке.
- Составим интегральную сумму $\sum_{k=1}^n f(x_k, y_k) \Delta\ell_k$.
- Пусть λ – наибольшее значение длин частей. Устремим $\lambda \rightarrow 0$, при этом $n \rightarrow \infty$.
- Если существует предел интегральной суммы и он не зависит от способа разбиения L и от выбора точек M_k , то такой предел называется *криволинейным интегралом I рода* от функции $f(x, y)$ по кривой L . Этот интеграл обозначается как $\int_L f(x, y) d\ell$, где $d\ell$ – дифференциальный элемент длины.



Итак, по определению, криволинейный интеграл I рода – это число, равное пределу интегральной суммы:

$$\int_L f(x, y) d\ell = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k) \Delta\ell_k.$$

Данный тип интеграла определяется по схеме, аналогичной определённому интегралу. Поэтому эти два типа интеграла имеют много общих свойств, таких как аддитивность, линейность и монотонность (свойства определённого интеграла даны в §29).

Пусть A и B – концы контура L . Криволинейный интеграл I рода не

зависит от того, какой из концов является началом, а какой концом L :

$$\int_{AB} f(x, y) d\ell = \int_{BA} f(x, y) d\ell.$$

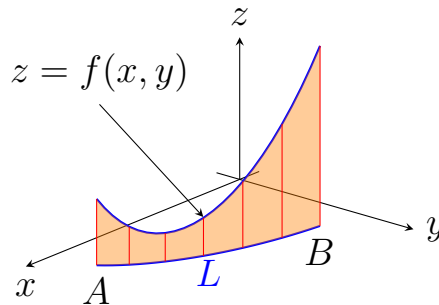
Этим свойством данный тип интеграла отличается от определённого, для которого смена пределов интегрирования приводит к тому, что значение интеграла меняет знак.

Теорема 53.1 (Теорема о среднем для криволинейного интеграла). *Если функция $f(x, y)$ непрерывна на связной кривой L длины ℓ , то существует такая точка $M(x_m, y_m) \in L$, что*

$$\int_L f(x, y) d\ell = f(x_m, y_m) \cdot \ell.$$

Теорему примем без доказательства. Заметим, что если $f(x, y) = 1$, то криволинейный интеграл численно будет равен длине кривой.

Геометрический и физический смысл криволинейного интеграла I рода. Рассмотрим цилиндрическую поверхность, направляющей которой является кривая L , а образующая параллельна оси z . Пусть также $f(x, y) \geq 0$, рассмотрим фигуру на цилиндрической поверхности, высота которой в каждой точке равна значению $f(x, y)$ (аналог криволинейной трапеции). Тогда криволинейный интеграл первого рода численно равен площади данной фигуры.



Перейдём к физическому смыслу криволинейного интеграла I рода. Пусть $\rho(x, y)$ – линейная плотность кривой L . Тогда масса кривой

$$m = \int_L \rho(x, y) d\ell.$$

Координаты центра тяжести кривой также записываются через криволинейные интегралы:

$$x_c = \frac{1}{m} \int_L x \rho(x, y) d\ell, \quad y_c = \frac{1}{m} \int_L y \rho(x, y) d\ell.$$

Сведение криволинейного I рода к определённомu. Пусть кривая L задана в параметрическом виде $x = x(t)$, $y = y(t)$, где $t \in [\alpha, \beta]$. Дифференциальный элемент длины нами уже вычислялся ранее (см. §30, длина дуги) $d\ell = \sqrt{(x')^2 + (y')^2} \cdot dt$. Поэтому

$$\int_L f(x, y) d\ell = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t)) \cdot \sqrt{(x')^2 + (y')^2} \cdot dt.$$

Если кривая L задана в виде явного уравнения $y = y(x)$, где $x \in [a, b]$, то $d\ell = \sqrt{1 + (y')^2} \cdot dx$ и

$$\int_L f(x, y) d\ell = \int_a^b f(x, y(x)) \cdot \sqrt{1 + (y')^2} \cdot dx.$$

Задание. Запишите формулу сведения криволинейного интеграла I рода к определённому в случае задания кривой L уравнением $x = x(y)$.

Пример 53.1. Вычислить $\int_L y^2 d\ell$, где L – окружность $x^2 + y^2 = a^2$.

Выберем уравнение окружности в параметрическом виде

$$\begin{cases} x = a \cos t, \\ y = a \sin t, \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi].$$

Тогда $d\ell = \sqrt{a^2 \sin^2 t + a^2 \cos^2 t} \cdot dt = a dt$. Вычислим интеграл

$$\int_L y^2 d\ell = \int_0^{2\pi} a^2 \sin^2 t \cdot a dt = \frac{a^3}{2} \int_0^{2\pi} (1 - \cos 2t) dt = \pi a^3. \quad \#$$

Пример 53.2. Вычислить $\int_L y d\ell$, где L – дуга параболы $y^2 = 2x$ от точки $(0, 0)$ до $(1, \sqrt{2})$.

Найдём элемент длины кривой, заданной в явном виде:

$$y = \sqrt{2x} \Rightarrow y' = \frac{1}{\sqrt{2x}} \Rightarrow d\ell = \sqrt{1 + \left(\frac{1}{\sqrt{2x}}\right)^2} dx = \sqrt{\frac{1+2x}{2x}} dx.$$

$$\int_L y d\ell = \int_0^1 \sqrt{2x} \cdot \sqrt{\frac{1+2x}{2x}} dx = \int_0^1 \sqrt{1+2x} dx = \frac{1}{2} \frac{2}{3} (1+2x)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 = \sqrt{3} - \frac{1}{3}.$$

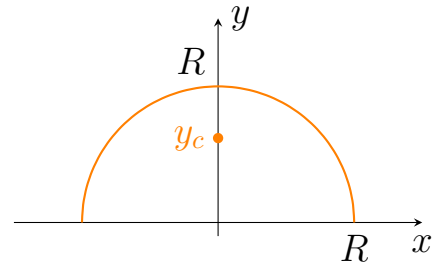
Решим эту же задачу, перейдя к определённому интегралу по y . Записав уравнение кривой как $x = y^2/2$, найдём элемент длины:

$$x = \frac{y^2}{2} \Rightarrow x' = y \Rightarrow d\ell = \sqrt{1 + y^2} dy.$$

$$\begin{aligned} \int_L y d\ell &= \int_0^{\sqrt{2}} y \cdot \sqrt{1 + y^2} dy = \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{1 + y^2} d(1 + y^2) = \frac{1}{2} \frac{2}{3} (1 + y^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^{\sqrt{2}} = \\ &= \sqrt{3} - \frac{1}{3}. \end{aligned} \quad \#$$

Пример 53.3. Определить координаты центра тяжести однородной проволоки в виде полуокруга $x^2 + y^2 \leq R^2$, $y \geq 0$.

Для определённости, возьмём плотность $\rho = 1$, тогда масса пластины численно будет равна её длине $m = \pi R$. Из соображений симметрии следует, что центр тяжести лежит на оси y , т.е. $x_c = 0$. Найдём вторую координату центра тяжести.



Используем параметрическую форму уравнения L : $x = R \cos t$, $y = R \sin t$, где $t \in [0, \pi]$. Элемент длины $d\ell = \sqrt{R^2 \sin^2 t + R^2 \cos^2 t} \cdot dt = R dt$. Поэтому

$$y_c = \frac{1}{\pi R} \int_0^\pi y d\ell = \frac{1}{\pi R} \int_0^\pi R \sin t \cdot R dt = -\frac{R}{\pi} \cos t \Big|_0^\pi = \frac{2R}{\pi}. \quad \#$$

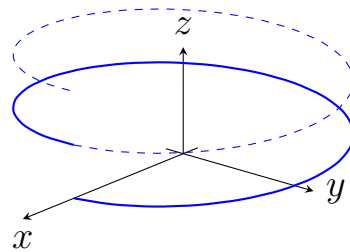
Криволинейный интеграл I рода по пространственной кривой.

Пусть $f(x, y, z)$ – функция, определённая для всех точек пространственной кривой L . Как и для плоского случая, можно определить криволинейный интеграл I рода по данной кривой. Пусть L имеет параметрическое представление: $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$, где $t \in [\alpha, \beta]$. Тогда

$$\int_L f(x, y, z) d\ell = \int_{\alpha}^{\beta} f(t) \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} dt.$$

Задание. Запишите формулу перехода от криволинейного интеграла к определённому интегралу по x , если кривая задаётся в виде явных уравнений $y = y(x), z = z(x), x \in [a, b]$.

Пример 53.4. Вычислить $\int_L \frac{d\ell}{x^2 + y^2 + z^2}$ вдоль одного витка винтовой линии $x = a \cos t, y = a \sin t, z = bt, t \in [0, 2\pi]$.



Дифференциальный элемент длины

$$d\ell = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} dt = \sqrt{a^2 + b^2} dt.$$

$$\begin{aligned} \int_L \frac{d\ell}{x^2 + y^2 + z^2} &= \sqrt{a^2 + b^2} \int_0^{2\pi} \frac{dt}{a^2 + b^2 t^2} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{b^2} \int_0^{2\pi} \frac{dt}{\left(\frac{a}{b}\right)^2 + t^2} = \\ &= \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{ab} \operatorname{arctg} \frac{tb}{a} \Big|_0^{2\pi} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{ab} \operatorname{arctg} \frac{2\pi b}{a}. \end{aligned} \quad \#$$

Криволинейный интеграл II рода. Пусть $\vec{f}(x, y) = \{P(x, y), Q(x, y)\}$ – вектор-функция, определённая для всех точек плоской кривой L . Также будем считать, что L – *направленная кривая*, т.е. на ней задано направление обхода, точками A и B обозначим начало и конец кривой L .

- Разобьём кривую L на n частей L_k . На каждой части определим приращение $\vec{\Delta\ell}_k = \{\Delta x_k, \Delta y_k\}$ – вектор, идущий от начала к концу части L_k .
- На каждой части L_k произвольно выберем точку $M_k(x_k, y_k)$ и вычислим $\vec{f}(x_k, y_k) = \{P(x_k, y_k), Q(x_k, y_k)\}$ – значение вектор-функции в этой точке.
- На L_k найдём скалярное произведение $(\vec{f}(x_k, y_k), \vec{\Delta\ell}_k)$. Сложив по всем частям, получим интегральную сумму

$$\sum_{k=1}^n (\vec{f}(x_k, y_k), \vec{\Delta\ell}_k) = \sum_{k=1}^n (P(x_k, y_k)\Delta x_k + Q(x_k, y_k)\Delta y_k).$$

- На каждой части найдём длину $\Delta\ell_k$ – модуль вектора приращения $\vec{\Delta\ell}_k$. Пусть λ – наибольшая длина. Устремим $\lambda \rightarrow 0$, при этом $n \rightarrow \infty$.
- Если существует предел интегральной суммы и он не зависит от способа разбиения L и от выбора точек M_k , то такой предел называется *криволинейным интегралом II рода* от функции $\vec{f}(x, y)$ по кривой L . Этот интеграл обозначается как $\int_L (\vec{f}(x, y), d\vec{\ell})$, где $d\vec{\ell} = \{dx, dy\}$ – дифференциальный векторный элемент приращения.

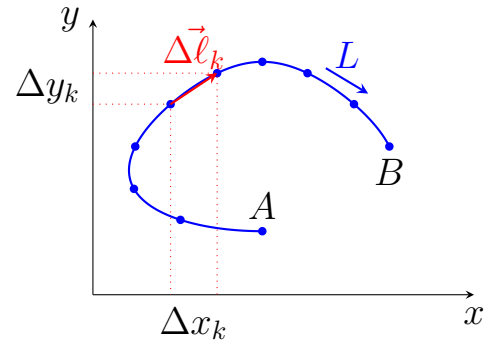
Итак, по определению, криволинейный интеграл II рода – это число, равное пределу интегральной суммы:

$$\int_L (\vec{f}(x, y), d\vec{\ell}) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n (\vec{f}(x_k, y_k), \vec{\Delta\ell}_k).$$

Запись интеграла II рода через координаты:

$$\int_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n (P(x_k, y_k)\Delta x_k + Q(x_k, y_k)\Delta y_k).$$

Если кривая L замкнута и проходится в положительном направлении (против часовой стрелки), то криволинейный интеграл II рода обозначается как $\oint_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy$.



Как и определённый интеграл, он обладает такими свойствами, как аддитивность и линейность. В то же время, для данного интеграла отсутствуют такие свойства, как монотонность и теорема о среднем. Отметим ещё одно отличительное свойство криволинейного интеграла II рода, называемое *сменой направления обхода*. Пусть L^* – кривая L с противоположным направлением обхода. Тогда, при смене кривой интегрирования с L на L^* , криволинейный интеграл II рода меняет знак:

$$\int_{L^*} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = - \int_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy.$$

Сформулируем физический смысл криволинейного интеграла II рода. Если $\vec{f}(x, y) = \{P(x, y), Q(x, y)\}$ – вектор силы, то интеграл равен работе этой силы по перемещению точки вдоль кривой L .

Сведение криволинейного интеграла II рода к определённому.

Пусть кривая L задана в параметрическом виде: $x = x(t)$, $y = y(t)$, обход L идёт от $t = \alpha$ до $t = \beta$. Заметим, что в зависимости от направления обхода возможен как вариант $\alpha > \beta$, так и $\alpha < \beta$. Тогда $dx = x' dt$, $dy = y' dt$ и

$$\int_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_{\alpha}^{\beta} (P(x(t), y(t)) \cdot x' + Q(x(t), y(t)) \cdot y') dt.$$

Если кривая L задана в явном виде $y = y(x)$, где обход L идёт от $x = a$ до $x = b$, то

$$\int_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_a^b (P(x, y(x)) + Q(x, y(x)) \cdot y') dx.$$

Пример 53.5. Вычислить интеграл

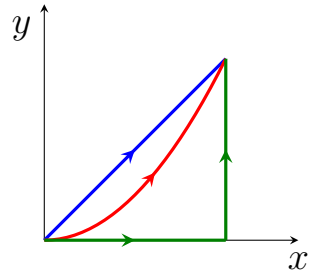
$$\int_L 3x^2 y dx + 2x^3 y dy,$$

где L – кривая, соединяющая точки $(0, 0)$ и $(1, 1)$:

- а) вдоль прямой $y = x$,
- б) вдоль параболы $y = x^2$,
- в) вдоль ломаной, проходящей через $(1, 0)$.

В случаях а) и б) используем переход к интегралу по x :

$$I_1 = \int_0^1 (3x^2 \cdot x + 2x^3 \cdot x \cdot 1) dx = \left(\frac{3x^4}{4} + \frac{2x^5}{5} \right) \Big|_0^1 = \frac{23}{20}.$$



$$I_2 = \int_0^1 (3x^2 \cdot x^2 + 2x^3 \cdot x^2 \cdot 2x) dx = \left(\frac{3x^5}{5} + \frac{4x^7}{7} \right) \Big|_0^1 = \frac{41}{35}.$$

В случае в) разобьём интеграл на интегралы по двум отрезкам. В первом интеграле перейдём к интегралу по x , во втором – к интегралу по y :

$$I_3 = I_{31} + I_{32} = \int_0^1 (3x^2 \cdot 0) dx + \int_0^1 (2 \cdot 1 \cdot y) dy = (y^2) \Big|_0^1 = 1.$$

Заметим, всех три кривые имеют общее начало и конец. Но значения интегралов получились различными. #

Пример 53.6. Вычислить интеграл

$$\int_L 3x^2y dx + (x^3 + 2y) dy,$$

по кривым примера 53.5.

Действуем также, как и в прошлом примере:

$$I_1 = \int_0^1 (3x^2 \cdot x + (x^3 + 2x) \cdot 1) dx = (x^4 + x^2) \Big|_0^1 = 2.$$

$$I_2 = \int_0^1 (3x^2 \cdot x^2 + (x^3 + 2x^2) \cdot 2x) dx = (x^5 + x^4) \Big|_0^1 = 2.$$

$$I_3 = I_{31} + I_{32} = \int_0^1 (3x^2 \cdot 0) dx + \int_0^1 (1 + 2y) dy = (y + y^2) \Big|_0^1 = 2. \quad \#$$

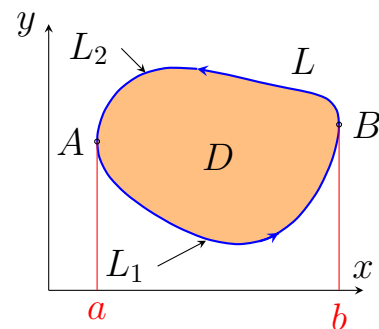
Заметим, что значения интегралов в примере получились одинаковыми. Это не является случайностью, значение интеграла от данной функции зависит лишь от начальной и конечной точки кривой и не зависит от пути, соединяющего эти точки. Критерий, при котором интеграл обладает таким свойством, будет рассмотрен далее.

Формула Грина. Пусть L – замкнутая кривая, ограничивающая область D . Функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ непрерывны вместе со своими частными производными в D . Тогда

$$\oint_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy.$$

Данная формула, связывающая криволинейный интеграл II рода по замкнутой кривой с двойным интегралом по области, ограниченной этим контуром, называется *формулой Грина*.

◀ Пусть D – простая область. Обозначим через a и b границы отрезка – проекции области на ось Ox . На самой кривой отметим крайние точки A и B , которые разбивают L на две части – нижнюю L_1 и верхнюю L_2 . Пусть $y = y_1(x)$ и $y = y_2(x)$ – явные уравнения этих частей при $x \in [a, b]$. Тогда



$$\begin{aligned} \oint_L P(x, y) dx &= \int_{L_1} P(x, y) dx + \int_{L_2} P(x, y) dx = \\ &= \int_a^b P(x, y_1(x)) dx + \int_b^a P(x, y_2(x)) dx = \int_a^b [P(x, y_1(x)) - P(x, y_2(x))] dx. \end{aligned}$$

С другой стороны

$$\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy = \int_a^b [P(x, y_2(x)) - P(x, y_1(x))] dx.$$

Сравнив полученные определённые интегралы, получим

$$\oint_L P(x, y) dx = - \iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dx dy.$$

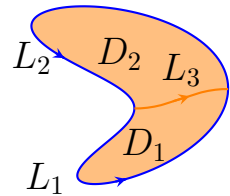
Аналогично доказывается

$$\oint_L Q(x, y) dy = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy.$$

Сложив две данных равенства, получим формулу Грина.

Задание. Самостоятельно докажите равенство для функции Q .

Далее рассмотрим случай, когда область D является сложной, но её можно разбить на несколько частей, каждая из которых является простой. Пусть, например, $D = D_1 \cup D_2$, где D_1 и D_2 – простые. Рассмотрим криволинейный интеграл по границе



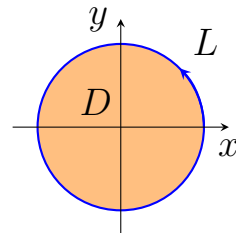
$$\oint_L = \int_{L_1} + \int_{L_2} = \left(\int_{L_1} - \int_{L_3} \right) + \left(\int_{L_2} + \int_{L_3} \right) = \left(\int_{L_1} + \int_{L_3^*} \right) + \left(\int_{L_2} + \int_{L_3} \right).$$

Здесь L_3^* – соответствует кривой L_3 с противоположным обходом. Заметим, что в первой скобке стоит граница области D_1 , а во второй – граница D_2 . Применим формулу Грина для данных простых частей и используем свойство аддитивности двойного интеграла:

$$\oint_L = \iint_{D_1} + \iint_{D_2} = \iint_D.$$

Формула Грина доказана также для сложных областей. ►

Пример 53.7. Найдите $\oint_L (2x - y)dx + (x + 3y)dy$,
где L – окружность $x^2 + y^2 = a^2$.

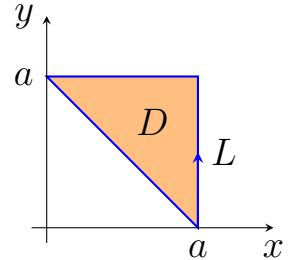


Для решения задачи используем формулу Грина. Найдём производные

$$P = 2x - y, \quad Q = x + 3y, \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial P}{\partial y} = -1, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 1.$$

$$\oint_L (2x - y)dx + (x + 3y)dy = \iint_D (1 + 1)dx dy = 2S = 2\pi a^2. \quad \#$$

Пример 53.8. Найти $\oint_L y^2 dx + (x + y)^2 dy$ вдоль треугольника с вершинами $(a, 0)$, (a, a) , $(0, a)$.



$$\begin{aligned} \oint_L y^2 dx + (x + y)^2 dy &= \iint_D (2(x + y) - 2y) dx dy = 2 \iint_D x dx dy = \\ &= 2 \int_0^a x dx \int_{a-x}^a dy = 2 \int_0^a x^2 dx = \frac{2}{3} x^3 \Big|_0^a = \frac{2a^3}{3}. \quad \# \end{aligned}$$

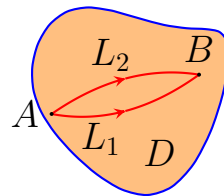
Независимость криволинейного интеграла II рода от пути интегрирования. Имеет место следующая

Теорема 53.2. Пусть функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ непрерывны вместе со своими частными производными в односвязной области D . Тогда следующие утверждения эквивалентны:

1. Криволинейный интеграл $\int_{AB} P dx + Q dy$ зависит лишь от положения точек $A, B \in D$ и не зависит от пути интегрирования.
2. Криволинейный интеграл по любой замкнутой кривой $L \subset D$ равен нулю: $\oint_L P dx + Q dy = 0$.
3. Во всех точках области D выполнено равенство $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$.

◀ Докажем эквивалентность утверждений 1 и 2.

$$\int_{L_1} = \int_{L_2} \Leftrightarrow \int_{L_1} + \int_{L_2^*} = 0 \Leftrightarrow \oint_L = 0.$$



Здесь L_2^* – контур L_2 с обходом в противоположную сторону, а L – объединение L_1 и L_2^* .

Докажем теперь, что из 3 следует 2. Пусть L – произвольный замкнутый контур. Тогда, по формуле Грина,

$$\oint_L Pdx + Qdy = \iint_{D^*} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = 0.$$

Осталось доказать, что из 2 следует 3. Используем метод от противного. Пусть интеграл по любому замкнутому контуру равен нулю, но утверждение 3 в какой-нибудь точке не выполняется, например, в точке $M_0(x_0, y_0)$ функция $f(x, y) = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \neq 0$. Для определённости, пусть $f(x_0, y_0) > 0$. Функция $f(x, y)$ непрерывна, поэтому существует некоторая окрестность D точки M_0 , в каждой точке которой выполняется $f(x, y) > 0$. Тогда, с одной стороны, из формулы Грина и справедливости утверждения 2, получим $\iint_D f(x, y) dxdy = 0$. С другой стороны, из теоремы о среднем имеем $\iint_D f(x, y) dxdy = f(x_m, y_m) \cdot S > 0$. Противоречие. ►

Нахождение функции по дифференциалу. Ранее в §39 была сформулирована теорема, названная условием полного дифференциала функции двух переменных. Согласно этой теореме, при выполнении условия $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ выражение $Pdx + Qdy$ является полным дифференциалом. Докажем это утверждение, для этого нам необходимо построить такую функцию $u(x, y)$, дифференциал которой $du = Pdx + Qdy$.

Зафиксируем какую-нибудь точку $A(x_0, y_0)$ области и в каждой точке $B(x, y)$ определим функцию

$$u(x, y) = \int_{AB} P(x, y) dx + Q(x, y) dy.$$

Данное выражение действительно является однозначной функцией, т.к. интеграл не зависит от пути интегрирования при выполнении условия $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$. Нетрудно заметить, что эта функция является дифференцируемой и её дифференциал $du = Pdx + Qdy$. Утверждение доказано.

Пример 53.9. Найдите $\int_{(-1,2)}^{(2,3)} (2x + y) dx + (1 + x) dy$.

Проверим условие полного дифференциала:

$$P = 2x + y, \quad Q = 1 + x \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial P}{\partial y} = 1, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 1.$$

Условие выполняется, подынтегральная функция является полным дифференциалом, преобразуем это выражение:

$$(2x + y)dx + (1 + x)dy = 2x dx + (y dx + x dy) + dy = d(x^2 + xy + y).$$

Значит, $u(x, y) = x^2 + xy + y$ и

$$\int_{(-1,2)}^{(2,3)} (2x + y)dx + (1 + x)dy = (x^2 + xy + y) \Big|_{(-1,2)}^{(2,3)} = 13 - 1 = 12. \quad \#$$

Криволинейный интеграл II рода по пространственной кривой. Пусть $\vec{f}(x, y, z) = \{P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)\}$ – вектор-функция, определённая для всех точек пространственной кривой L . Тогда, как и для плоского случая, можно определить криволинейный интеграл II рода $\int_L (\vec{f}(x, y, z), \vec{d\ell})$ по данной кривой. Заметим, что векторный элемент приращения $\vec{d\ell}$ в пространстве имеет три координаты $\vec{d\ell} = \{dx, dy, dz\}$.

Приведём формулы сведения данного интеграла к определённому. Пусть L имеет параметрическое представление: $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$, где обход идёт от $t = \alpha$ до $t = \beta$. Тогда

$$\begin{aligned} \int_L (\vec{f}(x, y, z), \vec{d\ell}) &= \int_L P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz = \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \left(P(x(t), y(t), z(t))x' + Q(x(t), y(t), z(t))y' + R(x(t), y(t), z(t))z' \right) dt. \end{aligned}$$

Пример 53.10. Вычислить работу вектора силы $\vec{f} = \{z, x, y\}$ по перемещению точки вдоль витка винтовой линии $x = a \cos t, y = a \sin t, z = bt$, $t \in [0, 2\pi]$.

Используем приведённую выше формулу для перехода от криволинейного интеграла к определённомu:

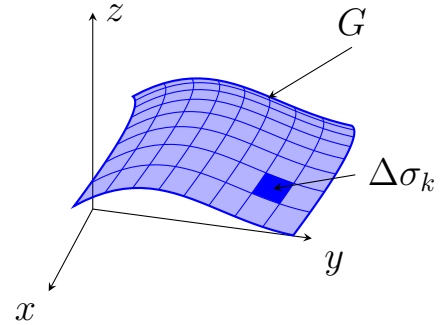
$$\begin{aligned} \int_L zdx + xdy + ydz &= \int_0^{2\pi} (bt \cdot (-a \sin t) + a \cos t \cdot a \cos t + a \sin t \cdot b) dt = \\ &= -ab \int_0^{2\pi} t \sin t dt + a^2 \int_0^{2\pi} \cos^2 t dt + ab \int_0^{2\pi} \sin t dt = 2\pi ab + a^2\pi. \quad \# \end{aligned}$$

§54. Поверхностные интегралы

Поверхностный интеграл – обобщение двойного интеграла, когда областью интегрирования является не плоская область, а криволинейная поверхность. Данное обобщение можно сделать двумя различными способами, поэтому разделяют поверхностные интегралы I и II рода.

Поверхностный интеграл I рода. Пусть $f(x, y, z)$ – функция, определённая для всех точек поверхности G .

- Разобьём поверхность G на n частей G_k с площадями $\Delta\sigma_k$.
- На каждой части произвольно выберем точку $M_k(x_k, y_k, z_k)$ и вычислим $f(x_k, y_k, z_k)$ – значение функции в этой точке.
- Составим интегральную сумму $\sum_{k=1}^n f(x_k, y_k, z_k) \Delta\sigma_k$.
- На каждой части вычислим диаметр d_k – расстояние между наиболее удалёнными точками части G_k . Пусть λ – наибольший диаметр. Устремим $\lambda \rightarrow 0$, при этом $n \rightarrow \infty$.
- Если существует предел интегральной суммы и он не зависит от способа разбиения G и от выбора точек M_k , то такой предел называется *поверхностным интегралом I рода* от функции $f(x, y, z)$ по поверхности G . Этот интеграл обозначается как $\iint_G f(x, y, z) d\sigma$, где $d\sigma$ – дифференциальный элемент площади поверхности.



Итак, по определению, поверхностный интеграл I рода – это число, равное пределу интегральной суммы:

$$\iint_G f(x, y, z) d\sigma = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k, z_k) \Delta\sigma_k.$$

Поверхностный интеграл I рода обладает такими свойствами, как аддитивность, линейность, монотонность. Справедлива также

Теорема 54.1 (Теорема о среднем для поверхностного интеграла). *Если функция $f(x, y, z)$ непрерывна на связной поверхности G площади S , то существует такая точка $M(x_m, y_m, z_m) \in G$, что*

$$\iint_G f(x, y, z) d\sigma = f(x_m, y_m, z_m) \cdot S.$$

Заметим, что если $f(x, y, z) = 1$, то поверхностный интеграл I рода численно будет равен площади поверхности.

