КАЗАНСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Д.Ф.Абзалилов

ЛЕКЦИИ

по математике

Часть 2

Казань – 2025

УДК 517
А14

Печатается по решению учебно-методической комиссии
Института математики и механики им. Н. И. Лобачевского.
Протокол № 4 от 20 февраля 2025 г.

Рецензент
д.ф.-м.н, проф.
Широкова Е.А.

Абзалилов Д.Ф. Лекции по математике. Часть 2. – Казань: Казан. ун-т, 2025. – 164 с.

Представляет собой конспект лекций по математике, читаемых автором в 2-м семестре для студентов Химического института им. А. М. Бутлерова.

Соответствует программе курса математики для студентов 1-го курса всех форм обучения по направлениям подготовки 04.03.01 “Химия” и специальности 04.05.01 “Фундаментальная и прикладная химия”. Может быть использовано и студентами других естественно-научных специальностей.

© Казанский университет, 2025
© Абзалилов Д.Ф., 2025

Оглавление

Содержание I части

Содержание III части

Глава 4.
Интегральное исчисление (фоп)

> Если дифференцирование – это ремесло, то интегрирование – искусство.
>
> Народная мудрость

Нахождение производных и дифференциалов функций является задачей дифференциального исчисления. Не менее важна обратная задача – восстановление функции по её производной или дифференциалу. Решение этой задачи составляет основу другого важного раздела математического анализа – интегрального исчисления.

§24. Неопределённый интеграл

Первообразная. Пусть функция $F(x)$ дифференцируема на интервале (a, b). Функция $F(x)$ называется *первообразной* функции $f(x)$ на интервале (a, b), если для всех $x \in (a, b)$ выполняется равенство $F'(x) = f(x)$.

***Пример* 24.1.** *Найти первообразную для функции* $f(x) = 3x^2$.

Требуется найти функцию, производная которой равна $3x^2$. Известно, что $(x^3)' = 3x^2$, поэтому $F(x) = x^3$ будет первообразной для $f(x)$. Заметим, что существуют и другие первообразные функции $3x^2$, например, $x^3 + 1$, $x^3 - 7$ и т.п. #

Задание. Докажите, что функции $2\sin^2 x$, $-\cos 2x$, $-2\cos^2 x$ являются первообразными для функции $2\sin 2x$.

Первообразная находится не единственным образом. Но всё же между различными первообразными одной и той же функции есть связь, которая сформулирована в следующей теореме.

***Теорема* 24.1.** *Любые две различные первообразные $F_1(x)$ и $F_2(x)$ одной функции $f(x)$ на некотором интервале (a, b) отличаются друг от друга на постоянное слагаемое.*

◀ Пусть $F_1(x)$ и $F_2(x)$ – первообразные $f(x)$ на (a, b). Поэтому $F_1'(x) = f(x)$ и $F_2'(x) = f(x)$. Рассмотрим функцию $F(x) = F_1(x) - F_2(x)$. Надо доказать, что эта функция является постоянной. Её производная $F'(x) = F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0$ для всех значений $x \in (a, b)$. Рассмотрим две произвольные точки $x_1, x_2 \in (a, b)$. По теореме Лагранжа $F(x_2) - F(x_1) = F'(c)(x_2 - x_1) = 0$, поэтому $F(x_1) = F(x_2)$. Значит, $F(x) = \mathrm{const}$. ▶

***Следствие* 24.1.1.** *Если у функции $f(x)$ известна какая-либо первообразная $F(x)$, то, прибавив к ней произвольную постоянную C, получим все возможные первообразные.*

Неопределённый интеграл. *Неопределённым интегралом* $F(x)+C$ называется множество всех первообразных функции $f(x)$.

Например, неопределённым интегралом функции $3x^2$ будет x^3+C. Подставив вместо C фиксированные значения, получим первообразные: x^3+2, $x^3+\sqrt{7}$, $x^3-\pi$ и т.п.

Пусть $F'(x) = f(x)$. Тогда $dF(x) = f(x)\,dx$. Напомним, что буква “d”, поставленная перед функцией $F(x)$, обозначает операцию дифференцирования. Введём обратную операцию – операцию нахождения неопределённого интеграла $(F(x)+C)$ по известному дифференциалу $f(x)\,dx$. Данная операция называется *интегрированием.* Для обозначения операции интегрирования используется символ “$\int$”.

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C.$$

Знаки интегрирования "$\int$" и дифференцирования "d", стоящие друг за другом, взаимоуничтожают друг друга, т.к. являются обратными. Так, рассмотрим интегрирование после дифференцирования:

$$\int d(F(x)+C) = \int f(x)\,dx = F(x)+C.$$

Наоборот, дифференцирование после интегрирования даёт:

$$d\left(\int f(x)\,dx\right) = d(F(x)+C) = (F(x)+C)'dx = f(x)\,dx.$$

Линейность неопределённого интеграла. Функция $f(x)$ называется линейной, если для неё выполняются следующие свойства: $f(Ax) = Af(x)$ и $f(x_1+x_2) = f(x_1)+f(x_2)$. Неопределённый интеграл обладает похожими свойствами. Рассмотрим их подробнее.

1. Постоянный множитель можно выносить из под знака интеграла:

   $$\int Af(x)\,dx = A\int f(x)\,dx.$$

   Формула следует из свойства дифференциала $d(AF(x)) = AdF(x)$, откуда

   $$\int A\,dF(x) = \int d(AF(x)) = AF(x)+C_1 = A(F(x)+C).$$

2. Интеграл от суммы (разности) функций равен сумме/разности интегралов

   $$\int (f(x)\pm g(x))\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx.$$

   Формула следует из свойства $d(F(x)+G(x)) = dF(x)+dG(x)$, откуда

   $$\int (dF(x)+dG(x)) = \int d(F(x)+G(x)) = F(x)+G(x)+C.$$

Интеграл от степенной функции. Начнём заполнять таблицу интегралов от элементарных функций. Для этого используем таблицу производных и формулу связи функций $f(x)$ и $F(x)$:

$$F'(x) = f(x) \qquad \Leftrightarrow \qquad \int f(x)\,dx = F(x)+C.$$

Так, для степенной функции

$$(x^{n+1})' = (n+1)x^n \quad \Rightarrow \quad \int (n+1)x^n\,dx = (n+1)\int x^n\,dx = x^{n+1} + C.$$

Разделив на $n+1$ (в предположении $n+1 \neq 0$), получим

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \qquad (n \neq -1).$$

В случае $n = -1$ для $x > 0$ справедлива формула

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dx}{x} = \ln x + C.$$

Для $x < 0$ рассмотрим функцию $\ln(-x)$:

$$(\ln(-x))' = \frac{1}{(-x)} \cdot (-1) = \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dx}{x} = \ln(-x) + C.$$

Объединив два полученные формулы интегрирования, запишем

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$$

Интеграл от показательной функции. Для экспоненциальной функции в таблице производных есть формула:

$$(e^x)' = e^x \quad \Rightarrow \quad \int e^x\,dx = e^x + C.$$

Для других оснований

$$(a^x)' = a^x \cdot \ln a \quad \Rightarrow \quad \int (a^x \cdot \ln a)\,dx = \ln a \cdot \int a^x\,dx = a^x + C.$$

Разделив на $\ln a$, получим окончательную формулу

$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C.$$

Интегралы от тригонометрических функций. Используем четыре формулы из таблицы производных:

$$(\sin x)' = \cos x \quad \Rightarrow \quad \int \cos x\,dx = \sin x + C,$$

$$(\cos x)' = -\sin x \quad \Rightarrow \quad \int \sin x\,dx = -\cos x + C,$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C,$$

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$$

Интегралы от гиперболических функций. Получим формулы интегралов, используя соответствующие производные гиперболических функций:

$$(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x \quad \Rightarrow \quad \int \operatorname{ch} x \, dx = \operatorname{sh} x + C,$$

$$(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x \quad \Rightarrow \quad \int \operatorname{sh} x \, dx = \operatorname{ch} x + C,$$

$$(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C,$$

$$(\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C.$$

Интегралы, приводящие к обратным тригонометрическим функциям. Для функций $\operatorname{arctg} x$ и $\arcsin x$ имеем:

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{x^2+1} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dx}{x^2+1} = \operatorname{arctg} x + C,$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C.$$

Можно получить более общие формулы, если рассмотреть аргумент $\frac{x}{a}$:

$$\left(\operatorname{arctg} \frac{x}{a}\right)' = \frac{a}{x^2+a^2} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C,$$

$$\left(\arcsin \frac{x}{a}\right)' = \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C.$$

Для функций $\operatorname{arcctg} x$ и $\arccos x$ запишем:

$$\left(\operatorname{arcctg} \frac{x}{a}\right)' = -\frac{a}{x^2+a^2} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dx}{x^2+a^2} = -\frac{1}{a} \operatorname{arcctg} \frac{x}{a} + C,$$

$$\left(\arccos \frac{x}{a}\right)' = -\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\arccos \frac{x}{a} + C.$$

Две последние формулы можно воспринимать просто как вариацию полученных ранее формул.

Интегралы, приводящие к обратным гиперболическим функциям. При $|x| < a$ справедлива формула

$$\left(\operatorname{arth}\frac{x}{a}\right)' = \frac{a}{a^2 - x^2} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arth}\frac{x}{a} + C = \frac{1}{2a}\ln\frac{a+x}{a-x} + C.$$

Здесь мы использовали представление обратной гиперболической функции arth через логарифм (см. §18). При $|x| > a$ имеем

$$\left(\operatorname{arcth}\frac{x}{a}\right)' = \frac{-a}{x^2 - a^2} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = -\frac{1}{a}\operatorname{arcth}\frac{x}{a} + C = \frac{1}{2a}\ln\frac{x-a}{x+a} + C.$$

Объединив две полученные формулы, запишем

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C.$$

Теперь рассмотрим функции $\operatorname{arsh} x$ и $\operatorname{arch} x$. Из таблицы производных следует

$$\left(\operatorname{arsh}\frac{x}{a}\right)' = \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} \quad \Rightarrow$$
$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \operatorname{arsh}\frac{x}{a} + C = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) + C.$$

Для $x > a$ справедлива формула

$$\left(\operatorname{arch}\frac{x}{a}\right)' = \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}} \quad \Rightarrow$$
$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \operatorname{arch}\frac{x}{a} + C = \ln(x + \sqrt{x^2 - a^2}) + C.$$

Для $x < -a$ имеем

$$\left(\operatorname{arch}\left(-\frac{x}{a}\right)\right)' = \frac{-1}{\sqrt{(-x)^2 - a^2}} \quad \Rightarrow$$
$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = -\operatorname{arch}\left(-\frac{x}{a}\right) + C = -\ln(-x + \sqrt{x^2 - a^2}) + C =$$
$$= \ln(-x - \sqrt{x^2 - a^2}) + C.$$

Задание. Объясните вывод последней формулы.

Объединив формулы трёх последних интегралов, запишем

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C.$$

Таблица интегралов. Соберём все полученные ранее формулы в общую таблицу:

1. $\displaystyle\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	9. $\displaystyle\int \operatorname{ch} x\,dx = \operatorname{sh} x + C$
2. $\displaystyle\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + C$	10. $\displaystyle\int \operatorname{sh} x\,dx = \operatorname{ch} x + C$
3. $\displaystyle\int e^x\,dx = e^x + C$	11. $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C$
4. $\displaystyle\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	12. $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C$
5. $\displaystyle\int \cos x\,dx = \sin x + C$	13. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C$
6. $\displaystyle\int \sin x\,dx = -\cos x + C$	14. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{x-a}{x+a}\right\rvert + C$
7. $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$	15. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$
8. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$	16. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}} = \ln\lvert x+\sqrt{x^2\pm a^2}\rvert + C$

§25. Методы интегрирования

Подынтегральную функцию будем называть табличной, если она представлена в приведённой выше таблице. В остальных случаях следует пользоваться методами интегрирования, задачей которых является приведение подынтегральной функции к табличному виду. Рассмотрим данные методы подробнее.

Метод разложения. Данный метод фактически является следствием описанного ранее свойства линейности неопределённого интеграла:

$$\int [Af(x) \pm Bg(x)]dx = A\int f(x)\,dx \pm B\int g(x)\,dx.$$

Т.о., если подынтегральная функция является суммой нескольких более простых функций, то задачу нахождения неопределённого интеграла от исходной функции можно свести к задаче нахождения интегралов от каждого слагаемого. Если же подынтегральная функция не является суммой, то можно попробовать свести её к сумме в помощью алгебраических преобразований. Рассмотрим несколько примеров применения этого метода.

***Пример* 25.1.** $\int(1-\sqrt{x})^2\,dx = \int(1-2\sqrt{x}+x)dx = \int dx - 2\int x^{\frac{1}{2}}\,dx + {}$ $+\int x\,dx = x - 2\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \frac{x^2}{2} + C = x - \frac{4\sqrt{x^3}}{3} + \frac{x^2}{2} + C.$ #

***Пример* 25.2.** $\int\frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x} = \int\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}\,dx = \int\frac{dx}{\cos^2 x} + {}$ $+\int\frac{dx}{\sin^2 x} = \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x + C.$ #

***Пример* 25.3.** $\int\frac{x^4dx}{x^2+a^2} = \int\frac{x^4-a^4+a^4}{x^2+a^2}\,dx =$
$\int\frac{(x^2+a^2)(x^2-a^2)+a^4}{x^2+a^2}\,dx = \int\left(x^2-a^2+\frac{a^4}{x^2+a^2}\right)dx =$
$= \frac{x^3}{3} - a^2x + a^3\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C.$ #

***Пример* 25.4.** $\int\frac{dx}{x^4-a^4} = \frac{1}{2a^2}\int\frac{a^2+a^2}{(x^2+a^2)(x^2-a^2)}\,dx =$
$= \frac{1}{2a^2}\int\frac{(x^2+a^2)-(x^2-a^2)}{(x^2+a^2)(x^2-a^2)}\,dx = \frac{1}{2a^2}\int\frac{dx}{x^2-a^2} - \frac{1}{2a^2}\int\frac{dx}{x^2+a^2} =$
$= \frac{1}{4a^3}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| - \frac{1}{2a^3}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C.$ #

Метод замены переменной. Идея данного метода заключается в переходе к новой вспомогательной переменной t, связанной с исходной переменной x некоторой зависимостью $x = \varphi(t)$:

$$\int f(x)\,dx = \left\{\begin{array}{c} x=\varphi(t), \\ dx=\varphi'(t)\,dt \end{array}\right\} = \int f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)\,dt. \tag{25.1}$$

Данный метод является основным методом интегрирования, при правильном выборе зависимости $x = \varphi(t)$ он позволяет значительно упросить вид подынтегральной функции и вычислить требуемый интеграл. После нахождения неопределённого интеграла следует вернуться к исходной переменной x. Рассмотрим несколько примеров.

***Пример* 25.5.** $\displaystyle\int(2x+5)^9\,dx = \left\{\begin{array}{c} t=2x+5, \\ x=\frac{t}{2}-\frac{5}{2}, \quad dx=\frac{1}{2}dt \end{array}\right\} = \int t^9\cdot\frac{1}{2}\,dt =$
$\displaystyle= \frac{1}{2}\cdot\frac{t^{10}}{10}+C = \frac{(2x+5)^{10}}{20}+C.$ #

***Пример* 25.6.** $\displaystyle\int\frac{x^3}{x-1}\,dx = \left\{\begin{array}{c} t=x-1, \\ x=t+1, \quad dx=dt \end{array}\right\} = \int\frac{(t+1)^3}{t}\,dt =$
$\displaystyle= \int\frac{t^3+3t^2+3t+1}{t}\,dt = \int t^2dt+3\int tdt+3\int dt+\int\frac{dt}{t} = \frac{t^3}{3}+\frac{3t^2}{2}+$
$\displaystyle+3t+\ln|t|+C = \frac{(x-1)^3}{3}+\frac{3(x-1)^2}{2}+3x+\ln|x-1|+C.$ #

***Пример* 25.7.** $\displaystyle\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx = \left\{\begin{array}{c} x=a\sin t, \quad dx=a\cos t\,dt, \\ t=\arcsin\frac{x}{a}, \quad \sqrt{a^2-x^2}=a\cos t \end{array}\right\} =$
$\displaystyle= \int a\cos t\cdot a\cos t\,dt = a^2\int\cos^2 t\,dt = a^2\int\frac{\cos 2t+1}{2}\,dt = \left\{\begin{array}{c} s=2t \\ ds=2\,dt \end{array}\right\} =$
$\displaystyle= \frac{a^2}{4}\int\Big(\cos s+1\Big)\,ds = \frac{a^2}{4}\Big(\sin s+s\Big)+C = \frac{a^2}{4}\Big(2\sin t\cos t+2t\Big)+C =$
$\displaystyle= \frac{a^2}{2}\left(\frac{x}{a}\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a}+\arcsin\frac{x}{a}\right)+C = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+C.$ #

В данном примере мы использовали так называемую тригонометрическую замену. С её помощью нам удалось убрать под знаком интеграла “неудобную” иррациональность $\sqrt{a^2-x^2}$. В случае иррациональности $\sqrt{a^2+x^2}$ можно использовать аналогичную гиперболическую замену:

***Пример* 25.8.** $\displaystyle\int\sqrt{a^2+x^2}\,dx = \left\{\begin{array}{c} x=a\,\mathrm{sh}\,t, \quad dx=a\,\mathrm{ch}\,t\,dt \\ t=\mathrm{arsh}\,\frac{x}{a}, \quad \sqrt{a^2+x^2}=a\,\mathrm{ch}\,t \end{array}\right\} =$
$\displaystyle= \int a\,\mathrm{ch}\,t\cdot a\,\mathrm{ch}\,t\,dt = a^2\int\mathrm{ch}^2\,t\,dt = a^2\int\frac{\mathrm{ch}\,2t+1}{2}\,dt = \left\{\begin{array}{c} s=2t \\ ds=2\,dt \end{array}\right\} =$
$\displaystyle= \frac{a^2}{4}\int\Big(\mathrm{ch}\,s+1\Big)\,ds = \frac{a^2}{4}\Big(\mathrm{sh}\,s+s\Big)+C = \frac{a^2}{4}\Big(2\,\mathrm{sh}\,t\,\mathrm{ch}\,t+2t\Big)+C =$
$\displaystyle= \frac{a^2}{2}\left(\frac{x}{a}\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{a}+\mathrm{arsh}\,\frac{x}{a}\right)+C = \frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2}+\frac{a^2}{2}\ln\left(x\sqrt{a^2+x^2}\right)+C.$ #

Занесение под дифференциал. Если перед “dx” под знаком интеграла стоит производная некоторой функции, её можно занести под дифференциал, использовав соотношение $u'(x)dx = du(x)$:

$$\int f[u(x)]u'(x)\,dx = \int f(u)\,du.$$

Данный приём эквивалентен методу замены переменной, но он позволяет значительно ускорить процесс нахождения некоторых неопределённых интегралов. Наиболее часто встречающиеся приёмы занесения под дифференциал следуют из свойств дифференциала:

1° $u'dx = du$, $\quad 3^\circ$ $dx = d(x+b)$,

2° $adx = d(ax)$, $\quad 4^\circ$ $xdx = \frac{1}{2}d(x^2)$.