Опишем физический смысл поверхностного интеграла I рода. Пусть $\rho(x, y, z)$ – поверхностная плотность G , тогда масса m этой поверхности

$$m = \iint_G \rho(x, y, z) d\sigma.$$

Координаты центра тяжести поверхности также записываются через поверхностные интегралы I рода:

$$x_c = \frac{1}{m} \iint_G x\rho(x, y, z) d\sigma, \quad y_c = \frac{1}{m} \iint_G y\rho(x, y, z) d\sigma, \quad z_c = \dots$$

Сведение поверхностного интеграла I рода к двойному. Пусть поверхность G задана в параметрическом виде $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$, где $(u, v) \in D$. Тогда, согласно (52.3), дифференциальный элемент поверхности $d\sigma = \sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2} \cdot du dv$, где n_x, n_y, n_z – координаты вектора $\vec{n}$ нормали к поверхности

$$\vec{n} = \left\{ \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}, \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}, \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right\}.$$

Поверхностный интеграл можно свести к двойному:

$$\iint_G f(x, y, z) d\sigma = \iint_D f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \cdot \sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2} du dv,$$

где D – область изменения параметров u и v .

Пусть G задана в явном виде $z = z(x, y)$, где $(x, y) \in D$. Нормаль к поверхности имеет координаты $\vec{n} = \{-z'_x, -z'_y, 1\}$ и, согласно формуле (52.2), дифференциальный элемент поверхности $d\sigma = \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2} \cdot dxdy$.

Тогда поверхностный интеграл также сводится к двойному:

$$\iint_G f(x, y, z) d\sigma = \iint_D f(x, y, z(x, y)) \cdot \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2} dxdy,$$

где D – проекция поверхности G на координатную плоскость Oxy .

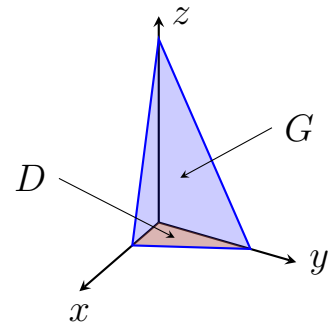
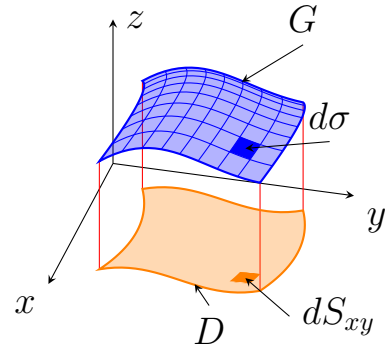
Заметим, что поверхностный интеграл I рода можно записать и через проекции на другие координатные плоскости. Также возможны ситуации, когда для сведения поверхностного интеграла I рода потребуется разделить G на несколько частей, каждая из которых имеет своё явное представление вида $z = z(x, y)$.

Пример 54.1. Найдти $\iint_G (x + y + z) d\sigma$, где G – часть плоскости $4x + 2y + z = 4$, лежащей в первом октанте.

Запишем уравнение плоскости в явном виде $z = 4 - 4x - 2y$ и найдём элемент площади поверхности $d\sigma = \sqrt{1 + 16 + 4} dxdy = \sqrt{21} dxdy$.

Перейдём от интегрирования по G к интегрированию по её проекции D на плоскость Oxy :

$$\iint_G \dots = \iint_D (x + y + 4 - 4x - 2y) \sqrt{21} dxdy.$$

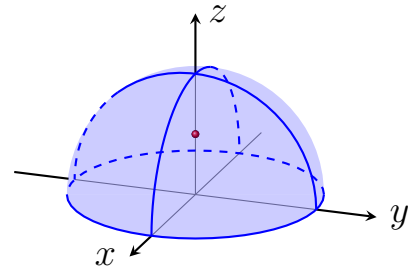


Далее, перейдя к повторным интегралам, вычислим искомый интеграл.

$$\begin{aligned}
 I &= \sqrt{21} \iint_D (4 - 3x - y) dx dy = \sqrt{21} \int_0^1 dx \int_0^{2-2x} (4 - 3x - y) dy = \\
 &= \sqrt{21} \int_0^1 dx \left(4y - 3xy - \frac{y^2}{2} \right) \Big|_0^{2-2x} = \sqrt{21} \int_0^1 (4x^2 - 10x + 6) dx = \\
 &= \sqrt{21} \left(\frac{4x^3}{3} - 5x^2 + 6x \right) \Big|_0^1 = \frac{7\sqrt{21}}{3}. \quad \#
 \end{aligned}$$

Пример 54.2. Найти координаты центра тяжести однородной полусферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $z \geq 0$.

Возьмём, для определённости, плотность $\rho = 1$, тогда масса полусферы численно будет равна её площади $m = 2\pi R^2$. Из соображений симметрии следует, что центр тяжести лежит на оси z , т.е. $x_c = y_c = 0$. Найдём третью координату центра тяжести. Запишем дифференциальный элемент площади поверхности



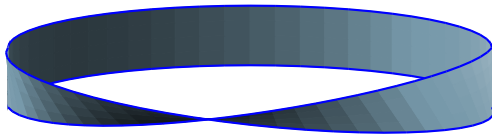
$$d\sigma = \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2} dx dy = \frac{R dx dy}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}.$$

Найдём координату центра тяжести сведением к двойному интегралу по проекции полусферы на плоскость Oxy :

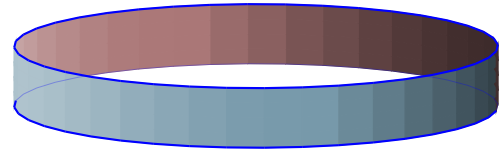
$$\begin{aligned}
 z_c &= \frac{1}{m} \iint_G z d\sigma = \frac{1}{2\pi R^2} \iint_D \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \frac{R dx dy}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} = \\
 &= \frac{R}{2\pi R^2} \iint_D dx dy = \frac{\pi R^2}{2\pi R} = \frac{R}{2}. \quad \#
 \end{aligned}$$

Векторный элемент поверхности. Существует два типа поверхностей – *односторонние* и *двусторонние*. К односторонним относится, например, лист Мёбиуса. Эту поверхность можно получить, если склеить длинную узкую полоску, перекрутив её один раз. Большинство встречающихся

на практике поверхностей – двусторонние. К ним относятся, например, любая плоская фигура, сфера, цилиндр, тор и т.п.



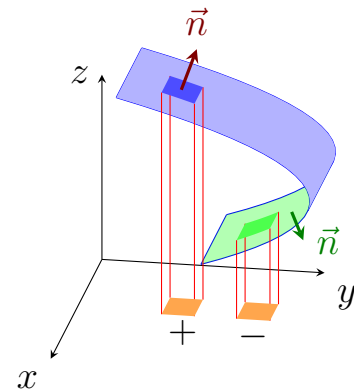
Лист Мёбиуса



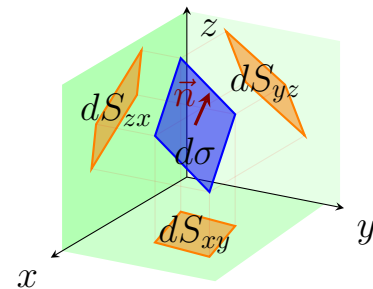
Цилиндр

На двусторонних поверхностях можно задать *ориентацию* – в каждой точке выбрать одно из двух направлений единичной нормали $\vec{n}(x, y, z)$ так, чтобы вектор нормали менялся непрерывно (без скачков) при непрерывном изменении координат. Например, на сфере есть два варианта выбора ориентации: внешняя, когда вектор нормали направлен от точек сферы в сторону бесконечности и внутренняя, когда вектор нормали направлен к центру сферы. Поверхность будем называть *ориентированной*, если она является двусторонней и на ней задана ориентация.

Пусть G – ориентированная поверхность. Рассмотрим на ней малую площадку с площадью $d\sigma$. Проекцией dS_{xy} этой площадки на плоскость Oxy называется площадь её проекции, взятая со знаком “+”, если угол между осью z и вектором нормали острый, и со знаком “–”, если угол тупой. Аналогично вводятся проекции dS_{yz} и dS_{zx} .



Пусть $\vec{n} = \{n_x, n_y, n_z\}$ – единичный вектор нормали. Угол между поверхностью $d\sigma$ и плоскостью Oxy равен углу между $\vec{n}$ и осью Oz . Проекция dS_{xy} , согласно формуле (52.1), равна $dS_{xy} = d\sigma \cdot \cos(\vec{n}, \vec{k}) = n_z d\sigma$. Аналогично $dS_{yz} = n_x d\sigma$, $dS_{zx} = n_y d\sigma$.



Векторным элементом поверхности $\vec{d\sigma}$ называется вектор, сонаправленный с вектором нормали $\vec{n}$ и по модулю равный площади $d\sigma$. Если $\vec{n}$ – единичная нормаль, то $\vec{d\sigma} = \vec{n} d\sigma$. Коорди-

наты векторного элемента поверхности

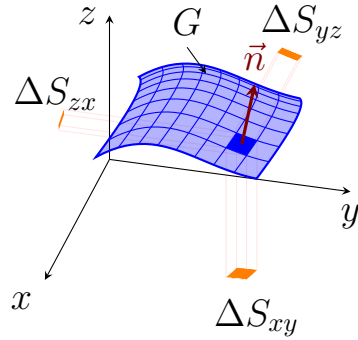
$$\vec{d\sigma} = \{n_x, n_y, n_z\} \cdot d\sigma = \{n_x \cdot d\sigma, n_y \cdot d\sigma, n_z \cdot d\sigma\} = \{dS_{yz}, dS_{zx}, dS_{xy}\},$$

т.е. совпадают с проекциями на координатные плоскости Oyz , Ozx , Oxy соответственно.

В прямоугольных координатах координаты векторного элемента поверхности обозначают как $\vec{d\sigma} = \{dydz, dzdx, dxdy\}$.

Поверхностный интеграл II рода. Пусть $\vec{f}(x, y, z) = \{P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)\}$ – вектор-функция, определённая для всех точек ориентированной поверхности G .

- Разобьём поверхность G на n частей G_k с векторными элементами $\vec{\Delta\sigma}_k = \{\Delta S_{yz}^k, \Delta S_{zx}^k, \Delta S_{xy}^k\}$.
- На каждой части произвольно выберем точку $M_k(x_k, y_k, z_k)$ и вычислим $\vec{f}(x_k, y_k, z_k)$ – значение вектор-функции в этой точке.



- На G_k вычислим скалярное произведение $(\vec{f}(x_k, y_k, z_k), \vec{\Delta\sigma}_k)$. Сумма по всем частям $\sum_{k=1}^n (\vec{f}(x_k, y_k, z_k), \vec{\Delta\sigma}_k)$ называется интегральной.
- На каждой части определим диаметр d_k – расстояние между наиболее удалёнными точками части G_k . Пусть λ – наибольший диаметр. Устремим $\lambda \rightarrow 0$, при этом $n \rightarrow \infty$.
- Если существует предел интегральной суммы и он не зависит от способа разбиения G и от выбора точек M_k , то такой предел называется *поверхностным интегралом II рода* от функции $\vec{f}(x, y, z)$ по ориентированной поверхности G . Этот интеграл обозначается как $\iint_G (\vec{f}(x, y, z), \vec{d\sigma})$, где $\vec{d\sigma}$ – векторный элемент поверхности.

Итак, по определению, поверхностный интеграл II рода – это число, равное пределу интегральной суммы:

$$\iint_G (\vec{f}(x, y, z), \vec{d\sigma}) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n (\vec{f}(x_k, y_k, z_k), \vec{\Delta\sigma}_k).$$

Запись интеграла в прямоугольных координатах имеет вид

$$\iint_G P(x, y, z) dydz + Q(x, y, z) dzdx + R(x, y, z) dxdy.$$

Если поверхность G замкнута и ориентирована так, что нормаль обращена наружу, то поверхностный интеграл II рода обозначается как

$$\oiint_G P dydz + Q dzdx + R dxdy.$$

Для поверхностного интеграла II рода справедливы такие свойства, как линейность и аддитивность. В то же время, для данного интеграла отсутствуют такие свойства, как монотонность и теорема о среднем. Отметим ещё одно отличительное свойство, называемое *сменой ориентации поверхности*. Пусть G^* – поверхность G с противоположной ориентацией. Тогда, при смене ориентации поверхности с G на G^* , поверхностный интеграл II рода меняет знак:

$$\iint_{G^*} P dydz + Q dzdx + R dxdy = - \iint_G P dydz + Q dzdx + R dxdy.$$

Сформулируем физический смысл поверхностного интеграла II рода. Если $\vec{f} = \{P, Q, R\}$ – вектор скорости жидкости, то интеграл равен расходу жидкости через поверхность G по направлению ориентированной нормали.

Сведение поверхностного интеграла II рода к двойному. Пусть поверхность G задана в параметрическом виде $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$, где $(u, v) \in D$. Тогда поверхностный интеграл II рода можно свести к двойному:

$$\begin{aligned} \iint_G P dydz + Q dzdx + R dxdy &= \\ &= \pm \iint_D \left(P \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} + Q \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} + R \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right) dudv, \end{aligned}$$

где D – область изменения параметров u и v . Знак “+” выбирается, если направление ориентированной нормали совпадает с направлением вектора

$\left\{ \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}, \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}, \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right\}$ и знак “—”, если совпадает с противоположным направлением.

Рассмотрим также случай, когда G задаётся в явном виде. Заметим, что подынтегральное выражение в интеграле II рода представляет собой сумму трёх функций. Поэтому, в случае явного задания поверхности, интеграл разбивают на три части, каждую из которых сводят к соответствующему двойному интегралу. Рассмотрим, например, слагаемое $R(x, y, z) dx dy$. Для вычисления интеграла от него необходимо записать уравнение поверхности G в явном виде $z = z(x, y)$. Тогда

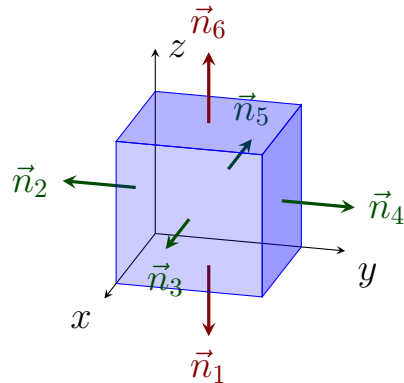
$$\iint_G R(x, y, z) dx dy = \pm \iint_{D_{xy}} R(x, y, z(x, y)) dx dy.$$

Здесь D_{xy} — проекция G на плоскость Oxy . Знак “+” перед интегралом ставится, если угол между нормалью G и осью Oz острый и “—”, если тупой. Также возможны ситуации, когда для сведения интеграла $\iint_G R(x, y, z) dx dy$ к двойному потребуется разделить G на несколько частей, каждая из которых имеет своё явное представление вида $z = z(x, y)$.

Пример 54.3. Вычислить интеграл $\oiint_G (x + y + z) dx dy$, где G — внешняя граница куба $0 \leq x, y, z \leq a$.

Граница куба состоит из 6 квадратов. Разобьём интеграл на 6 более простых

$$\begin{aligned} I &= \iint_G (x + y + z) dx dy = \\ &= \iint_{G_1} + \iint_{G_2} + \iint_{G_3} + \iint_{G_4} + \iint_{G_5} + \iint_{G_6}. \end{aligned}$$

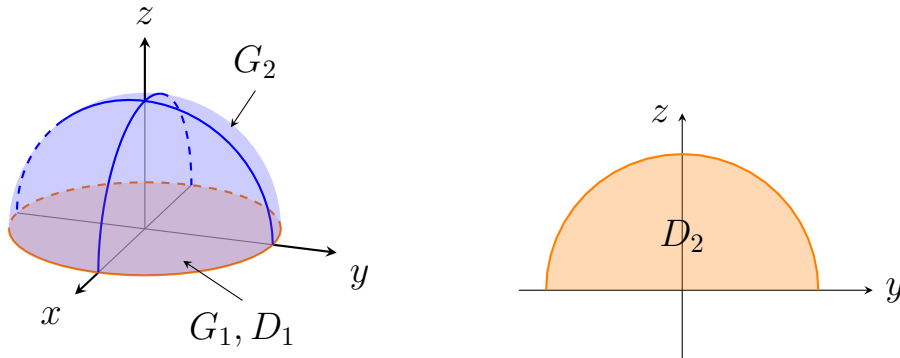


Четыре интеграла будут равны нулю, т.к. их проекции на плоскость Oxy вырождаются в области нулевой площади. Пусть D — квадрат в плоскости Oxy , тогда интегралы по G_6 и G_1 сведутся к двойным интегралам по D

со знаками “+” и “−” соответственно. Поверхность G_6 будет описываться уравнением $z = a$, а G_1 – уравнением $z = 0$. Поэтому

$$I = \iint_D (x + y + a) dx dy - \iint_D (x + y + 0) dx dy = a \iint_D dx dy = a^3. \quad \#$$

Пример 54.4. Вычислить интеграл от функции $\vec{f} = \{x^3, 0, z^3\}$ по внешней поверхности полушара $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$, $z \geq 0$.



Поверхность G полушара состоит из двух частей – круга G_1 , лежащего в основании и полусферы G_2 . Разобьём поверхностный интеграл на два интеграла по этим частям.

$$\oiint_G x^3 dy dz + z^3 dx dy = \iint_{G_1} (x^3 dy dz + z^3 dx dy) + \iint_{G_2} (x^3 dy dz + z^3 dx dy).$$

Уравнением G_1 является $z = 0$, поэтому

$$\iint_{G_1} x^3 dy dz + z^3 dx dy = 0 - \iint_{D_1} 0 dx dy = 0.$$

Первое слагаемое равно нулю из-за того, что проекцией G_1 на плоскость Oyz является область с нулевой площадью.

Перейдём к интегрированию по полусфере. Для вычисления интеграла $\iint z^3 dx dy$ используем явное уравнение полусферы $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$. Для вычисления интеграла $\iint x^3 dy dz$ необходимо явное уравнение в виде $x = \pm \sqrt{a^2 - y^2 - z^2}$. Зависимость неоднозначна, поэтому G_2 необходимо разбить на две части с соответствующим знаком перед корнем. Уравнения полусферы в этих частях имеют вид $x = \sqrt{a^2 - y^2 - z^2}$ и

$x = -\sqrt{a^2 - y^2 - z^2}$ соответственно. Обе части при проекции на плоскость Oyz переходят в D_2 со знаками “+” и “−” соответственно. Поэтому

$$\begin{aligned} \iint_{G_2} x^3 dydz + z^3 dx dy &= 2 \iint_{D_2} (a^2 - y^2 - z^2)^{\frac{3}{2}} dydz + \iint_{D_1} (a^2 - x^2 - y^2)^{\frac{3}{2}} dx dy = \\ &= 4 \iint_{D_2} \dots = 4 \int_0^\pi d\varphi \int_0^a (a^2 - \rho^2)^{\frac{3}{2}} \rho d\rho = 4\pi \left(-\frac{1}{2} \right) \frac{2(a^2 - \rho^2)^{\frac{5}{2}}}{5} \Big|_0^a = \frac{4\pi a^5}{5}. \end{aligned}$$

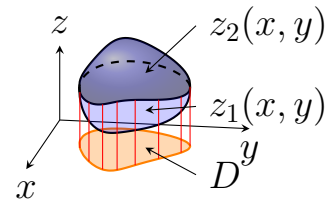
В процессе интегрирования интеграл по D_1 по соображениям симметрии был разбит на два интеграла по полуокружам. Оба этих интеграла имеют такой же вид, что и интеграл по D_2 . #

Формула Гаусса – Остроградского. Пусть G – замкнутая поверхность, ограничивающая область T . Функции $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$ и $R(x, y, z)$ непрерывны вместе со своими частными производными в T . Тогда

$$\oiint_G P dydz + Q dzdx + R dx dy = \iiint_T \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz.$$

Данная формула, связывающая поверхностный интеграл II рода по замкнутой поверхности с тройным интегралом по области, ограниченной этой поверхностью, называется *формулой Гаусса – Остроградского*.

◀ Пусть T – простая область. Обозначим через D проекцию области на плоскость Oxy . Поверхность G разобьём на две части – нижнюю и верхнюю, с уравнениями $z_1(x, y)$ и $z_2(x, y)$ соответственно.



Сведём вычисление поверхностного интеграла к двойному по D :

$$\oiint_G R dx dy = \iint_D (R(x, y, z_2) - R(x, y, z_1)) dx dy.$$

Тройной интеграл также сведём к двойному:

$$\iiint_T \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz = \iint_D dx dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} \frac{\partial R}{\partial z} dz = \iint_D (R(x, y, z_2) - R(x, y, z_1)) dx dy.$$

Полученные двойные интегралы одинаковы, что доказывает формулу

$$\oiint_G R dx dy = \iiint_T \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz.$$

Аналогично доказываются формулы

$$\oiint_G P dy dz = \iiint_T \frac{\partial P}{\partial x} dx dy dz, \quad \oiint_G Q dz dx = \iiint_T \frac{\partial Q}{\partial y} dx dy dz.$$

Сложив данные равенства, докажем формулу Гаусса – Остроградского. ►

Задание. Докажите формулу Гаусса – Остроградского для области T , которая не является простой, но которую можно представить в виде объединения двух простых областей: $T = T_1 \cup T_2$. При доказательстве используйте свойство, что при смене ориентации поверхности поверхностный интеграл II рода меняет знак на противоположный.

Пример 54.5. Решите примеры 54.3 и 54.4 с использованием формулы Гаусса – Остроградского.

В первом случае интеграл сводится к тройному интегралу по кубу. Под интегралом стоит единица, значит, интеграл равен объёму куба.

$$\oiint_G (x + y + z) dx dy = \iiint_T \left(0 + 0 + \frac{\partial(x + y + z)}{\partial z} \right) dx dy dz = a^3.$$

Во втором случае поверхностный интеграл сведём к интегралу по полушару, для вычисления которого используем переход в сферическую систему координат.

$$\oiint_G x^3 dy dz + z^3 dx dy = 3 \iiint_T (x^2 + z^2) dx dy dz = 6 \iiint_T z^2 dx dy dz =$$

$$= 6 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \cos^2 \theta \sin \theta d\theta \int_0^a r^4 dr = 6 \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{a^5}{5} = \frac{4\pi a^5}{5}.$$

#

Формула Стокса Пусть G – поверхность с границей, представляющей собой замкнутую кривую Γ . Функции $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$ и $R(x, y, z)$ непрерывны на G вместе со своими частными производными. Тогда

$$\oint_{\Gamma} Pdx + Qdy + Rdz = \iint_G \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dydz + \\ + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dzdx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy.$$

Данная формула, связывающая криволинейный интеграл II рода по замкнутой кривой с поверхностным интегралом II рода по поверхности, ограниченной этой кривой, называется *формулой Стокса*. Ориентация поверхности G выбирается так, чтобы со стороны вектора нормали $\vec{n}$ обход контура Γ происходил против часовой стрелки.

Для удобства запоминания формулы Стокса её символически можно записать в форме определителя

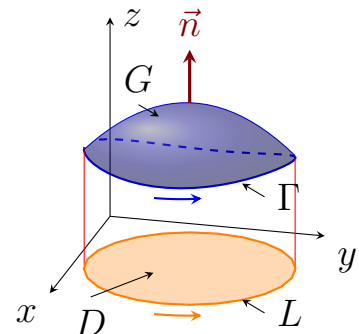
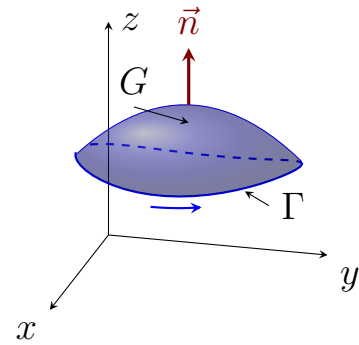
$$\oint_{\Gamma} Pdx + Qdy + Rdz = \iint_G \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}.$$

◀ Докажем часть формулы Стокса, относящуюся к функции $P(x, y, z)$:

$$\oint_{\Gamma} Pdx = \iint_G \frac{\partial P}{\partial z} dzdx - \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = \iint_G \frac{\partial P}{\partial z} dS_{zx} - \frac{\partial P}{\partial y} dS_{xy}.$$

Доказательство проведём для поверхности, имеющей явное представление $z = z(x, y)$. Пусть D – проекция G на плоскость Oxy . При этом кривая Γ , являющаяся границей G , спроецируется на кривую L , являющуюся границей D . Доказательство формулы проведём по следующей схеме:

$\oint_{\Gamma} \rightarrow \oint_L \rightarrow \iint_D \leftarrow \iint_G$. Для перехода от криволинейного интеграла по L к



двойному по D используем формулу Грина. Так

$$\oint_{\Gamma} P(x, y, z) dx = \oint_L P(x, y, z(x, y)) dx = - \iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} z'_y \right) \Big|_{(x, y, z(x, y))} dx dy.$$

Векторный элемент поверхности $\vec{d\sigma} = \{dS_{yz}, dS_{zx}, dS_{xy}\}$ коллинеарен нормали $\vec{n} = \{-z'_x, -z'_y, 1\}$, поэтому

$$\frac{dS_{zx}}{-z'_y} = \frac{dS_{xy}}{1} \Rightarrow dS_{zx} = -z'_y dS_{xy}.$$

Теперь запишем связь поверхностного интеграла по G с двойным по D :

$$\iint_G \frac{\partial P}{\partial z} \Big|_{(x, y, z)} dS_{zx} - \frac{\partial P}{\partial y} \Big|_{(x, y, z)} dS_{xy} = - \iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} z'_y \right) \Big|_{(x, y, z(x, y))} dS_{xy}.$$

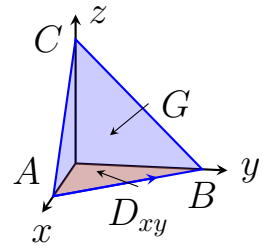
Формула для функции P доказана, две оставшиеся части формулы Стокса, относящиеся к функциям Q и R , доказываются аналогично. ►

Пример 54.6. Найти $\oint_{\Gamma} (z - y)dx + (x - z)dy + (y - x)dz$, где Γ — треугольник с вершинами $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$, $C(0, 0, 1)$.

Пусть G — часть плоскости $x + y + z = 1$ в первом квадранте. Найдём разности между частными производными:

$$\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial(y - x)}{\partial y} - \frac{\partial(x - z)}{\partial z} = 1 + 1 = 2.$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = 2, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 2.$$



$$\oint_{\Gamma} \dots = \iint_G 2dydz + 2dzdx + 2dxdy = 2(S_{yz} + S_{zx} + S_{xy}).$$

Площади проекций $S_{yz} = S_{zx} = S_{xy} = \frac{1}{2}$. Значит, $\oint_{\Gamma} \dots = 3$. #

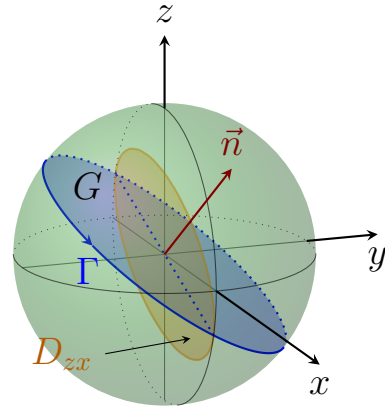
Пример 54.7. Найти $\oint_{\Gamma} (y + 2z)dx + (x + 2z)dy + (x + 2y)dz$, где Γ — пересечение сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ и плоскости $x + 2y + 3z = 0$.

Контур Γ – окружность с центром в начале координат и радиусом 1. Перед применением формулы Стокса найдём разности частных производных:

$$\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial(x+2y)}{\partial y} - \frac{\partial(x+2z)}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial(y+2z)}{\partial z} - \frac{\partial(x+2y)}{\partial x} = 1,$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial(x+2z)}{\partial x} - \frac{\partial(y+2z)}{\partial y} = 0.$$



Вычислим искомый интеграл

$$\oint_{\Gamma} \dots = \iint_G 0 \cdot dydz + 1 \cdot dzdx + 0 \cdot dxdy = \iint_G dzdx = S_{zx}.$$

Площадь S_{zx} проекции D_{zx} можно найти по площади $S = \pi$ круга G и вектору нормали $\vec{n} = \{1, 2, 3\}$ к заданной плоскости.

$$S_{zx} = S \cos(\widehat{(\vec{n}, \vec{j})}) = S \cdot \frac{n_y}{|\vec{n}|} = \frac{2\pi}{\sqrt{14}}. \quad \#$$

Независимость криволинейного интеграла II рода от пути интегрирования. Ранее в теореме 53.2 доказаны условия, при котором криволинейный интеграл по плоской кривой не зависит от пути интегрирования. Сделаем обобщение этой теоремы для криволинейного интеграла по пространственной кривой.