***Пример* 25.9.** $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2)}{x^2+a^2} = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+a^2)}{x^2+a^2} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} =$
$\displaystyle= \frac{1}{2}\ln|t| + C = \frac{1}{2}\ln(x^2+a^2) + C.$ #

В дальнейшем, при решении подобных примеров, переход к t будем опускать.

***Пример* 25.10.** $\displaystyle\int \frac{\ln^2 x}{x}\,dx = \int \ln^2 x\, d(\ln x) = \frac{\ln^3 x}{3} + C.$ #

***Пример* 25.11.** $\displaystyle\int \frac{\sqrt{5\operatorname{ctg} x + 3}}{\sin^2 x}\,dx = -\int \sqrt{5\operatorname{ctg} x + 3}\, d(\operatorname{ctg} x) =$
$\displaystyle= -\frac{1}{5}\int \sqrt{5\operatorname{ctg} x + 3}\, d(5\operatorname{ctg} x) = -\frac{1}{5}\int (5\operatorname{ctg} x + 3)^{\frac{1}{2}}\, d(5\operatorname{ctg} x + 3) =$
$\displaystyle= -\frac{1}{5}\frac{(5\operatorname{ctg} x + 3)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = -\frac{2}{15}\sqrt{(5\operatorname{ctg} x + 3)^3} + C.$ #

Когда знаменатель подынтегральной функции представляет собой квадратный трёхчлен, помогает приём, который называется дополнением до полного квадрата. Проиллюстрируем это на примере.

***Пример* 25.12.** $\displaystyle\int \frac{x+6}{x^2+6x+13}\,dx = \int \frac{x+6}{x^2+6x+9+4}\,dx =$
$\displaystyle= \int \frac{(x+3)+3}{(x+3)^2+2^2}\,dx = \int \frac{(x+3)dx}{(x+3)^2+2^2} + 3\int \frac{dx}{(x+3)^2+2^2} =$
$\displaystyle= \frac{1}{2}\int \frac{d((x+3)^2+2^2)}{(x+3)^2+2^2} + 3\int \frac{d(x+3)}{(x+3)^2+2^2} =$
$\displaystyle= \frac{1}{2}\ln(x^2+6x+13) + \frac{3}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+3}{2} + C.$ #

Интегрирование по частям. Одно из свойств дифференциала имеет вид $d(uv) = du \cdot v + u \cdot dv$. Отсюда следует $u\,dv = d(uv) - v\,du$. Проинтегрировав обе части, получим формулу

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du,$$

являющуюся основой метода интегрирования по частям. Заметим, что при выводе формулы было учтено, что $\int d(uv) = uv$.

***Пример* 25.13.** $\displaystyle\int \underbrace{\ln x}_{u}\, \underbrace{dx}_{dv} = \left\{ \begin{array}{ll} u = \ln x, & du = (\ln x)' dx = \dfrac{dx}{x} \\ dv = dx, & v = \displaystyle\int dv = \int dx = x \end{array} \right\} =$

$$= \ln x \cdot x - \int x \cdot \frac{dx}{x} = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C. \qquad \#$$

Первый шаг этого метода интегрирования заключается в том, что часть подынтегральной функции определяется как функция u, а оставшаяся часть, включая дифференциал dx, – как dv. Далее находится дифференциал $du = u'dx$ и восстанавливается функция $v = \int dv$.

Метод интегрирования по частям позволяет вычислить приведённых ниже виды интегралов:

1. Интегралы $\int x^n \sin ax\,dx$, $\int x^n \cos ax\,dx$, $\int x^n e^{ax}\,dx$. В этом случае выбирается $u = x^n$ и n раз применяется метод интегрирования по частям.
2. Интегралы $\int \ln x \cdot f(x)\,dx$, $\int \operatorname{arctg} x \cdot f(x)\,dx$, $\int \arcsin x \cdot f(x)\,dx$, где $f(x)$ – некоторая функция простого вида. В этом случае выбирается $u = \ln x / \operatorname{arctg} x / \arcsin x$.

***Пример* 25.14.** $\displaystyle\int x \cos x dx = \left\{ \begin{array}{c} u = x, \quad du = (x)' dx = dx \\ dv = \cos x\,dx, \quad v = \displaystyle\int \cos x dx = \sin x \end{array} \right\} =$

$$= x \sin x - \int \sin x\,dx = x \sin x + \cos x + C. \qquad \#$$

***Пример* 25.15.** $\displaystyle\int x^3 e^{2x}\,dx = \left\{ \begin{array}{ll} u = x^3, & du = (x^3)' dx = 3x^2 dx, \\ dv = e^{2x} dx, & v = \dfrac{1}{2} \displaystyle\int e^{2x} d(2x) = \dfrac{1}{2} e^{2x} \end{array} \right\} =$

$$= \frac{x^3}{2}e^{2x} - \frac{3}{2}\int x^2 e^{2x}\,dx = \left\{\begin{array}{ll} u = x^2, & du = 2xdx, \\ dv = e^{2x}dx, & v = \dfrac{1}{2}e^{2x} \end{array}\right\} =$$

$$= \frac{x^3}{2}e^{2x} - \frac{3}{2}\left(\frac{x^2}{2}e^{2x} - \int xe^{2x}\,dx\right) = \left\{\begin{array}{ll} u = x, & du = dx, \\ dv = e^{2x}dx, & v = \dfrac{1}{2}e^{2x} \end{array}\right\} =$$

$$= \frac{x^3}{2}e^{2x} - \frac{3x^2}{4}e^{2x} + \frac{3}{2}\left(\frac{x}{2}e^{2x} - \frac{1}{2}\int e^{2x}\,dx\right) =$$

$$= \frac{x^3}{2}e^{2x} - \frac{3x^2}{4}e^{2x} + \frac{3x}{4}e^{2x} - \frac{3}{8}e^{2x} + C = \frac{4x^3 - 6x^2 + 6x - 3}{8}e^{2x} + C. \qquad \#$$

***Пример* 25.16.** $\displaystyle\int x^2 \arcsin x dx = \left\{\begin{array}{ll} u = \arcsin x, & du = \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ dv = x^2dx, & v = \dfrac{x^3}{3} \end{array}\right\} =$

$$= \frac{x^3}{3}\arcsin x - \frac{1}{3}\int \frac{x^3dx}{\sqrt{1-x^2}} = \left\{\begin{array}{l} t = 1 - x^2, \\ dt = -2xdx \end{array}\right\} =$$

$$= \frac{x^3}{3}\arcsin x + \frac{1}{6}\int \frac{1-t}{\sqrt{t}}dt = \frac{x^3}{3}\arcsin x + \frac{1}{6}\int\left(\frac{1}{\sqrt{t}} - \sqrt{t}\right)dt =$$

$$= \frac{x^3}{3}\arcsin x + \frac{1}{3}\sqrt{1-x^2} - \frac{1}{9}\sqrt{(1-x^2)^3} + C. \qquad \#$$

Следующий интеграл не относится к описанным ранее видам, но никто не запрещает нам и в этом случае применить метод интегрирования по частям.

***Пример* 25.17.** *Найти интеграл* $I = \displaystyle\int \sqrt{x^2 - a^2}\,dx.$[1]

Пусть $u = \sqrt{x^2 - a^2}$, $du = \dfrac{xdx}{\sqrt{x^2-a^2}}$, $dv = dx$, $v = x$. Тогда

$$I = x\sqrt{x^2-a^2} - \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-a^2}}\,dx = x\sqrt{x^2-a^2} - \int \frac{(x^2-a^2)+a^2}{\sqrt{x^2-a^2}}\,dx =$$

$$= x\sqrt{x^2-a^2} - \int\sqrt{x^2-a^2}\,dx - a^2\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} =$$

$$= x\sqrt{x^2-a^2} - I - a^2\ln|x + \sqrt{x^2-a^2}| + C.$$

После переноса I из левой части вправо и деления на 2, получим

$$I = \int\sqrt{x^2-a^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^2}{2}\ln|x + \sqrt{x^2-a^2}| + C. \qquad \#$$

[1] Этот интеграл также можно найти методом замены переменной, например, приняв $x = a\,\mathrm{ch}\,t$.

§26. Интегрирование дробно-рациональных функций

Определение дробно-рациональной функции. *Многочленом* $P_m(x)$ называется функция вида

$$P_m(x) = a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \ldots + a_1 x + a_0.$$

Здесь m – степень многочлена, максимальная степень переменной x. Заметим, что $a_m \neq 0$, иначе степень многочлена будет менее m.

Дробно-рациональной функцией $R(x)$ называется функция, представляющая собой дробь, в которой числитель и знаменатель можно представить многочленами:

$$R(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}, \qquad \begin{aligned} P_m(x) &= a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \ldots + a_1 x + a_0, \\ Q_n(x) &= b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0. \end{aligned}$$

В дальнейшем дробно-рациональные функции будем называть дробями.

Выделение целой части. Если $m \geqslant n$ дробь называется неправильной, если $m < n$ – правильной. Любую неправильную дробь можно записать в виде суммы многочлена степени $m - n$ и правильной дроби:

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = U_{m-n}(x) + \frac{T_s(x)}{Q_n(x)}, \qquad s < n.$$

Такое преобразование далее будем называть выделением целой части. Для этого используются следующие приёмы:

- прибавление и вычитание к числителю некоторого выражения, благодаря чему часть числителя полностью разделится на знаменатель,
- выполнение "деления уголком".

***Пример* 26.1.** *Выделить целую часть у функции* $\dfrac{x^3}{x^2+2x+3}$.

$$\frac{x^3}{x^2+2x+3} = \frac{x(x^2+2x+3) - 2x^2 - 3x}{x^2+2x+3} = x + \frac{-2x^2-3x}{x^2+2x+3} =$$

$$= x + \frac{-2(x^2+2x+3) + 4x + 6 - 3x}{x^2+2x+3} = x - 2 + \frac{x+6}{x^2+2x+3}. \qquad \#$$

***Пример* 26.2.** *Вычислить* $\int \frac{x^3+2x-1}{x-2}dx$ *с использованием приёма выделения целой части.*

Выполним “деление уголком”:

$$
\begin{array}{rrrr|l}
x^3 & & +2x & -\ 1 & x-2 \\ \cline{5-5}
x^3 & -2x^2 & & & x^2+2x+6 \\ \cline{1-2}
 & 2x^2 & +2x & & \\
 & 2x^2 & -4x & & \\ \cline{2-3}
 & & 6x & -\ 1 & \\
 & & 6x & -12 & \\ \cline{3-4}
 & & & 11 &
\end{array}
$$

Запишем результат: $\frac{x^3+2x-1}{x-2} = x^2+2x+6+\frac{11}{x-2}$. Теперь перейдём к интегрированию:

$$\int \frac{x^3+2x-1}{x-2}dx = \int \left(x^2+2x+6+\frac{11}{x-2}\right)dx =$$
$$= \frac{x^3}{3} + x^2 + 6x + 11\ln|x-2| + C. \qquad \#$$

***Пример* 26.3.** *Вычислить* $\int \frac{x^5}{x^2+a^2}dx$.

Вначале выделим целую часть у подынтегральной функции:

$$\frac{x^5}{x^2+a^2} = \frac{x^5-a^4x+a^4x}{x^2+a^2} = \frac{x(x^2+a^2)(x^2-a^2)+a^4x}{x^2+a^2}.$$

Далее интегрируем:

$$\int \frac{x^5dx}{x^2+a^2} = \int \left(x^3 - a^2x + \frac{a^4x}{x^2+a^2}\right)dx = \frac{x^4}{4} - \frac{a^2x^2}{2} + a^4\int \frac{xdx}{x^2+a^2} =$$
$$= \frac{x^4}{4} - \frac{a^2x^2}{2} + \frac{a^4}{2}\ln(x^2+a^2) + C. \qquad \#$$

Т.о., если под интегралом стоит неправильная дробь, необходимо выделить целую части и записать дробь в виде суммы многочлена и правильной дроби. Интегрирование многочлена трудностей не представляет. Рассмотрим теперь подробнее приёмы интегрирования правильных дробей.

Разложение правильной дроби. Имеет место теорема:

***Теорема* 26.1** (Теорема о разложении многочлена на множители)**.** *Любой многочлен с вещественными коэффициентами* $Q(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0$ *можно разложить на множители, каждый из которых представляет собой многочлен первой или второй степени:*

$$Q(x) = b_n(x - a_1)^{k_1}(x - a_2)^{k_2} \ldots (x^2 + p_1 x + q_1)^{\ell_1} \ldots$$

Заметим, что в этом разложении все многочлены второй степени не имеют корней (их дискриминанты отрицательны), иначе их можно было бы разложить на множители первой степени. Доказательство данной теоремы мы приведём в §35.

***Теорема* 26.2.** *Если многочлен* $Q(x)$ *имеет корень* a *кратности* k, *т.е.* $Q(x) = (x - a)^k \cdot V(x)$, $(V(a) \neq 0)$, *то для любой правильной дроби вида* $\dfrac{T(x)}{Q(x)}$ *существует число* A *такое, что*

$$\frac{T(x)}{Q(x)} = \frac{A}{(x - a)^k} + \frac{W(x)}{(x - a)^{k-1}V(x)}.$$

◀ Рассмотрим многочлен $T(x) - AV(x)$ и подберём такое число A, чтобы $x = a$ было корнем этого многочлена. Это будет при $A = \dfrac{T(a)}{V(a)}$. Далее, если у многочлена есть корень $x = a$, то он без остатка делится на $(x - a)$ и справедливо разложение $T(x) - AV(x) = (x - a)W(x)$. Подставив $T(x) = AV(x) + (x - a)W(x)$ в числитель дроби $\dfrac{T(x)}{Q(x)}$, получим требуемое равенство. ▶

***Следствие* 26.2.1.** *Если многочлен* $Q(x)$ *имеет корень* a *кратности* k, *т.е.* $Q(x) = (x - a)^k \cdot V(x)$, $(V(a) \neq 0)$, *то для любой правильной дроби вида* $\dfrac{T(x)}{Q(x)}$ *существуют числа* A_1, A_2, …, A_k *такие, что*

$$\frac{T(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{(x - a)^k} + \frac{A_2}{(x - a)^{k-1}} + \ldots + \frac{A_k}{x - a} + \frac{W(x)}{V(x)}.$$

Задание. Докажите это следствие, пользуясь доказанной выше теоремой.

***Теорема* 26.3.** *Если $Q(x) = (x^2+px+q)^\ell \cdot V(x)$, причём $V(x)$ не делится на x^2+px+q, то для любой правильной дроби вида $\dfrac{T(x)}{Q(x)}$ существуют числа M и N такие, что*

$$\frac{T(x)}{Q(x)} = \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^\ell} + \frac{W(x)}{(x^2+px+q)^{\ell-1}V(x)}.$$

Эту теорему оставим без доказательства, т.к. для этого требуется освоение темы “комплексные числа”.

***Следствие* 26.3.1.** *Если $Q(x) = (x^2+px+q)^\ell \cdot V(x)$, то для любой правильной дроби вида $\dfrac{T(x)}{Q(x)}$ существуют числа M_1, N_1, …, M_ℓ, N_ℓ такие, что*

$$\frac{T(x)}{Q(x)} = \frac{M_1x+N_1}{(x^2+px+q)^\ell} + \ldots + \frac{M_\ell x+N_\ell}{x^2+px+q} + \frac{W(x)}{V(x)}.$$

Подведём итог. Пусть многочлен $Q(x)$ имеет разложение

$$Q(x) = b_n(x-a)^k \ldots (x^2+px+q)^\ell \ldots$$

Тогда, с учётом следствий теорем 26.2, 26.3, правильная дробь вида $\dfrac{T(x)}{Q(x)}$ раскладывается в сумму

$$\frac{T(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \ldots + \frac{A_k}{(x-a)^k} +$$

$$+ \ldots + \frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q} + \frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^2} + \ldots + \frac{M_\ell x+N_\ell}{(x^2+px+q)^\ell} + \ldots$$

Данная формула называется разложением правильной дроби на простые. Неизвестные A_1, …, A_k, M_1, N_1, …, M_ℓ, N_ℓ называются неопределёнными коэффициентами. Их число совпадает со степенью n многочлена, стоящего в знаменателе. Для нахождения этих коэффициентов простые дроби приводят к общему знаменателю и сравнивают числитель полученной дроби с числителем $T(x)$ исходной дроби. Задача определения коэффициентов сводится к решению системы линейных уравнений порядка n. Согласно приведённым выше теоремам, решение этой системы всегда существует и единственно.

Интегрирование простых дробей. *Простыми* дробями называются дроби вида

$$\frac{A}{(x-a)^n}, \qquad \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}, \qquad n=1,2,3,\ldots.$$

Как было показано ранее, любая правильная дробь может быть записана в виде суммы простых дробей. Т.о., задача интегрирования правильной дроби сведена к задаче интегрирования простых дробей. Рассмотрим интегралы от них.

Простой дробью *первого типа* назовём дробь $\dfrac{1}{(x-a)^n}$ (постоянная A в числителе дроби при интегрировании выносится). Так, при $n=1$, интеграл от этой дроби

$$\int \frac{dx}{x-a} = \int \frac{d(x-a)}{x-a} = \ln|x-a| + C.$$

При $n>1$ нахождение интеграла тоже не вызывает трудностей:

$$\int \frac{dx}{(x-a)^n} = \int (x-a)^{-n} d(x-a) = -\frac{1}{(n-1)(x-a)^{n-1}} + C.$$

Простая дробь вида $\dfrac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}$ с помощью приёма дополнения знаменателя до полного квадрата (см. пример 25.12) приводится к дроби вида $\dfrac{Mx+N}{(x^2+a^2)^n}$. Разобьём последнюю дробь на две части и назовём дроби $\dfrac{x}{(x^2+a^2)^n}$ и $\dfrac{1}{(x^2+a^2)^n}$ простыми дробями *второго и третьего типа* соответственно. Интегрируем дробь второго типа при $n=1$ и при $n>1$:

$$\int \frac{xdx}{x^2+a^2} = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+a^2)}{x^2+a^2} = \frac{1}{2}\ln(x^2+a^2) + C,$$

$$\int \frac{xdx}{(x^2+a^2)^n} = \frac{1}{2}\int (x^2+a^2)^{-n} d(x^2+a^2) = -\frac{1}{2(n-1)(x^2+a^2)^{n-1}} + C.$$

Дробь третьего типа при $n=1$ является табличной:

$$I_1 = \int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C. \tag{26.1}$$

Наибольшую сложность представляет интегрирование дроби третьего типа при $n>1$:

$$I_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n} = \frac{1}{a^2}\int \frac{x^2+a^2-x^2}{(x^2+a^2)^n}dx = \frac{1}{a^2}\left(I_{n-1} - \int \frac{x^2dx}{(x^2+a^2)^n}\right).$$

Для вычисления последнего интеграла используем приём интегрирования по частям с $u = x$ и $dv = \dfrac{xdx}{(x^2+a^2)^n}$. Согласно интегралу от дроби второго типа, $v = -\dfrac{1}{2(n-1)(x^2+a^2)^{n-1}}$. Поэтому

$$\int \frac{x^2dx}{(x^2+a^2)^n} = -\frac{x}{2(n-1)(x^2+a^2)^{n-1}} + \int \frac{dx}{2(n-1)(x^2+a^2)^{n-1}}.$$

Подставив полученный интеграл в формулу для I_n, получим

$$I_n = \frac{1}{a^2}\left(I_{n-1} + \frac{x}{2(n-1)(x^2+a^2)^{n-1}} - \frac{1}{2(n-1)}I_{n-1}\right) \quad \Rightarrow$$

$$I_n = \frac{x}{2a^2(n-1)(x^2+a^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2a^2(n-1)}I_{n-1}. \tag{26.2}$$

По последней формуле вычисление интеграла I_n сводится к вычислению аналогичного интеграла I_{n-1}. Формула такого типа называется рекуррентной. Для $n = 1$ данный интеграл уже был вычислен (см. формулу (26.1)), поэтому рекуррентный процесс всегда заканчивается. Приведём результат вычисления этого интеграла для $n = 2$ и $n = 3$:

$$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^2} = \frac{x}{2a^2(x^2+a^2)} + \frac{1}{2a^3}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C.$$

$$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^3} = \frac{3x^3+5a^2x}{8a^4(x^2+a^2)^2} + \frac{3}{8a^5}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C.$$

Задание. Вычислите эти интегралы, используя формулу (26.2).

План интегрирования дробно-рациональной функции. В заключение подведём итог и запишем план, которого нужно придерживаться при интегрировании дробно-рациональной функции.

1. Выделение целой части (только для неправильной дроби).
2. Разложение знаменателя правильной дроби на множители, каждый из которых является многочленом первой или второй степени.
3. Представление правильной дроби в виде суммы простых дробей с неопределёнными коэффициентами в числителях.
4. Нахождение неопределённых коэффициентов.

5. Интегрирование простых дробей, а также интегрирование целой части (в случае её наличия).

***Пример* 26.4.** *Вычислить* $\displaystyle\int \frac{2x-1}{x^2-5x+6}\,dx$.

Разложим знаменатель дроби на множители и представим правильную дробь в виде суммы простых:

$$\frac{2x-1}{x^2-5x+6} = \frac{2x-1}{(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3}.$$

Приведём правую часть к общему знаменателю и запишем равенство числителей полученной и исходной дробей:

$$A(x-3)+B(x-2) = 2x-1 \quad \Rightarrow \quad (A+B)x + (-3A-2B) = 2x-1.$$

Сравнив коэффициенты при одинаковых степенях x, получим систему:

$$\begin{cases} A+B=2, \\ -3A-2B=-1, \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} A=-3, \\ B=5. \end{cases}$$

Значит

$$\int \frac{2x-1}{x^2-5x+6}\,dx = \int\left(\frac{-3}{x-2}+\frac{5}{x-3}\right)dx = -3\int\frac{dx}{x-2} + 5\int\frac{dx}{x-3} =$$

$$= -3\ln|x-2| + 5\ln|x-3| + C = \ln\left|\frac{(x-3)^5}{(x-2)^3}\right| + C. \qquad \#$$

***Пример* 26.5.** *Вычислить* $\displaystyle\int \frac{3x^2+2x+1}{(x+1)^2(x^2+1)}\,dx$.

Под интегралом стоит правильная дробь, разложим её на простые:

$$\frac{3x^2+2x+1}{(x+1)^2(x^2+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1}.$$

Правую часть приведём к общему знаменателю и сравним числители:

$$A(x+1)(x^2+1) + B(x^2+1) + (Cx+D)(x+1)^2 = 3x^2+2x+1.$$

$$(A+C)x^3 + (A+B+2C+D)x^2 + (A+C+2D)x + (A+B+D) = 3x^2+2x+1.$$

$$\begin{cases} A + C = 0, \\ A + B + 2C + D = 3, \\ A + C + 2D = 2, \\ A + B + D = 1, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} A = -1, \\ B = 1, \\ C = 1, \\ D = 1. \end{cases}$$

$$\int \frac{3x^2 + 2x + 1}{(x+1)^2(x^2+1)}\, dx = \int \left(\frac{-1}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{x+1}{x^2+1} \right) dx =$$

$$= -\int \frac{dx}{x+1} + \int \frac{dx}{(x+1)^2} + \int \frac{xdx}{x^2+1} + \int \frac{dx}{x^2+1} =$$

$$= -\ln|x+1| - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \operatorname{arctg} x + C. \qquad \#$$

***Пример* 26.6.** *Вычислить* $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3 - a^3}$.

Разложим на простые дроби:

$$\frac{1}{x^3 - a^3} = \frac{1}{(x-a)(x^2+ax+a^2)} = \frac{A}{x-a} + \frac{Bx+C}{x^2+ax+a^2}.$$

Найдём неопределённые коэффициенты:

$$A(x^2 + ax + a^2) + (Bx + C)(x - a) = 1.$$

$$\begin{cases} A + B = 0, \\ Aa - Ba + C = 0, \\ Aa^2 - Ca = 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad A = \frac{1}{3a^2}, \quad B = -\frac{1}{3a^2}, \quad C = -\frac{2}{3a}.$$

Интегрируем, дополнив знаменатель второй дроби до полного квадрата:

$$\int \frac{dx}{x^3 - a^3} = \frac{1}{3a^2}\int \frac{dx}{x-a} - \frac{1}{3a^2}\int \frac{x+2a}{x^2+ax+a^2}dx =$$

$$= \frac{1}{3a^2}\ln|x-a| - \frac{1}{3a^2}\int \frac{\left(x + \frac{a}{2}\right) + \frac{3a}{2}}{\left(x+\frac{a}{2}\right)^2 + \frac{3a^2}{4}}dx = \frac{1}{3a^2}\ln|x-a| -$$

$$-\frac{1}{6a^2}\ln(x^2 + ax + a^2) - \frac{1}{\sqrt{3}a^2}\operatorname{arctg}\frac{2x+a}{\sqrt{3}a} + C. \qquad \#$$

Приведённый план интегрирования дробно-рациональной функции не является обязательным. Возможно, есть более простые способы нахождения интеграла. И только, если не удалось найти такие способы, следует начать интегрировать по данному плану.

***Пример* 26.7.** *Вычислить* $\displaystyle\int \frac{(x^3+x)dx}{x^4+2x^2-3}$.

Знаменатель дроби можно разложить на множители $x^4+2x^2-3 = (x-1)(x+1)(x^2+3)$, но данный интеграл можно найти значительно проще. Надо лишь заметить, что производная знаменателя отличается от числителя на постоянный множитель: $(x^4+2x^2-3)' = 4(x^3+x)$. Поэтому

$$\int \frac{(x^3+x)dx}{x^4+2x^2-3} = \frac{1}{4}\int \frac{d(x^4+2x^2-3)}{x^4+2x^2-3} = \frac{1}{4}\ln|x^4+2x^2-3| + C. \qquad \#$$

§27. Интегрирование тригонометрических функций

Интегралы $\int \sin ax\,dx$, $\int \cos ax\,dx$**.** Вычисление таких интегралов сложностей не представляет, они сводятся к табличным с помощью приёма занесения постоянной a под дифференциал:

$$\int \sin ax\,dx = \frac{1}{a}\int \sin ax\,d(ax) = -\frac{1}{a}\cos ax + C,$$

$$\int \cos ax\,dx = \frac{1}{a}\int \cos ax\,d(ax) = \frac{1}{a}\sin ax + C.$$

Интегралы $\int \sin ax \sin bx\,dx$, $\int \sin ax \cos bx\,dx$, $\int \cos ax \sin bx\,dx$**.** Для вычисления этих интегралов используются тригонометрические формулы преобразования произведения в сумму:

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right],$$
$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)\right],$$
$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)\right].$$

***Пример* 27.1.** *Вычислить* $\int \sin 3x \cos 5x\, dx$.

$$\int \sin 3x \cos 5x\, dx = \frac{1}{2}\int [\sin(-2x) + \sin(8x)]\, dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\cos 2x - \frac{1}{8}\cos 8x + C\right) = \frac{1}{4}\cos 2x - \frac{1}{16}\cos 8x + C. \qquad \#$$

Интегралы $\int \sin^m x \cos^n x\, dx$ **(**m **и** n **– целые числа).** Метод нахождения интегралов зависит от чётности этих чисел. Возможные варианты:

- m – нечётное. Используется замена $t = \cos x$,
- n – нечётное. Используется замена $t = \sin x$,
- n и m – чётные положительные. Используются формулы понижения степени
$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}, \quad \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}, \quad \sin^2 x \cos^2 x = \frac{1-\cos 4x}{8},$$
- n и m – чётные, $m < 0$, $n > 0$. Замена $t = \operatorname{ctg} x$,
- n и m – чётные, $n < 0$, $m > 0$. Замена $t = \operatorname{tg} x$,
- n и m – чётные, отрицательные. Замена числителя “1” на “$\sin^2 x + \cos^2 x$” (основное тригонометрическое тождество).

Последний вариант был рассмотрен в примере 25.2. Приведём примеры вычисления интегралов для других вариантов.

***Пример* 27.2.** *Вычислить* $\int \sin^3 x\, \cos^2 x\, dx$.

Т.к. $\sin x$ стоит в нечётной степени, делаем замену $t = \cos x$. Также заметим, что $\sin^3 x\, dx = \sin^2 x \sin x\, dx = (1-\cos^2 x)(-d\cos x) = -(1-t^2)dt$.

$$\int \sin^3 x\, \cos^2 x\, dx = -\int (1-t^2)t^2 dt = \int (t^4 - t^2)\, dt =$$
$$= \frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3} + C = \frac{1}{5}\cos^5 x - \frac{1}{3}\cos^3 x + C. \qquad \#$$

***Пример* 27.3.** *Вычислить* $\int \sin^2 x\, \cos^2 x\, dx$.

Используем формулы понижения степени:

$$\int \sin^2 x\, \cos^2 x\, dx = \frac{1}{8}\int (1-\cos 4x)dx = \frac{1}{8}\left(\int dx - \int \cos 4x\, dx\right) =$$
$$= \frac{1}{8}\left(x - \frac{1}{4}\sin 4x + C\right) = \frac{1}{8}x - \frac{1}{32}\sin 4x + C. \qquad \#$$

***Пример* 27.4.** *Вычислить* $\displaystyle\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x}\,dx$.

Т.к. степени чётные, но $\cos x$ в отрицательной степени, используем замену $t = \operatorname{tg} x$. Также заметим, что $dt = \dfrac{dx}{\cos^2 x}$ и $\dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x = 1 + t^2$:

$$\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x}\,dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \frac{dx}{\cos^2 x} = \int t^2(1+t^2)\,dt =$$
$$= \int (t^2 + t^4)\,dt = \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} + C = \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x + \frac{1}{5}\operatorname{tg}^5 x + C. \qquad \#$$

Рекуррентные формулы для $\int \sin^m x\,dx$, $\int \cos^n x\,dx$. В случае, когда числа m и n являются большими чётными числами, кроме формул понижения степени можно использовать рекуррентные формулы:

$$I_n = \int \sin^n x\,dx = -\frac{1}{n}\sin^{n-1} x\cos x + \frac{n-1}{n} I_{n-2},$$

$$J_n = \int \cos^n x\,dx = \frac{1}{n}\cos^{n-1} x\sin x + \frac{n-1}{n} J_{n-2}.$$

С помощью этих формул интегралы сводятся к аналогичным, но степень уменьшается на два. Интегралы от нулевых степеней известны: $I_0 = J_0 = x$. Выведем первую формулу методом интегрирования по частям:

$$I_n = \int \sin^n x dx = \left\{ \begin{array}{ll} u = \sin^{n-1} x, & du = (n-1)\sin^{n-2} x\cos x\,dx \\ dv = \sin x\,dx, & v = -\cos x \end{array} \right\} =$$

$$= -\sin^{n-1} x\cos x + (n-1)\int \sin^{n-2} x(1 - \sin^2 x)dx =$$

$$= -\sin^{n-1} x\cos x + (n-1)(I_{n-2} - I_n).$$

Перенесём I_n из правой части влево:

$$nI_n = -\sin^{n-1} x\cos x + (n-1)I_{n-2}.$$

Поделив на n, получим итоговую формулу.

Задание. Аналогичным образом докажите справедливость второй рекуррентной формулы.

***Пример* 27.5.** *Вычислить* $\int \cos^6 x\,dx$.

Применим несколько раз вторую формулу:

$$J_6 = \frac{1}{6}\cos^5 x\sin x + \frac{5}{6}J_4 = \frac{1}{6}\cos^5 x\sin x + \frac{5}{6}\left(\frac{1}{4}\cos^3 x\sin x + \frac{3}{4}J_2\right) =$$
$$= \frac{1}{6}\cos^5 x\sin x + \frac{5}{24}\cos^3 x\sin x + \frac{5}{8}\left(\frac{1}{2}\cos x\sin x + \frac{1}{2}J_0\right) =$$
$$= \frac{1}{6}\cos^5 x\sin x + \frac{5}{24}\cos^3 x\sin x + \frac{5}{16}\cos x\sin x + \frac{5}{16}x + C. \qquad \#$$

Универсальная тригонометрическая подстановка. Для вычисления интегралов $\int R(\cos x, \sin x)\,dx$ можно использовать замену $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$. Данная замена называется *универсальной тригонометрической подстановкой* и она сводит интегрирование тригонометрических функций к интегрированию дробно-рациональных. Заметим, что $R(\cos x, \sin x)$ – это обозначение дробно-рациональной функции от аргументов $\cos x$ и $\sin x$, она представляет собой дробь $\dfrac{P(\sin x, \cos x)}{Q(\sin x, \cos x)}$, где многочлены P и Q – суммы натуральных степеней функций $\sin x$ и $\cos x$.

Запишем тригонометрические формулы тангенса половинного угла:

$$\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}, \quad \cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}.$$

С учётом связи $x = 2\operatorname{arctg} t$, получим

$$t = \operatorname{tg}\frac{x}{2} \quad \Rightarrow \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}. \qquad (27.1)$$

Итак, универсальная подстановка сводит интегрирование тригонометрической функции к интегрированию дробно-рациональной:

$$\int R(\cos x, \sin x)\,dx = \int R\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2}.$$

Отметим частные случаи, для которых есть другие замены, упрощающие вид получаемой дробно-рациональной функции:

- Если $R(-\cos x, \sin x) = -R(\cos x, \sin x)$, замена $t = \sin x$.
- Если $R(\cos x, -\sin x) = -R(\cos x, \sin x)$, замена $t = \cos x$.
- Если $R(-\cos x, -\sin x) = R(\cos x, \sin x)$, замена $t = \operatorname{tg} x$ (или $\operatorname{ctg} x$).

Рассмотрим несколько примеров.

***Пример* 27.6.** *Вычислить* $\displaystyle\int \frac{dx}{3\sin x + 4\cos x + 5}$.

Применим формулы (27.1):

$$\int \frac{dx}{3\sin x + 4\cos x + 5} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{3\frac{2t}{1+t^2} + 4\frac{1-t^2}{1+t^2} + 5} =$$

$$= \int \frac{2dt}{6t + 4(1-t^2) + 5(1+t^2)} = 2\int \frac{dt}{t^2 + 6t + 9} = 2\int \frac{d(t+3)}{(t+3)^2} =$$

$$= 2\frac{-1}{(t+3)} + C = -\frac{2}{\operatorname{tg}\frac{x}{2} + 3} + C. \qquad \#$$

***Пример* 27.7.** *Вычислить* $\displaystyle\int \frac{\cos^5 x + \cos^3 x}{\sin^4 x + \sin^2 x} dx.$

Заметим, что $R(-\cos x, \sin x) = -R(\cos x, \sin x)$. Поэтому вместо использования универсальной тригонометрической подстановки, в этом примере лучше использовать замену $t = \sin x$:

$$\int \frac{\cos^5 x + \cos^3 x}{\sin^4 x + \sin^2 x} dx = \left\{ \begin{array}{l} t = \sin x \\ dt = \cos x dx \end{array} \right\} = \int \frac{(1-t^2)^2 + (1-t^2)}{t^4 + t^2} dt =$$

$$= \int \frac{t^4 - 3t^2 + 2}{t^2(1+t^2)} dt = \int \left(1 + \frac{2}{t^2} - \frac{6}{1+t^2}\right) dt =$$

$$= t - \frac{2}{t} - 6\operatorname{arctg} t + C = \sin x - \frac{2}{\sin x} - 6\operatorname{arctg}(\sin x) + C. \qquad \#$$

Здесь для интегрирования дробно-рациональной функции использовался приём выделения целой части и разложения на простые дроби с поиском неопределённых коэффициентов (часть вычислений, касающаяся разложения дробно-рациональной функции на простые дроби, опущена).