Теорема 54.2. Пусть функции $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$ и $R(x, y, z)$ непрерывны вместе со своими частными производными в односвязной области T . Тогда следующие утверждения эквивалентны:

1. Криволинейный интеграл $\int_{AB} P dx + Q dy + R dz$ зависит лишь от положения точек $A, B \in T$ и не зависит от пути интегрирования.
2. Криволинейный интеграл по любой замкнутой кривой $\Gamma \subset T$ равен нулю: $\oint_{\Gamma} P dx + Q dy + R dz = 0$.

3. Во всех точках области T выполнены равенства

$$\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}.$$

◀ Данная теорема доказывается аналогично теореме 53.2, поэтому мы не будем подробно останавливаться на этом. Единственное отличие доказательства заключается в использовании формулы Стокса вместо формулы Грина. ▶

Нахождение функции по дифференциалу. Ранее в §39 была сформулирована теорема, названная условием полного дифференциала функции трёх переменных. Согласно этой теореме, при выполнении условий $\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}$, $\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ выражение $Pdx + Qdy + Rdz$ является полным дифференциалом. Докажем это утверждение, для этого нам необходимо построить такую функцию $u(x, y, z)$, дифференциал которой $du = Pdx + Qdy + Rdz$.

Зафиксируем какую-нибудь точку $A(x_0, y_0, z_0)$ области и в каждой точке $B(x, y, z)$ определим функцию

$$u(x, y, z) = \int_{AB} P dx + Q dy + R dz.$$

Данное выражение действительно является однозначной функцией, т.к. интеграл не зависит от пути интегрирования при выполнении трёх приведённых условий. Нетрудно заметить, что эта функция является дифференцируемой и её дифференциал $du = Pdx + Qdy + Rdz$. Утверждение доказано.

Пример 54.8. Найти $\int_{(1,1,1)}^{(2,3,4)} yzdx + (xz + 2y)dy + (xy + 1)dz$.

Убедимся, что под интегралом стоит полный дифференциал и интеграл не будет зависеть от пути интегрирования.

$$\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z} \Rightarrow \frac{\partial(xy + 1)}{\partial y} = \frac{\partial(xz + 2y)}{\partial z} \Rightarrow x = x.$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial(yz)}{\partial z} = \frac{\partial(xy + 1)}{\partial x} \Rightarrow y = y.$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial(xz + 2y)}{\partial x} = \frac{\partial(yz)}{\partial y} \Rightarrow z = z.$$

Значит, под интегралом стоит полный дифференциал. Перейдём к восстановлению функции:

$$\begin{aligned} yzdx + (xz + 2y)dy + (xy + 1)dz &= (yzdx + xzdy + xydz) + 2ydy + dz = \\ &= d(xyz) + d(y^2) + dz = d(xyz + y^2 + z). \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \int_{(1,1,1)}^{(2,3,4)} yzdx + (xz + 2y)dy + (xy + 1)dz &= (xyz + y^2 + z) \Big|_{(1,1,1)}^{(2,3,4)} = \\ &= 2 \cdot 3 \cdot 4 + 3^2 + 4 - 1 \cdot 1 \cdot 1 - 1^2 - 1 = 34. \end{aligned} \quad \#$$

§55. Элементы теории поля

Скалярное и векторное поле. Пусть D – некоторая область в пространстве или на плоскости. Если в каждой точке M этой области определено число $u(M)$, то говорят, что в D задано *скалярное поле* u . Примеры скалярных полей: поле температур, поле концентраций. Другими словами, скалярное поле – функция, ставящая в соответствие каждой точке из D некоторое число. После введения системы координат, скалярное поле можно представить как функцию трёх (на плоскости – двух) переменных, являющихся координатами точки: $u(x, y, z)$.

Если в каждой точке M области D определён вектор $\vec{a}(M)$, то говорят, что в D задано *векторное поле* $\vec{a}$. Примеры векторных полей: поле скоростей, поле сил. После введения системы координат, векторное поле можно представить как вектор-функцию трёх (на плоскости – двух) переменных, являющихся координатами точки. Координаты вектор-функции являются скалярными функциями: $\vec{a}(x, y, z) = \{P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)\}$.

В §37 нами было введено понятие градиента фнп. Это понятие можно ввести и для скалярного поля. *Градиентом* $\text{grad } u$ поля u называется вектор, направленный в сторону наибольшего возрастания значения поля, а

по величине равный скорости роста u в этом направлении. Градиент определён в каждой точке области и, фактически, является векторным полем, порождённым скалярным полем u . Исходное скалярное поле u называют *потенциалом* векторного поля градиента.

Введём прямоугольную систему координат. Как было показано ранее, градиент в ней имеет координаты

$$\text{grad } u = \left\{ \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right\}.$$

Рассмотрим обратную задачу. Заданным считается векторное поле $\vec{a}$. Требуется узнать, является ли оно градиентом некоторого скалярного поля u , если является, восстановить его потенциал.

Если поле $\vec{a}(x, y, z) = \{P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)\}$ известно, то, фактически, известно выражение $Pdx + Qdy + Rdz$. Условия, при котором данное выражение является дифференциалом du , уже были рассмотрены. Эти условия в прямоугольных координатах имеют вид

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}.$$

Чтобы найти потенциал u , можно:

- Зафиксировать некоторую точку A и определить потенциал как значение криволинейного интеграла II рода

$$u(M) = \int_A^M Pdx + Qdy + Rdz.$$

- Найти u из уравнений $\frac{\partial u}{\partial x} = P$, $\frac{\partial u}{\partial y} = Q$, $\frac{\partial u}{\partial z} = R$.
- Выражение $Pdx + Qdy + Rdz$ привести к виду du , используя интегрируемые комбинации.

Пример 55.1. Векторное поле в каждой точке направлено к началу координат и по модулю обратно пропорционально квадрату расстояния от точки до начала координат. Определить потенциал данного поля.

Единичный вектор, направленный от точки к началу координат имеет координаты $\vec{n} = \{-\frac{x}{r}, -\frac{y}{r}, -\frac{z}{r}\}$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Значит, вектор поля в точке (x, y, z) равен

$$\{P, Q, R\} = \frac{k}{r^2} \cdot \vec{n} = \left\{ -\frac{kx}{r^3}, -\frac{ky}{r^3}, -\frac{kz}{r^3} \right\}.$$

Здесь k – коэффициент пропорциональности.

$$Pdx + Qdy + Rdz = -k \frac{xdx + ydy + zdz}{r^3} = -\frac{k}{2} \frac{dr^2}{r^3} = -k \frac{rdr}{r^3} = d\left(\frac{k}{r}\right).$$

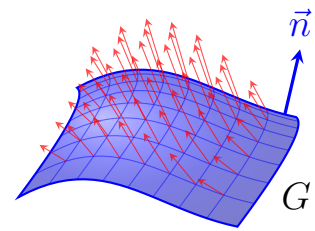
Значит, $u = \frac{k}{r} + C$. #

Заметим, что потенциал любого поля, как и неопределённый интеграл, определяются с точностью до произвольной постоянной.

Поток и дивергенция. Пусть $\vec{a}$ – векторное поле, G – некоторая ориентированная поверхность. *Потоком* векторного поля $\vec{a}$ через поверхность G называют поверхностный интеграл II рода

$$\Phi = \iint_G (\vec{a}, \vec{d}\sigma).$$

Физический смысл потока: если векторное поле описывает скорость жидкости, то поток равен количеству жидкости, протекающей за единицу времени через поверхность в направлении её нормали. Заметим, что поток является характеристикой поля и не зависит от выбранной системы координат, т.к. определяется через скалярное произведение.

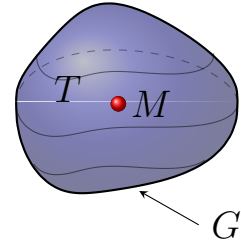


Рассмотрим прямоугольную систему координат, в которой векторный элемент поверхности $\vec{d}\sigma$ имеет координаты $\{dydz, dzdx, dxdy\}$. Если координаты вектора поля $\vec{a} = \{P, Q, R\}$, то поток

$$\Phi = \iint_G Pdydz + Qdzdx + Rdxdy.$$

Пусть $\vec{a}$ – векторное поле, M – некоторая точка. Рассмотрим некоторую область T вокруг точки $M \in T$ и пусть λ – диаметр этой области.

Дивергенцией векторного поля $\vec{a}$ в точке M называется предел отношения потока поля через по-



верхность G области к её объёму V при стягивании области T в точку M :

$$\operatorname{div} \vec{a} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oint_G (\vec{a}, d\vec{\sigma}).$$

Дивергенция определена в каждой точке области и, фактически, является скалярным полем, порождённым векторным полем $\vec{a}$.

Физический смысл дивергенции: если векторное поле описывает скорость жидкости, то дивергенция является показателем того, в какой степени точка является источником ($\operatorname{div} \vec{a} > 0$) или стоком ($\operatorname{div} \vec{a} < 0$) этого поля.

В прямоугольных координатах, по формуле Гаусса – Остроградского

$$\oint_G Pdydz + Qdzdx + Rdx dy = \iiint_T \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz.$$

В малой окрестности точки M , используя теорему о среднем,

$$\iiint_T \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz = \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) \Big|_{M_1} \cdot V,$$

где $M_1 \in T$. При стягивании области T в точку M , точка M_1 также стремится к точке M , поэтому

$$\operatorname{div} \vec{a} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

Заметим, что эта формула справедлива только для прямоугольной системы координат.

Формула Гаусса – Остроградского в терминах поля формулируется так: *поток векторного поля через замкнутую поверхность равен тройному интегралу от дивергенции данного поля, взятому по области, ограничен-*

ной этой поверхностью:

$$\oiint_G (\vec{a}, d\vec{\sigma}) = \iiint_T \operatorname{div} \vec{a} \cdot dV.$$

Циркуляция и ротор. Пусть $\vec{a}$ – векторное поле, Γ – некоторая замкнутая кривая с выбранным обходом. *Циркуляцией* векторного поля $\vec{a}$ по контуру Γ называется криволинейный интеграл II рода

$$\gamma = \oint_{\Gamma} (\vec{a}, d\vec{\ell}).$$

Физический смысл циркуляции: если векторное поле $\vec{a}$ описывает силу, действующую на частицу, то циркуляция равна работе по перемещению частицы по замкнутому контуру Γ .

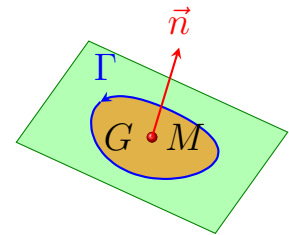
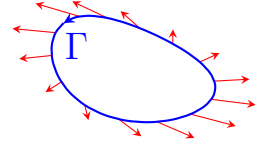
Рассмотрим прямоугольную систему координат, в которой векторный элемент приращения $d\vec{\ell}$ имеет координаты $\{dx, dy, dz\}$. Если координаты вектора поля $\vec{a} = \{P, Q, R\}$, то циркуляция

$$\gamma = \oint_{\Gamma} Pdx + Qdy + Rdz.$$

Пусть $\vec{a}$ – векторное поле, M – некоторая её точка и $\vec{n}$ – единичный вектор некоторого направления. Проведём через M плоскость, перпендикулярную $\vec{n}$ и рассмотрим в этой плоскости некоторую область G вокруг точки $M \in G$. Пусть λ – диаметр G . Проекцией *ротора* на направление $\vec{n}$ называется предел отношения циркуляции поля по границе Γ области к её площади S при стягивании области G в точку M :

$$(\operatorname{rot} \vec{a}, \vec{n}) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{1}{S} \oint_{\Gamma} (\vec{a}, d\vec{\ell}).$$

Заметим, что при выборе другого направления вектора нормали, проекция ротора $(\operatorname{rot} \vec{a}, \vec{n})$ изменится. Но, как мы покажем далее, сам вектор



$\text{rot } \vec{a}$ не зависит от направления $\vec{n}$ и является вектор-функцией точки M . Следовательно, $\text{rot } \vec{a}$ является векторным полем.

Физический смысл ротора: если векторное поле описывает скорость жидкости, то ротор равен угловой скорости вращения очень маленькой частицы, находящейся в потоке.

В прямоугольных координатах, по формуле Стокса

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} Pdx + Qdy + Rdz &= \iint_G \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dzdx + \\ &+ \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \Big|_{M_1} \cdot S_{yz} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \Big|_{M_2} \cdot S_{zx} + \\ &+ \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \Big|_{M_3} \cdot S_{xy}, \end{aligned}$$

где $M_1, M_2, M_3 \in G$. Здесь поверхностный интеграл был разбит на три, каждый из которых записан в виде двойного интеграла по соответствующей проекции. К каждому двойному интегралу была применена теорема о среднем. При стягивании области G в точку M , точки M_1, M_2, M_3 также стремятся к точке M , поэтому, с учётом равенств $S_{yz} = S \cdot n_x$, $S_{zx} = S \cdot n_y$, $S_{xy} = S \cdot n_z$, получим

$$\oint_{\Gamma} Pdx + Qdy + Rdz = S \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) n_x + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) n_y + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) n_z \right].$$

Значит, $(\text{rot } \vec{a}, \vec{n}) = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) n_x + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) n_y + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) n_z$.

Следовательно, координаты вектора ротора в прямоугольных координатах имеют вид

$$\text{rot } \vec{a} = \left\{ \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right\} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}.$$

Формула Стокса в терминах поля формулируется так: *циркуляция векторного поля по замкнутому контуру равна потоку от ротора данного*

поля, взятому по поверхности, ограниченной этим контуром:

$$\oint_{\Gamma} (\vec{a}, d\vec{\ell}) = \iint_G (\text{rot } \vec{a}, d\vec{\sigma}).$$

Оператор Гамильтона. Операторы второго порядка. Оператор Гамильтона (набла) $\vec{\nabla}$ – векторный дифференциальный оператор, компоненты которого являются частными производными по координатам:

$$\vec{\nabla} = \left\{ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right\}.$$

Используя аналогии с векторными операциями, такими как умножение вектора на скаляр, скалярное и векторное умножения векторов, через оператор $\vec{\nabla}$ можно записать градиент, дивергенцию и ротор:

$$\text{grad } u = \vec{\nabla} u, \quad \text{div } \vec{a} = (\vec{\nabla}, \vec{a}), \quad \text{rot } \vec{a} = [\vec{\nabla}, \vec{a}].$$

Заметим, что результатом применения операций градиента, дивергенции и ротора являются поля, поэтому к ним также можно применить эти же операции. В результате получаются так называемые дифференциальные операторы второго порядка. Рассмотрим все возможные варианты:

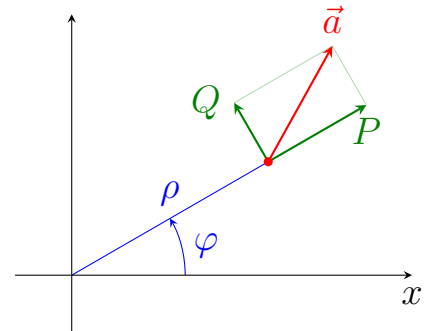
- Пусть u – скалярное поле. Тогда можно определить скалярное поле $\text{div grad } u = (\vec{\nabla}, \vec{\nabla} u) = \Delta u$. Здесь оператор $\Delta = (\vec{\nabla}, \vec{\nabla})$ называется *оператором Лапласа* или *лапласианом*. В прямоугольных координатах этот оператор имеет вид $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$. Он ранее нам встречался в уравнении диффузии и в волновом уравнении (см., напр., §49).
- Пусть u – скалярное поле. Тогда можно определить векторное поле $\text{rot grad } u = [\vec{\nabla}, \vec{\nabla} u]$. Также, как и векторное произведение двух коллинеарных векторов, полученное векторное поле является нулевым, т.е. $\text{rot grad } u = \vec{0}$.
- Пусть $\vec{a}$ – векторное поле. Тогда можно определить скалярное поле $\text{div rot } \vec{a} = (\vec{\nabla}, [\vec{\nabla}, \vec{a}])$. Также, как и смешанное произведение в случае наличия двух одинаковых векторов, полученное скалярное поле является нулевым, т.е. $\text{div rot } \vec{a} = 0$.

- Пусть $\vec{a}$ – векторное поле. Тогда можно определить векторные поля $\text{grad div } \vec{a} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}, \vec{a})$ и $\text{rot rot } \vec{a} = [\vec{\nabla}, [\vec{\nabla}, \vec{a}]]$.

Опишем некоторые типы векторных полей:

- Векторное поле $\vec{a}$ называется *потенциальным*, если в каждой его точке $\text{rot } \vec{a} = \vec{0}$. Примером такого поля является электростатическое поле. У любого потенциального поля существует потенциал u – такое скалярное поле, что $\vec{a} = \text{grad } u$. Циркуляция по любому замкнутому контуру потенциального поля равна нулю.
- Векторное поле $\vec{a}$ называется *соленоидальным*, если в каждой его точке $\text{div } \vec{a} = 0$. Примером такого поля является поле скоростей несжимаемой жидкости. Действительно, из свойства несжимаемости следует, что любая точка поля не может являться ни источником, ни стоком. Поток через любую замкнутую поверхность соленоидального поля равен нулю.
- Векторное поле $\vec{a}$ называется *гармоническим*, если оно одновременно является и потенциальным и соленоидальным. Потенциал u гармонического поля удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta u = 0$.

Характеристики поля в полярных координатах.¹ Пусть u – скалярное поле, $\vec{a}$ – векторное поле. Введём полярную систему координат, в ней данные поля можно представить как функции двух переменных $u(\rho, \varphi)$ и $\vec{a} = \{P(\rho, \varphi), Q(\rho, \varphi)\}$.



Приведём без доказательства формулы для вычисления градиента, дивергенции, ротора и лапласиана в данной системе координат:

$$\text{grad } u = \left\{ \frac{\partial u}{\partial \rho}, \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right\}, \quad \text{div } \vec{a} = \frac{\partial P}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} P + \frac{1}{\rho} \frac{\partial Q}{\partial \varphi},$$

$$\text{rot } \vec{a} = \frac{\partial Q}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} Q - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial \varphi}, \quad \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}.$$

¹ Данный раздел является факультативным.

Глава 9.

Теория вероятностей и математическая статистика

Бог не играет в кости

А.Эйнштейн

Бог не только играет в кости, но к тому же забрасывает их порою туда, где мы их не можем не увидеть.

С.Хокинг

Испытанием назовём наблюдение какого-либо явления при соблюдении определённого комплекса условий, который должен каждый раз строго выполняться при повторении данного испытания. *Событие* – один из возможных исходов испытания. События можно разделить на три вида:

- *достоверные* – которые обязательно произойдут при испытании,
- *невозможные* – которые заведомо не произойдут в испытании,
- *случайные* – которые могут как произойти, так и не произойти.

Предметом изучения теории вероятностей являются случайные события. Заметим, что теория вероятностей не может ответить на вопрос, произойдёт то или иное событие. Задачей теории вероятностей является изучение появляющихся закономерностей случайных событий при проведении большого количества однотипных испытаний.

§56. Вероятность

Испытание, которое часто будет использоваться в примерах данного параграфа – бросок одной или нескольких игральных костей, каждая из которых представляет собой кубик, на гранях которого написаны числа от 1 до 6. Если бросается одна игральная кость, то событие

- $A = \{\text{выпало число, делящееся на 3}\}$ – случайное,
- $B = \{\text{выпало число, делящееся на 7}\}$ – невозможное,
- $C = \{\text{выпало число, делящееся на 1}\}$ – достоверное.

Для обозначения случайных событий будем использовать заглавные латинские буквы, например, A , B , C . Достоверное событие будем обозначать греческой буквой Ω , невозможное – символом $\emptyset$.

Задание. Пусть испытанием является подбрасывание монеты. Приведите примеры событий, которые в данном испытании являются достоверными/невозможными/случайными.

Совместные и несовместные события. Два события называются *несовместными* (*несовместимыми*), если появление одного из них исключает появление другого события в том же испытании. Это определение можно распространить также на большее число событий. Пример несовместных случайных событий при броске игральной кости:

- $A = \{\text{выпало число, делящееся на 2}\}$,
- $B = \{\text{выпало число 5}\}$.

Если два или более событий могут произойти одновременно, то их называют *совместными* (*совместимыми*). Примеры таких событий:

- $A = \{\text{выпало число, делящееся на 2}\}$,
- $B = \{\text{выпало число, делящееся на 3}\}$.

Несколько событий образуют *полную группу*, если в результате испытания непременно произойдёт ровно одно из них. Пример полной группы событий:

- $A = \{\text{выпало чётное число}\}$,
- $B = \{\text{выпало число 1}\}$,
- $C = \{\text{выпало число 3 или 5}\}$.

События называются *равновозможными*, если, по каким-либо соображениям, есть основания считать, что ни одно из них не является более возможным, чем другое. Так, если игральная кость является правильной, т.е. представляет собой куб из однородного материала, то выпадение каждой из её граней является набором равновозможных событий.

Полная группа равновозможных событий называется множеством *элементарных* событий. Так, приведённая выше полная группа из трёх событий не является множеством элементарных событий, т.к., например, события A и B не являются равновозможными. Пусть событие $A_k = \{\text{выпало число } k\}$, тогда множество $\{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6\}$ является множеством элементарных событий. Другой пример множества элементарных событий:

- $A = \{\text{выпало чётное число}\}$,
- $B = \{\text{выпало нечётное число}\}$.

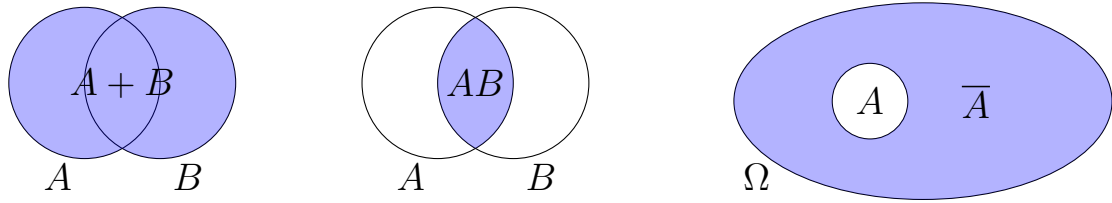
Задание. Приведите пример множества из трёх элементарных событий при броске игральной кости.

Сумма и произведение событий. Суммой $A + B$ называют событие, состоящее в появлении в результате испытания события A или события B (или одновременно обоих событий). Понятие суммы событий можно распространить и на большее число событий. Заметим, что сумма полной группы событий – достоверное событие.

Произведением $A \cdot B$ называют событие, состоящее в появлении в результате испытания события A и события B . Произведение двух несовместных событий – невозможное событие.

Противоположным к событию A называется событие $\bar{A}$, состоящее в том, что событие A не произошло. Например, если $A_1 = \{\text{выпало число } 1\}$, то $\bar{A}_1 = \{\text{выпало число, отличное от } 1\}$. Событие и противоположное ему образуют полную группу.

Для геометрической интерпретации описанных выше операций можно использовать диаграммы Эйлера – Венна:



Сумма событий Произведение событий Противоположное событие
Отметим несколько свойств описанных операций:

- 1°. $A + B = B + A$, $AB = BA$ – коммутативность,
- 2°. $(A + B) + C = A + (B + C)$, $(AB)C = A(BC)$ – ассоциативность,
- 3°. $(A + B)C = AC + BC$ – дистрибутивность,
- 4°. $A + A = A$, $AA = A$,
- 5°. $A + \bar{A} = \Omega$, $A\bar{A} = \emptyset$,
- 6°. $A + \Omega = \Omega$, $A\Omega = A$,
- 7°. $A + \emptyset = A$, $A\emptyset = \emptyset$,
- 8°. $\overline{A \cdot B} = \bar{A} + \bar{B}$, $\overline{A + B} = \bar{A} \cdot \bar{B}$ – законы де Моргана.

Задание. Докажите законы де Моргана с использованием геометрической интерпретации.

Элементы комбинаторики. Комбинаторика – раздел математики, изучающий задачи, связанные с подсчётом количества конфигураций, соответствующих заданным правилам.

Рассмотрим, например, такую задачу: в столовой есть 4 первых блюда и 6 вторых. Сколькими способами N_1 можно выбрать одно (первое или второе) блюдо? Ответ в этой задаче $N_1 = 10$. Для его получения используется *правило суммы*: пусть A и B – два взаимоисключающие действия. Если действие A можно выполнить m способами, а действие B – n способами, то выполнить любое из действий можно $m + n$ способами.

Другая задача: в столовой есть 4 первых блюда и 6 вторых. Сколькими способами N_2 можно выбрать обед, состоящий из первого и второго блюда? Ответ в этой задаче $N_2 = 24$. Для его получения используется *правило произведения*: пусть A и B – два действия. Если действие A можно выполнить m способами и при любом выборе A действие B можно выполнить n способами, то пару действий (A, B) последовательно можно выполнить mn способами.

Пример 56.1. Имеются шары 10 различных цветов, шары каждого цвета есть в неограниченном количестве. Сколькими способами можно составить цепочку из трёх различных шаров?

Первый шар можно выбрать 10 различными способами, второй и третий – также 10 способами. По правилу произведения, тройку шаров можно составить $N = 10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000$ способами. #

Упорядоченный набор из m элементов, каждый из которых может быть взят из некоторого множества из n элементов называется *размещением с повторениями*. Число таких размещений $\overline{A}_n^m = n^m$.

Пример 56.2. Имеются шары 10 различных цветов, шар каждого цвета в единственном экземпляре. Сколькими способами можно составить цепочку из трёх различных шаров?

Первый шар можно выбрать 10 различными способами, второй и третий – 9 и 8 способами соответственно. Тройку шаров, по правилу произведения, можно составить $N = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$ способами. #

Упорядоченный набор из m элементов, каждый из которых без повторений выбирается из некоторого множества из n элементов называется *размещением без повторений*. Число таких размещений $A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$.

Частный случай размещения без повторений, когда выбираются все n предметов, называется *перестановкой*. Число перестановок $A_n^n = n!$.

Пример 56.3. Имеются шары 10 различных цветов, шар каждого цвета в единственном экземпляре. Сколькими способами можно выбрать группу из трёх различных шаров?

Заметим, что порядок расположения шаров в группе не определён. Если бы порядок имел значение, то количество способов бы равнялось 720. Мы должны это число разделить на $3! = 6$ – т.е. на количество перестановок в группе из трёх шаров. Поэтому, ответом в данной задаче будет $N = \frac{720}{6} = 120$ способов. #

Набор из m элементов, в котором не учитывается порядок элементов и где каждый элемент выбирается из некоторого множества из n эле-

ментов называется *сочетанием без повторений*. Число таких сочетаний

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Классическое определение вероятности. Пусть $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N\}$ – множество, состоящее из N элементарных событий. Рассмотрим событие A , являющееся подмножеством Ω и состоящее из M элементарных событий, которые мы будем называть благоприятными.

Классической вероятностью p события A называют отношение числа M благоприятных элементарных событий к их общему числу N :

$$p(A) = \frac{M}{N}.$$

Из данного определения следует, что $p(A) \in [0, 1]$.

Задание. Чему равны вероятности достоверного и невозможного событий?

Пример 56.4. *Подбросили две игральные кости. Найти вероятность, что сумма выпавших чисел равна 10.*

Рассмотрим множество элементарных событий вида $\{i, j\}$, где i – число, выпавшее на первой кости, а j – на второй. Общее число таких элементарных событий $N = 6^2 = 36$. Благоприятными будут события $\{4, 6\}$, $\{5, 5\}$ и $\{6, 4\}$, поэтому $M = 3$. Искомая вероятность $p = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$. #

Пример 56.5. *В урне лежит 7 белых и 3 чёрных шара. Вытаскивают три шара. Найти вероятность, что среди них только один чёрный.*

Если в урне лежит 10 шаров и испытание состоит в вытаскивании 3 шаров, то общее число всевозможных исходов равно $N = C_{10}^3 = \frac{10!}{3!7!} = 120$. Вытащить два белых шара из 7 возможных можно C_7^2 способами, вытащить один чёрный шар из 3 возможных можно C_3^1 способами. Общее число благоприятных исходов найдём с использованием правила произведения $M = C_7^2 \cdot C_3^1 = 21 \cdot 3 = 63$. Вероятность $p = \frac{63}{120} = \frac{21}{40}$. #

Геометрическое определение вероятности. В некоторых испытаниях число элементарных событий может быть бесконечным. Поэтому в

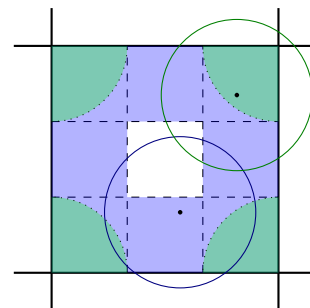
этом случае пользоваться классической формулой для определения вероятности нельзя. В качестве примера рассмотрим некоторую фигуру g , являющееся частью большей фигуры G . Испытание будет состоять в выборе одной из точек G , при этом событие A состоит в том, что выбранная точка принадлежит g . Введём понятие геометрических мер $m(g)$ и $m(G)$ фигур g и G . Так, если фигура – отрезок, то под мерой будет подразумеваться его длина ℓ , если фигура – плоская область, то мера – это её площадь S , если фигура – трёхмерное тело, то мера – его объём V и т.п.