***Пример* 27.8.** *Вычислить* $\displaystyle\int \frac{\cos^4 x + \cos^2 x}{\sin^4 x + \sin^2 x} dx.$

Заметим, что $R(-\cos x, -\sin x) = R(\cos x, \sin x)$. Поэтому вместо использования подстановки $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$, в этом примере лучше использовать замену $t = \operatorname{tg} x$ или $t = \operatorname{ctg} x$. Вторая замена будет предпочтительней, т.к. из знаменателя исходной подынтегральной функции легко выделить множитель $\sin^2 x$, который, после занесения под дифференциал, превратится в $\operatorname{ctg} x$: $\frac{dx}{\sin^2 x} = -d(\operatorname{ctg} x)$.

$$\int \frac{\cos^4 x + \cos^2 x}{\sin^4 x + \sin^2 x} dx = \left\{ \begin{array}{ll} t = \operatorname{ctg} x & \sin^2 x = \frac{1}{1+t^2} \\ dt = -\frac{dx}{\sin^2 x} & \cos^2 x = \frac{t^2}{1+t^2} \end{array} \right\} =$$

$$= -\int \frac{\frac{t^4}{(1+t^2)^2} + \frac{t^2}{1+t^2}}{\frac{1}{1+t^2} + 1} dt = -\int \frac{(2t^4 + t^2)dt}{(t^2+2)(t^2+1)} = -\int \frac{2t^2(t^2+1) - t^2}{(t^2+2)(t^2+1)} dt =$$

$$= -\int \left(\frac{2t^2}{t^2+2} - \frac{2(t^2+1) - (t^2+2)}{(t^2+2)(t^2+1)} \right) dt = -\int \left(2 - \frac{4}{t^2+2} \right) dt +$$

$$+ \int \left(\frac{2}{t^2+2} - \frac{1}{t^2+1} \right) dt = \int \left(-2 + \frac{6}{t^2+2} - \frac{1}{1+t^2} \right) dt =$$

$$= -2t + 3\sqrt{2} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{2}} - \operatorname{arctg} t + C = -2 \operatorname{ctg} x + 3\sqrt{2} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{ctg} x}{\sqrt{2}} + x + C.$$

В конце использована формула $\operatorname{arctg} t = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arcctg} t = \frac{\pi}{2} - x$. #

Заметим, что универсальная тригонометрическая подстановка является не обязательной для интегралов такого типа. Иногда интегралы вычисляются проще с помощью других замен.

***Пример* 27.9.** *Вычислить* $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{tg} x + 1}$.

Данный интеграл можно вычислить заменой $t = \operatorname{tg} x$ (третий частный случай). Но есть и другой способ:

$$\int \frac{dx}{\operatorname{tg} x + 1} = \int \frac{\cos x dx}{\sin x + \cos x} = \frac{1}{2} \int \frac{\cos x + \sin x + \cos x - \sin x}{\sin x + \cos x} dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int dx + \frac{1}{2} \int \frac{d(\sin x + \cos x)}{\sin x + \cos x} = \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \ln |\sin x + \cos x| + C. \qquad \#$$

§28. Интегрирование иррациональных функций

Интегралы $\int R(x, \sqrt[r_1]{x}, \ldots \sqrt[r_n]{x})\, dx$**.** Если функция, стоящая под интегралом, представляет собой дробно-рациональную функцию не только от x, но и от радикалов $\sqrt[r_1]{x}$, ..., $\sqrt[r_n]{x}$, то данный интеграл можно свести к интегралу от дробно-рациональных функции заменой $x = t^k$, где k – наименьшее общее кратное (НОК) чисел $r_1, \ldots, r_n$. Так, если под интегралом присутствуют радикалы $\sqrt{x}$ и $\sqrt[3]{x}$, то используется замена $x = t^6$. Если присутствуют радикалы $\sqrt[6]{x}$ и $\sqrt[9]{x}$, то используется замена $x = t^{18}$.

***Пример* 28.1.** *Вычислить* $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}(\sqrt[5]{x} + 1)^2}$.

Так как НОК чисел 2 и 5 равно 10, то используем замену $x = t^{10}$, откуда $dx = 10t^9 dt$ и

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}(\sqrt[5]{x}+1)^2} = \int \frac{10t^9 dt}{t^5(t^2+1)^2} = 10\int \frac{t^4 dt}{(t^2+1)^2} =$$

$$= \left\{ \begin{array}{ll} u = t^3 & du = 3t^2 dt \\ dv = \frac{tdt}{(t^2+1)^2} & v = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{t^2+1} \end{array} \right\} = -\frac{5t^3}{t^2+1} + 15\int \frac{t^2+1-1}{t^2+1}dt =$$

$$= -\frac{5t^3}{t^2+1} + 15t - 15\operatorname{arctg} t + C = -5t + \frac{5t}{t^2+1} + 15t - 15\operatorname{arctg} t + C =$$

$$= \frac{5\sqrt[10]{x}}{\sqrt[5]{x}+1} + 10\sqrt[10]{x} - 15\operatorname{arctg}\sqrt[10]{x} + C. \qquad \#$$

Интегралы $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$**.** Если под интегралом присутствует квадратный корень от трёхчлена ax^2+bx+c, то можно использовать приём, называемый выделением полного квадрата, что позволит свести данный корень к одному из следующих видов: $\sqrt{x^2+a^2}$, $\sqrt{x^2-a^2}$, $\sqrt{a^2-x^2}$.

Примеры таких преобразований:

$$\sqrt{x^2+6x+13} = \sqrt{(x^2+6x+9)-9+13} = \sqrt{(x+3)^2+2^2}.$$

$$\sqrt{16+6x-x^2} = \sqrt{16-(x^2-6x+9)+9} = \sqrt{5^2-(x-3)^2}.$$

$$\sqrt{x^2+8x} = \sqrt{(x^2+8x+16)-16} = \sqrt{(x+4)^2-4^2}.$$

***Пример* 28.2.** *Вычислить* $\int \frac{5x+3}{\sqrt{10+4x-x^2}}dx.$

Т.к. $10+4x-x^2 = 14-(x-2)^2$, то используем замену $t = x-2$, откуда $x = t+2$ и $dx = dt$:

$$\int \frac{5x+3}{\sqrt{10+4x-x^2}}dx = \int \frac{5(t+2)+3}{\sqrt{14-t^2}}dt = -\frac{5}{2}\int \frac{d(14-t^2)}{\sqrt{14-t^2}} +$$

$$+13\int \frac{dt}{\sqrt{14-t^2}} = -\frac{5}{2}\cdot 2\sqrt{14-t^2} + 13\arcsin\frac{t}{\sqrt{14}} + C =$$

$$= 13\arcsin\frac{x-2}{\sqrt{14}} - 5\sqrt{10+4x-x^2} + C. \qquad \#$$

Интегралы $\int R(x, \sqrt{\pm x^2 \pm a^2})\,dx$. Для интегралов такого типа можно использовать тригонометрические и гиперболические замены. Так, с помощью таких замен ранее были решены примеры 25.7 и 25.8.

Примеры тригонометрических замен:

- $\displaystyle\int R(x, \sqrt{a^2-x^2})dx.$
  Замена $x = a\sin t$, тогда $dx = a\cos t\,dt$, $\sqrt{a^2-x^2} = a\cos t$.
- $\displaystyle\int R(x, \sqrt{a^2+x^2})dx.$
  Замена $x = a\operatorname{tg} t$, тогда $dx = \dfrac{a\,dt}{\cos^2 t}$, $\sqrt{a^2+x^2} = \dfrac{a}{\cos t}$.
- $\displaystyle\int R(x, \sqrt{x^2-a^2})dx.$
  Замена $x = \dfrac{a}{\cos t}$, тогда $dx = \dfrac{a\sin t\,dt}{\cos^2 t}$, $\sqrt{x^2-a^2} = a\operatorname{tg} t$.

Примеры гиперболических замен:

- $\displaystyle\int R(x, \sqrt{a^2-x^2})dx.$
  Замена $x = a\operatorname{th} t$, тогда $dx = \dfrac{a\,dt}{\operatorname{ch}^2 t}$, $\sqrt{a^2-x^2} = \dfrac{a}{\operatorname{ch} t}$.
- $\displaystyle\int R(x, \sqrt{a^2+x^2})dx.$
  Замена $x = a\operatorname{sh} t$, тогда $dx = a\operatorname{ch} t\,dt$, $\sqrt{a^2+x^2} = a\operatorname{ch} t$.
- $\displaystyle\int R(x, \sqrt{x^2-a^2})dx.$
  Замена $x = a\operatorname{ch} t$, тогда $dx = a\operatorname{sh} t\,dt$, $\sqrt{x^2-a^2} = a\operatorname{sh} t$.

Заметим, что гиперболические замены не равнозначны тригонометрическим, в одних ситуациях к более простым интегралам приводят тригонометрические замены, а в других – гиперболические. Приведём несколько примеров вычисления интегралов с помощью таких замен.

***Пример* 28.3.** *Вычислить* $\displaystyle\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^2}dx.$

В данном примере используем тригонометрическую замену:

$$\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^2}dx = \left\{ \begin{array}{ll} x = a\sin t, & dx = a\cos t dt, \\ t = \arcsin\frac{x}{a}, & \sqrt{a^2-x^2} = a\cos t \end{array} \right\} =$$

$$= \int \frac{a\cos t}{a^2\sin^2 t} a\cos t dt = \int \frac{1-\sin^2 t}{\sin^2 t}dt = \int \left(\frac{1}{\sin^2 t} - 1\right) dt =$$

$$= -\operatorname{ctg} t - t + C = -\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x} - \arcsin\frac{x}{a} + C. \qquad \#$$

***Пример* 28.4.** *Вычислить* $\displaystyle\int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^2+a^2}}$.

В первом способе используем гиперболическую замену:

$$\int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \left\{ \begin{array}{c} x = a \operatorname{sh} t \\ dx = a \operatorname{ch} t \end{array} \right\} = a^2 \int \operatorname{sh}^2 t\, dt = a^2 \int \frac{\operatorname{ch} 2t - 1}{2} dt =$$

$$= \frac{a^2}{4} \operatorname{sh} 2t - \frac{a^2}{2} t + C = \frac{a^2}{2} \operatorname{sh} t \operatorname{ch} t - \frac{a^2}{2} \operatorname{arsh} \frac{x}{a} + C =$$

$$= \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2} - \frac{a^2}{2} \ln(x + \sqrt{x^2+a^2}) + C.$$

Во втором способе используем тригонометрическую замену:

$$\int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \left\{ \begin{array}{c} x = a \operatorname{tg} t \\ dx = \frac{adt}{\cos^2 t} \end{array} \right\} = a^2 \int \frac{\sin^2 t}{\cos^3 t} dt.$$

Полученный интеграл является более сложным, чем при решении первым способом. Для вычисления этого интеграла от тригонометрической функции требуется новая замена. Т.к. под интегралом $\cos t$ стоит в нечётной степени, то подойдёт замена $z = \sin t$. #

Задание. Доведите вычисление данного интеграла до конца.

Отметим отдельно интегралы вида $\displaystyle\int \frac{dx}{x^n \cdot \sqrt{ax^2+bx+c}}$. Их вычисление можно начать с замены $t = \frac{1}{x}$.

***Пример* 28.5.** *Вычислить* $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{5x^2+2x+1}}$.

Делаем замену $t = \frac{1}{x}$, тогда $x = \frac{1}{t}$ и $dx = -\frac{dt}{t^2}$:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{5x^2+2x+1}} = -\int \frac{tdt}{t^2 \cdot \sqrt{\frac{5}{t^2} + \frac{2}{t} + 1}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+2t+5}} =$$

$$= -\int \frac{d(t+1)}{\sqrt{(t+1)^2+4}} = -\ln\left(t + 1 + \sqrt{t^2+2t+5}\right) + C =$$

$$= -\ln\left(\frac{1}{x} + 1 + \sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x} + 5}\right) + C = \ln\frac{x}{x+1+\sqrt{5x^2+2x+1}} + C. \#$$

Интегрирование дифференциального бинома. Дифференциальным биномом называют дифференциал вида $x^m(a+bx^n)^p\,dx$. Для интегрирования этого выражения используют следующие приёмы:

- p – целое. Замена $x = t^k$, где k – НОК знаменателей m, n.
- $\frac{m+1}{n}$ – целое. Замена $a + bx^n = t^s$, где s – знаменатель p.
- $\frac{m+1}{n} + p$ – целое. Замена $ax^{-n} + b = t^s$, где s – знаменатель p.
- Во всех остальных случаях интеграл "не берётся".

Первый случай был разобран в примере 28.1.

***Пример* 28.6.** *Вычислить* $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{x-x^3}}{x^6}dx.$

Т.к. $\dfrac{\sqrt[3]{x-x^3}}{x^6} = x^{-\frac{17}{3}}(1-x^2)^{\frac{1}{3}}$, то значения постоянных: $m = -\frac{17}{3}$, $n = 2$, $p = \frac{1}{3}$. Число p и дробь $\frac{m+1}{n} = -\frac{7}{3}$ не являются целыми, поэтому это не первый и не второй случаи дифференциального бинома. Но сумма $\frac{m+1}{n} + p$ является целым числом, поэтому это третий случай. Используем замену $x^{-2}-1 = t^3$. Продифференцировав данное равенство, получим связь дифференциалов $-2x^{-3}dx = 3t^2dt$.

$$\int \frac{\sqrt[3]{x-x^3}}{x^6}dx = \int x^{-\frac{17}{3}}(1-x^2)^{\frac{1}{3}}dx = \int x^{-\frac{17}{3}}x^{\frac{2}{3}}(x^{-2}-1)^{\frac{1}{3}}dx =$$

$$= \int x^{-5}\cdot t \cdot \frac{3t^2dt}{-2x^{-3}} = -\frac{3}{2}\int t^3(t^3+1)dt = -\frac{3}{2}\left(\frac{t^7}{7}+\frac{t^4}{4}\right)+C =$$

$$= -\frac{3}{2}t^4\left(\frac{t^3}{7}+\frac{1}{4}\right)+C = -\frac{3(4+3x^2)\sqrt[3]{x(1-x^2)^4}}{56x^5}+C. \qquad \#$$

Интегралы $\int R(e^x)\,dx$. [1] Для вычисления таких интегралов используется замена $t = e^x$ и интегрирование сводится к интегрированию дробно-рациональных функций.

***Пример* 28.7.** *Вычислить* $\displaystyle\int \frac{dx}{e^x+1}.$

Используем замену $t = e^x$, при этом $x = \ln t$ и $dx = \frac{dt}{t}$:

$$\int \frac{dx}{e^x+1} = \int \frac{dt}{t(t+1)} = \int \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}\right)dt =$$

[1] Для справедливости отметим, что подынтегральная функция такого вида относится не к иррациональным, а к трансцендентным функциям.

$$= \ln t - \ln(t+1) + C = x - \ln(e^x+1) + C. \qquad \#$$

***Пример* 28.8.** *Вычислить* $\int \sqrt{e^x+1}\,dx.$

При замене $t = e^x$ подынтегральная функция не сведется к дробно-рациональной из-за наличия квадратного корня, поэтому сделаем сразу другую замену, обозначив в качестве новой переменной весь корень:

$$\int \sqrt{e^x+1}dx = \left\{\begin{array}{l} t = \sqrt{e^x+1} \\ e^x = t^2-1 \\ e^x dx = 2tdt \end{array}\right\} = \int \frac{2t^2}{t^2-1}dt =$$

$$= 2\int \frac{t^2-1+1}{t^2-1}dt = 2\int \left(1 + \frac{1}{t^2-1}\right)dt = 2t + \ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C =$$

$$= 2\sqrt{e^x+1} + \ln\left|\frac{\sqrt{e^x+1}-1}{\sqrt{e^x+1}+1}\right| + C. \qquad \#$$

Существование неопределённого интеграла. Пусть дана некоторая функция $f(x)$. Интересен вопрос, всегда ли существует неопределённый интеграл от неё: $\int f(x)\,dx$?

***Теорема* 28.1** (Теорема Коши о существовании первообразной)**.** *Для любой непрерывной функции $f(x)$ существует первообразная $F(x)$ и, следовательно, неопределённый интеграл $F(x) + C$.*

Эту теорему примем без доказательства.

Заметим, что не всякая элементарная функция имеет в качестве своей первообразной элементарную функцию. Так, дифференциальный бином интегрируется только в трёх частных случаях. В остальных случаях, интеграл от дифференциального бинома существует, но он не выражается в элементарных функциях. Интегралы от функций такого вида называются *неберущимися.* Неберущиеся интегралы позволяют определять новые функции, называемые *специальными.*[1]

Приведём примеры некоторых неберущихся интегралов и названия соответствующих специальных функций:

[1]Существуют также специальные функции, которые определяются не через неберущиеся интегралы, а в виде рядов или частных решений дифференциальных уравнений.

- $\displaystyle\int \frac{\sin x}{x} dx = \mathrm{Si}(x) + C$, где $\mathrm{Si}(x)$ – интегральный синус,
- $\displaystyle\int \frac{\cos x}{x} dx = \mathrm{Ci}(x) + C$, где $\mathrm{Ci}(x)$ – интегральный косинус,
- $\displaystyle\int \frac{e^x}{x} dx = \mathrm{Ei}(x) + C$, где $\mathrm{Ei}(x)$ – интегральная экспонента,
- $\displaystyle\int \frac{dx}{\ln x} = \mathrm{Li}(x) + C$, где $\mathrm{Li}(x)$ – интегральный логарифм.