Геометрической вероятностью p события A называют отношение меры области g к мере всей области G :

$$p(A) = \frac{m(g)}{m(G)}. \quad (56.1)$$

Пример 56.6. На клетчатый пол со стороной клетки 3 брошена монетка радиуса 1. Какова вероятность, что монетка пересечёт некоторую полосу? Какова вероятность, что монетка ляжет на некоторый узел?

Рассмотрим квадратную клетку, в которой оказался центр монеты. Эта клетка будет фигурой G и её мера – её площадь $m(G) = 9$. Разобьём G на 9 квадратов со стороной 1 и заметим, что если центр монеты оказался в одном из 8 граничных квадратов, то произойдёт событие $A = \{\text{монетка пересечёт некоторую полосу}\}$. Поэтому g_a – область, состоящая из 8 граничных квадратов и $m(g_a) = 8$. Вероятность $p(A) = \frac{8}{9}$.



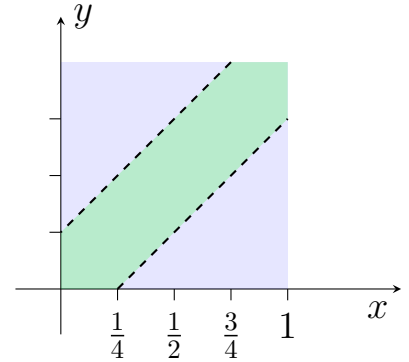
Пусть $B = \{\text{монетка легла на некоторый узел}\}$. Область g_b состоит из четырёх четвертинок круга радиуса 1 и $m(g_b) = \pi$. Поэтому $p(B) = \frac{\pi}{9}$. #

Пример 56.7. Задача о встрече. Два друга договорились встретиться между 12 и 13 часами. Первый пришедший на встречу ждёт другого 15 минут, после чего уходит. Найти вероятность того, что друзья встретятся.

В данной задаче не говорится о каких-либо геометрических областях, но для решения можно использовать формулу геометрической вероятности.

сти. Пусть время прихода первого друга – x , второго – y . Введём координатную плоскость и изобразим пару (x, y) в виде точки. Каждая точка плоскости будет соответствовать некоторому элементарному исходу. Область G всевозможных исходов – квадрат со стороной 1, $m(G) = 1$.

Точки прямой $y = x$ соответствует событию, когда друзья пришли одновременно. Для других точек число $|x - y|$ соответствует времени между приходами друзей. Для встречи это время не должно превысить четверть часа, поэтому благоприятная область g расположена между прямыми $x - y = \frac{1}{4}$ и $y - x = \frac{1}{4}$. Площадь g можно найти, вычтя из площади всего квадрата площадь двух прямоугольных треугольников с катетами $\frac{3}{4}$, поэтому $m(g) = 1 - \frac{9}{16} = \frac{7}{16}$. Вероятность встречи $P(A) = \frac{7}{16}$. #



Статистическое определение вероятности. Рассмотрим испытания, в которых результат по каким-либо причинам нельзя представить в виде множества элементарных событий.

Относительной частотой w называют отношение числа m испытаний, в которых событие A наступило к общему числу n испытаний: $w(A) = m/n$. Основное отличие относительной частоты от вероятности заключается в том, что вероятность $p(A)$ является постоянной величиной, не зависящей от результатов проведённых испытаний. Относительная частота зависит от результатов испытаний, но, в то же время, при увеличении числа испытаний, обладает свойством устойчивости, колеблясь около некоторого числа. Как будет показано далее, если p – классическая вероятность, то w будет стремиться именно к p при $n \rightarrow \infty$.

Статистической вероятностью p события A называют предел относительной частоты в серии однородных независимых испытаний при стремлении числа испытаний к бесконечности:

$$p(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m}{n}.$$

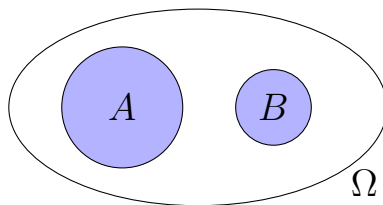
Теоретическая обоснованность использования этого определения осно-

вана на группе теорем, называемых *законом больших чисел*. Эти теоремы не рассматриваются в данном пособии.

§57. Теоремы сложения и умножения вероятностей

Вероятность суммы событий. Пусть A и B – события с известными вероятностями. Рассмотрим задачу нахождения вероятности комбинированного события $A + B$.

Теорема 57.1. Если A и B – несовместные события, то вероятность их суммы равна сумме вероятностей этих событий: $p(A+B) = p(A) + p(B)$.

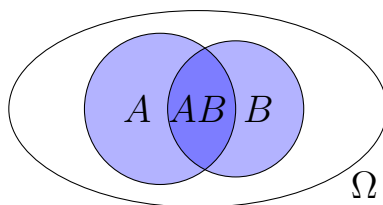


◀ Доказательство данной теоремы легко провести с использованием геометрического определения вероятности. Вероятности событий пропорциональны площади соответствующих фигур. Площадь фигуры $A + B$ равна сумме площадей фигур A и B , что доказывает теорему. ▶

Следствие 57.1.1. Вероятность противоположного события равна единице минус вероятность самого события: $p(\bar{A}) = 1 - p(A)$.

Задание. Докажите это следствие.

Теорема 57.2. Если A и B – совместные события, то вероятность их суммы $p(A + B) = p(A) + p(B) - p(AB)$.



◀ Используем геометрическое определение вероятности. Фигуру A разобьём на две непересекающиеся части, соответствующие несовместным событиям $A\bar{B}$ и AB . По предыдущей теореме $p(A) = p(A\bar{B}) + p(AB)$, откуда $p(A\bar{B}) = p(A) - p(AB)$. Аналогично $p(\bar{A}B) = p(B) - p(AB)$. Событие $A+B$ является комбинацией трёх несовместных событий $A\bar{B}$, AB и $\bar{A}B$, поэтому

$$p(A+B) = p(A\bar{B}) + p(\bar{A}B) + p(AB) = p(A) + p(B) - p(AB). \quad \blacktriangleright$$

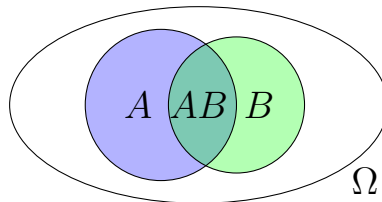
Вероятность произведения событий. Условная вероятность. В ряде случаев вероятность некоторого события может зависеть от того, произошли или нет некоторые другие события. *Условной вероятностью* $p(A|B)$ называют вероятность события A в предположении, что событие B уже произошло. Разберём это определение на примере.

Пусть в урне лежит 7 белых и 3 чёрных шара. Испытание состоит в последовательном извлечении двух шаров. Рассмотрим события: $A = \{\text{второй шар белый}\}$, $B_1 = \{\text{первый шар белый}\}$ и $B_2 = \{\text{первый шар чёрный}\}$.

Если нет никакой информации о цвете первого извлечённого шара, то $p(A) = \frac{7}{10}$. В то же время, если известно, что вначале извлекли белый шар, то перед вторым извлечением в урне будет 6 белых шаров из 9 оставшихся и $p(A|B_1) = \frac{6}{9}$. Аналогично $p(A|B_2) = \frac{7}{9}$.

Формула условной вероятности имеет вид

$$p(A|B) = \frac{p(AB)}{p(B)}. \quad (57.1)$$



Доказательство этой формулы следует из определения вероятности. Рассмотрим, например, формулу (56.1) геометрической вероятности. Если B произошло, то $m(B)$ равно площади области B , а $m(g)$ представляет собой площадь благоприятной области AB .

Теорема 57.3. Вероятность произведения событий A и B равна произведению вероятности одного события на условную вероятность второго в предположении, что первое событие уже наступило: $p(AB) = p(A)p(B|A) = p(B)p(A|B)$.

◀ Данная формула следует непосредственно из (57.1). ▶

События A и B называют *независимыми*, если вероятность одного из них не зависит от появления другого события: $p(A) = p(A|B)$, $p(B) = p(B|A)$.

Теорема 57.4. Если A и B – независимые события, то вероятность их произведения равна произведению вероятностей: $p(AB) = p(A)p(B)$.

Задание. Докажите эту теорему, пользуясь определением независимости событий.

Следствие 57.4.1. Вероятность суммы нескольких независимых событий (хотя бы одного события) равна единице минус произведение вероятностей противоположных событий $p(A + B) = 1 - p(\bar{A})p(\bar{B})$.

◀ Доказательство этого следствия следует из закона де Моргана. ▶

Пример 57.1. В урне 7 белых и 3 чёрных шара, по очереди вытаскивают три шара. Найти вероятность, что, при вытаскивании шаров, цвета будут чередоваться.

Представим искомое событие A в виде суммы двух несовместных событий: $A_1 = \{\text{бчб}\}$ и $A_2 = \{\text{чбч}\}$. Вероятности данных событий найдём по формуле произведения

$$p(A_1) = \frac{7}{10} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{6}{8} = \frac{7}{40}, \quad p(A_2) = \frac{3}{10} \cdot \frac{7}{9} \cdot \frac{2}{8} = \frac{7}{120}.$$

Итоговая вероятность

$$p(A) = p(A_1) + p(A_2) = \frac{7}{40} + \frac{7}{120} = \frac{7}{30}. \quad \#$$

Пример 57.2. Задача о письме. Письмо находится в столе с вероятностью $1/2$. В столе 3 ящика. В двух верхних ящиках письма не оказалось. Какова вероятность того, что письмо в нижнем ящике стола?

Пусть $A = \{\text{письмо в нижнем ящике}\}$, $B = \{\text{письма нет в верхних ящиках}\}$. Задача состоит в нахождении условной вероятности $p(A|B)$. Найдём вначале вероятность произведения $p(AB) = p(A) = \frac{1}{6}$. Вероятность события B удобно найти, рассмотрев противоположное событие: $p(B) = 1 - p(\overline{B}) = 1 - \frac{2}{6} = \frac{2}{3}$. По формуле условной вероятности

$$p(A|B) = \frac{p(AB)}{p(B)} = \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{2} = \frac{1}{4}. \quad \#$$

Формула полной вероятности. Рассмотрим задачу:

Пример 57.3. В первой урне 1 белый и 3 чёрных шара. Во второй – 2 белых и 2 чёрных. Из первой урны, не глядя, переложили шар во вторую урну. Какова вероятность вытащить белый шар из второй урны?

Введём события: $A = \{\text{вытащили белый шар из второй урны}\}$, $H_1 = \{\text{переложили белый шар}\}$, $H_2 = \{\text{переложили чёрный шар}\}$. События H_1 и H_2 образуют полную группу, поэтому искомое событие можно представить в виде суммы двух несовместных событий. Следовательно,

$$p(A) = p(H_1A) + p(H_2A) = p(H_1)p(A|H_1) + p(H_2)p(A|H_2).$$

Входящие в это соотношение вероятности легко находятся:

$$p(H_1) = \frac{1}{4}, \quad p(H_2) = \frac{3}{4}, \quad p(A|H_1) = \frac{3}{5}, \quad p(A|H_2) = \frac{2}{5}.$$

Поэтому

$$p(A) = \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{5} + \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{5} = \frac{9}{20}. \quad \#$$

Пусть событие A может наступить лишь при появлении одного из несовместных событий $H_1, H_2, \dots, H_n$, образующих полную группу. События этой группы в дальнейшем будем называть гипотезами. Если известны вероятности $p(H_k)$ гипотез и условные вероятности $p(A|H_k)$ события A , то вероятность A находится по формуле

$$p(A) = \sum_{k=1}^n p(H_k)p(A|H_k),$$

называемой *формулой полной вероятности*.

Формула Байеса. Эта формула позволяет пересчитать вероятность гипотезы H_k при условии, что произошло связанное с ним другое событие A . Формула Байеса имеет вид:

$$p(H_k|A) = \frac{p(H_k)p(A|H_k)}{p(A)} = \frac{p(H_k)p(A|H_k)}{\sum_{k=1}^n p(H_k)p(A|H_k)}.$$

Она следует из формулы условной вероятности (57.1).

Пример 57.4. В первой урне 1 белый и 3 чёрных шара. Во второй – 2 белых и 2 чёрных. Из первой урны, не глядя, переложили шар во вторую урну. После, из второй урны был вытащен белый шар. Какова вероятность, что был переложён белый шар?

Эта задача на применение формулы Байеса. Используем результаты, полученные в примере 57.3:

$$p(H_1|A) = \frac{p(H_1)p(A|H_1)}{p(A)} = \frac{\frac{1}{4} \cdot \frac{3}{5}}{\frac{9}{20}} = \frac{1}{3}. \quad \#$$

§58. Повторные испытания

Формула Бернулли. Пусть производится n независимых испытаний, вероятность события A в каждом испытании постоянна и равна p (вероятность противоположного события $q = 1 - p$). Вероятность $p_n(k)$ того, что в этих испытаниях событие A произошло ровно k раз (и не произошло $n - k$ раз) находится по формуле Бернулли

$$p_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}.$$

◀ Докажем эту формулу. Общее число вариантов того, что некоторое событие произошло k раз в n испытаниях, равно C_n^k , каждый вариант имеет одинаковую вероятность. Найдём, например, вероятность варианта, когда в первых k испытаниях событие произошло, а в последующих $n - k$ испытаниях – не произошло. Эта вероятность $p_1 = p^k q^{n-k}$. Перемножив p_1 на общее число вариантов, получим формулу Бернулли. ▶

Пример 58.1. Подбросили 10 игральных костей. Найдите вероятность выпадения двух шестёрок.

Представим событие как последовательные 10 бросков одной кости. Пусть событие $A = \{\text{выпало число 6}\}$, его вероятность $p = \frac{1}{6}$. По формуле Бернулли

$$p_{10}(2) = C_{10}^2 p^2 (1-p)^{10-2} = \frac{10!}{2!8!} \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^8 = \frac{1953125}{6718464} \approx 0.2907. \quad \#$$

Формулы Муавра – Лапласа. При большом числе испытаний пользоваться формулой Бернулли проблематично из-за необходимости вычисления факториалов больших чисел. Поэтому, при $npq \geq 9$, используют приближённую формулу, которая называется *локальной формулой Муавра – Лапласа*:

$$p_n(k) \approx \frac{\varphi(x)}{\sigma}, \quad \sigma = \sqrt{npq}, \quad x = \frac{k - np}{\sigma}, \quad \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}. \quad (58.1)$$

Входящая в эту формулу функция $\varphi(x)$ называется *функцией Гаусса*.

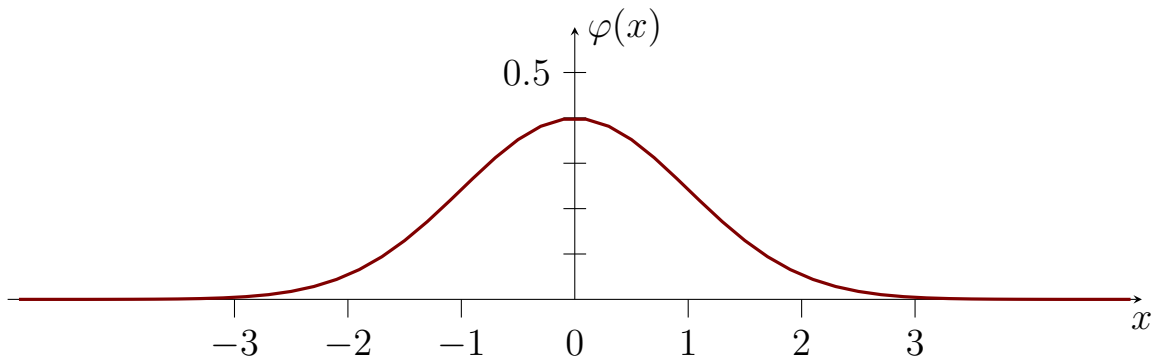


График функции Гаусса

◀ Получим формулу Муавра – Лапласа из формулы Бернулли в предположении, что число npq велико. Для вычисления факториалов больших чисел используем формулу Стирлинга

$$n! \approx \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

Пусть $m = n - k$. Тогда число сочетаний

$$C_n^k = \frac{n!}{k!m!} \approx \frac{\sqrt{2\pi n}}{\sqrt{2\pi k}\sqrt{2\pi m}} \frac{n^n e^k e^m}{e^n k^k m^m} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi km}} \left(\frac{k}{n}\right)^{-k} \left(\frac{m}{n}\right)^{-m}.$$

Запишем формулу Бернулли

$$p_n(k) = C_n^k p^k q^m \approx \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi km}} \left(\frac{k}{np}\right)^{-k} \left(\frac{m}{nq}\right)^{-m}.$$

Отклонение относительной частоты от вероятности обозначим $t = \frac{k}{n} - p$. Тогда $k = n(p + t)$ и $m = n(q - t)$.

$$p_n(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi n(p+t)(q-t)}} \left(1 + \frac{t}{p}\right)^{-n(p+t)} \left(1 - \frac{t}{q}\right)^{-n(q-t)}.$$

Предположим, что $t \ll p$ и $t \ll q$, тогда

$$p_n(k) \approx \frac{e^{-s}}{\sqrt{2\pi npq}},$$

где

$$s = n(p+t) \ln \left(1 + \frac{t}{p}\right) + n(q-t) \ln \left(1 - \frac{t}{q}\right).$$

Для малых ε имеет место формула

$$\ln(1 + \varepsilon) \approx \varepsilon - \frac{\varepsilon^2}{2},$$

полученная из разложения в степенной ряд логарифма и отбрасыванием малых слагаемых третьего и более высоких порядков (см. §33). Поэтому

$$\begin{aligned} s &\approx n(p+t) \left(\frac{t}{p} - \frac{t^2}{2p^2}\right) + n(q-t) \left(-\frac{t}{q} - \frac{t^2}{2q^2}\right) = \\ &= n \left(t - \frac{t^2}{2p} + \frac{t^2}{p} - \frac{t^3}{2p^2} - t - \frac{t^2}{2q} + \frac{t^2}{q} + \frac{t^3}{2q^2}\right) \approx \frac{nt^2}{2pq}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$p_n(k) \approx \frac{e^{-\frac{nt^2}{2pq}}}{\sqrt{2\pi npq}} = \frac{e^{-\frac{(k-np)^2}{2npq}}}{\sqrt{2\pi npq}}.$$



Пример 58.2. Подбросили 500 игральных костей. Найдите вероятность выпадения 100 шестёрок.

По формуле Муавра – Лапласа

$$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{\frac{500 \cdot 5}{36}} = \frac{25}{3} \approx 8.33.$$

$$x = \frac{k - np}{\sigma} = \frac{100 - \frac{500}{6}}{\frac{25}{3}} = 2.$$

$$p_{500}(100) \approx \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}\sigma} = \frac{3e^{-2}}{\sqrt{2\pi}25} \approx 0.006479 = 0.6476\% \quad \#$$

Точное вычисление по формуле Бернулли даёт $p_{500}(100) = 0.6643\%$, погрешность составила $1.64 \cdot 10^{-4}$.

Иногда требуется найти вероятность повторных испытаний не для одного конкретного k , а для интервала $[k_1, k_2]$. Эту задачу можно решить с использованием *интегральной формулы Муавра – Лапласа*

$$p_n(k_1, k_2) = \sum_{k=k_1}^{k_2} p_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \Phi(x_2) - \Phi(x_1),$$

$$\sigma = \sqrt{npq}, \quad x_1 = \frac{k_1 - np}{\sigma}, \quad x_2 = \frac{k_2 - np}{\sigma}.$$

Эта формула заменяет суммирование большого количества малых величин вычислением определённого интеграла. Входящая в формулу функция $\Phi(x)$ называется *функцией Лапласа*, она является нечётной первообразной функции Гаусса. Функция Лапласа не является элементарной, таблица её значений для положительных x приведена в приложении. Для нахождения значений в отрицательной области используют свойство нечётности $\Phi(x)$.

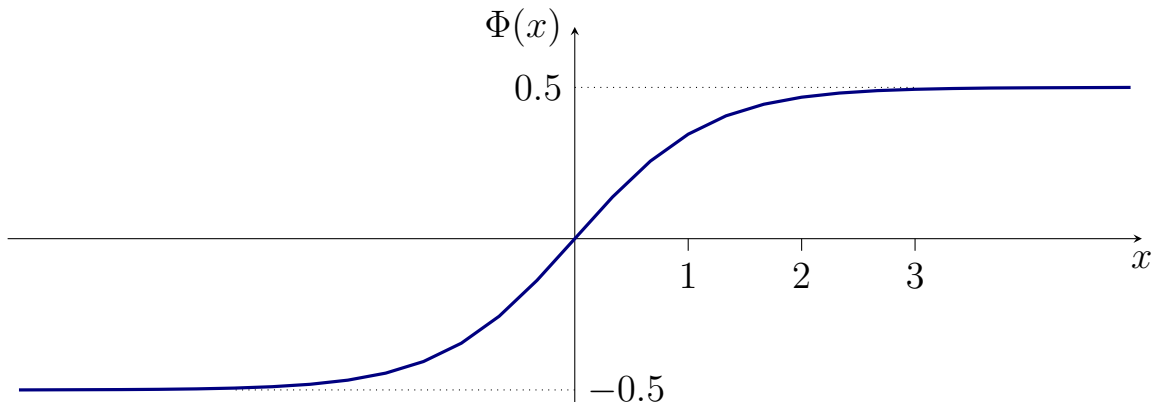


График функции Лапласа

Пример 58.3. Подбросили 500 игральных костей. Найдите вероятность выпадения от 75 до 100 шестёрок.

По интегральной формуле Муавра – Лапласа

$$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{\frac{500 \cdot 5}{36}} = \frac{25}{3} \approx 8.33.$$

$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sigma} = \frac{75 - \frac{500}{6}}{\frac{25}{3}} = -1, \quad x_2 = \frac{k_2 - np}{\sigma} = \frac{100 - \frac{500}{6}}{\frac{25}{3}} = 2.$$

$$p_{500}(75, 100) \approx \Phi(2) - \Phi(-1) = \Phi(2) + \Phi(1) \approx 0.8186. \quad \#$$

Отклонение относительной частоты от вероятности. Если событие A в n испытаниях произошло k раз, его относительная частота $w = \frac{k}{n}$. Величина $w - p$ называется отклонением относительной частоты от вероятности. Из локальной формулы Муавра – Лапласа следует, что чем меньше по абсолютному значению это отклонение, тем вероятнее данное событие. Найдём вероятность события, что отклонение относительной частоты от вероятности не превысит заданного числа ε . Из интегральной формулы Муавра – Лапласа следует

$$P(|w - p| \leq \varepsilon) = 2\Phi\left(\varepsilon \sqrt{\frac{n}{pq}}\right). \quad (58.2)$$

Заметим, что из поведения $\Phi(x)$ при $x \rightarrow \infty$ следует, что для любого, даже сколь угодно малого $\varepsilon > 0$, предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|w - p| \leq \varepsilon) = 1.$$

Из этого факта видно, что при стремлении числа испытаний к бесконечности, относительная частота стремится к вероятности события A .

Пример 58.4. Вероятность того, что деталь нестандартна, $p = 0.1$. Найти вероятность, что среди случайно отобранных $n = 400$ деталей относительная частота появления нестандартных деталей отклонится от вероятности не более чем на $\varepsilon = 0.03$.

Используем приведённую выше формулу:

$$\varepsilon \sqrt{\frac{n}{pq}} = 0.03 \cdot \sqrt{\frac{400}{0.1 \cdot 0.9}} = 2, \quad \Phi(2) = 0.4772.$$

$$P\left(\left|\frac{k}{400} - 0.1\right| \leq 0.03\right) = P(28 \leq k \leq 52) \approx 2 \cdot 0.4772 = 0.9544. \quad \#$$

Поток событий. Формула Пуассона. *Поток событий* – это последовательность однородных событий, наступающих одно за другим в случайные промежутки времени. Примеры потоков: распад радиоактивных атомов, количество несчастных случаев на предприятиях, количество звонков на телефонный аппарат.



Поток моделируется разбиением каждого единичного промежутка времени на n равных малых интервалов ($n \rightarrow \infty$), в которых вероятность наступления события A мала ($p \rightarrow 0$), но величина $\lambda = np$ остаётся конечной. Величина λ называется *интенсивностью* потока, она равна среднему числу событий за единицу времени. Отметим некоторые виды потоков.

- *Стационарный поток* – поток, у которого интенсивность не меняется с течением времени.
- *Ординарный поток* – поток, для которого вероятность одновременного появления двух и более событий равна нулю.
- *Поток без последствий* – поток, для которого вероятность появления каждого события не зависит от наступивших ранее событий.

Далее мы будем работать только с *простейшим (пуассоновским)* потоком, являющимся стационарным ординарным потоком без последствий. Пусть λ – интенсивность такого потока. Тогда вероятность, что за единицу времени событие A произойдёт k раз, находится по *формуле Пуассона*:

$$p(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}. \quad (58.3)$$

◀ Выведем данную формулу из формулы Бернулли при $n \rightarrow \infty$ и $p = \frac{\lambda}{n}$:

$$p_n(k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} = \frac{\lambda^k}{k!} \frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{n^k} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}.$$

Из второго замечательного предела следует

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n = e^{-\lambda},$$

кроме того, при конечном числе k

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{n^k} = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k} = 1,$$

поэтому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}. \quad \blacktriangleright$$

Формула Пуассона может быть использована и как приближение формулы Бернулли для определения вероятности числа редких (т.е. маловероятных) событий при $n \geq 100$ и $\lambda = np \leq 10$.

Пример 58.5. Вероятность того, что деталь бракована $p = 10^{-5}$. Найдите вероятность того, что среди $n = 10^6$ деталей будет ровно $k = 4$ бракованных.

В задаче требуется найти вероятность повторных испытаний. Вероятность p события мала, число событий n велико, поэтому используем формулу Пуассона.

$$\lambda = np = 10, \quad p(4) = \frac{10^4}{4!} e^{-10} = 0.01892.$$

Заметим, что точная формула Бернулли даёт почти такое же значение $p_{\text{берн}} = 0.01892$. В то же время, приближённая формула Муавра – Лапласа для данной задачи работает хуже, результат по ней $p_{\text{м-л}} = 0.02085$. #

§59. Дискретные случайные величины

Случайной величиной X называют переменную, значение которой определяется в результате испытания. Значение X до испытания неизвестно, в каждом испытании она принимает одно и только одно значение. Примеры случайных величин:

- Подбросили игральную кость, X – выпавшее число.
- Подбросили 2 кости, X_1 – сумма выпавших очков, X_2 – максимальное число, X_3 – число выпавших шестёрок и т.д.
- Включили лампочку, X – время работы до её перегорания.

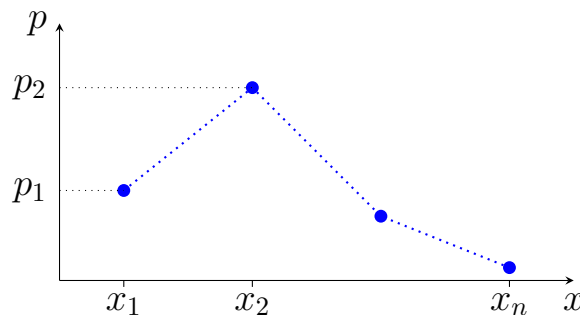
Случайные величины могут быть ограниченными и неограниченными, т.е. для одних величин заранее известен диапазон, который они могут принять, а для других – диапазоном может быть вся числовая ось. Кроме того, случайные величины разделяют на два типа – дискретные и непрерывные.

Случайная величина называется *дискретной*, если она принимает отдельные, изолированные возможные значения с конечными вероятностями. Пример дискретной неограниченной величины: X – число бросков игральной кости до первого выпадения шестёрки.

Описание дискретной случайной величины. Для задания дискретной случайной величины надо перечислить её всевозможные значения x_i и указать их вероятности p_i . Удобно данные числа оформить в виде *таблицы вероятностей*:

X	x_1	x_2	x_3	$\cdots$	x_n
p_i	p_1	p_2	p_3	$\cdots$	p_n

Ещё один способ наглядного представления дискретной величины – графический, с помощью ломаной, называемой *полигоном вероятностей*:



Пример 59.1. Подбросили три игральные кости. Описать случайную величину X – число выпавших шестёрок.

Найдём вначале вероятности событий, что $X = 3$ (выпало 3 шестёрки)

и $X = 0$ (ни одной шестёрки):

$$p_3 = \frac{1}{6^3} = \frac{1}{216}, \quad p_0 = \frac{5^3}{6^3} = \frac{125}{216}.$$

Далее найдём вероятности того, что $X = 1$ и $X = 2$:

$$p_1 = 3 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5^2}{6^2} = \frac{75}{216}, \quad p_2 = 3 \cdot \frac{1}{6^2} \cdot \frac{5}{6} = \frac{15}{216}.$$

Результат оформим в виде таблицы:

X	0	1	2	3	
p_i	$\frac{125}{216}$	$\frac{75}{216}$	$\frac{15}{216}$	$\frac{1}{216}$	#

Характеристики дискретной случайной величины. Заметим, что сумма всех вероятностей, стоящих во второй строчке таблицы любой дискретной величины всегда равна единице:

$$\sum_{i=1}^n p_i = 1.$$

Математическое ожидание $\mathbf{M}[X]$ – важнейшая характеристика случайной величины X , означающее её среднее значение:

$$\mathbf{M}[X] = \sum_{i=1}^n x_i p_i.$$

Отметим важнейшие свойства математического ожидания:

- 1°. $\mathbf{M}[C] = C$,
- 2°. $\mathbf{M}[kX] = k \cdot \mathbf{M}[X]$,
- 3°. $a \leq X \leq b \Rightarrow a \leq \mathbf{M}[X] \leq b$,
- 4°. $\mathbf{M}[X + Y] = \mathbf{M}[X] + \mathbf{M}[Y]$,
- 5°. $\mathbf{M}[X \cdot Y] = \mathbf{M}[X] \cdot \mathbf{M}[Y]$ (для независимых X и Y).

Свойства 1°–3° легко выводятся из определения математического ожидания, свойства 4°–5° будут доказаны нами позднее, в §61.

Найдём математическое ожидание разности между X и её математическим ожиданием $\mathbf{M}[X]$:

$$\mathbf{M}[X - \mathbf{M}[X]] = \mathbf{M}[X] - \mathbf{M}[\mathbf{M}[X]] = \mathbf{M}[X] - \mathbf{M}[X] = 0.$$

Но математическое ожидание от квадрата $(X - \mathbf{M}[X])^2$ уже не будет равно нулю. Полученная величина называется *дисперсией*. Дисперсия $\mathbf{D}[X]$ – вторая по значимости характеристика случайной величины X , она определяет меру разброса значений X относительно её математического ожидания:

$$\mathbf{D}[X] = \mathbf{M}[(X - \mathbf{M}[X])^2] = \sum_{i=1}^n (x_i - \mathbf{M}[X])^2 p_i.$$

Отметим важнейшие свойства дисперсии:

- 1°. $\mathbf{D}[C] = 0$,
- 2°. $\mathbf{D}[kX] = k^2 \cdot \mathbf{D}[X]$,
- 3°. $\mathbf{D}[X] \geq 0$,
- 4°. $\mathbf{D}[X] = \mathbf{M}[X^2] - (\mathbf{M}[X])^2$,
- 5°. $\mathbf{D}[X + Y] = \mathbf{D}[X] + \mathbf{D}[Y]$ (для независимых X и Y).

Свойства 1°–3° легко выводятся из определения дисперсии, свойство 5° будет доказано нами позднее, в §61.

◀ Докажем свойство 4°. По определению,

$$\begin{aligned} \mathbf{D}[X] &= \mathbf{M}[(X - \mathbf{M}[X])^2] = \mathbf{M}[X^2 - 2X\mathbf{M}[X] + (\mathbf{M}[X])^2] = \\ &= \mathbf{M}[X^2] - 2\mathbf{M}[X \cdot \mathbf{M}[X]] + \mathbf{M}[(\mathbf{M}[X])^2] = \\ &= \mathbf{M}[X^2] - 2(\mathbf{M}[X])^2 + (\mathbf{M}[X])^2 = \mathbf{M}[X^2] - (\mathbf{M}[X])^2. \end{aligned} \quad \blacktriangleright$$

Если случайная величина X является размерной, то её математическое ожидание будет измеряться в тех же единицах, а дисперсия величины – в квадратах единицы измерения X . Ещё одной характеристикой случайной величины является *среднеквадратичное отклонение* σ , равное квадратному корню из дисперсии. Эта характеристика измеряется в единицах измерения X :

$$\sigma[X] = \sqrt{\mathbf{D}[X]}.$$

Неравенство Чебышёва. ¹ Пусть у случайной величины X математическое ожидание равно $\mathbf{M}$, а дисперсия $\mathbf{D}$. Тогда для любого $a > 0$

¹Данный раздел является факультативным.

справедливо *неравенство Чебышёва*:

$$p(|X - \mathbf{M}| \geq a) \leq \frac{\mathbf{D}}{a^2} \Rightarrow p(|X - \mathbf{M}| < a) \geq 1 - \frac{\mathbf{D}}{a^2}.$$

◀ Для доказательства неравенства запишем определение дисперсии через математическое ожидание и разобьём сумму на две части:

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \sum_{|x_i - \mathbf{M}| < a} (x_i - \mathbf{M})^2 p_i + \sum_{|x_i - \mathbf{M}| \geq a} (x_i - \mathbf{M})^2 p_i \geq \\ &\geq \sum_{|x_i - \mathbf{M}| \geq a} (x_i - \mathbf{M})^2 p_i \geq \sum_{|x_i - \mathbf{M}| \geq a} a^2 p_i = a^2 p(|X - \mathbf{M}| \geq a). \end{aligned} \quad \blacktriangleright$$

Неравенство Чебышёва даёт грубую оценку, но оно справедливо абсолютно для любых распределений случайных величин.

Возьмём, например, $a = 3\sigma$, тогда

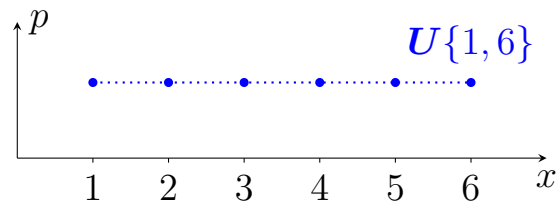
$$p(|X - \mathbf{M}[X]| \geq 3\sigma) \leq \frac{1}{9}, \quad (59.1)$$

т.е. вероятность, что величина выйдет за пределы отрезка $(\mathbf{M}[X] - 3\sigma, \mathbf{M}[X] + 3\sigma)$ не превышает 11.1%.

Далее рассмотрим несколько типов дискретных случайных величин, часто встречающихся на практике.

Равномерное распределение $U\{a, b\}$. Случайная величина $X \sim U\{a, b\}$ принимает n значений от a до b с равной вероятностью $p = \frac{1}{n}$, где $n = b - a + 1$. Так, если X – число, выпавшее на игральной кости, то $X \sim U\{1, 6\}$. Таблица распределения и полигон вероятностей равномерного распределения имеют вид:

X	a	$a + 1$	$\dots$	b
p_i	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$	$\dots$	$\frac{1}{n}$



Основные характеристики $U\{a, b\}$:

$$\mathbf{M}[X] = \frac{a + b}{2}, \quad \mathbf{D}[X] = \frac{n^2 - 1}{12}.$$

Распределение Бернулли $B(1, p)$. Производится одно испытание с известной вероятностью p наступления события A . Случайная величина $X \sim B(1, p)$, если $X = 1$ в случае, когда A произошло, иначе $X = 0$. Так, если X – число выпавших шестёрок при броске одной игральной кости, то $X \sim B(1, \frac{1}{6})$. Введём обозначение $q = 1 - p$. Таблица распределения $B(1, p)$ имеет вид:

X	0	1
p_i	q	p

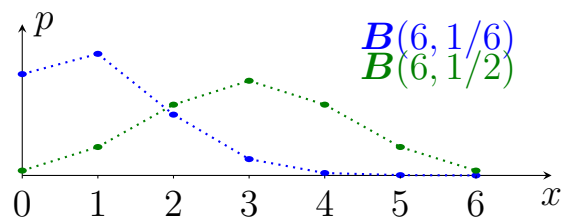
Основные характеристики этой величины:

$$\mathbf{M}[X] = q \cdot 0 + p \cdot 1 = p, \quad \mathbf{D}[X] = \mathbf{M}[X^2] - (\mathbf{M}[X])^2 = q \cdot 0 + p \cdot 1 - p^2 = pq.$$

Распределение Бернулли имеет простой вид, но оно является основой для других распределений, которые будут рассмотрены далее.

Биномиальное распределение $B(n, p)$. Проводится n независимых испытаний с известной вероятностью p наступления события A в каждом из них. Случайная величина $X \sim B(n, p)$ равна числу появлений события A . Так, если X – число выпавших шестёрок при броске трёх игральных костей, то $X \sim B(3, \frac{1}{6})$. Таблица распределения $B(n, p)$ и полигон вероятностей имеют вид:

X	0	...	k	...	n
p_i	q^n	...	$C_n^k p^k q^{n-k}$	...	p^n



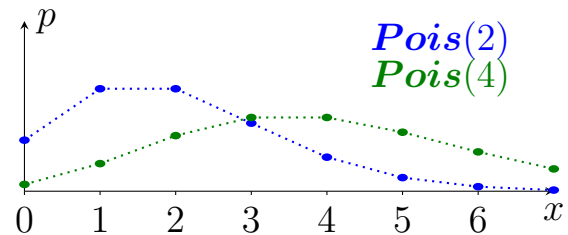
Характеристики биномиального распределения найдём, представив его как сумму n независимых друг от друга распределений Бернулли:

$$\mathbf{M}[X] = np, \quad \mathbf{D}[X] = npq.$$

Отметим одно из свойств биномиального распределения, называемое свойством устойчивости. Если две величины $X_1 \sim B(n_1, p)$ и $X_2 \sim B(n_2, p)$ независимы друг от друга, то их сумма $Y = X_1 + X_2 \sim B(n_1 + n_2, p)$.

Распределение Пуассона $Pois(\lambda)$. Случайная величина $X \sim Pois(\lambda)$ равна числу произошедших за единицу времени событий в простейшем потоке с интенсивностью λ . Пусть X – число входящих звонков на телефон, поступивших в течение дня, тогда $X \sim Pois(\lambda)$. Таблица распределения $Pois(\lambda)$ и полигон вероятностей имеют вид:

X	0	...	k	...
p_i	$e^{-\lambda}$	...	$\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$	...



Распределение Пуассона является предельным случаем биномиального:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} B(n, \lambda/n) = Pois(\lambda).$$

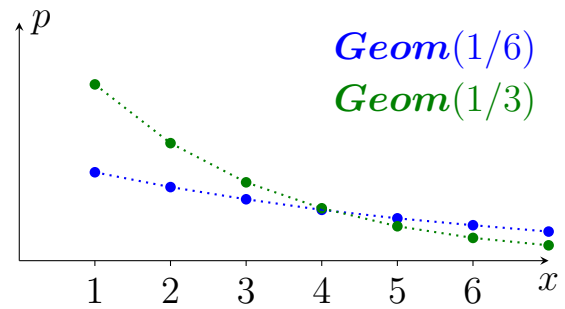
Поэтому характеристики распределения Пуассона можно найти, рассмотрев предел характеристик биномиального при $np \rightarrow \lambda$ и $q \rightarrow 1$:

$$M[X] = \lambda, \quad D[X] = \lambda.$$

Распределение Пуассона также обладает свойством устойчивости. Так, если $X_1 \sim Pois(\lambda_1)$ и $X_2 \sim Pois(\lambda_2)$ независимы, то $Y = X_1 + X_2 \sim Pois(\lambda_1 + \lambda_2)$.

Геометрическое распределение $Geom(p)$. Проводится серия независимых испытаний с известной вероятностью p наступления события A в каждом из них. *Успехом* назовём первое появление A в этой серии испытаний. Случайная величина $X \sim Geom(p)$ равна номеру успешного испытания. Пусть X – число бросков игральной кости до первого выпадения шестёрки, тогда $X \sim Geom(\frac{1}{6})$. Отметим также другой вариант геометрического распределения $Geom_0(p)$, в котором случайная величина равна числу неудачных испытаний, предшествовавших успеху. Таблица распределения $Geom(p)$ и полигон вероятностей имеют вид:

X	1	2	...	k	...
p_i	p	pq	...	pq^{k-1}	...



Основные характеристики геометрического распределения:

$$\mathbf{M}[X] = \frac{1}{p}, \quad \mathbf{D}[X] = \frac{q}{p^2}.$$

Распределение $\mathbf{Geom}_0$ имеет такую же дисперсию, а математическое ожидание этого распределения меньше на единицу:

$$\mathbf{M}[X] = \frac{1}{p} - 1 = \frac{q}{p}.$$

Задание. Найдите характеристики геометрического распределения, используя определение математического ожидания и дисперсии, а также пользуясь результатами примеров нахождения сумм степенных рядов (§33).

Отметим некоторые свойства геометрического распределения.

- Если $X_1 \sim \mathbf{Geom}(p_1)$ и $X_2 \sim \mathbf{Geom}(p_2)$ независимы, то $Y = \min(X_1, X_2) \sim \mathbf{Geom}(1 - q_1 q_2)$, где $q_1 = 1 - p_1$, $q_2 = 1 - p_2$.
- Пусть проводится серия испытаний не до первого, а до n -го появления события A . Тогда случайная величина, равная числу неудачных испытаний, может быть смоделирована как сумма n случайных величин геометрического распределения: $Y = X_1 + \dots + X_n$, где $X_1, \dots, X_n \sim \mathbf{Geom}_0(p)$. Распределение величины Y называется *отрицательным биномиальным распределением*: $Y \sim \mathbf{NB}(n, p)$. Данное распределение не рассматривается в пособии.

§60. Непрерывные случайные величины

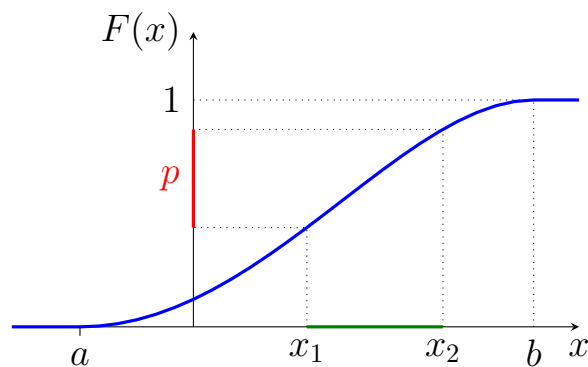
Случайная величина называется *непрерывной*, если она может принять любое значение из некоторого конечного или бесконечного интервала. Интервалом значений может быть и вся числовая прямая. При этом вероятность

того, что непрерывная величина X примет любое заданное значение равно нулю. Пример непрерывной ограниченной случайной величины: X – число, произвольно выбранное на отрезке $[0, 1]$.

Задание непрерывной случайной величины. Способ задания, использованный для дискретных случайных величин с перечислением их возможных значений x_i и вероятностей p_i , неприменим для непрерывных величин. Рассмотрим другой способ, где случайная величина задаётся через функцию распределения. *Функцией распределения* $F(x)$ случайной величины X называют функцию, определяющую вероятность того, что величина X примет значение, меньшее x : $F(x) = p(X < x)$. Функцию $F(x)$ можно ввести и для дискретных величин. Но, если для дискретных величин данная функция является кусочно-постоянной, то для непрерывных величин функция $F(x)$ является непрерывной.

Перечислим другие свойства функции распределения:

- $0 \leq F(x) \leq 1$,
- $F(x)$ – неубывающая функция,
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ и, если $X \geq a$, то $F(x) = 0$ при $x \leq a$,
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$ и, если $X \leq b$, то $F(x) = 1$ при $x \geq b$.



Если $F(x)$ известна, то вероятность события, что X попадёт в интервал (x_1, x_2) , равна

$$p(x_1 < X < x_2) = F(x_2) - F(x_1).$$

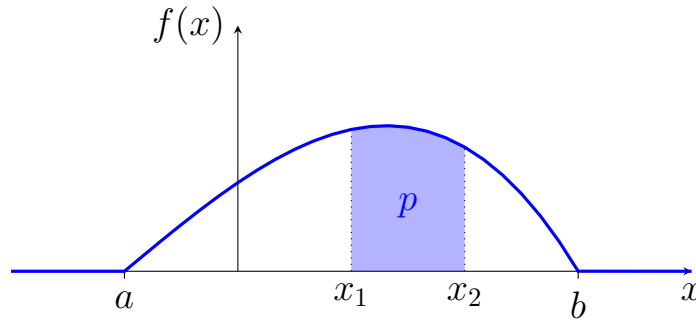
Функцией плотности распределения случайной величины называют производную функции распределения: $f(x) = F'(x)$. Вероятностный смысл

функции плотности: её значение в точке x есть предел отношения вероятности попадания X в промежуток $(x, x + \Delta x)$ к длине этого промежутка, когда $\Delta x \rightarrow 0$:

$$f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{p(x < X < x + \Delta x)}{\Delta x}.$$

Свойства функции плотности распределения:

- $f(x) \geq 0$,
- $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$,
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ и, если $X \geq a$, то $f(x) = 0$ при $x \leq a$,
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ и, если $X \leq b$, то $f(x) = 0$ при $x \geq b$.



Если $f(x)$ известна, то вероятность события, что X попадёт в интервал (x_1, x_2) , равна

$$p(x_1 < X < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx.$$

Основные характеристики непрерывной случайной величины.

Математическое ожидание и дисперсия непрерывной величины находятся по формулам

$$\mathbf{M}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx,$$

$$\mathbf{D}[X] = \mathbf{M}[X^2] - (\mathbf{M}[X])^2, \quad \mathbf{M}[X^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx.$$

Пример 60.1. Найти характеристики случайной величины, заданной функцией распределения $F(x) = \sqrt{x}$ ($0 \leq x \leq 1$).

Вначале найдём функцию плотности

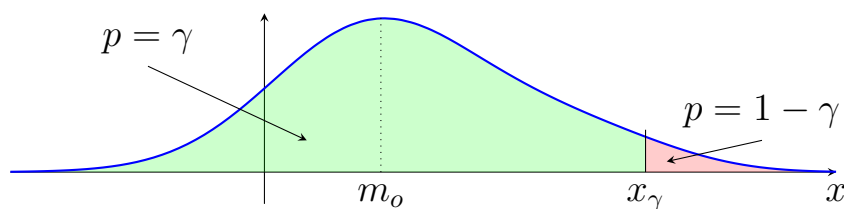
$$f(x) = F'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Далее, по приведённым выше формулам, определяем характеристики:

$$\mathbf{M}[X] = \int_0^1 \frac{x}{2\sqrt{x}} dx = \frac{1}{3},$$

$$\mathbf{D}[X] = \int_0^1 \frac{x^2}{2\sqrt{x}} dx - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{5} - \frac{1}{9} = \frac{4}{45}. \quad \#$$

Квантили, медиана и мода. Дана непрерывная случайная величина X с функцией распределения $F(x)$ и функцией плотности $f(x)$.



Модой m_o величины X называется точка глобального максимума функции плотности $f(x)$. Для дискретной величины её мода – значение x_i , для которой вероятность p_i максимальна.

Квантилем x_γ уровня γ величины X называется корень уравнения $F(x_\gamma) = \gamma$.

Медианой m_e называется квантиль уровня 0.5, т.е. корень уравнения $F(m_e) = 0.5$. *Первым и третьим квартилями* называются квантили уровней 0.25 и 0.75. Также иногда можно встретить *децили* – квантили уровней 0.1, 0.2, ..., 0.9 и *процентили* – квантили уровней 0.01, 0.02, ..., 0.99.

Пример 60.2. Найти моду m_o и медиану m_e распределения из примера 60.1.

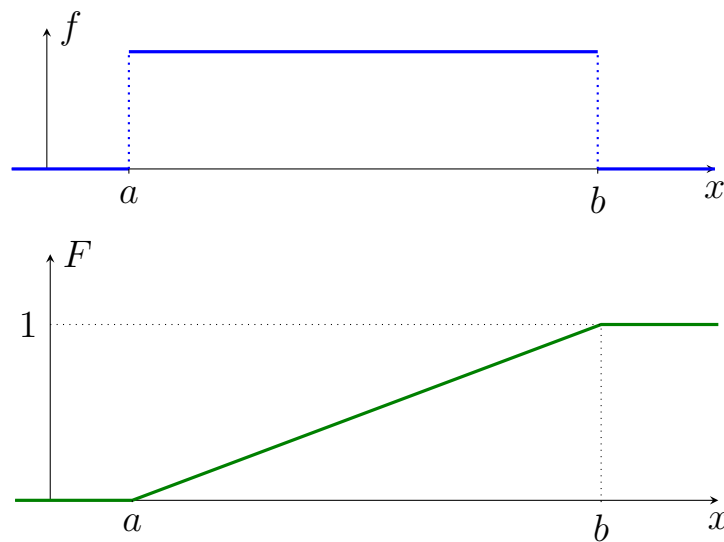
Функция $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ определена для $x > 0$ и является монотонно убывающей. При $x \rightarrow 0$ она неограниченно возрастает, поэтому $m_o = 0$. Для нахождения медианы надо решить уравнение

$$F(m_e) = \frac{1}{2} \Rightarrow \sqrt{m_e} = \frac{1}{2} \Rightarrow m_e = \frac{1}{4}. \quad \#$$

Далее рассмотрим несколько типов непрерывных случайных величин, часто встречающихся на практике.

Равномерное распределение $U[a, b]$. Случайная величина $X \sim U[a, b]$ принимает значения из отрезка $[a, b]$, причём функция плотности вероятности постоянна на этом отрезке.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < a, \\ \frac{1}{b-a}, & x \in [a, b], \\ 0, & x > b. \end{cases} \quad F(x) = \begin{cases} 0, & x < a, \\ \frac{x-a}{b-a}, & x \in [a, b], \\ 1, & x > b. \end{cases}$$



Характеристики равномерной величины:

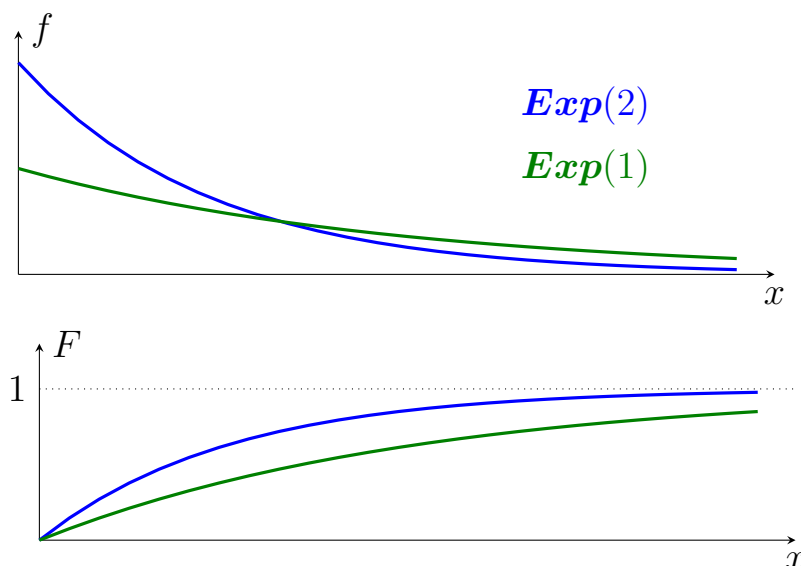
$$\mathbf{M}[X] = \frac{a+b}{2}, \quad \mathbf{D}[X] = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Задание. Найдите данные характеристики, используя определение математического ожидания и дисперсии.

Экспоненциальное распределение $\text{Exp}(\lambda)$. Случайная величина $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ равна времени до первого свершения события в простейшем потоке интенсивности λ . Пусть X – время горения лампочки до момента её перегорания, тогда $X \sim \text{Exp}(\lambda)$.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0. \end{cases} \quad F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1 - e^{-\lambda x} & x \geq 0. \end{cases}$$

На рисунке приведены графики функций $f(x)$ и $F(x)$ нескольких экспоненциальных распределений:



◀ Найдём функцию распределения $\text{Exp}(\lambda)$. Вероятность, что за единицу времени не произойдёт ни одного события, по формуле Пуассона (58.3), равна $p_0 = e^{-\lambda}$. Вероятность, что за x единиц времени не произойдёт ни одного события, будет $(p_0)^x = e^{-\lambda x}$. Следовательно, вероятность того, что за x единиц времени произойдёт хотя бы одно событие, равно $1 - e^{-\lambda x}$. Итак, по определению функции распределения, $F(x) = p(X < x) = 1 - e^{-\lambda x}$. ▶

Характеристики экспоненциального распределения:

$$\mathbf{M}[X] = 1/\lambda, \quad \mathbf{D}[X] = 1/\lambda^2.$$

Задание. Найдите данные характеристики, используя определение математического ожидания и дисперсии.

Свойства экспоненциального распределения:

- Экспоненциальное распределение – непрерывный аналог геометрического распределения. Докажем это.

◀ Рассмотрим геометрическое распределение $\mathbf{Geom}(p)$. Пусть испытания проводятся с интервалами $\Delta t \rightarrow 0$, при этом вероятность успеха $p = \lambda \Delta t \rightarrow 0$. Число испытаний в момент времени x будет равно $k = x/\Delta t$ и, используя следствие из второго замечательного предела, получим

$$f(x) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{pq^k}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \lambda q^k = \lambda \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (1 - \lambda \Delta t)^{\frac{x}{\Delta t}} = \lambda e^{-\lambda x}. \quad \blacktriangleright$$

- Пусть величины $X_1 \sim \mathbf{Exp}(\lambda_1)$ и $X_2 \sim \mathbf{Exp}(\lambda_2)$ независимы. Тогда их минимум $Y = \min(X_1, X_2) \sim \mathbf{Exp}(\lambda_1 + \lambda_2)$. Поясним данное свойство. Пусть имеется прибор, состоящий из двух компонент, время работы каждой компоненты имеет экспоненциальное распределение. Если прибор работает только в случае, когда исправны все его компоненты, то случайная величина, равная времени работы прибора также имеет экспоненциальное распределение.
- Пусть случайная величина Y равна времени не до первого, а до n -го появления события в простейшем потоке. Тогда эту случайную величину можно смоделировать как сумму n случайных величин экспоненциального распределения: $Y = X_1 + \dots + X_n$, где $X_1, \dots, X_n \sim \mathbf{Exp}(\lambda)$. Распределение величины Y называется *распределением Эрланга* порядка n , это частный случай *Гамма-распределения*: $Y \sim \Gamma(n, 1/\lambda)$. Эти распределения не рассматриваются в пособии.

Пример 60.3. Лампочка в среднем горит 100 часов. Найти вероятность, что она прогорит более 200 часов.

Если X – время работы лампочки, то $X \sim \mathbf{Exp}(\lambda)$. Если среднее время работы равно 100 часам, то

$$\mathbf{M}[X] = \frac{1}{\lambda} = 100 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{1}{100}.$$

Вероятность попадания величины в заданный интервал

$$p(X > 200) = F(+\infty) - F(200) = 1 - (1 - e^{-200\lambda}) = e^{-2} \approx 0.135. \quad \#$$

Нормальное распределение $N(\mu, \sigma^2)$. Случайная величина $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, если её плотность имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

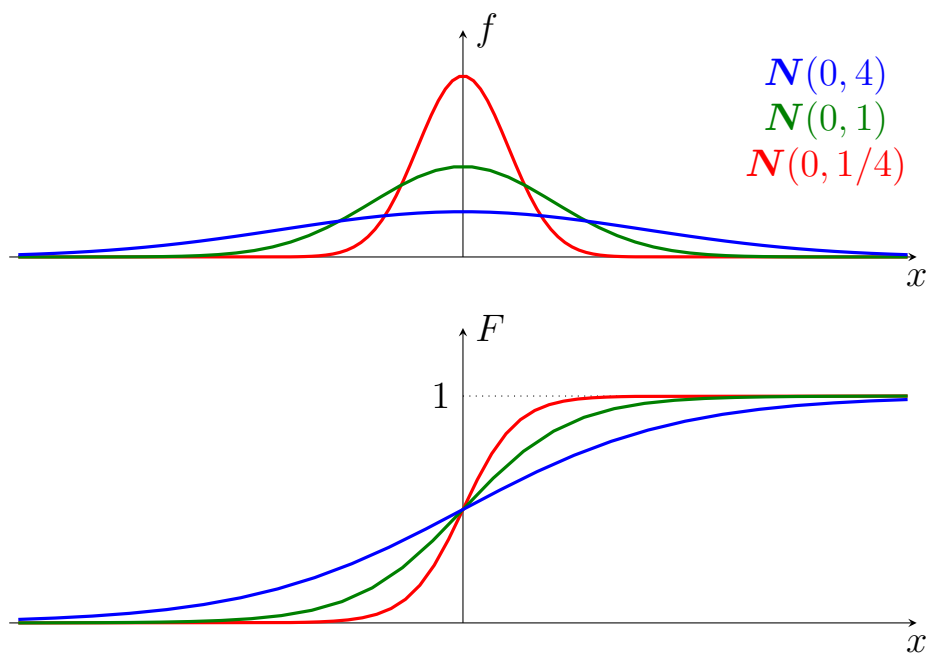
Данное распределение часто встречается в жизни, примерами нормально распределённых величин являются, например, отклонение при стрельбе, погрешность измерения, рост/вес популяции.