Ряд интегралов, не выражающихся через элементарные функции, играет важную роль как в самом математическом анализе, так и во многих физических приложениях. Например, эллиптические интегралы

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 x}}, \qquad \int \sqrt{1 - k^2 \sin^2 x}\, dx$$

применяются в задачах исследования колебания маятника и нахождении длины дуги эллипса. Интеграл

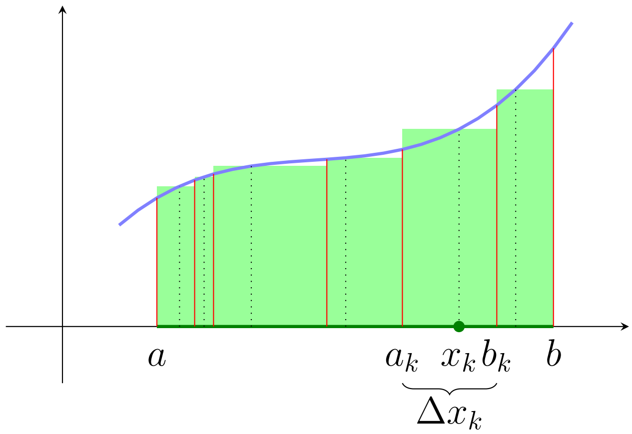
$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-x^2/2}\, dx,$$

также являющийся неберущимся, играет важнейшую роль в теории вероятности и математической статистике. Подынтегральная функция $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$ называется *функцией Гаусса*, а её нечётная первообразная – *функцией Лапласа* $\Phi(x)$. Она будет подробно изучена в §58.

§29. Определённый интеграл

Определение. Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $[a, b]$.

Далее, для удобства геометрической интерпретации, предположим, что $f(x)$ является непрерывной и положительной ($f(x) > 0$) на этом отрезке, также будем считать, что $a < b$. Построим график функции и определим так называемую криволинейную трапецию: фигуру, ограниченную сверху графиком $f(x)$, снизу – осью Ox, слева и справа – отрезками прямых $x = a$ и $x = b$. Поставим себе задачу нахождения площади криволинейной трапеции. Для этого проделаем следующие операции:



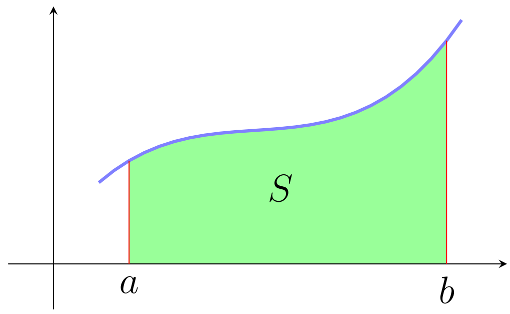
1. Разобьём отрезок $[a, b]$ на n частей $[a_k, b_k]$, где $a_{k+1} = b_k$. Длина k-го отрезка $\Delta x_k = b_k - a_k$.
2. На каждом отрезке произвольным образом выберем точку x_k и вычислим значение $f(x_k)$ функции в этой точке.
3. Построим прямоугольники, основаниями которых являются отрезки $[a_k, b_k]$, лежащие на оси Ox, а высотами – вертикальные отрезки с длинами $f(x_k)$. Площади этих прямоугольников $S_k = f(x_k) \cdot \Delta x_k$. Ступенчатой фигурой назовём объединение всех таких прямоугольников. Площадь этой фигуры $S = \sum\limits_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x_k$. Данная сумма S называется *интегральной суммой* для функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$.
4. Пусть $\lambda = \max\limits_k |\Delta x_k|$ – длина наибольшей части разбиения отрезка $[a, b]$. Продолжим деление отрезка $[a, b]$ так, что длина $\lambda \to 0$, при этом число частей $n \to \infty$. Площадь ступенчатой фигуры устремится к площади криволинейной трапеции.
5. Если существует предел интегральной суммы и он не зависит от способа разбиения и выбора точек x_k, то этот предел называется *определённым интегралом* $\int\limits_a^b f(x)\,dx$.

Итак, по определению, определённый интеграл – это число, равное пределу интегральной суммы:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{\lambda\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x_k. \tag{29.1}$$

Числа a и b называются нижним и верхним пределом интегрирования соответственно.

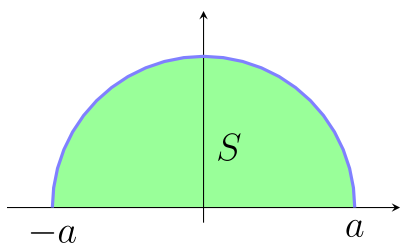
В случае, когда $f(x)$ – непрерывная функция, расположенная выше оси Ox и при $a < b$ значение определённого интеграла равно площади S криволинейной трапеции. Но предел (29.1) может также существовать и для других функций, поэтому непрерывность и положительность функции не является необходимым условием для существования определённого интеграла. Также для существования определённого интеграла не обязательно выполнение условия $a < b$.



***Пример* 29.1.** *Вычислить* $\int\limits_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$.

Построим график функции $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ на отрезке $[-a, a]$:

График представляет собой полуокружность, а сама криволинейная трапеция – половину круга с центром в начале координат и с радиусом a. График функции в крайних точках $x = \pm a$ доходит до оси Ox, поэтому отрезки вертикальных прямых $x = a$ и $x = b$, являющиеся основаниями криволинейной трапеции вырождаются в точки. Площадь криволинейной трапеции равна площади полукруга $\frac{\pi a^2}{2}$, это число и будет значением искомого интеграла:



$$\int\limits_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{\pi a^2}{2}. \qquad \#$$

Теоремы о существовании определённого интеграла. Имеют место следующие теоремы:

***Теорема* 29.1** (Достаточное условие интегрируемости)**.** *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она интегрируема на этом отрезке.*

***Теорема* 29.2** (Необходимое условие интегрируемости). *Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$, то она ограничена на этом отрезке.*

Данные теоремы даются без доказательства.

Заметим, что обратные утверждения не верны, т.е. из интегрируемости не следует непрерывность, а из ограниченности – интегрируемость. Приведём пример ограниченной неинтегрируемой функции.

***Пример* 29.2.** *Дана функция Дирихле*

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ – рационально}, \\ 0, & x \text{ – иррационально}. \end{cases}$$

Доказать, что она неинтегрируема на отрезке $[0, 1]$.

Разобьём отрезок $[0, 1]$ на n одинаковых частей ($\Delta x_k = \lambda = \frac{1}{n}$). Заметим, что на любом отрезке числовой прямой существуют как рациональные, так и иррациональные точки.

а) Возьмём вначале все x_k рациональными, в этих точках значения функции Дирихле равны единице, поэтому $S_1 = \sum\limits_{k=1}^{n} 1 \cdot \frac{1}{n} = 1$.

б) Далее выберем все x_k иррациональными. В этих точках значения функции Дирихле равны нулю, поэтому и $S_2 = \sum\limits_{k=1}^{n} 0 \cdot \frac{1}{n} = 0$.

Данные интегральные суммы S_1 и S_2 не зависят от n и значения их пределов $\lim\limits_{\lambda \to 0} S_1 = 1$, $\lim\limits_{\lambda \to 0} S_2 = 0$. Мы получили, что разные способы выбора точек x_k приводят к разным значением предела интегральной суммы. Следовательно, определённый интеграл от функции Дирихле не существует. #

Формула Ньютона – Лейбница. Докажем теорему, называемую основной теоремой математического анализа и связывающую такие два важных понятия, как определённый и неопределённый интеграл:

***Теорема* 29.3.** *Пусть $f(x)$ – непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция, $F(x)$ – её первообразная на этом отрезке. Тогда справедливо равенство*

$$\int\limits_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b. \tag{29.2}$$

◀ Для доказательства разобьём отрезок $[a, b]$ на n частей $[a_k, b_k]$ (заметим, что $a_{k+1} = b_k$). На каждом отрезке рассмотрим разность $F(b_k) - F(a_k)$. По теореме Лагранжа на каждом отрезке существует хотя бы одня такая точка x_k, что $F(b_k) - F(a_k) = F'(x_k)\Delta x_k = f(x_k)\Delta x_k$.

Составим интегральную сумму

$$S = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} [F(b_k) - F(a_k)] = F(b) - F(a).$$

Данная сумма получилась не зависящей от разбиение, поэтому $\lim\limits_{\lambda\to 0} S = F(b) - F(a)$. Приняв во внимание, что от непрерывной функции $f(x)$ существует определённый интеграл, он также будет равен пределу полученной интегральной суммы: $\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$. ▶

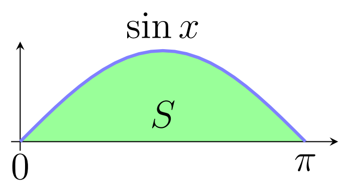
***Пример* 29.3.** *Вычислить* $\int\limits_2^4 x^2\,dx$.

Т.к. первообразной функции x^2 является функция $\frac{x^3}{3}$, то

$$\int\limits_2^4 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\bigg|_2^4 = \frac{4^3}{3} - \frac{2^3}{3} = \frac{64}{3} - \frac{8}{3} = \frac{56}{3}. \qquad \#$$

***Пример* 29.4.** *Найти площадь фигуры, заключенной между осью* Ox *и графиком синусоиды* $y = \sin x$ *на отрезке* $x \in [0, \pi]$.

Т.к. данная фигура является криволинейной трапецией, то её площадь равна значению определённого интеграла



$$S = \int\limits_0^\pi \sin x\,dx = -\cos x\bigg|_0^\pi =$$

$$= -(\cos\pi - \cos 0) = -(-1 - 1) = 2. \qquad \#$$

Свойства определённого интеграла.

1. *Независимость от выбора первообразной.* Так, если в формуле (29.2) вместо $F(x)$ взять другую первообразную $F_1(x)$, то значение определённого интеграла не изменится.

◀ Если $F(x)$ и $F_1(x)$ – первообразные $f(x)$, то $F_1(x) = F(x) + C_1$.

$$F_1(b) - F_1(a) = (F(b) + C_1) - (F(a) + C_1) = F(b) - F(a).$$ ▶

2. *Перестановка пределов.* Имеет место равенство

$$\int\limits_b^a f(x)\,dx = -\int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

◀ Данное равенство является следствием очевидного равенства

$$F(a) - F(b) = -(F(b) - F(a)).$$ ▶

3. Интеграл по отрезку нулевой длины

$$\int\limits_a^a f(x)\,dx = F(a) - F(a) = 0.$$

4. *Аддитивность.* Разобьём интервал (a, b) интегрирования на две части внутренней точкой c: $(a, b) = (a, c) \cup (c, b)$. Тогда

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx.$$

◀ Опять же, это следствие очевидного равенства

$$F(b) - F(a) = (F(c) - F(a)) + (F(b) - F(c)).$$ ▶

5. *Линейность.* Из линейности неопределённого интеграла следует:

$$\int\limits_a^b Af(x)\,dx = A\int\limits_a^b f(x)\,dx,$$

$$\int\limits_a^b [f(x) + g(x)]\,dx = \int\limits_a^b f(x)\,dx + \int\limits_a^b g(x)\,dx.$$

6. *Монотонность.* Пусть $b \geqslant a$. Тогда, при справедливости соотношения $f(x) \geqslant g(x)$ для подынтегральных функций следует аналогичное соотношения для определённых интегралов:

$$\int_a^b f(x)\,dx \geqslant \int_a^b g(x)\,dx.$$

◀ Пусть $F(x)$ – первообразная функции $f(x)-g(x)$. Из $f(x) \geqslant g(x)$ следует $F'(x) \geqslant 0$. Значит, $F(x)$ – неубывающая функция.

Из определения неубывающей функции, из условия $b \geqslant a$ следует $F(b) \geqslant F(a)$, поэтому

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \geqslant 0.$$ ▶

7. *Симметрия.* Пусть $f(x)$ – нечётная функция. Тогда интеграл с симметричными пределами

$$\int_{-a}^a f(x)\,dx = 0.$$

Если $f(x)$ – чётная функция, то

$$\int_{-a}^a f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx.$$

Замечание. Докажите два последних равенства, используя определения чётной и нечётной функций и свойство аддитивности интеграла.

Ещё одно свойство сформулируем в виде теоремы.

***Теорема* 29.4** (Теорема о среднем для определённого интеграла)**.** *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то существует точка $c \in$ $\in (a, b)$ такая, что значение интеграла равно произведению приращения $b - a$ на значение функции в этой точке:*

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)f(c).$$

◀ По теореме Лагранжа для функции $F(x)$:

$$F(b) - F(a) = (b-a)F'(c) \quad \Rightarrow \quad \int\limits_a^b f(x)\,dx = (b-a)f(c).$$ ▶

Средним значением M функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ называют

$$M = \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

***Пример* 29.5.** *Найти среднее значение функции* $y = x^2$ *на отрезке* $[0, 1]$.

$$M = \frac{1}{1-0}\int\limits_0^1 x^2 dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

Задание. Найдите среднее значение функции $y = \sin x$ на отрезке $[0, \pi]$.

Замена переменной в определённом интеграле. Пусть функция $f(x)$ определена и интегрируема на отрезке $[a, b]$. Введём новую переменную t, связанную со старой переменной соотношением $x = \varphi(t)$, тогда

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \left\{ \begin{array}{c} x = \varphi(t) \\ a = \varphi(\alpha),\ b = \varphi(\beta) \end{array} \right\} = \int\limits_\alpha^\beta f[\varphi(t)] \cdot \varphi'(t)\,dt.$$

Формула является следствием формулы (25.1) замены переменной в неопределённом интеграле, единственное отличие заключается в расстановке пределов интегрирования. Так, при переходе к новой переменной, отрезок $[a, b]$ интегрирования по старой переменной надо заменить на отрезок $[\alpha, \beta]$ интегрирования по новой переменной.

Также отметим, что при использовании метода замены переменной в определённом интеграле, после получения числового значения, не надо возвращаться к исходной переменной.

***Пример* 29.6.** *Вычислить* $\int\limits_0^3 x\sqrt{x+1}\,dx$.

Введём новую переменную $t = \sqrt{x+1}$. Отрезок интегрирования $[0,3]$ при такой замене перейдёт в отрезок $[\sqrt{0+1}, \sqrt{3+1}] = [1,2]$. Также $x = t^2 - 1$ и $dx = 2tdt$, поэтому

$$\int_0^3 x\sqrt{x+1}\,dx = \int_1^2 (t^2-1)t\cdot 2t\,dt = 2\int_1^2 (t^4-t^2)\,dt = 2\left(\frac{t^5}{5}-\frac{t^3}{3}\right)\Bigg|_1^2 =$$

$$= 2\left(\frac{32-1}{5}-\frac{8-1}{3}\right) = 2\left(\frac{31}{5}-\frac{7}{3}\right) = 2\left(\frac{93-35}{15}\right) = \frac{116}{15}. \qquad \#$$

Интегрирование по частям. Формула интегрирования по частям для определённого интеграла имеет вид

$$\int_a^b uv'\,dx = uv\Big|_a^b - \int_a^b vu'\,dx.$$

Здесь нам пришлось перейти от дифференциалов функций к дифференциалу аргумента: $du = u'dx$, $dv = v'dx$ для того, чтобы пределы интегрирования соответствовали интервалу изменения соответствующей переменной.

***Пример* 29.7.** *Вычислить* $\int_0^1 \operatorname{arctg} x\,dx$.

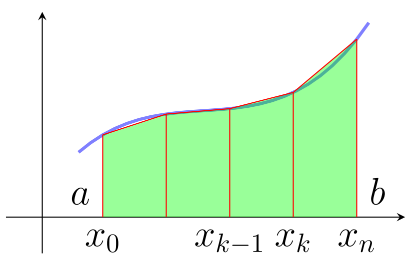
$$\int_0^1 \operatorname{arctg} x\,dx = \left\{\begin{array}{ll} u = \operatorname{arctg} x, & du = \dfrac{dx}{x^2+1} \\ dv = dx, & v = x \end{array}\right\} =$$

$$= x\operatorname{arctg} x\Big|_0^1 - \int_0^1 x\cdot\frac{dx}{x^2+1} = (1\operatorname{arctg} 1 - 0) - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} =$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln(x^2+1)\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}(\ln 2 - \ln 1) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2. \qquad \#$$

Приближённое вычисление определённого интеграла. Рассмотрим вначале метод трапеций для приближённого вычисления интегралов.

Идея метода основана на геометрическом смысле определённого интеграла – он равен площади криволинейной трапеции. Данную площадь можно найти приближённо, разбив нашу фигуру несколькими вертикальными прямыми на части и заменив



каждую часть на трапецию. Найдя площади всех трапеций и просуммировав по всем частям, приближённо найдём площадь всей криволинейной трапеции. Рассмотрим случай, когда все трапеции имеют одинаковые высоты, равные $\Delta = (b-a)/n$. Границы отрезков: $x_k = a + (b-a)\frac{k}{n}$, площадь трапеции с номером k: $S_k = \frac{f(x_{k-1})+f(x_k)}{2}\Delta$.

Приближённое значение интеграла равно сумме площадей:

$$S = \Delta \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2} = \frac{b-a}{n}\left[\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k)\right].$$

***Пример* 29.8.** *Приближённо вычислить* $\int\limits_0^1 x^2\,dx$ *разбиением отрезка на 5 равных частей.*

Составим таблицу:

k	0	1	2	3	4	5
x_k	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
x_k^2	0.00	0.04	0.16	0.36	0.64	1.00

$$\int\limits_0^1 x^2 dx \approx \frac{1-0}{5}\left[\frac{0+1}{2} + 0.04 + 0.16 + 0.36 + 0.64\right] = \frac{1.7}{5} = 0.34.$$

Точное значение интеграла $\int\limits_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}$, погрешность составила $\varepsilon = 0.34 - \frac{1}{3} \approx 6.7 \cdot 10^{-3}$. #

Другой метод приближённого вычисления интеграла от дифференцируемой функции основан на формуле Тейлора. Идея метода заключается в замене подынтегральной функции многочленом Тейлора. Отбросив интеграл от остаточного члена, задачу сведём к интегрированию многочлена.

***Пример* 29.9.** *Приближённо вычислить* $\int\limits_0^1 \frac{\sin x}{x}\,dx$ *с использованием формулы Тейлора для* $n = 7$.

$$\frac{\sin x}{x} \approx \frac{1}{x}\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}\right) = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!}.$$

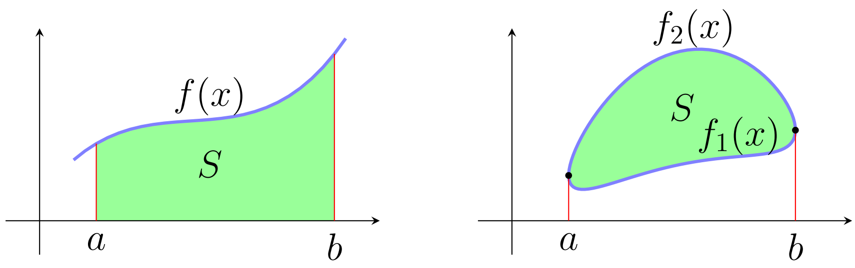
$$\int\limits_0^1 \frac{\sin x}{x}dx \approx x - \frac{x^3}{3\cdot 3!} + \frac{x^5}{5\cdot 5!} - \frac{x^7}{7\cdot 7!}\Big|_0^1 = 1 - \frac{1}{3\cdot 3!} + \frac{1}{5\cdot 5!} - \frac{1}{7\cdot 7!} =$$

$$= 1 - \frac{1}{18} + \frac{1}{600} - \frac{1}{35280} = \frac{166889}{176400} \approx 0.946082.$$

Погрешность составила $\varepsilon \approx 3\cdot 10^{-7}$. #

§30. Приложения определённого интеграла

Площадь простой области. Как было сказано ранее, значение определённого интеграла численно равно площади криволинейной трапеции, изображенной на рисунке слева. Задачу нахождения площади произвольной фигуры также можно свести к вычислению определённого интеграла.



Рассмотрим вначале так называемую простую область. *Простой* называется область, границу которой каждая вертикальная прямая пересекает не более чем в двух точках, либо имеет на этой границе целый отрезок. Пример такой области приведён на рисунке справа. Прямые $x = a$ и $x = b$ касаются границы этой области, все вертикальные прямые между ними пересекают границу в двух точках. Границу можно разбить на нижнюю и верхнюю части, которые являются графиками функций $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$ соответственно. Тогда площадь S простой области можно получить как разность площадей двух криволинейных трапеций, образованных графиками данных функций:

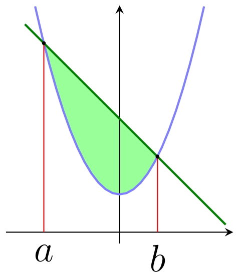
$$S = \int\limits_a^b \Big[f_2(x) - f_1(x)\Big]\,dx.$$

***Пример* 30.1.** *Найти площадь фигуры, ограниченной линиями* $y = x^2 + 1$ *и* $y = 3 - x$.

Сделаем чертёж и найдём точки пересечения графиков данных функций:

$$x^2 + 1 = 3 - x \quad \Rightarrow \quad x_1 = -2, \quad x_2 = 1.$$

Поэтому $a = -2$, $b = 1$. Определим площадь фигуры:



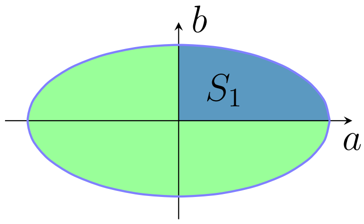
$$S = \int_{-2}^{1} \Big[(3-x) - (x^2+1)\Big]\,dx = \int_{-2}^{1} \Big(2 - x - x^2\Big)\,dx = \Big(2x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\Big)\Big|_{-2}^{1} =$$

$$= \Big(2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\Big) - \Big(-4 - \frac{4}{2} + \frac{8}{3}\Big) = 4.5. \qquad \#$$

При вычислении площадей можно и даже полезно использовать симметрию данных областей, т.к. площадь частей обычно находится проще. Проиллюстрируем это на примере.

***Пример* 30.2.** *Найти площадь эллипса* $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

Оси координат являются линиями симметрии эллипса. Поэтому сведём задачу к нахождению площади четверти эллипса – фигуры, лежащей в первом квадранте, её площадь обозначим S_1. Данная фигура является криволинейной трапецией, образованной графиком верхней границы эллипса $y = \dfrac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ на отрезке $[0, a]$. Поэтому

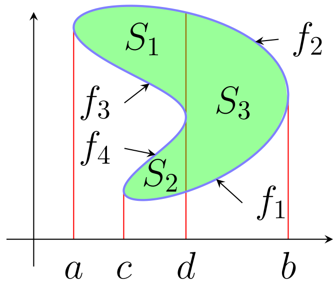


$$S = 4S_1 = 4\frac{b}{a}\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{4b}{a}\frac{\pi a^2}{4} = \pi ab.$$

При вычислении последнего интеграла мы использовали пример 29.1 – интеграл равен площади четверти круга с радиусом a. #

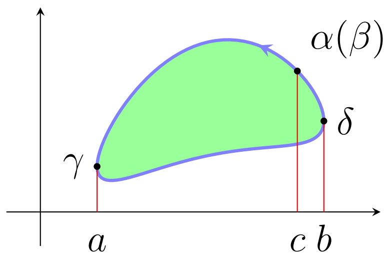
Площадь сложной области. Если есть вертикальная прямая, которая пересекает границу области в трёх или более изолированных точках, то такая область называется *сложной*.

Пример такой области изображен на рисунке. Вертикальная прямая, заключенная между прямыми $x = c$ и $x = d$ пересекают границу области в четырёх точках. Один из способов нахождения площади такой области – разбиение на части, каждая из которой является простой областью. Например, прямая $x = d$ разбивает данную сложную область на три части, каждая из которых является простой. Обозначим площади этих частей как S_1, S_2 и S_3. Границы частей представим в виде графиков однозначных функций: $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, $y = f_3(x)$ и $y = f_4(x)$ (см. рисунок). Тогда



$$S = S_1 + S_2 + S_3 = \int\limits_a^d \Big[f_2 - f_3\Big]dx + \int\limits_c^d \Big[f_4 - f_1\Big]dx + \int\limits_d^b \Big[f_2 - f_1\Big]dx.$$

Площадь параметрически заданной области. Пусть граница фигуры задана в виде $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, причём при возрастании t фигура обходится против часовой стрелки. Заметим, что крайним значениям параметра соответствует одна точка, т.е. $x(\alpha) = x(\beta)$ и $y(\alpha) = y(\beta)$. Тогда



$$S = -\int\limits_\alpha^\beta yx'\,dt.$$

◀ Пусть $x(\alpha) = x(\beta) = c$, $x(\gamma) = a$, $x(\delta) = b$. Тогда

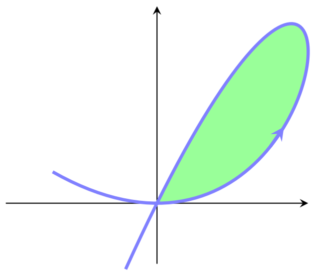
$$S = \int\limits_a^c y_2(x)dx + \int\limits_c^b y_2(x)dx - \int\limits_a^b y_1(x)dx = \int\limits_\gamma^\alpha yx'dt +$$

$$+ \int\limits_\beta^\delta yx'dt - \int\limits_\gamma^\delta yx'dt = -\int\limits_\alpha^\gamma yx'dt - \int\limits_\gamma^\delta yx'dt - \int\limits_\delta^\beta yx'dt = -\int\limits_\alpha^\beta yx'dt. \quad ▶$$

Замечание. Докажите, что для вычисления площади фигуры с параметрически заданной границей также подходят формулы

$$S = \int\limits_{\alpha}^{\beta} xy'\,dt, \qquad S = \frac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta} (xy' - yx')\,dt.$$

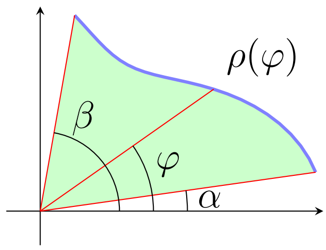
Пример 30.3. *Вычислить площадь фигуры, которая ограничена петлёй кривой $x = t(2-t)$, $y = t^2(2-t)$.*

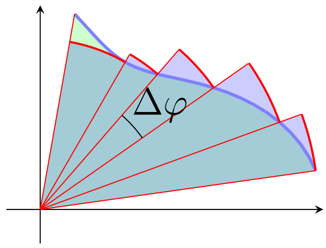


В точке самопересечения параметрически заданной кривой разным значениям параметра соответствует одна точка. При $t = 0$ и при $t = 2$ кривая проходит через начало координат, поэтому $\alpha = 0$, $\beta = 2$. Находим площадь петли:

$$S = -\int\limits_0^2 yx'dt = -\int\limits_0^2 t^2(2-t)\cdot(2-2t)dt = -2\int\limits_0^2 (t^4 - 3t^3 + 2t^2)dt =$$

$$= -2\left(\frac{t^5}{5} - 3\frac{t^4}{4} + 2\frac{t^3}{3}\right)\bigg|_0^2 = -2\left(\frac{32}{5} - 12 + \frac{16}{3}\right) = \frac{8}{15}. \qquad \#$$





Площадь в полярных координатах. Пусть кривая задана в полярных координатах: $\rho = \rho(\varphi)$, $\varphi \in [\alpha, \beta]$. *Криволинейным треугольником* назовём фигуру, одна сторона которой образована графиком кривой, а две оставшиеся стороны являются отрезками, соединяющими концы кривой с началом координат. Найдём площадь этой фигуры.

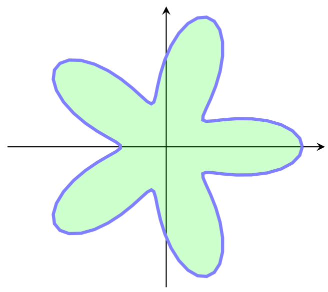
Для этого поступим также, как мы поступали при нахождении площади криволинейной трапеции. Разобьём фигуру на n частей лучами, выходящими из начала координат. Каждая часть также представляет собой криволинейный треугольник. Площадь треугольника с углом в начале координат $\Delta\varphi$ и радиусом ρ приближённо равна площади сектора $\Delta S \approx \frac{1}{2}\rho^2\Delta\varphi$.

Устремим $\Delta\varphi \to 0$. Тогда приближённое равенство для площади каждой части перейдёт в точное равенство для дифференциала площади $dS = \frac{1}{2}\rho^2 d\varphi$. Искомая площадь

$$S = \int\limits_{\alpha}^{\beta} dS = \frac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi)\, d\varphi.$$

Если кривая является замкнутой и начало координат лежит внутри кривой, то для нахождения площади внутренней области следует интегрировать по отрезку $[0, 2\pi]$.

***Пример* 30.4.** *Найти площадь фигуры, ограниченной линией* $\rho = 2 + \cos 5\varphi$.

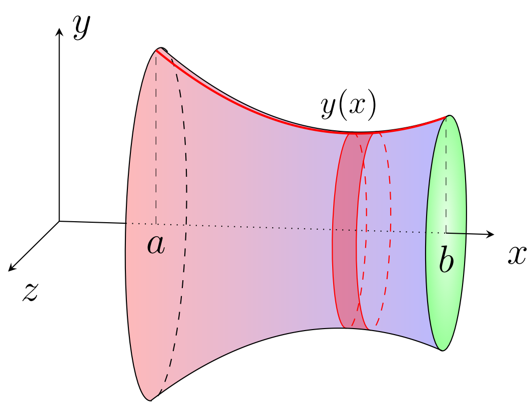


Данная область приведена на рисунке. Хотя данная область является сложной, вычисление площади можно провести по приведённой выше формуле без разбиения области на части:

$$S = \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{2\pi} (2+\cos 5\varphi)^2\, d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{2\pi} (4+4\cos 5\varphi+\cos^2 5\varphi)\, d\varphi = \left(2\varphi + \frac{2}{5}\sin 5\varphi\right)\Bigg|_{0}^{2\pi} + \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{2\pi} \cos^2 5\varphi\, d\varphi =$$

$$= 4\pi + \frac{1}{4}\int\limits_{0}^{2\pi} (1+\cos 10\varphi)\, d\varphi = 4\pi + \frac{1}{4}\left(\varphi + \frac{1}{10}\sin 10\varphi\right)\Bigg|_{0}^{2\pi} = \frac{9}{2}\pi. \qquad \#$$



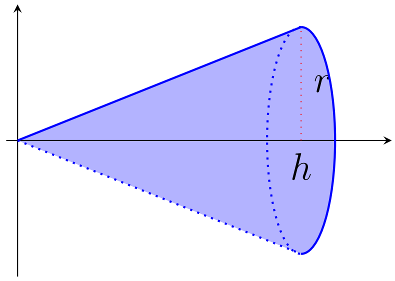
Объём тела вращения. Дана функция $y = f(x)$, $x \in [a, b]$. Рассмотрим тело, полученное вращением графика данной функции вокруг оси Ox.

Заметим, что с краёв данное тело ограничено кругами, являющимся частями плоскостей $x = a$ и $x = b$. Поставим задачу нахождения объёма этого тела вращения. Для этого поступим способом, аналогичным способу нахождения площади криволинейной трапеции. Вначале разобьём тело на n частей плоскостями $x = \text{const}$. Объём каждой части приближённо равен объёму цилиндра с высотой Δx и радиусом основания y: $\Delta V \approx \pi y^2 \Delta x$. Устремим $\Delta x \to 0$, при этом приближённое равенство перейдёт в точное равенство для дифференциала объёма: $dV = \pi y^2 dx$. Итоговый объём

$$V = \int\limits_a^b dV = \pi \int\limits_a^b y^2\, dx.$$

***Пример* 30.5.** *Найти объём конуса с высотой h и радиусом основания r.*

Представим конус как тело вращения отрезка прямой $y = \dfrac{r}{h}x$, $x \in [0, h]$. Тогда его объём



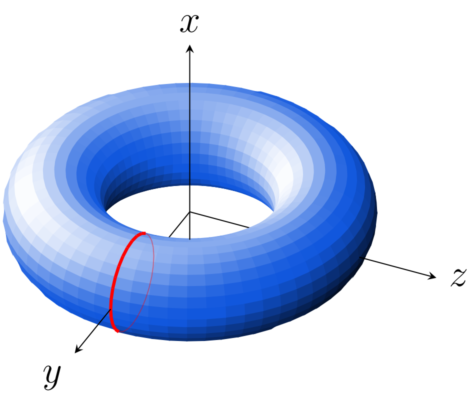
$$V = \pi \int\limits_0^h \left(\frac{r}{h}x\right)^2 dx = \frac{\pi r^2}{h^2} \int\limits_0^h x^2\, dx =$$

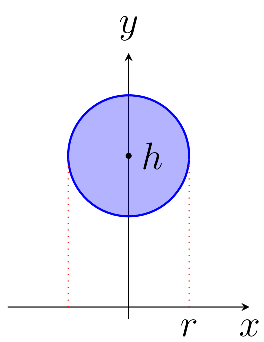
$$= \frac{\pi r^2}{h^2} \frac{x^3}{3}\bigg|_0^h = \frac{\pi r^2 h}{3}.$$ #

Задание. Докажите, что шар радиуса r имеет объём $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

***Пример* 30.6.** *Найти объём тора с высотой h и радиусом основания r.*

Тор – объёмная фигура, граница которой получается при вращении окружности $x^2 + (y-h)^2 = r^2$ вокруг оси Ox.





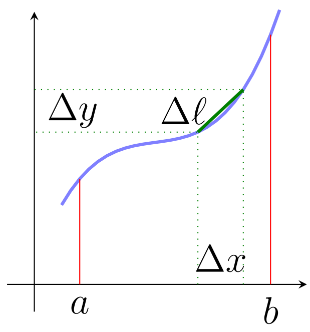
Объём тора можно найти как разность объёмов тел вращения, получаемых вращением “верхней” $y = h + \sqrt{r^2 - x^2}$ и “нижней” $y = h - \sqrt{r^2 - x^2}$

полуокружностей. Используем симметрию и будем интегрировать только по положительной части $x \in [0, r]$.

$$V = 2(V_1 - V_2) = 2\pi\int\limits_0^r\left[\left(h+\sqrt{r^2-x^2}\right)^2 - \left(h-\sqrt{r^2-x^2}\right)^2\right] dx =$$

$$= 2\pi\int\limits_0^r 4h\sqrt{r^2 - x^2}dx = 8\pi h\int\limits_0^r \sqrt{r^2 - x^2}dx = 8\pi h\frac{\pi r^2}{4} = 2\pi^2 r^2 h. \qquad \#$$

Длина дуги. Дана функция $y = f(x)$, $x \in [a, b]$. Найдём длину ℓ кривой, представляющей собой график этой функции.



Рассмотрим малую часть кривой, заключенную в интервале $[x, x+\Delta x]$. Длина $\Delta\ell$ этой части приближённо равна длине прямолинейного отрезка, соединяющего концы этой части: $\Delta\ell \approx \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$.