Распределение $N(0, 1)$ называется нормированным нормальным, её функцией плотности является функция Гаусса: $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Функция распределения $N(\mu, \sigma^2)$ не является элементарной функцией, она выражается через функцию Лапласа $\Phi(x)$:

$$F(x) = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right).$$

На рисунке приведены графики функций $f(x)$ и $F(x)$ нескольких нормальных распределений.



Характеристики нормально распределённой величины:

$$\mathbf{M}[X] = \mu, \quad \mathbf{D}[X] = \sigma^2.$$

Вероятность попадания в заданный интервал

$$p(a < X < b) = F(b) - F(a) = \Phi\left(\frac{b - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a - \mu}{\sigma}\right).$$

Вероятность отклонения нормально распределённой величины от среднего значения:

$$p(|X - \mu| < \delta) = p(\mu - \delta < X < \mu + \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right). \quad (60.1)$$

Так, вероятность того, что отклонение нормально распределённой величины будет меньше трёх среднеквадратичных отклонений,

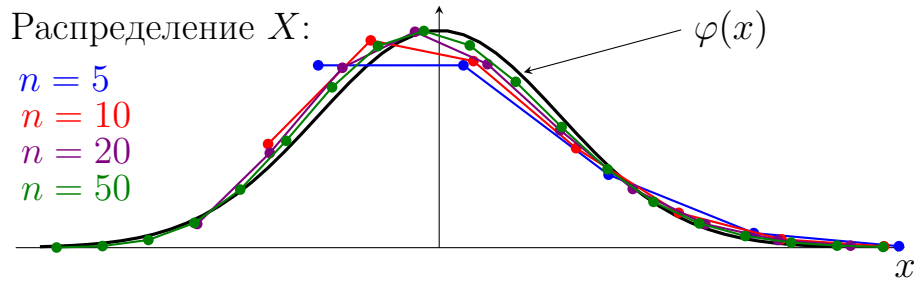
$$p(|X - \mu| < 3\sigma) = 2\Phi(3) \approx 0.997.$$

Данный факт называется “правилом трёх сигм”: вероятность, что нормальная величина X отклонится от μ более, чем на 3σ , практически равна нулю (0.3%). Выполнение данной оценки является одним из признаков того, что случайная величина имеет нормальное распределение. Заметим, что для произвольных распределений на основе неравенства Чебышёва получена грубая оценка (см. формулу (59.1)): вероятность, что любая величина X отклонится от среднего значения более, чем на 3σ меньше 11.1%.

Факт широкой распространённости нормального распределения является следствием следующей теоремы:

Теорема 60.1 (Центральная предельная теорема). *Если некая величина образуется в результате сложения многих случайных слабо взаимозависимых величин, каждая из которых вносит малый вклад относительно общей суммы, то распределение такой величины стремится к нормальному распределению.*

Данную теорему примем без доказательства. Приведём лишь один пример. Пусть испытанием является подбрасывание n игральных костей, величина X равна числу выпавших шестёрок. Это распределение удовлетворяет требованию теоремы, поэтому оно стремится к нормальному при увеличении n . На рисунке изображены полигоны вероятности величины X при различных n , значения по оси x смещены так, чтобы их математические ожидания совпали с началом координат.



Отметим некоторые свойства нормального распределения:

- Пусть величины $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ и $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ независимы. Тогда их сумма $Y = X_1 + X_2 \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$.
- $B(n, p) \approx N(np, npq)$ при $n \gg 1$. Это свойство, фактически, служит обоснованием применимости формул Муавра – Лапласа (58.1) при больших n при расчёте вероятностей биномиального распределения.
- $Pois(\lambda) \approx N(\lambda, \lambda)$ при $\lambda \gg 1$.

Пример 60.4. Случайная величина X распределена нормально с математическим ожиданием $\mu = 10$. Вероятность попадания X в интервал $(10, 20)$ равна 0.3. Чему равна вероятность попадания X в интервал $(20, 30)$?

Вначале найдём значение параметра σ :

$$p(10 \leq X \leq 20) = \Phi\left(\frac{10}{\sigma}\right) - \Phi(0) = \Phi\left(\frac{10}{\sigma}\right) = 0.3.$$

Из таблицы функции Лапласа получим $\frac{10}{\sigma} \approx 0.84$, откуда $\sigma \approx 11.9$. Далее ищем искомую вероятность

$$p(20 \leq X \leq 30) = \Phi\left(\frac{20}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{10}{\sigma}\right) = \Phi(1.68) - \Phi(0.84) \approx$$

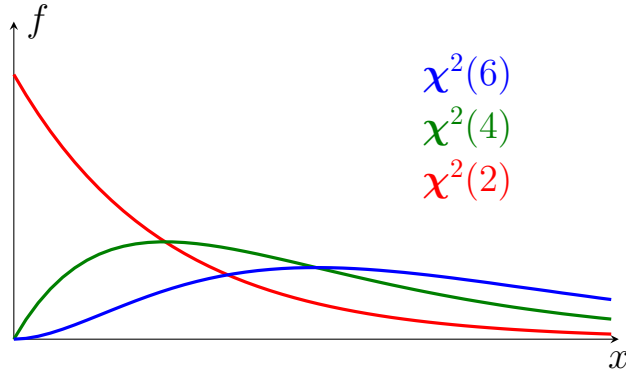
$$\approx 0.4535 - 0.3 = 0.1535.$$

#

Распределение “хи-квадрат” $\chi^2(n)$. Пусть величины $X_1, X_2, \dots, X_n \sim N(0, 1)$ и независимы друг от друга. Тогда случайная величина $X = \sum_{k=1}^n X_k^2 \sim \chi^2(n)$. Число n называется числом степеней свободы этого

распределения. Функция плотности распределения

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0, \\ \frac{e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{n}{2}-1}}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{n}{2})} & x \geq 0. \end{cases}$$



Характеристики распределения “хи-квадрат”:

$$\mathbf{M}[X] = n, \quad \mathbf{D}[X] = 2n.$$

Из свойств $\chi^2(n)$ отметим, что $\chi^2(n) \approx N(n, 2n)$ при $n \gg 1$.

Пример 60.5. Найти матожидание, медиану и моду распределения χ^2 при $n = 4$.

Функция распределения

$$f(x) = \frac{x}{4} e^{-x/2}, \quad x > 0.$$

Найдём матожидание:

$$\mathbf{M}[X] = \int_0^{\infty} x f(x) dx = \frac{1}{4} \int_0^{\infty} x^2 e^{-x/2} dx = 4.$$

Моду найдём из уравнения $f'(m_o) = 0$. Откуда

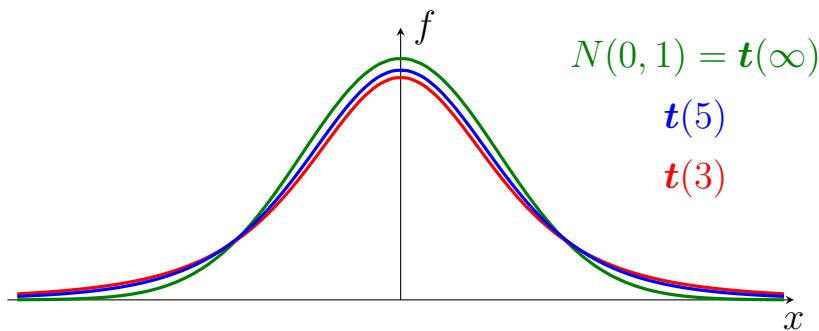
$$f'(x) = \frac{1}{4} e^{-x/2} - \frac{x}{8} e^{-x/2} = \frac{2-x}{8} e^{-x/2} = 0 \Rightarrow m_o = 2.$$

Медиана m_e является корнем уравнения $F(m_e) = \frac{1}{2}$. Поэтому

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt = 1 - \frac{x+2}{2} e^{-x/2} = \frac{1}{2} \Rightarrow m_e \approx 3.357. \quad \#$$

Распределение Стьюдента $t(n)$. Пусть случайные величины $Z \sim N(0, 1)$ и $V \sim \chi^2(n)$ независимы друг от друга. Тогда величина $X = \frac{Z}{\sqrt{V/n}} \sim t(n)$. Здесь n называют числом степеней свободы. Функция плотности распределения Стьюдента

$$f(x) = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{\pi n} \Gamma(\frac{n}{2})} \cdot \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}.$$



Распределения Стьюдента имеет следующие характеристики:

$$\mathbf{M}[X] = 0, \quad \mathbf{D}[X] = \frac{n}{n-2} \quad (n > 2).$$

Отметим, что $t(n) \rightarrow N(0, 1)$ при $n \rightarrow \infty$.

§61. Системы нескольких случайных величин

Дискретный двумерный вектор. До сих пор результаты испытаний характеризовались одной случайной величиной. Рассмотрим случай, когда результат испытания определяется двумя случайными величинами: X и Y . Пример: бросили две игральные кости, X – число, выпавшее на первой кости, Y – сумма выпавших чисел. *Двумерным случайным вектором* называется пара случайных чисел (X, Y) .

Дискретный двумерный случайный вектор задаётся всевозможными значениями (x_i, y_j) и матрицей P распределения вероятностей. Элемент p_{ij} этой матрицы – вероятность события, что $X = x_i$ и $Y = y_j$.

$X \setminus Y$	y_1	y_2	$\cdots$	y_n
x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1n}
x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2n}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
x_m	p_{m1}	p_{m2}	$\cdots$	p_{mn}

Сумма всех элементов матрицы $\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n p_{ij} = 1$.

Пусть p_{Xi} – вероятность события, что $X = x_i$, эта вероятность равна сумме элементов матрицы распределения, стоящих в строке i . Аналогично, p_{Yj} – вероятность события, что $Y = y_j$, она равна сумме элементов, стоящих в столбце j :

$$p_{Xi} = p(X = x_i) = \sum_j p_{ij}, \quad p_{Yj} = p(Y = y_j) = \sum_i p_{ij}.$$

По известной матрице распределения легко определяются таблицы вероятностей величин X и Y и, как следствие, характеристики этих величин:

$$\mathbf{M}[X] = \sum_i x_i p_{Xi} = \sum_i \sum_j x_i p_{ij}, \quad \mathbf{M}[Y] = \sum_i \sum_j y_j p_{ij},$$

$$\mathbf{D}[X] = \mathbf{M}[X^2] - (\mathbf{M}[X])^2, \quad \mathbf{M}[X^2] = \sum_i \sum_j x_i^2 p_{ij},$$

$$\mathbf{D}[Y] = \mathbf{M}[Y^2] - (\mathbf{M}[Y])^2, \quad \mathbf{M}[Y^2] = \sum_i \sum_j y_j^2 p_{ij}.$$

Пример 61.1. Дана матрица распределения вероятностей:

$X \setminus Y$	1	2	3
1	0.1	0.0	0.3
2	0.2	0.3	0.1

Найти характеристики величин X и Y .

Сложив элементы строк и столбцов исходной матрицы, заполним таблицы вероятностей величин X и Y :

X	1	2
p_{Xi}	0.4	0.6

Y	1	2	3
p_{Yj}	0.3	0.3	0.4

Далее определим характеристики этих величин:

$$\mathbf{M}[X] = 1 \cdot 0.4 + 2 \cdot 0.6 = 1.6,$$

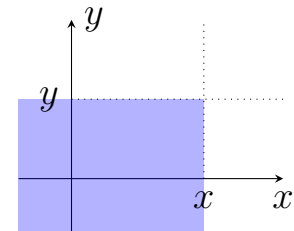
$$\mathbf{D}[X] = \mathbf{M}[X^2] - (\mathbf{M}[X])^2 = 1 \cdot 0.4 + 2^2 \cdot 0.6 - 1.6^2 = 0.24.$$

$$\mathbf{M}[Y] = 1 \cdot 0.3 + 2 \cdot 0.3 + 3 \cdot 0.4 = 2.1.$$

$$\mathbf{D}[Y] = 1 \cdot 0.3 + 2^2 \cdot 0.3 + 3^2 \cdot 0.4 - 2.1^2 = 0.69.$$

#

Непрерывный двумерный вектор. Для описания непрерывного вектора (X, Y) используется двумерная функция распределения $F(x, y)$, определяющая вероятность того, что вектор (X, Y) попал в бесконечный квадрант с правой верхней вершиной в точке (x, y) : $F(x, y) = p(X < x, Y < y)$.



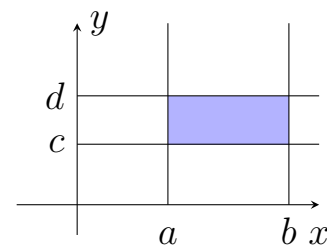
Свойства функции распределения:

- $0 \leq F(x, y) \leq 1$,
- $F(x, y)$ — неубывающая по x и по y ,
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x, y) = 0, \quad \lim_{y \rightarrow -\infty} F(x, y) = 0$.
- $\lim_{x, y \rightarrow +\infty} F(x, y) = 1$.

Функции $F_X(x)$ и $F_Y(y)$ распределений величин X и Y можно найти по известной функции распределения $F(x, y)$:

$$F_X(x) = \lim_{y \rightarrow +\infty} F(x, y), \quad F_Y(y) = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x, y).$$

Подобно тому, как вероятность попадания случайной величины в интервал определяется разностью значений функции распределения на концах этого интервала, вероятность попадания случайного вектора в прямоугольник определяется значениями функции распределения в вершинах этого прямоугольника:



$$p(a < X < b, c < Y < d) = F(b, d) + F(a, c) - F(a, d) - F(b, c).$$

Функцией плотности распределения двумерного случайного вектора называют вторую смешанную производную функции распределения:

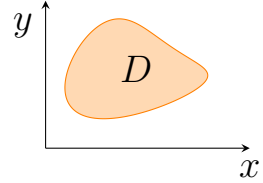
$f(x, y) = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$. Вероятностный смысл функции плотности: её значение в точке (x, y) есть предел отношения вероятности попадания (X, Y) в прямоугольник $X \in (x, x + \Delta x)$, $Y \in (y, y + \Delta y)$ к площади $\Delta x \cdot \Delta y$ этого прямоугольника, когда $\Delta \ell = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \rightarrow 0$:

$$f(x, y) = \lim_{\Delta \ell \rightarrow 0} \frac{p(x < X < x + \Delta x, y < Y < y + \Delta y)}{\Delta x \Delta y}.$$

Свойства функции плотности распределения:

- $f(x, y) \geq 0$,
- $\iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y) dx dy = 1$,
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x, y) = 0$, $\lim_{y \rightarrow -\infty} f(x, y) = 0$,
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x, y) = 0$, $\lim_{y \rightarrow +\infty} f(x, y) = 0$.

При известной функции плотности можно определить вероятность попадания случайного вектора не только в прямоугольник, но и любую произвольную область D плоскости:



$$p((X, Y) \in D) = \iint_D f(x, y) dx dy.$$

Функции $f_X(x)$ и $f_Y(y)$ плотностей распределений величин X и Y также можно найти по известной функции плотности распределения $f(x, y)$:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy, \quad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx.$$

Характеристики величин X и Y также определяются через $f(x, y)$:

$$\mathbf{M}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx = \iint_{\mathbb{R}^2} x f(x, y) dx dy,$$

$$\mathbf{M}[Y] = \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y) dy = \iint_{\mathbb{R}^2} y f(x, y) dx dy,$$

$$D[X] = M[X^2] - (M[X])^2, \quad M[X^2] = \iint_{\mathbb{R}^2} x^2 f(x, y) dx dy,$$

$$D[Y] = M[Y^2] - (M[Y])^2, \quad M[Y^2] = \iint_{\mathbb{R}^2} y^2 f(x, y) dx dy.$$

Условный закон распределения. Условным законом распределения называется распределение одной случайной величины, найденное при условии, что другая случайная величина приняла определённое значение. Пусть (X, Y) – дискретный случайный вектор и величина Y приняла значение y_j . Тогда, согласно (57.1), условная вероятность того, что X примет значение x_i , равна

$$p(X = x_i | Y = y_j) = \frac{p_{ij}}{p_{Yj}}.$$

Если величины X и Y независимы, то $p(X = x_i | Y = y_j) = p_{Xi}$. Поэтому элементы матрицы P распределения вероятностей вектора (X, Y) в случае независимости X и Y можно найти по вероятностям величин X и Y :

$$p_{ij} = p_{Xi} \cdot p_{Yj}.$$

В случае, когда (X, Y) – непрерывный случайный вектор, вводят понятие условных плотностей распределения. Пусть величина Y приняла значение y . Тогда условная плотность распределения величины X равна

$$f(x | Y = y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)}.$$

Если величины X и Y независимы, то $f(x | Y = y) = f_X(x)$. Поэтому, функция плотности распределения вектора (X, Y) для независимых X и Y равна

$$f(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y).$$

Пример 61.2. Дана матрица распределения вероятностей:

$X \setminus Y$	1	2	3
1	0.1	0.0	0.3
2	0.2	0.3	0.1

Описать случайную величину Y , если известно, что $X = 2$.

Вероятность $p(X = 2)$ равна сумме элементов второй строки. Разделив элементы второй строки на полученную сумму, найдём таблицу распределения Y :

Y	1	2	3
p_{Yj}	1/3	1/2	1/6

#

Пример 61.3. Случайные величины X, Y заданы таблицами:

X	1	2
p_{Xi}	0.4	0.6

Y	1	2	3
p_{Yj}	0.3	0.3	0.4

Определить матрицу P распределения вероятностей вектора (X, Y) , если известно, что величины X и Y независимы.

Искомую матрицу P получим, поэлементно умножив вероятности из данных таблиц:

$X \setminus Y$	1	2	3
1	0.12	0.12	0.16
2	0.18	0.18	0.24

#

Ковариация. Найдём математическое ожидание и дисперсию суммы двух случайных величин по известной матрице распределения:

$$\mathbf{M}[X + Y] = \sum_{i,j} p_{ij}(x_i + y_j) = \sum_{i,j} p_{ij}x_i + \sum_{i,j} p_{ij}y_j = \mathbf{M}[X] + \mathbf{M}[Y].$$

$$\begin{aligned} \mathbf{M}[(X + Y)^2] &= \sum_{i,j} p_{ij}(x_i + y_j)^2 = \sum_{i,j} p_{ij}x_i^2 + \sum_{i,j} p_{ij}y_j^2 + \\ &+ 2 \sum_{i,j} p_{ij}x_i y_j = \mathbf{M}[X^2] + \mathbf{M}[Y^2] + 2\mathbf{M}[XY]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{D}[X + Y] &= \mathbf{M}[(X + Y)^2] - (\mathbf{M}[X + Y])^2 = \mathbf{M}[X^2] + \mathbf{M}[Y^2] + \\ &+ 2\mathbf{M}[XY] - (\mathbf{M}[X])^2 - (\mathbf{M}[Y])^2 - 2\mathbf{M}[X]\mathbf{M}[Y] = \\ &= \mathbf{D}[X] + \mathbf{D}[Y] + 2(\mathbf{M}[XY] - \mathbf{M}[X] \cdot \mathbf{M}[Y]). \end{aligned}$$

Выражение, стоящее в скобках в последней формуле, называется *ковариацией* (дисперсионным моментом):

$$\text{cov}[X, Y] = \mathbf{M}[(X - \mathbf{M}[X]) \cdot (Y - \mathbf{M}[Y])] = \mathbf{M}[XY] - \mathbf{M}[X] \cdot \mathbf{M}[Y],$$

где величина $\mathbf{M}[XY]$ для дискретных и непрерывных случайных векторов определяется по формулам:

$$\mathbf{M}[XY] = \sum_i \sum_j x_i y_j p_{ij}, \quad \mathbf{M}[XY] = \iint_{\mathbb{R}^2} xy f(x, y) dx dy.$$

Отметим основные свойства ковариации:

- $\mathbf{cov}[X, X] = \mathbf{D}[X]$,
- $\mathbf{cov}[X, Y] = \mathbf{cov}[Y, X]$,
- $\mathbf{cov}[X + Y, Z] = \mathbf{cov}[X, Z] + \mathbf{cov}[Y, Z]$,
- $\mathbf{cov}[aX, bY] = ab \cdot \mathbf{cov}[X, Y]$,
- $\mathbf{D}[X + Y] = \mathbf{D}[X] + \mathbf{D}[Y] + 2\mathbf{cov}[X, Y]$,
- Если величины X и Y независимы, то $\mathbf{cov}[X, Y] = 0$.

◀ Докажем последнее свойство. Для независимых дискретных величин $p_{ij} = p_{Xi}p_{Yj}$, поэтому

$$\mathbf{M}[XY] = \sum_i \sum_j p_{Xi}p_{Yj}x_i y_j = \sum_i p_{Xi}x_i \cdot \sum_j p_{Yj}y_j = \mathbf{M}[X] \cdot \mathbf{M}[Y].$$

Следовательно, из определения ковариации, $\mathbf{cov}[X, Y] = 0$. ▶

Если X и Y являются размерными величинами, то ковариация будет иметь размерность, равную произведению размерностей X и Y . Коэффициентом корреляции называют безразмерную величину

$$\mathbf{r}_{XY} = \frac{\mathbf{cov}[X, Y]}{\sqrt{\mathbf{D}[X]\mathbf{D}[Y]}} = \frac{\mathbf{cov}[X, Y]}{\sigma_X \sigma_Y}.$$

Приведём основные свойства коэффициента корреляции:

- $\mathbf{r}_{XX} = 1$,
- Если величины X и Y независимы, то $\mathbf{r}_{XY} = 0$,
- $-1 \leq \mathbf{r}_{XY} \leq 1$.

◀ Докажем последнее свойство. Рассмотрим величину $Z_1 = \sigma_Y X - \sigma_X Y$ и найдём её дисперсию:

$$\begin{aligned} \mathbf{D}[Z_1] &= M[\sigma_Y^2 X^2 - 2\sigma_X \sigma_Y XY + \sigma_X^2 Y^2] - (\sigma_Y M[X] - \sigma_X M[Y])^2 = \\ &= \sigma_Y^2 (M[X^2] - M[X]^2) - 2\sigma_X \sigma_Y (M[XY] - M[X]M[Y]) + \end{aligned}$$

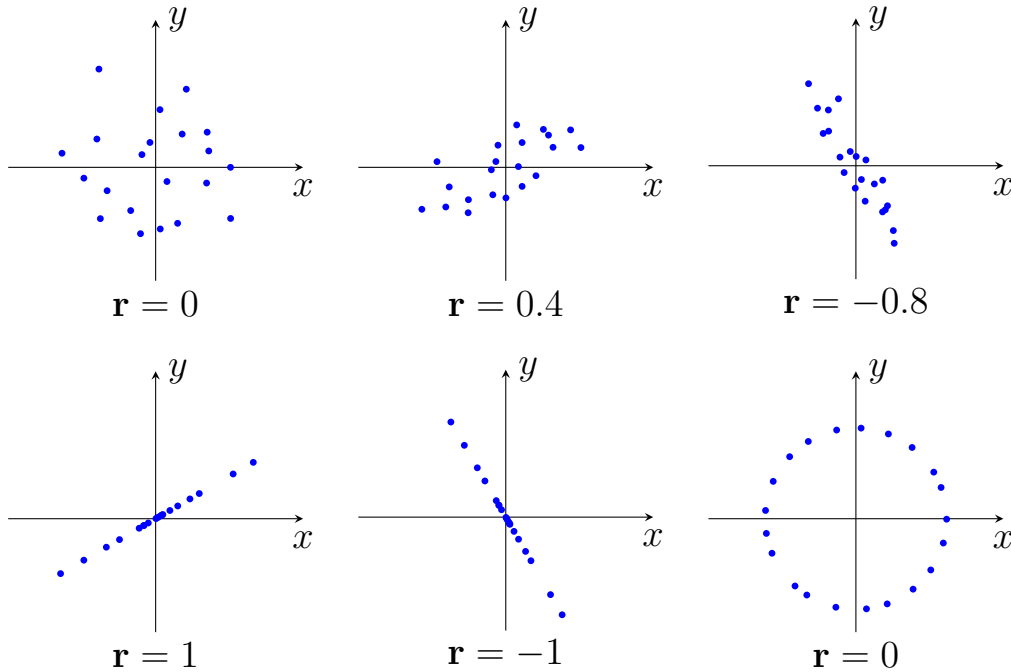
$$+\sigma_X^2(M[Y^2] - M[Y]^2) = 2\sigma_X^2\sigma_Y^2 - 2\sigma_X\sigma_Y\mathbf{cov}[X, Y].$$

Дисперсия неотрицательна, поэтому

$$2\sigma_X^2\sigma_Y^2 \geq 2\sigma_X\sigma_Y\mathbf{cov}[X, Y] \Rightarrow \mathbf{cov}[X, Y] \leq \sigma_X\sigma_Y.$$

Мы доказали, что $\mathbf{r}_{XY} \leq 1$. Доказательство $\mathbf{r}_{XY} \geq -1$ проводится по той же схеме, для этого надо рассмотреть величину $Z_2 = \sigma_Y X + \sigma_X Y$. ►

Коэффициент корреляции определяет степень взаимозависимости случайных величин. На рисунке приведены примеры пар (X, Y) при различных значениях $\mathbf{r}_{XY}$.



Отметим, что случай $\mathbf{r} = 0$ не означает, что величины являются независимыми. Они могут быть зависимыми, но эта зависимость имеет нелинейный характер. Примером служит последний рисунок, на котором изображены величины, связанные зависимостью $X^2 + Y^2 = \text{const}$.

Пример 61.4. Подбросили две игральные кости. Пусть X_1 – число, выпавшее на первой кости, Y – сумма выпавших очков. Найти $\mathbf{r}_{X_1 Y}$.

Пусть X_2 – число на второй кости. Заметим, что $X_1, X_2 \sim \mathbf{U}\{1, 6\}$ и, по свойству равномерного дискретного распределения,

$$\mathbf{M}[X_1] = \mathbf{M}[X_2] = \frac{7}{2} = m, \quad \mathbf{D}[X_1] = \mathbf{D}[X_2] = \frac{35}{12} = d.$$

Заметим, что $Y = X_1 + X_2$. Т.к. величины X_1 и X_2 независимы, то

$$\mathbf{M}[Y] = \mathbf{M}[X_1] + \mathbf{M}[X_2] = 2m, \quad \mathbf{D}[Y] = \mathbf{D}[X_1] + \mathbf{D}[X_2] = 2d.$$

Вычислим математическое ожидание произведения:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}[X_1 Y] &= \mathbf{M}[X_1(X_1 + X_2)] = \mathbf{M}[X_1^2] + \mathbf{M}[X_1 X_2] = \mathbf{D}[X_1] + \\ &+ (\mathbf{M}[X_1])^2 + \mathbf{M}[X_1] \mathbf{M}[X_2] = d + 2m^2. \end{aligned}$$

Ковариация $\mathbf{cov}[X_1 Y] = \mathbf{M}[X_1 Y] - \mathbf{M}[X_1] \mathbf{M}[Y] = d + 2m^2 - 2m^2 = d$.

Коэффициент корреляции

$$\mathbf{r}_{X_1 Y} = \frac{\mathbf{cov}[X_1 Y]}{\sqrt{\mathbf{D}[X_1] \mathbf{D}[Y]}} = \frac{d}{\sqrt{2d^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad \#$$

Многомерный случайный вектор.¹ Система нескольких случайных величин $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ называется многомерным случайным вектором. При изучении таких векторов недостаточно изучить входящие в них случайные величины по отдельности, необходимо также изучить зависимости между этими величинами.

Функцией распределения вектора $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ называется функция

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = p(X_1 < x_1, X_2 < x_2, \dots, X_n < x_n).$$

Функцией плотности распределения вектора называется функция

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\partial^n F(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_1 \partial x_2 \cdots \partial x_n}.$$

Свойства у функций распределения и плотности распределения многомерного вектора такие же, как и у аналогичных функций двумерного вектора. Характеристиками многомерного вектора являются:

- Математические ожидания $\mathbf{M}[X_i]$,
- Дисперсии $\mathbf{D}[X_i]$ и среднеквадратичные отклонения $\sigma_i = \sqrt{\mathbf{D}[X_i]}$,
- Ковариации $\mathbf{cov}[X_i, X_j]$ и коэффициенты корреляции $\mathbf{r}_{ij}$.

¹ Данный раздел является факультативным.

Дисперсии и ковариации удобно представить в виде ковариационной матрицы

$$\begin{pmatrix} \text{cov}[X_1, X_1] & \text{cov}[X_1, X_2] & \cdots & \text{cov}[X_1, X_n] \\ \text{cov}[X_1, X_2] & \text{cov}[X_2, X_2] & \cdots & \text{cov}[X_2, X_n] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{cov}[X_1, X_n] & \text{cov}[X_2, X_n] & \cdots & \text{cov}[X_n, X_n] \end{pmatrix}$$

Эта матрица симметрична. Если все случайные величины независимы, то ковариационная матрица будет диагональной. Заметим, что данная матрица уже появлялась ранее в §42 (ортогональная регрессия).