Устремив $\Delta x \to 0$, запишем точное равенство для дифференциала длины дуги: $d\ell = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = \sqrt{1 + y'^2}\, dx$. Тогда длина всей кривой

$$\ell = \int\limits_a^b d\ell = \int\limits_a^b \sqrt{1 + y'^2}\, dx.$$

***Пример* 30.7.** *Найти длину дуги графика функции $y = x^{\frac{3}{2}}$ на отрезке $0 \leqslant x \leqslant 5$.*

Найдём вначале производную $y' = \dfrac{3}{2}\sqrt{x}$. Искомая длина кривой

$$\ell = \int\limits_0^5 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}\, dx = \frac{4}{9}\int\limits_0^5 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}\, d\left(1+\frac{9}{4}x\right) = \frac{4}{9}\cdot\frac{2}{3}\left(1 + \frac{9}{4}x\right)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^5 =$$

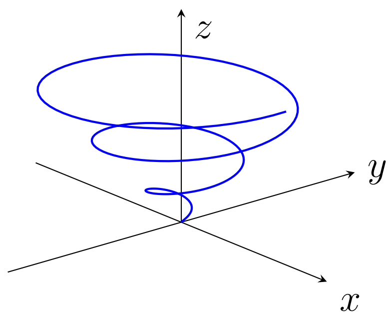
$$= \frac{8}{27}\left[\left(\frac{49}{4}\right)^{\frac{3}{2}} - 1^{\frac{3}{2}}\right] = \frac{8}{27}\left[\frac{343}{8} - 1\right] = \frac{335}{27}. \qquad \#$$

Если кривая задана параметрически $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, то дифференциал её длины $d\ell = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$. Формула длины дуги кривой приобретает вид:

$$\ell = \int\limits_{\alpha}^{\beta} d\ell = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2}\,dt.$$

***Пример* 30.8.** *Найти длину дуги кривой*

$$\begin{cases} x = t\cos t, \\ y = t\sin t, \qquad 0 < t < 6\pi. \\ z = t, \end{cases}$$



Кривая является пространственной, это означает, что в формуле под корнем появляется ещё одно слагаемое: $d\ell = \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2 + z_t'^2}\,dt$.

$$\ell = \int\limits_0^{6\pi} \sqrt{(\cos t - t\sin t)^2 + (\sin t + t\cos t)^2 + 1}dt = \int\limits_0^{6\pi} \sqrt{2 + t^2}dt =$$

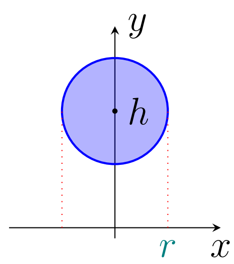
$$= \frac{t}{2}\sqrt{2+t^2} + \ln\left(t + \sqrt{2+t^2}\right)\Bigg|_0^{6\pi} = 3\pi\sqrt{2+36\pi^2} + \ln\frac{6\pi + \sqrt{2+36\pi^2}}{\sqrt{2}}. \ \#$$

Площадь поверхности вращения. Дана функция $y = f(x)$ на отрезке $x \in [a, b]$. Рассмотрим поверхность, полученную вращением графика данной функции вокруг оси Ox. Тогда её площадь

$$S = 2\pi \int\limits_a^b y\sqrt{1 + y'^2}\,dx.$$

***Пример* 30.9.** *Найти площадь поверхности тора.*

Как было сказано ранее, граница тора образуется вращением окружности $x^2 + (y - h)^2 = r^2$ вокруг оси Ox. Площадь этой поверхности равна сумме площадей поверхностей вращения “верхней” $y = h + \sqrt{r^2 - x^2}$ и “нижней”



$y = h - \sqrt{r^2 - x^2}$ полуокружностей. Найдём производную y' и значение корня $\sqrt{1+y'^2}$:

$$y' = \mp\frac{x}{\sqrt{r^2-x^2}}, \qquad \sqrt{1+y'^2} = \sqrt{1+\frac{x^2}{r^2-x^2}} = \frac{r}{\sqrt{r^2-x^2}}.$$

Используем симметрию и проинтегрируем по интервалу $x \in [0, r]$:

$$S = 2(S_1+S_2) = 4\pi\int\limits_0^r \frac{(h+\sqrt{r^2-x^2})r + (h-\sqrt{r^2-x^2})r}{\sqrt{r^2-x^2}}dx =$$

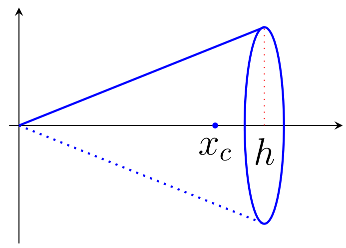
$$= 4\pi\int\limits_0^r \frac{(2h}{\sqrt{r^2-x^2}}dx = 8\pi h\arcsin\frac{x}{r}\Big|_0^r = 8\pi h\frac{\pi}{2} = 4\pi^2 rh. \qquad \#$$

Задание. Докажите, что сфера радиуса r имеет площадь $S = 4\pi r^2$.

Физические приложения. Пусть $\rho(x)$ – линейная плотность стержня в точке с координатой x, $x \in [a,b]$. Тогда масса m стержня и координата x_c его центра тяжести находятся по формулам:

$$m = \int\limits_a^b \rho(x)\,dx, \qquad x_c = \frac{1}{m}\int\limits_a^b x\rho(x)\,dx.$$

***Пример* 30.10.** *Найти координату центра тяжести конуса.*



Расположим конус так, чтобы ось вращения совпала с осью Ox, $x \in [0,h]$. Предположим, что конус является стержнем переменной плотности, линейная плотность $\rho(x)$ прямо пропорциональна площади сечения, которая, в свою очередь, пропорциональна квадрату радиуса сечения: $\rho(x) = kx^2$.

Найдём массу m и координату x_c центра тяжести:

$$m = k\int\limits_0^h x^2dx = k\frac{h^3}{3}, \qquad x_c = \frac{3}{kh^3}\int\limits_0^h kx^3dx = \frac{3}{h^3}\frac{h^4}{4} = \frac{3}{4}h. \qquad \#$$

Глава 5. Несобственные интегралы, комплексные числа, ряды

> За то время, пока Ахиллес пробежит 1000 метров, черепаха проползёт в ту же сторону 100 метров. За время пока Ахиллес преодолеет эти 100 м, черепаха проползёт 10. Пока Ахиллес будет пробегать эти 10 м, черепаха продвинется на 1 метр. И так далее. Вывод: процесс будет продолжаться бесконечно и Ахиллес никогда и не догонит черепаху.
>
> Зенон, Ахиллес и черепаха

В этой главе мы познакомимся с такими математическими объектами, как несобственные интегралы и ряды. Мы изучим их свойства и научимся исследовать их сходимость. Кроме того, мы также рассмотрим определение комплексного числа, являющегося обобщением знакомого со школы действительного числа.

§31. Несобственные интегралы

Определение несобственного интеграла I рода. Ранее вводилось понятие определённого интеграла $\int\limits_a^b f(x)\,dx$. В нём предполагалось, что

1. Отрезок $[a, b]$ интегрирования конечен.
2. Подынтегральная функция $f(x)$ определена и ограничена на всём отрезке $[a, b]$.

Определённые интегралы, для которых оба условия выполняются, называются *собственными*. Если нарушается хотя бы одно из условий, то определённый интеграл не существует, т.к. соответствующая интегральная сумма не будет иметь предел. Но в то же время, возможно определить интегралы, которые будут существовать при нарушении упомянутых выше условий. Такие интегралы называется *несобственными*.

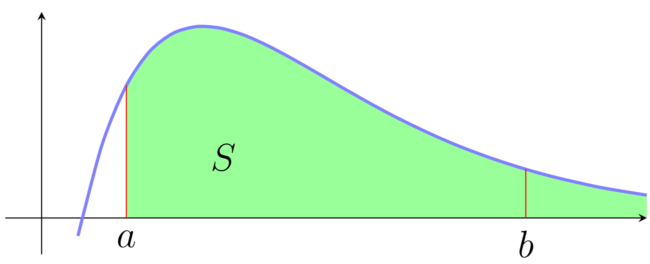
Если нарушено первое условие, т.е. промежуток интегрирования является бесконечным, то такой интеграл называется *несобственным интегралом I рода*. Приведём примеры таких интегралов:

$$\int\limits_0^\infty \frac{dx}{x^3+1}, \qquad \int\limits_{-\infty}^{1} x^3 e^x\,dx, \qquad \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx.$$

Рассмотрим, например, интеграл по интервалу $x \in [a, \infty)$. Предположим, что функция $f(x)$ является интегрируемой по любому отрезку $[a, b]$, $b > a$. Тогда несобственный интеграл от этой функции по полубесконечному интервалу $[a, \infty)$ определяется как предел собственного интеграла:

$$\int\limits_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty} \int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty} F(b) - F(a).$$

Здесь $F(x)$ – первообразная $f(x)$.



Геометрический смысл несобственного интеграла I рода – если подынтегральная функция положительна $f(x) > 0$, то интеграл равен площади бесконечной фигуры, являющейся пределом криволинейной трапеции, когда высота трапеции устремляется в бесконечность.

Если предел существует, то несобственный интеграл *сходится*, иначе интеграл *расходится*. Дальнейший материал этого параграфа будет посвящён вопросу установления сходимости несобственных интегралов.

***Пример* 31.1.** *Исследовать интегралы на сходимость и, в случае сходимости, определить их значения: а)* $\int\limits_0^\infty \frac{dx}{x^2+1}$, *б)* $\int\limits_0^\infty \cos x\, dx$.

а) Подынтегральная функция $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$, её первообразная $F(x) = \operatorname{arctg}(x)$. По определению несобственного интеграла

$$\int\limits_0^\infty \frac{dx}{x^2+1} = \lim_{b\to+\infty} \operatorname{arctg}(b) - \operatorname{arctg}(0) = \frac{\pi}{2}.$$

Данный интеграл сходится, и нам удалось вычислить его значение.

б) Первообразной $f(x) = \cos x$ является $F(x) = \sin x$. Поэтому

$$\int\limits_0^\infty \cos x\, dx = \lim_{b\to+\infty} \sin(b) - \sin(0).$$

Этот предел не существует, и данный интеграл расходится. #

Несобственные интегралы II рода. Пусть отрезок $[a,b]$ интегрирования конечен, но функция $f(x)$ на нём неограничена. Т.е. на отрезке существует одна или несколько таких точек, что, при стремлении к ним аргумента функции, значение функции неограниченно возрастает. В этом случае интеграл $\int\limits_a^b f(x)\, dx$ называется *несобственным интегралом II рода.*

Рассмотрим, например, интеграл от функции $f(x)$, неограниченной на правом конце отрезка интегрирования $[a,b]$, но в то же время интегрируемой по любому отрезку $[a,c]$, где $c \in [a,b]$. Такой несобственный интеграл определяется через предел:

$$\int\limits_a^b f(x)\, dx = \lim_{\varepsilon\to0+0} \int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)\, dx = \lim_{\varepsilon\to0+0} F(b-\varepsilon) - F(a).$$

Если предел существует, то интеграл *сходится*, иначе – *расходится.*

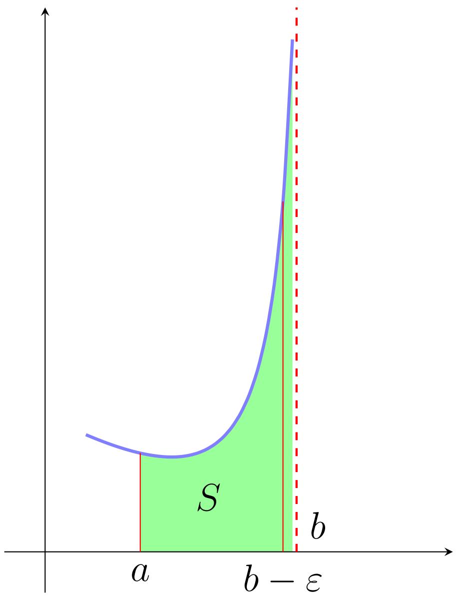
Задание. Дайте определение несобственного интеграла от функции, которая неограничена на левом конце.

Если функция $f(x)$ неограничена во внутренней точке $c \in (a, b)$, то данный интеграл удобно разбить на два интеграла, неограниченных на концах:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Каждый из полученных интегралов следует рассматривать отдельно. Исходный интеграл будет сходящимся, если будет сходиться как первый интеграл с особенностью на правом конце, так и второй интеграл с особенностью на левом конце.

Геометрический смысл несобственного интеграла II рода – если подынтегральная функция положительна $f(x) > 0$, то интеграл равен площади бесконечной фигуры, являющейся пределом криволинейной трапеции, когда длина одного из оснований устремляется в бесконечность.



***Пример* 31.2.** *Исследовать интегралы на сходимость и, в случае сходимости, определить их значения: а)* $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$, *б)* $\displaystyle\int_0^\pi \frac{dx}{\cos^2 x}$.

а) Первообразной функции $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ является $F(x) = 2\sqrt{x}$. Поэтому

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon\to 0+0} \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{1} - \lim_{\varepsilon\to 0+0} 2\sqrt{\varepsilon} = 2 - 0 = 2.$$

Интеграл сходится.

б) У данного интеграла особенность располагается во внутренней точке $x = \frac{\pi}{2}$. Поэтому представим его в виде суммы двух интегралов, имеющих особенности на концах:

$$\int\limits_0^{\pi} \frac{dx}{\cos^2 x} = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{\cos^2 x} + \int\limits_{\pi/2}^{\pi} \frac{dx}{\cos^2 x}.$$

Далее рассмотрим первый интеграл:

$$\int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{\cos^2 x} = \lim_{\varepsilon\to 0+0} \int\limits_0^{\pi/2-\varepsilon} \frac{dx}{\cos^2 x} = \lim_{\varepsilon\to 0+0} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right) - \operatorname{tg} 0 = \infty.$$

Этот предел не существует и интеграл расходится. #

Замечание. Объясните, почему представленное ниже "нахождение" значения интеграла является ошибочным:

$$\int\limits_0^{\pi} \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x\Big|_0^{\pi} = \operatorname{tg}(\pi) - \operatorname{tg}(0) = 0.$$

Исследование сходимости несобственных интегралов. Интеграл I рода от степенной функции $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$

- расходится при $0 < \alpha \leqslant 1$,
- сходится при $\alpha > 1$.

Интеграл II рода от степенной функции $\int\limits_0^{1} \frac{dx}{x^\alpha}$

- сходится при $0 < \alpha < 1$,
- расходится при $\alpha \geqslant 1$.

Данные утверждения легко проверяются непосредственным интегрированием. Приведём далее формулировки несколько теорем, которые позволяют исследовать сходимость несобственных интегралов даже в случае, когда нахождение первообразных либо невозможно, либо приводит к громоздким вычислениям.

Следующие две теоремы используются при исследовании сходимости несобственных интегралов I рода.

***Теорема* 31.1** (Теорема сравнения I). *Пусть $f(x)$ и $g(x)$ – непрерывные функции на интервале $[a, \infty)$ и для всех x из этого интервала выполняется $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

- *Если $\int\limits_a^\infty g(x)\,dx$ сходится, то $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ сходится.*
- *Если $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ расходится, то $\int\limits_a^\infty g(x)\,dx$ расходится.*

***Теорема* 31.2** (Теорема сравнения II). *Пусть $f(x)$ и $g(x)$ – непрерывные неотрицательные функции на интервале $[a, \infty)$ и существует предел $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lambda$. Если $0 < \lambda < \infty$, то $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ и $\int\limits_a^\infty g(x)\,dx$ ведут себя одинаково (либо оба сходятся, либо оба расходятся).*

Кроме этих теорем при исследовании сходимости несобственных интегралов полезно использовать свойство аддитивности. Пусть $f(x)$ – непрерывная функция на интервале $[a, \infty)$ и $b > a$. Тогда из очевидного равенства $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx = \int\limits_a^b f(x)\,dx + \int\limits_b^\infty f(x)\,dx$ следует, что $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ и $\int\limits_b^\infty f(x)\,dx$ ведут себя одинаково (либо оба сходятся, либо оба расходятся).

***Пример* 31.3.** *Исследовать на сходимость интеграл* $\int\limits_0^\infty \dfrac{dx}{x^8 + 3x^2 + 1}$.

Вместо исходного интеграла рассмотрим интеграл с изменённым нижним пределом $\int\limits_1^\infty \dfrac{dx}{x^8 + 3x^2 + 1}$. Два этих интеграла ведут себя одинаково. Для определения сходимости последнего интеграла используем признак сравнения II. Помимо исходной подынтегральной функции $f(x) = \dfrac{1}{x^8 + 3x^2 + 1}$, введём в рассмотрение функцию $g(x) = \dfrac{1}{x^8}$.

Предел отношения этих функций на бесконечности $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$.

Т.к. интеграл $\int\limits_1^\infty \dfrac{dx}{x^8}$ сходится, то исходный интеграл тоже сходится. #

***Пример* 31.4.** *Исследовать на сходимость интеграл* $\int\limits_0^\infty \dfrac{dx}{\sqrt[4]{x}+3x+1}$.

Рассмотрим аналогичный интеграл с изменённым нижним пределом: $\int\limits_1^\infty \dfrac{dx}{\sqrt[4]{x}+3x+1}$. Используем признак сравнения II. Подынтегральная функция $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[4]{x}+3x+1}$, введём новую функцию $g(x) = \dfrac{1}{x}$. Предел этих функций на бесконечности $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{1}{3}$. Интеграл $\int\limits_1^\infty \dfrac{dx}{x}$ расходится, поэтому исходный интеграл тоже расходится. #

Задание. Можно ли в последнем примере в качестве функции $g(x)$ выбрать $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt[4]{x}}$?

Задание. Исследовать на сходимость интеграл $\int\limits_0^\infty \dfrac{dx}{\sqrt{x^3-x+1}}$.

***Пример* 31.5.** *Исследовать на сходимость интеграл* $\int\limits_{-\infty}^\infty e^{-x^2}dx$.

Данный интеграл относится к классу “неберущихся”. Для исследования сходимости, попробуем сравнить данный интеграл с другим, который “берётся” в элементарных функциях. Вначале используем чётность подынтегральной функции:

$$\int\limits_{-\infty}^\infty e^{-x^2}dx = \int\limits_0^\infty 2e^{-x^2}dx.$$

Последний интеграл ведёт себя также, как и интеграл $\int\limits_1^\infty 2e^{-x^2}dx$. Для исследования сходимости последнего интеграла используем признак сравнения I. На интервале $x > 1$ справедливо неравенство $2e^{-x^2} < 2xe^{-x^2}$, поэтому

$$\int\limits_1^\infty 2e^{-x^2}dx \leqslant \int\limits_1^\infty 2xe^{-x^2}dx = -\left. e^{-x^2}\right|_1^\infty = e^{-1}.$$

Следовательно, исходный интеграл также сходится. #

Теоремы, аналогичные теоремам 31.1, 31.2, есть и для интегралов II рода. Приведём их формулировки.

***Теорема* 31.3** (Теорема сравнения I)**.** *Пусть $f(x)$ и $g(x)$ – непрерывные функции на интервале $[a, b)$, для всех x из этого интервала выполняется $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$. Точка b является особой для обеих функций, т.е. при $x \to b$ функции $f(x) \to \infty$ и $g(x) \to \infty$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

- *Если $\int\limits_a^b g(x)\,dx$ сходится, то $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ сходится.*
- *Если $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ расходится, то $\int\limits_a^b g(x)\,dx$ расходится.*

***Теорема* 31.4** (Теорема сравнения II)**.** *Пусть $f(x)$ и $g(x)$ – непрерывные неотрицательные функции на интервале $[a, b)$. Точка b является особой для обеих функций, но существует предел $\lim\limits_{x\to b-0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lambda$. Если $0 < \lambda < < \infty$, то $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ и $\int\limits_a^b g(x)\,dx$ ведут себя одинаково (либо оба сходятся, либо оба расходятся).*

***Пример* 31.6.** *Исследовать на сходимость интеграл* $\int\limits_{-1}^{1} \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$.