§62. Математическая статистика. Статистические оценки

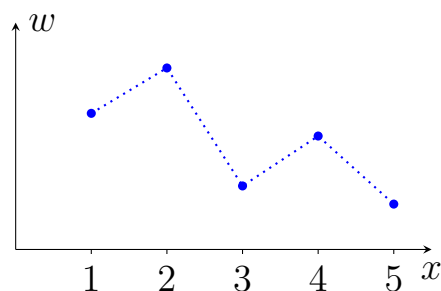
Основные понятия математической статистики. *Математическая статистика* – наука, занимающаяся методами обработки опытных данных, полученных в результате наблюдений над случайными явлениями. *Генеральная совокупность* – множество всех объектов, для которых требуется сделать вывод. Объём генеральной совокупности N – количество всех объектов. Заметим, что объём может быть и бесконечным. *Выборочная совокупность (выборка)* – множество случайно отобранных объектов генеральной совокупности. Объём выборки n – количество входящих в неё объектов.

Рассмотрим некоторый признак, по которому изучаются объекты генеральной совокупности. Этот признак представляет собой случайную величину X , каждый объект генеральной совокупности имеет фиксированное значение этой величины. Выборка в этом случае представляет множество из n значений X . Одной из главных задач математической статистики является определение закона распределения X на основе выборки.

Вариационный ряд – расположенные в порядке возрастания значения $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ величины X объектов выборки. *Статистический ряд* для дискретной величины – таблица, в которой перечислены значения выборки

в порядке возрастания и указаны соответствующие им частоты:

X	x_1	x_2	$\dots$	x_m
n_i	n_1	n_2	$\dots$	n_m
w_i	w_1	w_2	$\dots$	w_m



Здесь n_i — частота, равная количеству значений x_i в выборке, $w_i = \frac{n_i}{n}$ — относительная частота.

Задание. Чему равна сумма относительных частот?

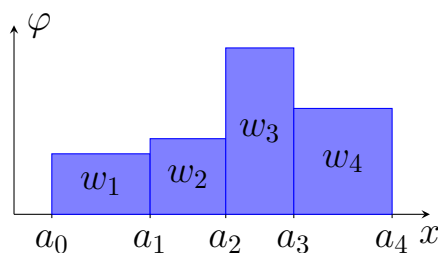
Полигон частот — ломаная, соединяющую точки (x_i, w_i) .

Для непрерывной случайной величины (или дискретной величины с большим количеством значений) по выборке составляется *интервальный статистический ряд*:

X	$(a_0 - a_1)$	$(a_1 - a_2)$	$\dots$	$(a_{m-1} - a_m)$
n_i	n_1	n_2	$\dots$	n_m
w_i	w_1	w_2	$\dots$	w_m
φ_i	φ_1	φ_2	$\dots$	φ_m

Здесь n_i — частота, равная количеству значений x_i , попавших в интервал (a_{i-1}, a_i) . Длины интервалов обозначим как $h_i = a_i - a_{i-1}$, в последней строке таблицы приведены *статистические плотности* $\varphi_i = \frac{w_i}{h_i}$.

Гистограмма — графическое представление интервального статистического ряда — представляет собой совокупность прямоугольников $h_i \times \varphi_i$:



Задание. Чему равна суммарная площадь прямоугольников?

Границы интервалов и их число могут быть выбраны произвольно, но существуют рекомендации по их определению, зависящие как от объёма выборки, так и от представленных в ней значений.

Правило Стёрджеса – одно из таких правил для определения числа m интервалов и их границ для равноинтервального ряда:

$$m = 1 + \lfloor \log_2 n \rfloor, \quad h = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{m}.$$

Здесь $\lfloor x \rfloor$ – операция округления вниз до ближайшего целого числа, например, $\lfloor 2.89 \rfloor = 2$. Границы интервалов определяются так:

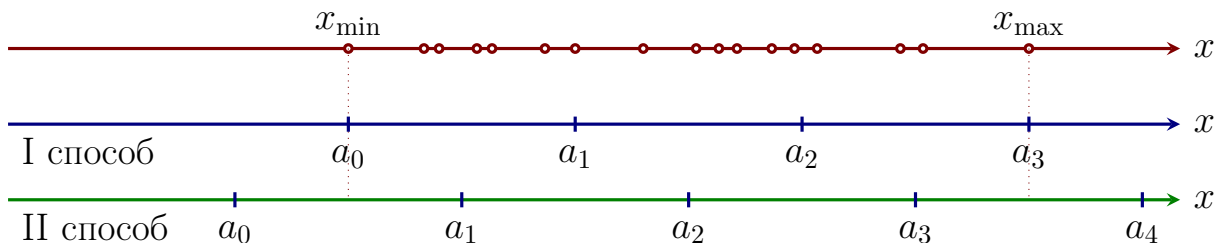
$$a_0 = x_{\min}, \quad a_i = a_0 + h \cdot i, \quad a_m = x_{\max}.$$

Заметим, что значения длин и границ интервалов можно округлить, при этом надо следить, что ни одно из значений не оказалось вне интервалов.

Может использоваться и второй способ, в котором число интервалов будет на единицу больше:

$$a_0 = x_{\min} - \frac{h}{2}, \quad a_i = a_0 + h \cdot i, \quad a_{m+1} = x_{\max} + \frac{h}{2}.$$

Второй способ предпочтительнее в тех случаях, когда в выборку впоследствии могут быть добавлены новые значения. Они могут выходить за рамки отрезка $[x_{\min}, x_{\max}]$ и, про втором способе задания интервалов, не придётся переопределять новые границы.



Пример 62.1. Дана выборка объёмом $n = 100$. Крайние значения $x_{\min} = 16$, $x_{\max} = 73$. Найти интервалы по формуле Стёрджеса по второму способу.

По формуле Стёрджеса число интервалов для первого способа $m = 1 + \lfloor \log_2(100) \rfloor = 1 + \lfloor 6.64 \rfloor = 7$. Во втором способе будет $m + 1 = 8$ интервалов. Длины интервалов $h = \frac{73-16}{7} = 8.1428$ округлим до $h = 8$. Начало первого интервала $a_0 = 16 - 4 = 12$. Остальные границы интервалов: $a_1 = 12 + 8 = 20$, $a_2 = 28$, ..., $a_7 = 68$, $a_8 = 76$. #

Точечные оценки. Рассмотрим задачу: закон распределения случайной величины X генеральной совокупности известен, но это распределение содержит неизвестный параметр θ . Требуется определить значение θ по выборке. Приведём примеры таких задач.

- Случайная величина $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ с неизвестным параметром μ .
- Случайная величина $X \sim \mathbf{Exp}(\lambda)$ с неизвестной интенсивностью λ .
- Случайная величина $X \sim \mathbf{B}(n, p)$ с неизвестной вероятностью p .

Точечной оценкой параметра θ называют функцию $\hat{\theta}(x_1, x_2, \dots, x_n)$, вычисляемую по значениям выборки. Каждое из значений $x_1, x_2, \dots, x_n$ является случайной величиной, поэтому и оценка $\hat{\theta}$ – также случайная величина. Требования, предъявляемые к точечной оценке:

- *состоятельность* – при увеличении объёма выборки оценка $\hat{\theta}$ должна сходиться к истинному значению параметра: $\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{\theta} = \theta$,
- *несмещённость* – математическое ожидание оценки $\hat{\theta}$ равно значению параметра: $\mathbf{M}[\hat{\theta}] = \theta$ для любого n ,
- *эффективность* – оценка $\hat{\theta}$ имеет наименьшую возможную дисперсию.

Основными способами получения функций точечных оценок являются метод моментов и метод максимального правдоподобия. Эти методы не рассматриваются в пособии.

Приведём пример. Рост человека – случайная величина, имеющая нормальное распределение с неизвестным параметром μ . Для оценки этого параметра используется выборка из двух человек, имеющих рост x_1 и x_2 . Рассмотрим несколько вариантов оценок.

- $\hat{\mu}_1 = x_1 + x_2$. Данная оценка является смещённой: $\mathbf{M}[\hat{\mu}_1] = \mathbf{M}[x_1] + \mathbf{M}[x_2] = 2\mu \neq \mu$.
- $\hat{\mu}_2 = (x_1 + x_2)/2$. Данная оценка является несмещённой: $\mathbf{M}[\hat{\mu}_2] =$

$$= (\mathbf{M}[x_1] + \mathbf{M}[x_2])/2 = \mu.$$

$$\text{Найдём дисперсию оценки: } \mathbf{D}[\hat{\mu}_2] = \frac{\mathbf{D}[x_1] + \mathbf{D}[x_2]}{4} = \frac{\sigma^2}{2}.$$

- $\hat{\mu}_3 = (x_1 + 2x_2)/3$. Это тоже несмещённая оценка: $\mathbf{M}[\hat{\mu}_3] = (\mathbf{M}[x_1] + 2\mathbf{M}[x_2])/3 = \mu$.

$$\text{Найдём её дисперсию: } \mathbf{D}[\hat{\mu}_3] = \frac{\mathbf{D}[x_1] + 4\mathbf{D}[x_2]}{9} = \frac{5\sigma^2}{9}.$$

- $\hat{\mu}_4 = 2x_1 - x_2$. Оценка несмещённая: $\mathbf{M}[\hat{\mu}_4] = 2\mathbf{M}[x_1] - \mathbf{M}[x_2] = \mu$.

$$\text{Её дисперсия: } \mathbf{D}[\hat{\mu}_4] = 4\mathbf{D}[x_1] + \mathbf{D}[x_2] = 5\sigma^2.$$

Итак, среди всех несмещённых оценок наименьшей дисперсией обладает оценка $\hat{\mu}_2$, поэтому она является эффективной.

Точечная оценка математического ожидания и дисперсии. *Выборочным средним* называется среднее арифметическое значений выборки:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i.$$

Выборочное среднее – состоятельная несмещённая оценка математического ожидания X . Если X распределена нормально, то эта оценка ещё и эффективна. Характеристики выборочного среднего:

$$\mathbf{M}[\bar{x}] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{M}[x_i] = \frac{1}{n} \cdot n\mathbf{M}[X] = \mathbf{M}[X],$$

$$\mathbf{D}[\bar{x}] = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \mathbf{D}[x_i] = \frac{1}{n^2} \cdot n\mathbf{D}[X] = \frac{\mathbf{D}[X]}{n}.$$

Выборочной дисперсией называется величина

$$s_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \overline{x^2} - (\bar{x})^2, \quad \overline{x^2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2.$$

Выборочная дисперсия является смещённой оценкой дисперсии X . Покажем это.

$$\begin{aligned} \mathbf{M}[s_n^2] &= \mathbf{M} \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \right] = \mathbf{M} \left[\frac{n-1}{n^2} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \right. \\ &\quad \left. - \frac{2}{n^2} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n x_i x_j \right] = \frac{n-1}{n^2} \sum_{i=1}^n \mathbf{M}[X^2] - \frac{2}{n^2} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n (\mathbf{M}[X])^2 = \end{aligned}$$

$$= \frac{n-1}{n} \left(\mathbf{M}[X^2] - (\mathbf{M}[X])^2 \right) = \frac{n-1}{n} \mathbf{D}[X].$$

Несмещённой выборочной дисперсией называют величину

$$s^2 = \frac{n}{n-1} s_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \frac{n}{n-1} \left(\overline{x^2} - (\bar{x})^2 \right).$$

Она является состоятельной несмещённой оценкой дисперсии X .

Пример 62.2. Найти точечные оценки математического ожидания и дисперсии генеральной совокупности по выборке объёма $n = 30$:

X	1	2	3	4	5
n_i	2	4	10	11	3

Вычислим средние величины:

$$\bar{x} = \frac{1}{30} (1 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 10 + 4 \cdot 11 + 5 \cdot 3) = \frac{99}{30} = 3.3.$$

$$\overline{x^2} = \frac{1}{30} (1^2 \cdot 2 + 2^2 \cdot 4 + 3^2 \cdot 10 + 4^2 \cdot 11 + 5^2 \cdot 3) = \frac{359}{30} = 11.967.$$

Найдём выборочную и исправленную выборочную дисперсию:

$$s_n^2 = \overline{x^2} - (\bar{x})^2 = 11.967 - 3.3^2 = 1.077.$$

$$s^2 = \frac{30}{29} s_n^2 = \frac{30}{29} 1.077 = 1.114.$$

Значит, точечной оценкой математического ожидания генеральной совокупности будет $\bar{x} = 3.3$, а точечной оценкой дисперсии $s^2 = 1.114$. #

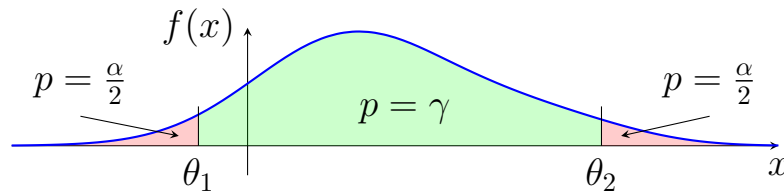
Интервальные оценки. Вернёмся к задаче определения значения параметра θ генеральной совокупности по значениям выборки. Параметр θ можно считать случайной величиной, имеющей свою функцию распределения $F(x) = p(\theta < x)$ и функцию плотности $f(x) = F'(x)$.

Доверительным называется интервал (θ_1, θ_2) , в который с заданной вероятностью γ попадает значение параметра θ . Вероятность γ называется надёжностью, обычно она задаётся близкой к единице: 0.9; 0.95; 0.99. Вместо надёжности можно задать вероятность противоположного события, т.е.

того, что θ окажется вне интервала (θ_1, θ_2) . Область $(-\infty, \theta_1) \cup (\theta_2, \infty)$ называется *критической*, вероятность попадания параметра θ в эту область называется *уровнем значимости* $\alpha = 1 - \gamma$.

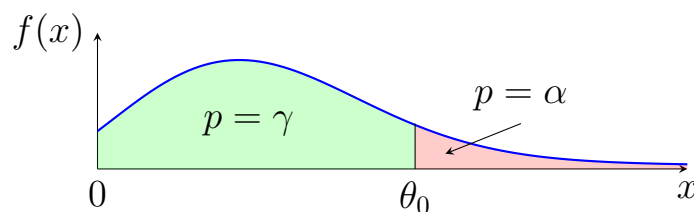
В зависимости от вида критической области, доверительные интервалы бывают двусторонними и односторонними. В *двусторонних* интервалах границы θ_1 и θ_2 определяются так, чтобы вероятности попадания параметра θ в области $(-\infty, \theta_1)$ и (θ_2, ∞) равнялись $\frac{\alpha}{2}$. Другими словами, θ_1 и θ_2 – квантили уровня $\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\gamma}{2}$ и $1 - \frac{\alpha}{2} = \frac{1+\gamma}{2}$:

$$p(\theta < \theta_1) = \frac{\alpha}{2}, \quad p(\theta > \theta_2) = \frac{\alpha}{2} \quad \Rightarrow \quad p(\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2) = \gamma.$$



Отметим, что если распределение симметрично, то серединой интервала (θ_1, θ_2) является точечная оценка $\hat{\theta}$, т.е. $\hat{\theta} = (\theta_1 + \theta_2)/2$. Величину $\delta = \hat{\theta} - \theta_1 = \theta_2 - \hat{\theta}$ называют *точностью*.

Односторонние доверительные интервалы бывают с лево- и правосторонней критической областью. На рисунке приведён пример доверительного интервала $[0, \theta_0]$ с правосторонней критической областью для случайной величины, принимающей неотрицательные значения:



Граница θ_0 данного доверительного интервала определяется так, чтобы вероятность попадания в область (θ_0, ∞) равнялась α . Другими словами, θ_0 – квантиль уровня γ : $p(\theta \leq \theta_0) = F(\theta_0) = \gamma$.

Интервальная оценка математического ожидания. Рассмотрим вначале задачу определения параметра μ нормального распределения при известном σ . По выборке объёма n находим точечную оценку $\bar{x}$. По известной надёжности γ требуется определить такую точность δ , чтобы вероятность попадания в доверительный интервал равнялась надёжности: $p(\bar{x} - \delta < \mu < \bar{x} + \delta) = \gamma$.

Для решения этой задачи рассмотрим величину $Z = \frac{(\bar{x} - \mu)\sqrt{n}}{\sigma}$. Она имеет нормальное распределение. Найдём параметры этого распределения:

$$\mathbf{M}[Z] = \frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\mathbf{M}[\bar{x}] - \mu) = 0, \quad \mathbf{D}[Z] = \frac{n}{\sigma^2}(\mathbf{D}[\bar{x}] - 0) = \frac{n}{\sigma^2} \frac{\sigma^2}{n} = 1.$$

Значит, $Z \sim \mathbf{N}(0, 1)$. Согласно (60.1), вероятность $p(|Z| < z_\gamma) = 2\Phi(z_\gamma) = \gamma$, из данного соотношения находим квантиль z_γ . Далее

$$\frac{(\bar{x} - \mu)\sqrt{n}}{\sigma} < z_\gamma \Rightarrow \frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma} = z_\gamma \Rightarrow \delta = \frac{z_\gamma\sigma}{\sqrt{n}}.$$

Доверительный интервал в задаче: $\mu \in (\bar{x} - \delta, \bar{x} + \delta)$. Задача решена.

Далее рассмотрим аналогичную задачу определения параметра μ нормального распределения, но при неизвестном σ . По выборке объёма n находим $\bar{x}$ и s . Как и ранее, по известной надёжности γ требуется определить такую точность δ , чтобы вероятность попадания в доверительный интервал равнялась надёжности: $p(\bar{x} - \delta < \mu < \bar{x} + \delta) = \gamma$.

Рассмотрим величину $T = \frac{(\bar{x} - \mu)\sqrt{n}}{s}$. Она имеет распределение Стьюдента с $n - 1$ степенями свободы. Из уравнения $p(|T| < t_\gamma) = \gamma$ находим квантиль t_γ (квантили распределения Стьюдента приведены в приложении). Искомая точность $\delta = \frac{t_\gamma s}{\sqrt{n}}$. Доверительный интервал в задаче имеет вид $\mu \in (\bar{x} - \delta, \bar{x} + \delta)$.

Пример 62.3. Для выборки из примера 62.2 и для уровня значимости $\alpha = 0.05$ построить доверительный интервал для математического ожидания

- при известной дисперсии $\sigma^2 = 1.114$,
- при неизвестной дисперсии.

Надёжность в данной задаче $\gamma = 1 - \alpha = 0.95$. Для первой задачи (известная дисперсия) вначале определим квантиль

$$\Phi(z_\gamma) = \frac{\gamma}{2} \Rightarrow \Phi(z_\gamma) = 0.475 \Rightarrow z_\gamma = 1.96.$$

$$\text{Точность } \delta = \frac{z_\gamma \sigma}{\sqrt{n}} = \frac{1.96 \cdot \sqrt{1.114}}{\sqrt{30}} \approx 0.378.$$

В задаче 62.2 была найдена точечная оценка $\bar{x} = 3.3$. Доверительный интервал $\mu \in (\bar{x} - \delta, \bar{x} + \delta)$ равен $\mu \in (2.922, 3.678)$.

Для решения второй задачи определим квантиль распределения Стьюдента уровня $\frac{1+\gamma}{2} = 0.975$ и для $n - 1 = 29$ степеней свободы. По таблице $t_\gamma = 2.05$. Точность $\delta = \frac{t_\gamma s}{\sqrt{n}} = \frac{2.05 \cdot \sqrt{1.114}}{\sqrt{30}} \approx 0.395$.

Доверительный интервал $\mu \in (\bar{x} - \delta, \bar{x} + \delta)$ равен $\mu \in (2.905, 3.695)$. #

Интервальная оценка дисперсии нормального распределения.

Рассмотрим задачу нахождения интервальной оценки дисперсии σ^2 нормального распределения. По выборке объёма n находим точечную оценку s^2 . По известной надёжности γ требуется определить такие σ_1^2 и σ_2^2 , чтобы вероятность попадания в доверительный интервал равнялась надёжности: $p(\sigma_1^2 < \sigma^2 < \sigma_2^2) = \gamma$.

Для решения задачи введём величину $\chi^2 = \frac{s^2 \cdot (n-1)}{\sigma^2}$. Она имеет распределение “хи-квадрат” с $n - 1$ степенями свободы. Далее по таблице квантилей распределения “хи-квадрат” (они приведены в приложении) определим квантили $\chi_{\frac{1-\gamma}{2}, n-1}^2$ и $\chi_{\frac{1+\gamma}{2}, n-1}^2$ уровней $\frac{1-\gamma}{2}$ и $\frac{1+\gamma}{2}$. По найденным квантилям определяем границы доверительного интервала, он в задаче имеет вид:

$$\sigma^2 \in \left(\frac{s^2 \cdot (n-1)}{\chi_{\frac{1+\gamma}{2}, n-1}^2}, \frac{s^2 \cdot (n-1)}{\chi_{\frac{1-\gamma}{2}, n-1}^2} \right).$$

Пример 62.4. Для выборки из примера 62.2 и для уровня значимости $\alpha = 0.05$ построить доверительный интервал для дисперсии.

В примере 62.2 найдена исправленная дисперсия $s^2 = 1.114$. Надёжность в данной задаче $\gamma = 1 - \alpha = 0.95$. По таблице найдём квантили распределения “хи-квадрат” уровней $\frac{1-\gamma}{2} = 0.025$ и $\frac{1+\gamma}{2} = 0.975$ для $n - 1 = 29$

степеней свободы:

$$\chi_{0.025,29}^2 = 16.05, \quad \chi_{0.975,29}^2 = 45.72.$$

Находим доверительный интервал:

$$\sigma^2 \in \left(\frac{1.114 \cdot 29}{45.72}, \frac{1.114 \cdot 29}{16.05} \right) \Rightarrow \sigma^2 \in (0.707, 2.013). \quad \#$$

Оценка вероятности по относительной частоте.¹ Рассмотрим задачу определения вероятности p некоторого события A . Для определения этой вероятности проводится n испытаний, в которых событие A происходит m раз. Относительная частота события $w = m/n$. По заданной надёжности γ требуется определить такие p_1 и p_2 , чтобы вероятность попадания в доверительный интервал $P(p_1 < p < p_2) = \gamma$.

Если событие A имеет вероятность p , то число появления события в n испытаниях $m \sim B(n, p)$. Предположим, что число испытаний велико, поэтому вместо формул Бернулли будем пользоваться формулами Муавра – Лапласа. Согласно (58.2), вероятность

$$P(|w - p| < \varepsilon) = 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right) = \gamma.$$

Определим квантиль z_γ из уравнения $\Phi(z_\gamma) = \frac{\gamma}{2}$. Искомая точность

$$\varepsilon = z_\gamma \sqrt{\frac{pq}{n}} \Rightarrow |w - p| < z_\gamma \sqrt{\frac{p - p^2}{n}}.$$

Это неравенство для поиска p , оно приводит к решению квадратного уравнения. При больших n можно использовать простое приближённое решение

$$|w - p| < z_\gamma \sqrt{\frac{w - w^2}{n}} \Rightarrow p_{1,2} = w \mp z_\gamma \sqrt{\frac{w(1 - w)}{n}}.$$

Пример 62.5. Несимметричная монета подброшена $n = 100$ раз, орел выпал в 60 бросках. Оценить вероятность выпадения орла с надёжностью 0.95.

¹ Данный раздел является факультативным.

Найдём квантиль z_γ :

$$\Phi(z_\gamma) = \frac{\gamma}{2} \Rightarrow \Phi(z_\gamma) = 0.475 \Rightarrow z_\gamma = 1.96.$$

Неравенство для поиска вероятности p выпадения орла имеет вид

$$|0.6 - p| < 1.96 \sqrt{\frac{p - p^2}{100}}.$$

Его приближённое решение:

$$|0.6 - p| < 1.96 \sqrt{\frac{0.6 - 0.6^2}{100}} \Rightarrow p_{1,2} = 0.6 \mp 0.096.$$

Значит, искомая вероятность выпадения орла с надёжностью 0.95 лежит в интервале $p \in [0.504, 0.696]$.

Заметим, что точное решение полученного неравенства для p приводит к ответу $p \in [0.502, 0.691]$. #

§63. Проверка статистических гипотез

Понятие статистической гипотезы. *Статистической гипотезой* называют утверждение относительно вида или свойства распределения генеральной совокупности, которое можно подтвердить или опровергнуть на основе выборки. На практике обычно требуется проверить какую-то конкретную гипотезу H_0 . Такую гипотезу принято называть *нулевой*. При этом параллельно рассматривается противоречащая ей гипотеза H_1 , называемая *альтернативной*.

Алгоритм проверки гипотез состоит из следующих этапов:

- Формулировка нулевой гипотезы H_0 .
- Выбор уровня значимости α .
- Выбор статистического критерия и правил принятия решения.
- Принятие/отклонение H_0 на основании выборки.

Приведём примеры статистических гипотез.

- Параметр распределения генеральной совокупности (напр., μ нормального распределения) равен конкретному числу.

- Гипотеза о предполагаемом законе распределения – генеральная совокупность имеет конкретное распределение (напр., нормальное).
- Гипотеза однородности выборок – две независимые выборки принадлежат одной генеральной совокупности.

Пример: концентрация вещества в одной лаборатории определяется весовым методом, а в другой – фотоколориметрическим методом. Проверить гипотезу об отсутствии расхождений результатов этих методов.

- Гипотеза об отсутствии значимого эффекта – математические ожидания двух зависимых выборок одинаковы.

Пример: концентрация вещества в лаборатории определяется дважды: вначале весовым, а потом – фотоколориметрическим методом. Проверить гипотезу об отсутствии расхождений результатов этих методов.

- Гипотеза о независимости двух случайных величин – корреляция двух случайных величин генеральной совокупности равна нулю.

Ошибки первого и второго рода. Принятие/отклонение гипотезы H_0 проводится на основе данных выборки, которые имеют случайный характер. Поэтому возможны ошибки. *Ошибка первого рода* состоит в том, что будет отклонена гипотеза H_0 в случае, когда она верна. Вероятность совершить ошибку первого рода называется уровнем значимости и обозначается буквой α . Заметим, что эта вероятность задаётся перед проверкой гипотезы. Наиболее часто используемые значения уровня значимости на практике: $\alpha = 0.05, \alpha = 0.01$.

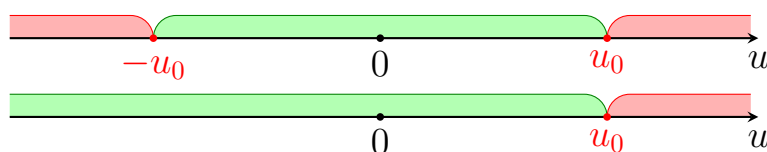
Ошибка второго рода заключается в принятии гипотезы H_0 в случае, когда она неверна. Вероятность ошибки этого рода обозначается буквой β . Эта вероятность не задаётся, а зависит от метода проверки гипотезы (так называемого критерия). Так, число $1 - \beta$ называется *мощностью критерия*. Чем больше мощность, тем эффективнее метод. В таблице, для наглядности, приведены возможные варианты:

	Верна гипотеза H_0	Верна гипотеза H_1
Принимается гипотеза H_0	H_0 принята верно (с вероятностью $\gamma = 1 - \alpha$)	Ошибка второго рода (с вероятностью β)
Отклоняется гипотеза H_0	Ошибка первого рода (с вероятностью α)	H_0 отклонена верно (с вероятностью $1 - \beta$)

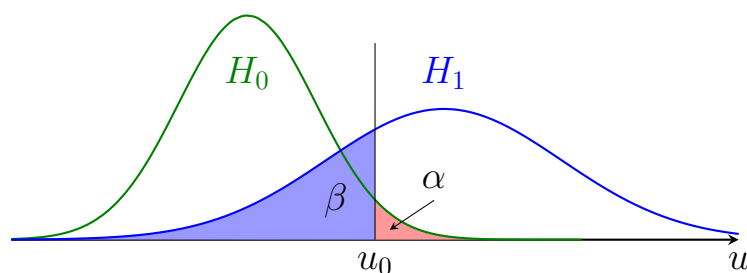
Пример: в здании есть противопожарная сигнализация. Гипотеза H_0 соответствует событию, что пожара нет. Ошибка первого рода – ложная тревога – звучит сигнализация, хотя пожара в здании нет. Ошибка второго рода – пропуск события – в здании пожар, но сигнализация не включилась.

Односторонние и двусторонние критерии. Критерием называется случайная величина U , которая позволяет принять или отклонить нулевую гипотезу H_0 . Множество значений U , при которых H_0 принимается, называется *областью принятия*. Множество значений U , при которых H_0 отвергается, называется *критической областью*. Границы между этими областями называются *критическими точками*.

Критерии делятся на двусторонние и односторонние в зависимости от числа интервалов в критической области. Примерный вид областей для двустороннего и одностороннего критерия приведён на рисунке. Зелёным цветом обозначены области принятия, красным – критические области данных двух видов критериев.



На рисунке ниже приведены примерные графики функций плотности распределения величины U в случае справедливости гипотез H_0 и H_1 для односторонней критической области.



Вероятностям α и β ошибок первого и второго рода соответствуют площади закрашенных фигур под графиками функций. Видно, что при уменьшении вероятности α совершения ошибки первого рода вероятность β ошибки второго рода растёт.

Критерий Диксона. Имеется вариационный ряд объёма n , содержащий измерения какие-либо величины: $x_1, x_2, \dots, x_n$. Одно (или несколько при больших n) крайних значений ряда проверяют на наличие грубой ошибки при измерении.

Критерий Диксона (Q -критерий) служит для исключения грубых погрешностей в измерениях. Рассмотрим вариант, когда сомнение вызывает значение x_1 .

Гипотеза $H_0 = \{\text{Погрешность измерений отсутствует, значение } x_1 \text{ может быть использовано в дальнейшей обработке}\}$. Альтернативная гипотеза $H_1 = \{\text{Имеется ошибка при измерении } x_1, \text{ это значение следует исключить из дальнейшей обработки}\}$.

Для принятия решения вводится критерий $r = \frac{x_2 - x_1}{x_n - x_1}$. По таблицам для заданной надёжности γ и объёма выборки n находится критическое значение $r_0(\gamma, n)$.

γ	0.9	0.95	0.99
3	0.941	0.970	0.994
4	0.765	0.829	0.926
5	0.642	0.710	0.821
6	0.560	0.625	0.740
7	0.507	0.568	0.680
8	0.468	0.526	0.634
9	0.437	0.493	0.598
10	0.412	0.466	0.568

Если $r < r_0$, принимается H_0 , в случае $r > r_0$, принимается H_1 .

Пример 63.1. Имеется 7 измерений: 0.163, 0.177, 0.181, 0.183, 0.186, 0.187, 0.189. Требуется с надёжностью $\gamma = 0.95$ установить, является ли первое измерение грубой ошибкой.

Находим $r = \frac{0.177 - 0.163}{0.189 - 0.163} = 0.54$. По таблице $r_0(0.95, 7) = 0.568$. Т.к. $r < r_0$, значение x_1 оставляем. #

Задание. Следует ли в данном примере считать первое измерение грубой ошибкой при надёжности $\gamma = 0.9$? При надёжности $\gamma = 0.99$?

Критерий согласия Пирсона.¹ Данный критерий служит для проверки гипотезы о предполагаемом законе распределения генеральной совокупности. Нулевая гипотеза имеет вид $H_0 = \{\text{Генеральная совокупность имеет известное распределение (напр., нормальное)}\}$. Исходными данными является интервальный статистический ряд объёма n с m интервалами. Эти данные оформим в виде первых двух строк таблицы:

X	$(a_0 - a_1)$	$(a_1 - a_2)$	$\cdots$	$(a_{m-1} - a_m)$
n_i	n_1	n_2	$\cdots$	n_m
n_i^*	n_1^*	n_2^*	$\cdots$	n_m^*

Для проверки этой гипотезы вычисляются теоретические частоты $n_i^* = np_i$ попадания в данный интервал. Эти частоты дописываются в третью строку таблицы. Так, для нормального распределения, $n_i^* = n \left[\Phi\left(\frac{a_i - \bar{x}}{s}\right) - \Phi\left(\frac{a_{i-1} - \bar{x}}{s}\right) \right]$, где $\bar{x}$, s^2 – выборочные среднее и исправленная дисперсия, вычисленные по данным выборки.

Далее вычисляется критерий $\chi^2 = \sum_{i=1}^m \frac{(n_i - n_i^*)^2}{n_i^*}$.

Критические значения χ_0^2 находят по таблицам квантилей распределения “хи-квадрат” для $m - 1 - d$ степеней свободы и заданной надёжности (d – число оценённых по выборке параметров, для нормального распределения по выборке оценены $\bar{x}$ и s^2 , поэтому $d = 2$). Если $\chi^2 < \chi_0^2$, принимается H_0 , в случае $\chi^2 \geq \chi_0^2$, гипотеза H_0 отвергается.

Пример 63.2. *Игральную кость подбросили 60 раз. Результаты записаны в таблицу. Можно ли с уровнем значимости $\alpha = 5\%$ утверждать, что кость даёт равномерное распределение?*

X	1	2	3	4	5	6
n_i	9	5	8	10	15	13
n_i^*	10	10	10	10	10	10

Для равномерного распределения все теоретические частоты равны 10. Вычислим критерий

$$\chi^2 = \frac{1}{10} ((9 - 10)^2 + \dots + (13 - 10)^2) = 6.4.$$

¹Данный раздел является факультативным.

Критическое значение для уровня значимости $\gamma = 0.95$ и $6 - 1 - 0 = 5$ степеней свободы по таблице квантилей “хи-квадрат” $\chi_0^2 = 11.07$.

Т.к. $\chi^2 < \chi_0^2$, принимается гипотеза H_0 . Значения, выданные игральной костью, не противоречат тому, что кость является правильной. #

Корреляционный и регрессионный анализы. *Корреляцией* называется взаимосвязь между случайными величинами. *Корреляционный анализ* – обнаружение взаимосвязи между двумя случайными величинами и количественная оценка степени их совместного изменения.

Регрессией называют зависимость, устанавливающую соответствие между случайными величинами, т.е. математическое выражение, отражающее связь между зависимой и независимыми переменными. *Регрессионный анализ* – нахождение уравнения зависимости математического ожидания одной случайной величины от значений другой (других). Пусть X и Y – случайные величины, *уравнением регрессии Y на X* называют функцию

$$y(x) = \mathbf{M}[Y|X = x].$$

В случае линейной регрессии зависимость имеет вид $y = kx + b$. Эту зависимость можно искать методом наименьших квадратов. Как было показано в §42, угловой коэффициент

$$k = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\overline{x^2} - (\bar{x})^2} = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sigma_x^2} = r \frac{\sigma_y}{\sigma_x}.$$

Следовательно, уравнение линейной регрессии Y на X имеет вид

$$\frac{y - \bar{y}}{\sigma_y} = r \cdot \frac{x - \bar{x}}{\sigma_x}.$$

Задание. Дайте определение уравнения регрессии X на Y и запишите уравнение соответствующей линейной регрессии.

Коэффициент выборочной корреляции Пирсона. ¹ Рассмотрим задачу корреляционного анализа. Дана таблица, содержащая группирован-

¹ Данный раздел является факультативным.

ные частоты выборки объёма n двух величин X и Y :

$X \setminus Y$	$(b_0 - b_1)$	$(b_1 - b_2)$	$\dots$	$(b_{\ell-1} - b_\ell)$
$(a_0 - a_1)$	n_{11}	n_{12}	$\dots$	$n_{1\ell}$
$(a_1 - a_2)$	n_{21}	n_{22}	$\dots$	$n_{2\ell}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$(a_{m-1} - a_m)$	n_{m1}	n_{m2}	$\dots$	$n_{m\ell}$

Требуется проверить гипотезу $H_0 = \{\text{величины } X \text{ и } Y \text{ генеральной совокупности независимы}\}$. Опишем алгоритм проверки этой гипотезы на основе критерия выборочной корреляции Пирсона.

Пусть середины интервалов

$$x_i = \frac{a_{i-1} + a_i}{2}, \quad y_j = \frac{b_{j-1} + b_j}{2}.$$

Частоты величин X и Y найдём, сложив элементы строк и столбцов матрицы частот. Далее определим выборочные средние $\bar{x}$ и $\bar{y}$:

$$n_{xi} = \sum_{j=1}^{\ell} n_{ij}, \quad n_{yj} = \sum_{i=1}^m n_{ij}, \quad \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^m n_{xi} x_i, \quad \bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{\ell} n_{yj} y_j.$$

Коэффициент выборочной корреляции определим по формуле

$$r = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\sqrt{\overline{x^2} - (\bar{x})^2} \cdot \sqrt{\overline{y^2} - (\bar{y})^2}}, \quad \overline{xy} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{\ell} n_{ij} x_i y_j.$$

Далее вычислим значение критерия $t = \frac{r\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}}$.

По таблицам квантилей распределения Стьюдента находим критическое значение t_0 для $n - 2$ степеней свободы и заданной надёжности $\gamma = 1 - \alpha$.

Если $|t| > t_0$, нулевая гипотеза отвергается, величины X и Y зависимы. Если $|t| < t_0$, нулевая гипотеза принимается, корреляция отсутствует.

Пример 63.3. Имеется выборка объёма $n = 20$. При уровне значимости $\alpha = 0.05$ и найденном значении $r = 0.3$ коэффициента выборочной корреляции проверить гипотезу о независимости величин генеральной совокупности.

Вычислим критерий $t = \frac{0.3\sqrt{20-2}}{\sqrt{1-0.3^2}} = 1.33$.

При надёжности $\gamma = 0.95$ и $n - 2 = 18$ степеням свободы находим $t_0 = 2.10$. Т.к. $|t| < t_0$, принимаем нулевую гипотезу. #

Дисперсионный анализ.¹ *Дисперсионным анализом* называется изучение влияния одной или нескольких независимых переменных (факторов) на зависимую переменную.

В зависимости от числа факторов, дисперсионный анализ подразделяется на однофакторный и многофакторный. Дисперсионный анализ, в отличие от корреляционного, применяется при сравнении трёх или большего количества выборок $X_1, X_2, \dots, X_m$, полученных при разных значениях фактора. Гипотеза $H_0 = \{\text{Средние } \bar{x}_j \text{ генеральных совокупностей } X_j \text{ при всех значениях фактора одинаковы: } \bar{x}_1 = \bar{x}_2 = \dots = \bar{x}_m\}$. Гипотеза $H_1 = \{\text{Средние генеральных совокупностей зависят от значения фактора}\}$. В случае, когда выборки $X_1, X_2, \dots, X_m$, полученные при разных значениях фактора, распределены нормально и независимы друг от друга, для проверки гипотезы применяется *критерий Фишера*.

Общей суммой $S_{\text{общ}}$ назовём сумму квадратов отклонений

$$S_{\text{общ}} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (x_{ij}^2 - (\bar{x})^2), \quad \bar{x} = \frac{1}{nm} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x_{ij}.$$

Здесь n – объём каждой выборки, m – число выборок. *Межгрупповая сумма* – величина, вычисляемая по формуле

$$S_{\text{меж}} = n \cdot \sum_{j=1}^m ((\bar{x}_j)^2 - (\bar{x})^2), \quad \bar{x}_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_{ij}.$$

И, наконец, *внутригрупповая сумма* – величина, равная

$$S_{\text{вн}} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (x_{ij}^2 - (\bar{x}_j)^2).$$

Можно показать, что общая сумма равна сумме межгрупповой и внутригрупповой сумм. На этом основан алгоритм проверки H_0 по критерию Фишера. Опишем его.

¹ Данный раздел является факультативным.

- Находим выборочные средние $\bar{x}_j$ и общее среднее $\bar{x}$.
- Вычисляем внутригрупповую сумму $S_{\text{вн}}$.
- Находим межгрупповую сумму $S_{\text{меж}}$.
- Критерием является отношение межгрупповой дисперсии к внутригрупповой $F = \frac{\frac{1}{m-1}S_{\text{меж}}}{\frac{1}{m(n-1)}S_{\text{вн}}}$.
- Находим критическое F_0 по таблице квантилей распределения Фишера по уровню значимости α и степеням свободы $n_1 = m - 1$, $n_2 = m(n - 1)$.¹
- При $F \geq F_0$ гипотеза H_0 отвергается, при $F < F_0$ гипотеза H_0 принимается.

Пример 63.4. Даны $m = 4$ выборки по $n = 5$ измерений X , сделанные при различных уровнях фактора. При $\alpha = 0.05$ проверить гипотезу, что фактор не влияет на математическое ожидание X .

$i \backslash j$	1	2	3	4
1	3	4	7	9
2	5	6	5	5
3	4	2	5	8
4	2	5	3	4
5	6	5	9	8

Вычисления проведём согласно алгоритму.

- Находим средние внутри каждой выборки $\bar{x}_1 = 4$, $\bar{x}_2 = 4.4$, $\bar{x}_3 = 5.8$, $\bar{x}_4 = 6.8$, и общее среднее $\bar{x} = 5.25$.
- По формулам, приведённым выше, определяем внутригрупповую и межгрупповую суммы: $S_{\text{вн}} = 58.8$, $S_{\text{меж}} = 24.95$.
- Вычисляем критерий $F = \frac{\frac{1}{3}S_{\text{меж}}}{\frac{1}{16}S_{\text{вн}}} = 2.263$.
- По таблице квантилей распределения Фишера для $\alpha = 0.05$ и степеням свободы $n_1 = 3$ и $n_2 = 16$ находим критическое значение $F_0 = 3.239$.
- Так как $F < F_0$ делаем вывод, что фактор не оказывает влияние на величину X . #

¹Квантили распределения Фишера для заданной надёжности и известным степеням свободы есть в справочниках по математической статистике, а также в сети Интернет.

Приложение

1. Таблица значений функции Лапласа.

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0.00	0.0000	0.50	0.1915	1.00	0.3413	1.50	0.4332	2.00	0.4772
0.01	0.0040	0.51	0.1950	1.01	0.3438	1.51	0.4345	2.02	0.4783
0.02	0.0080	0.52	0.1985	1.02	0.3461	1.52	0.4357	2.04	0.4793
0.03	0.0120	0.53	0.2019	1.03	0.3485	1.53	0.4370	2.06	0.4803
0.04	0.0160	0.54	0.2054	1.04	0.3508	1.54	0.4382	2.08	0.4812
0.05	0.0199	0.55	0.2088	1.05	0.3531	1.55	0.4394	2.10	0.4821
0.06	0.0239	0.56	0.2123	1.06	0.3554	1.56	0.4406	2.12	0.4830
0.07	0.0279	0.57	0.2157	1.07	0.3577	1.57	0.4418	2.14	0.4838
0.08	0.0319	0.58	0.2190	1.08	0.3599	1.58	0.4429	2.16	0.4846
0.09	0.0359	0.59	0.2224	1.09	0.3621	1.59	0.4441	2.18	0.4854
0.10	0.0398	0.60	0.2257	1.10	0.3643	1.60	0.4452	2.20	0.4861
0.11	0.0438	0.61	0.2291	1.11	0.3665	1.61	0.4463	2.22	0.4868
0.12	0.0478	0.62	0.2324	1.12	0.3686	1.62	0.4474	2.24	0.4875
0.13	0.0517	0.63	0.2357	1.13	0.3708	1.63	0.4484	2.26	0.4881
0.14	0.0557	0.64	0.2389	1.14	0.3729	1.64	0.4495	2.28	0.4887
0.15	0.0596	0.65	0.2422	1.15	0.3749	1.65	0.4505	2.30	0.4893
0.16	0.0636	0.66	0.2454	1.16	0.3770	1.66	0.4515	2.32	0.4898
0.17	0.0675	0.67	0.2486	1.17	0.3790	1.67	0.4525	2.34	0.4904
0.18	0.0714	0.68	0.2517	1.18	0.3810	1.68	0.4535	2.36	0.4909
0.19	0.0753	0.69	0.2549	1.19	0.3830	1.69	0.4545	2.38	0.4913
0.20	0.0793	0.70	0.2580	1.20	0.3849	1.70	0.4554	2.40	0.4918
0.21	0.0832	0.71	0.2611	1.21	0.3869	1.71	0.4564	2.42	0.4922
0.22	0.0871	0.72	0.2642	1.22	0.3888	1.72	0.4573	2.44	0.4927
0.23	0.0910	0.73	0.2673	1.23	0.3907	1.73	0.4582	2.46	0.4931
0.24	0.0948	0.74	0.2704	1.24	0.3925	1.74	0.4591	2.48	0.4934
0.25	0.0987	0.75	0.2734	1.25	0.3944	1.75	0.4599	2.50	0.4938
0.26	0.1026	0.76	0.2764	1.26	0.3962	1.76	0.4608	2.52	0.4941
0.27	0.1064	0.77	0.2794	1.27	0.3980	1.77	0.4616	2.54	0.4945
0.28	0.1103	0.78	0.2823	1.28	0.3997	1.78	0.4625	2.56	0.4948
0.29	0.1141	0.79	0.2852	1.29	0.4015	1.79	0.4633	2.58	0.4951
0.30	0.1179	0.80	0.2881	1.30	0.4032	1.80	0.4641	2.60	0.4953
0.31	0.1217	0.81	0.2910	1.31	0.4049	1.81	0.4649	2.62	0.4956
0.32	0.1255	0.82	0.2939	1.32	0.4066	1.82	0.4656	2.64	0.4959
0.33	0.1293	0.83	0.2967	1.33	0.4082	1.83	0.4664	2.66	0.4961
0.34	0.1331	0.84	0.2995	1.34	0.4099	1.84	0.4671	2.68	0.4963
0.35	0.1368	0.85	0.3023	1.35	0.4115	1.85	0.4678	2.70	0.4965
0.36	0.1406	0.86	0.3051	1.36	0.4131	1.86	0.4686	2.72	0.4967
0.37	0.1443	0.87	0.3078	1.37	0.4147	1.87	0.4693	2.75	0.4970
0.38	0.1480	0.88	0.3106	1.38	0.4162	1.88	0.4699	2.80	0.4974
0.39	0.1517	0.89	0.3133	1.39	0.4177	1.89	0.4706	2.85	0.4978
0.40	0.1554	0.90	0.3159	1.40	0.4192	1.90	0.4713	2.90	0.4981
0.41	0.1591	0.91	0.3186	1.41	0.4207	1.91	0.4719	2.95	0.4984
0.42	0.1628	0.92	0.3212	1.42	0.4222	1.92	0.4726	3.00	0.4987
0.43	0.1664	0.93	0.3238	1.43	0.4236	1.93	0.4732	3.20	0.4993
0.44	0.1700	0.94	0.3264	1.44	0.4251	1.94	0.4738	3.40	0.49966
0.45	0.1736	0.95	0.3289	1.45	0.4265	1.95	0.4744	3.60	0.49984
0.46	0.1772	0.96	0.3315	1.46	0.4279	1.96	0.4750	3.80	0.49993
0.47	0.1808	0.97	0.3340	1.47	0.4292	1.97	0.4756	4.00	0.49997
0.48	0.1844	0.98	0.3365	1.48	0.4306	1.98	0.4761	4.50	0.499997
0.49	0.1879	0.99	0.3389	1.49	0.4319	1.99	0.4767	∞	0.500000

2. Таблица квантилей распределения “хи-квадрат”.

γ	0.005	0.01	0.025	0.05	0.1	0.9	0.95	0.975	0.99	0.995
1	0.0000	0.0002	0.0010	0.0039	0.0158	2.7055	3.8415	5.0239	6.6349	7.8794
2	0.0100	0.0201	0.0506	0.1026	0.2107	4.6052	5.9915	7.3778	9.2103	10.597
3	0.0717	0.1148	0.2158	0.3518	0.5844	6.2514	7.8147	9.3484	11.345	12.838
4	0.2070	0.2971	0.4844	0.7107	1.0636	7.7794	9.4877	11.143	13.277	14.860
5	0.4117	0.5543	0.8312	1.1455	1.6103	9.2364	11.070	12.833	15.086	16.750
6	0.6757	0.8721	1.2373	1.6354	2.2041	10.645	12.592	14.449	16.812	18.548
7	0.9893	1.2390	1.6899	2.1673	2.8331	12.017	14.067	16.013	18.475	20.278
8	1.3444	1.6465	2.1797	2.7326	3.4895	13.362	15.507	17.535	20.090	21.955
9	1.7349	2.0879	2.7004	3.3251	4.1682	14.684	16.919	19.023	21.666	23.589
10	2.1559	2.5582	3.2470	3.9403	4.8652	15.987	18.307	20.483	23.209	25.188
11	2.6032	3.0535	3.8157	4.5748	5.5778	17.275	19.675	21.920	24.725	26.757
12	3.0738	3.5706	4.4038	5.2260	6.3038	18.549	21.026	23.337	26.217	28.300
13	3.5650	4.1069	5.0088	5.8919	7.0415	19.812	22.362	24.736	27.688	29.819
14	4.0747	4.6604	5.6287	6.5706	7.7895	21.064	23.685	26.119	29.141	31.319
15	4.6009	5.2293	6.2621	7.2609	8.5468	22.307	24.996	27.488	30.578	32.801
16	5.1422	5.8122	6.9077	7.9616	9.3122	23.542	26.296	28.845	32.000	34.267
17	5.6972	6.4078	7.5642	8.6718	10.085	24.769	27.587	30.191	33.409	35.718
18	6.2648	7.0149	8.2307	9.3905	10.865	25.989	28.869	31.526	34.805	37.156
19	6.8440	7.6327	8.9065	10.117	11.651	27.204	30.144	32.852	36.191	38.582
20	7.4338	8.2604	9.5908	10.851	12.443	28.412	31.410	34.170	37.566	39.997
21	8.0337	8.8972	10.283	11.591	13.240	29.615	32.671	35.479	38.932	41.401
22	8.6427	9.5425	10.982	12.338	14.041	30.813	33.924	36.781	40.289	42.796
23	9.2604	10.196	11.689	13.091	14.848	32.007	35.172	38.076	41.638	44.181
24	9.8862	10.856	12.401	13.848	15.659	33.196	36.415	39.364	42.980	45.559
25	10.520	11.524	13.120	14.611	16.473	34.382	37.652	40.646	44.314	46.928
26	11.160	12.198	13.844	15.379	17.292	35.563	38.885	41.923	45.642	48.290
27	11.808	12.879	14.573	16.151	18.114	36.741	40.113	43.195	46.963	49.645
28	12.461	13.565	15.308	16.928	18.939	37.916	41.337	44.461	48.278	50.993
29	13.121	14.256	16.047	17.708	19.768	39.087	42.557	45.722	49.588	52.336
30	13.787	14.953	16.791	18.493	20.599	40.256	43.773	46.979	50.892	53.672
31	14.458	15.655	17.539	19.281	21.434	41.422	44.985	48.232	52.191	55.003
32	15.134	16.362	18.291	20.072	22.271	42.585	46.194	49.480	53.486	56.328
33	15.815	17.074	19.047	20.867	23.110	43.745	47.400	50.725	54.776	57.648
34	16.501	17.789	19.806	21.664	23.952	44.903	48.602	51.966	56.061	58.964
35	17.192	18.509	20.569	22.465	24.797	46.059	49.802	53.203	57.342	60.275
36	17.887	19.233	21.336	23.269	25.643	47.212	50.998	54.437	58.619	61.581
37	18.586	19.960	22.106	24.075	26.492	48.363	52.192	55.668	59.893	62.883
38	19.289	20.691	22.878	24.884	27.343	49.513	53.384	56.896	61.162	64.181
40	20.707	22.164	24.433	26.509	29.051	51.805	55.758	59.342	63.691	66.766
42	22.138	23.650	25.999	28.144	30.765	54.090	58.124	61.777	66.206	69.336
44	23.584	25.148	27.575	29.787	32.487	56.369	60.481	64.201	68.710	71.893
46	25.041	26.657	29.160	31.439	34.215	58.641	62.830	66.617	71.201	74.437
48	26.511	28.177	30.755	33.098	35.949	60.907	65.171	69.023	73.683	76.969
50	27.991	29.707	32.357	34.764	37.689	63.167	67.505	71.420	76.154	79.490

3. Таблица квантилей распределения Стьюдента.

$\gamma_{\text{одност}}$	0.9	0.95	0.975	0.99	0.995	0.999	0.9995
$\gamma_{\text{двуст}}$	0.8	0.9	0.95	0.98	0.99	0.998	0.999
1	3.0777	6.3138	12.706	31.821	63.657	318.31	636.62
2	1.8856	2.9200	4.3027	6.9646	9.9248	22.327	31.599
3	1.6377	2.3534	3.1824	4.5407	5.8409	10.215	12.924
4	1.5332	2.1318	2.7764	3.7469	4.6041	7.1732	8.6103
5	1.4759	2.0150	2.5706	3.3649	4.0321	5.8934	6.8688
6	1.4398	1.9432	2.4469	3.1427	3.7074	5.2076	5.9588
7	1.4149	1.8946	2.3646	2.9980	3.4995	4.7853	5.4079
8	1.3968	1.8595	2.3060	2.8965	3.3554	4.5008	5.0413
9	1.3830	1.8331	2.2622	2.8214	3.2498	4.2968	4.7809
10	1.3722	1.8125	2.2281	2.7638	3.1693	4.1437	4.5869
11	1.3634	1.7959	2.2010	2.7181	3.1058	4.0247	4.4370
12	1.3562	1.7823	2.1788	2.6810	3.0545	3.9296	4.3178
13	1.3502	1.7709	2.1604	2.6503	3.0123	3.8520	4.2208
14	1.3450	1.7613	2.1448	2.6245	2.9768	3.7874	4.1405
15	1.3406	1.7531	2.1314	2.6025	2.9467	3.7328	4.0728
16	1.3368	1.7459	2.1199	2.5835	2.9208	3.6862	4.0150
17	1.3334	1.7396	2.1098	2.5669	2.8982	3.6458	3.9651
18	1.3304	1.7341	2.1009	2.5524	2.8784	3.6105	3.9216
19	1.3277	1.7291	2.0930	2.5395	2.8609	3.5794	3.8834
20	1.3253	1.7247	2.0860	2.5280	2.8453	3.5518	3.8495
21	1.3232	1.7207	2.0796	2.5176	2.8314	3.5272	3.8193
22	1.3212	1.7171	2.0739	2.5083	2.8188	3.5050	3.7921
23	1.3195	1.7139	2.0687	2.4999	2.8073	3.4850	3.7676
24	1.3178	1.7109	2.0639	2.4922	2.7969	3.4668	3.7454
25	1.3163	1.7081	2.0595	2.4851	2.7874	3.4502	3.7251
26	1.3150	1.7056	2.0555	2.4786	2.7787	3.4350	3.7066
27	1.3137	1.7033	2.0518	2.4727	2.7707	3.4210	3.6896
28	1.3125	1.7011	2.0484	2.4671	2.7633	3.4082	3.6739
29	1.3114	1.6991	2.0452	2.4620	2.7564	3.3962	3.6594
30	1.3104	1.6973	2.0423	2.4573	2.7500	3.3852	3.6460
32	1.3086	1.6939	2.0369	2.4487	2.7385	3.3653	3.6218
34	1.3070	1.6909	2.0322	2.4411	2.7284	3.3479	3.6007
36	1.3055	1.6883	2.0281	2.4345	2.7195	3.3326	3.5821
38	1.3042	1.6860	2.0244	2.4286	2.7116	3.3190	3.5657
40	1.3031	1.6839	2.0211	2.4233	2.7045	3.3069	3.5510
45	1.3006	1.6794	2.0141	2.4121	2.6896	3.2815	3.5203
50	1.2987	1.6759	2.0086	2.4033	2.6778	3.2614	3.4960
100	1.2901	1.6602	1.9840	2.3642	2.6259	3.1737	3.3905
1000	1.2824	1.6464	1.9623	2.3301	2.5808	3.0984	3.3003
∞	1.2816	1.6449	1.9600	2.3263	2.5758	3.0902	3.2905

Дополнительная литература

1. Шипачев В.С. Высшая математика: учеб. для вузов – М.: Высшая школа, 1998 – 479 с.
2. Баврин И.И. Краткий курс высшей математики для химико-биологических и медицинских специальностей – М.: Физматлит, 2003 – 328 с.
3. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление – М.: Наука, 1969 – 421с.
4. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления, т.2: учеб. для втузов – М.: Наука. Физматлит, 1985 – 560 с.
5. Гаврилов В.Р., Иванова Е.Е., Морозова В.Д. Кратные и криволинейные интегралы. Элементы теории поля: учеб. для вузов (Сер. Математика в техн. ун-те, вып. VII) – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2003 – 496 с.
6. Агафонов С.А., Герман А.Д., Муратова Т.В. Дифференциальные уравнения: учеб. для вузов (Сер. Математика в техн. ун-те, вып. VIII) – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2004 – 352 с.
7. Печинкин А.В., Тескин О.И., Цветкова Г.М. и др. Теория вероятностей: учеб. для вузов (Сер. Математика в техн. ун-те, вып. XVI) – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2004 – 456 с.
8. Горяинов В.Б., Павлов И.В., Цветкова Г.М. и др. Математическая статистика: учеб. для вузов (Сер. Математика в техн. ун-те, вып. XVII) – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2001 – 424 с.