У данного интеграла особыми точками являются точки $x = \pm 1$. Вначале используем чётность, чтобы рассмотреть интеграл только с одной особой точкой на промежутке интегрирования:

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = 2\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}.$$

Подберём функцию, неограниченную в точке $x = 1$, но интеграл от которой легко находится явно. Рассмотрим

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^4}}, \quad g(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}.$$

Предел этих функций

$$\lim_{x\to 1-0}\frac{g(x)}{f(x)}=\lim_{x\to 1-0}\frac{\sqrt{1-x^4}}{\sqrt{1-x}}=\lim_{x\to 1-0}\sqrt{(1+x^2)(1+x)}=2$$

является конечным положительным числом. Из признака сравнения II следует, что исходный интеграл ведёт себя также, как и интеграл

$$\int\limits_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x}}=-2\sqrt{1-x}\Big|_0^1=2.$$

Вывод: исходный интеграл сходится. #

Задание. Исследовать на сходимость интеграл $\displaystyle\int\limits_0^1\frac{dx}{x^3+2\sqrt{x}}$.

Абсолютная и условная сходимость. Пусть $f(x)$ – непрерывная функция на интервале $[a,\infty)$, принимающая как положительные, так и отрицательные значения. Такие функции будем называть знакопеременными. При исследовании сходимости интеграла $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ от знакопеременной функции иногда удобно рассмотреть интеграл $\int\limits_a^\infty |f(x)|\,dx$ от неотрицательной функции $|f(x)|$. Для исследования сходимости последнего интеграла можно применять, например, признаки сравнения. Имеет место следующая теорема.

***Теорема* 31.5.** *(Критерий абсолютной сходимости интеграла.)*

- *Если* $\displaystyle\int\limits_a^\infty |f(x)|\,dx$ *сходится, то* $\displaystyle\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ *также сходится. Говорят, что последний интеграл* сходится абсолютно.
- *Если* $\displaystyle\int\limits_a^\infty |f(x)|\,dx$ *расходится, то* $\displaystyle\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ *может оказаться как расходящимся, так и сходящимся. Если последний интеграл сходится, то говорят, что он* сходится условно.

***Пример* 31.7.** *Исследовать на сходимость интеграл* $\displaystyle\int\limits_1^\infty\frac{\sin x}{x}dx.$

Подынтегральная функция $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ является знакопеременной на интервале $[1, \infty)$, поэтому попробуем вначале исследовать сходимость функции $|f(x)| = \dfrac{|\sin x|}{x}$. Заметим, что $\dfrac{|\sin x|}{x} < \dfrac{1}{x}$. Но $\displaystyle\int \frac{dx}{x}$ расходится на интервале $[1, \infty)$, что не позволяет нам ответить на вопрос о сходимости исходного интеграла.

Применим к исходному интегралу метод интегрирования по частям:

$$\int\limits_1^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \left\{ \begin{array}{ll} u = \frac{1}{x}, & du = -\frac{dx}{x^2} \\ dv = \sin x dx, & v = -\cos x \end{array} \right\} = -\frac{\cos x}{x}\Big|_1^\infty - \int\limits_1^\infty \frac{\cos x}{x^2} dx.$$

Первое слагаемое ограничено, предел $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\cos x}{x} = 0$. Поэтому сходимость исходного интеграла полностью определяется сходимостью интеграла $\displaystyle\int\limits_1^\infty \frac{\cos x}{x^2} dx$, стоящего в правой части. Исследуем данный интеграл на абсолютную сходимость. Т.к. $\dfrac{|\cos x|}{x^2} < \dfrac{1}{x^2}$, а интеграл $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2}$ сходится, то интеграл $\displaystyle\int\limits_1^\infty \frac{|\cos x|}{x^2} dx$ сходится. Поэтому интеграл $\displaystyle\int\limits_1^\infty \frac{\cos x}{x^2} dx$ сходится абсолютно. Поэтому исходный интеграл также сходится.[1] #

Гамма-функция. [2] Рассмотрим интеграл

$$\Gamma(p) = \int\limits_0^\infty x^{p-1} e^{-x}\, dx,$$

зависящий от параметра p. Докажем, что этот интеграл является сходящимся при $p \in (0, 1)$. Разобьём его на два интеграла:

$$\int\limits_0^\infty x^{p-1} e^{-x}\, dx = \int\limits_0^1 x^{p-1} e^{-x}\, dx + \int\limits_1^\infty x^{p-1} e^{-x}\, dx.$$

У первого интеграла при $p < 1$ имеется особенность в точке $x = 0$, он

[1] Заметим, что утверждать, что и исходный интеграл сходится абсолютно, нельзя.

[2] Данный раздел является факультативным.

является несобственным интегралом II рода. По признаку сравнения I

$$\int\limits_0^1 x^{p-1}e^{-x}\,dx < e^{-1}\cdot\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^{1-p}}.$$

Последний интеграл является сходящимся, т.к. $1-p\in(0,1)$.

Теперь рассмотрим второй интеграл

$$\int\limits_1^\infty x^{p-1}e^{-x}\,dx,$$

являющийся несобственным интегралом I рода.

При $p<1$ выполняется $x^{p-1}<1$, по признаку сравнения I

$$\int\limits_1^\infty x^{p-1}e^{-x}\,dx < \int\limits_1^\infty e^{-x}\,dx = -\left.e^{-x}\right|_1^\infty = e^{-1}.$$

Значит, исходный интеграл также является сходящимся.

Мы доказали, что значении $\Gamma(p)$ определено при $p\in(0,1)$. Рассмотрим теперь интервал $p>1$. Доказательство существования значения $\Gamma(p)$ в этом интервале следует из справедливости так называемой формулы понижения: $\Gamma(p+1)=p\Gamma(p)$. Для доказательства этой формулы используем метод интегрирования по частям:

$$\Gamma(p+1)=\int\limits_0^\infty x^p e^{-x}dx = -\left.x^p e^{-x}\right|_0^\infty + \int\limits_0^\infty e^{-x}d(x^p) = p\int\limits_0^\infty x^{p-1}e^{-x}dx = p\Gamma(p).$$

Значит, рассматриваемый интеграл определён при $p>0$, зависимость значения данного несобственного интеграла от параметра p называется *гамма-функцией* $\Gamma(p)$. При $p=1$ интеграл легко вычислить явно: $\Gamma(1)=1$. При других натуральных значениях p, согласно формуле понижения,

$$\Gamma(p)=(p-1)\cdot\Gamma(p-1)=(p-1)(p-2)\cdots 1\cdot\Gamma(1)=(p-1)!$$

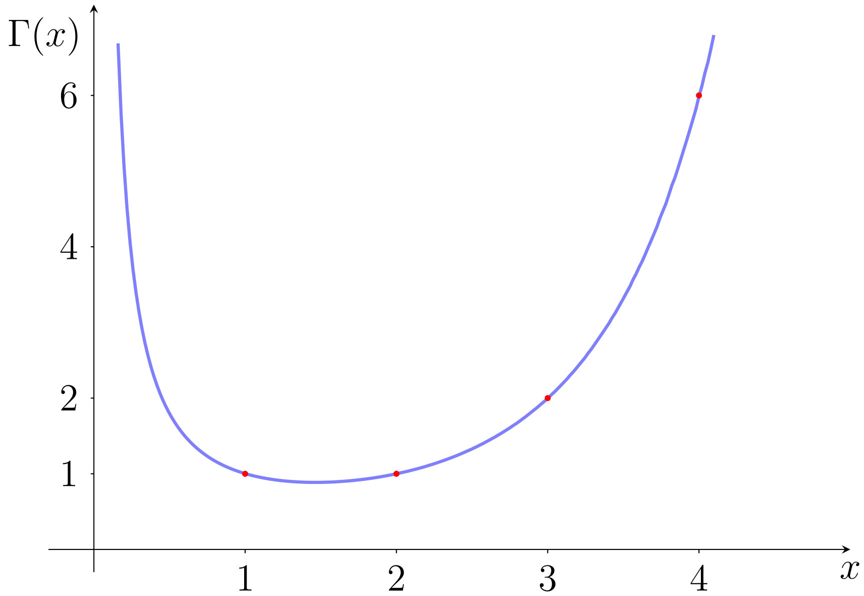
Значит, при натуральных значениях аргумента, гамма-функция принимает также целые значения, совпадающие со значением факториала. Но гамма-функция определена и при нецелых значениях аргумента, поэтому её называют обобщением факториала на вещественные значения, считая, что $x! = \Gamma(x+1)$. Так,

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int\limits_0^\infty \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}dx = 2\int\limits_0^\infty e^{-x} d(\sqrt{x}) = 2\int\limits_0^\infty e^{-t^2}dt = \sqrt{\pi}.$$ [1]

Формула понижения позволяет вычислить точные значения факториалов чисел, имеющих дробную часть, равную $\frac{1}{2}$. Например,

$$\left(-\frac{1}{2}\right)! = \sqrt{\pi}, \quad \left(\frac{1}{2}\right)! = \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)! = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \quad \left(\frac{3}{2}\right)! = \frac{3\sqrt{\pi}}{4}.$$

Ниже представлен график гамма-функции.



§32. Числовые ряды

Определение числового ряда. Пусть дана числовая последовательность $\{a_n\}$: $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ *Числовым рядом* называется выражение вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots,$$

представляющее собой формальную сумму бесконечного числа элементов этой последовательности. Приведём примеры таких рядов:

[1]Значение $\sqrt{\pi}$ данного несобственного интеграла будет вычислено в §51.

- сумма геометрической прогрессии $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots,$
- гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots,$
- сумма натуральных чисел $\sum_{n=1}^{\infty} n = 1 + 2 + 3 + 4 + \ldots$

Для более строгого определения суммы числового ряда и условий, когда эта сумма имеет смысл, введём несколько определений.

Частичная сумма и сходимость. *Частичной суммой* S_n ряда называется сумма первых n слагаемых:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_n.$$

Ряд называется *сходящимся*, если последовательность $\{S_n\}$ частичных сумм сходится, а *суммой ряда* называется значение предела частичных сумм:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = S.$$

Ряд называется *расходящимся*, если последовательность $\{S_n\}$ частичных сумм не имеет предела.

В качестве примера рассмотрим сумму бесконечной геометрической прогрессии:

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1} = 1 + q + q^2 + q^3 + \ldots$$

Докажем, что при $|q| < 1$ этот ряд сходится и найдём его сумму. Запишем частичную сумму этого ряда:

$$S_n = 1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1}.$$

Заметим, что

$$S_n - S_n q = (1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1}) - (q + q^2 + q^3 + \ldots + q^n) = 1 - q^n.$$

Поэтому

$$S_n = \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{1}{1-q} - \frac{q^n}{1-q}.$$

При $n \to \infty$ и при $|q| < 1$ второе слагаемое стремится к нулю и $\{S_n\} \to \frac{1}{1-q}$.

Следовательно, данный ряд сходится при $|q| < 1$ и его сумма равна $S = \frac{1}{1-q}$.

Задание. Исследуйте на сходимость сумму геометрической прогрессии при $q = 2$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1} = 1 + 2 + 4 + 8 + \ldots$$

***Теорема* 32.1** (Необходимый признак сходимости ряда)**.** *Если ряд сходится, то* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

◀ Заметим, что $a_n = S_n - S_{n-1}$. Рассмотрим это равенство при $n \to \infty$, при этом используем, что для сходящегося ряда $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0. \qquad \blacktriangleright$$

***Пример* 32.1.** *Найти сумму ряда:*

$$S = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n\cdot(n+1)} + \ldots$$

Для всех натуральных n справедливо равенство

$$\frac{1}{n\cdot(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1},$$

поэтому

$$S_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n\cdot(n+1)} =$$

$$= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Перейдём к пределу:

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1. \qquad \#$$

***Пример* 32.2.** *Найти сумму ряда:*

$$S = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$$

Т.к. $a_n = (-1)^{n-1}$, то $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$. Необходимый признак сходимости не выполняется, поэтому исходный ряд расходится. #

***Пример* 32.3.** *Доказать расходимость гармонического ряда*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots$$

Разобьём слагаемые ряда в группы и используем неравенства:

$$1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{16}\right) + \ldots >$$

$$> 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{16} + \ldots + \frac{1}{16}\right) + \ldots$$

Сумма слагаемых в каждой скобке равна $\frac{1}{2}$, поэтому

$$S_4 > 1 + \frac{2}{2}, \quad S_8 > 1 + \frac{3}{2}, \quad S_{16} > 1 + \frac{4}{2}, \quad \ldots \quad S_{2^n} > 1 + \frac{n}{2}.$$

Следовательно, последовательность $\{S_n\}$ неограниченно возрастает и не является сходящейся. Поэтому гармонический ряд расходится. #

Этот ряд является примером расходящегося ряда, для которого выполняется необходимый признак сходимости.

Отметим некоторые свойства сходящихся рядов:

1. Если ряд $\sum a_n$ является сходящимся и его сумма равна S, то для любого числа λ ряд $\sum(\lambda a_n)$ будет сходиться к числу λS.
2. Если ряд $\sum a_n$ сходится к числу A и ряд $\sum b_n$ – к числу B, то ряд $\sum(a_n + b_n)$ будет сходиться к числу $A + B$.
3. Для любого натурального m ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{n+m}$ ведут себя одинаково (либо оба сходятся, либо оба расходятся).

Как следствие последнего свойства, добавление к ряду (или удаление из ряда) конечного числа слагаемых не меняет сходимость ряда.

Знакоположительные ряды и признаки сравнения. Ряд, у которого все члены неотрицательны, называется *знакоположительным.*

***Теорема* 32.2** (Условие сходимости знакоположительного ряда)**.** *Для того чтобы знакоположительный ряд сходился, необходимо и достаточно, чтобы последовательность частичных сумм этого ряда была ограничена.*

◀ Необходимость $\Rightarrow$: Пусть ряд $\sum a_n$ сходится. Тогда последовательность $\{S_n\}$ его частичных сумм имеет предел и, согласно свойству сходящихся последовательностей, ограничена. Необходимость доказана.

Достаточность $\Leftarrow$: Пусть $\{S_n\}$ ограничена. Заметим, что эта последовательность также является монотонной, т.к. $S_n - S_{n-1} = a_n \geqslant 0$. Согласно теоремы Вейерштрасса (см. §17) она сходится, т.е. сходится и ряд $\sum a_n$. ▶

Пусть $\sum a_n$ и $\sum b_n$ – два знакоположительных ряда. Тогда для них справедливы две следующие теоремы:

***Теорема* 32.3** (Признак сравнения I)**.** *Если* $\forall n$ *выполняется* $a_n \leqslant b_n$, *то справедливы следующие утверждения:*

- *Из сходимости ряда* $\sum b_n$ *следует сходимость* $\sum a_n$,
- *Из расходимости ряда* $\sum a_n$ *следует расходимость* $\sum b_n$.

◀ Обозначим частичные суммы рядов $\sum a_n$ и $\sum b_n$ через S_n и T_n соответственно. Из неравенства $a_n \leqslant b_n$ следует, что $S_n \leqslant T_n$.

Пусть ряд $\sum b_n$ сходится. Тогда, согласно условию сходимости знакоположительного ряда, последовательность $\{T_n\}$ ограничена. Это значит, что существует такое число M, что для всех n справедливо $T_n < M$. Но тогда и $S_n < M$, откуда сразу следует сходимость $\sum a_n$. ▶

Задание. Докажите вторую часть данной теоремы.

***Теорема* 32.4** (Признак сравнения II)**.** *Если существует предел* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lambda$ *и* $0 < \lambda < \infty$, *то ряды* $\sum a_n$ *и* $\sum b_n$ *ведут себя одинаково.*

Данную теорему примем без доказательства.

***Пример* 32.4.** *Исследовать сходимость ряда*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \ldots$$

Заметим, что

$$\frac{1}{4}=\frac{1}{2\cdot 2}<\frac{1}{1\cdot 2},\qquad \frac{1}{9}=\frac{1}{3\cdot 3}<\frac{1}{2\cdot 3},\qquad \frac{1}{n^2}<\frac{1}{(n-1)n},$$

Так как ряд $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots$ сходится (см. пример 32.1), при признаку сравнения I исходный меньший ряд тоже сходится. #

Замечание. Из сравнения этих рядов следует, что сумма ряда $\sum\frac{1}{n^2}$ меньше суммы $1+\sum\frac{1}{n(n+1)}=1+1=2$. Позднее будет показано, что $\sum\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$.

***Пример* 32.5.** *Исследовать сходимость ряда*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}=\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{10}}+\frac{1}{\sqrt{17}}+\ldots$$

Используем признак сравнения II, в качестве второго ряда выберем гармонический:

$$a_n=\frac{1}{\sqrt{n^2+1}},\quad b_n=\frac{1}{n},\quad \lambda=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}=1.$$

Предел получился конечным ($\lambda=1$), поэтому исходный ряд ведёт себя также, как и гармонический, т.е. расходится. #

Признаки Даламбера и Коши. Рассмотрим ещё два признака сходимости знакоположительных рядов.

***Теорема* 32.5** (Признак Даламбера)**.** *Пусть $\sum a_n$ – знакоположительный ряд и существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=q$. Тогда*

- *если $q<1$, то ряд $\sum a_n$ сходится,*
- *если $q>1$, то ряд $\sum a_n$ расходится.*

Замечание. Если $q=1$, то про ряд $\sum a_n$ нельзя сказать определённо, сходится он или расходится. Например, для рядов $\sum\frac{1}{n}$ и $\sum\frac{1}{n^2}$ число $q=1$, но первый ряд расходится, а второй – сходится.

***Пример* 32.6.** *Исследовать сходимость ряда*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{100^n}{n!}=\frac{100}{1!}+\frac{100^2}{2!}+\frac{100^3}{3!}+\ldots$$

Найдём отношение соседних членов ряда

$$q = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{100^{n+1}}{(n+1)!}\frac{n!}{100^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{100}{n+1} = 0.$$

Т.к. $q < 1$, то исходный ряд сходится. #

***Теорема* 32.6** (Радикальный признак Коши)**.** *Пусть $\sum a_n$ – знакоположительный ряд и существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q$. Тогда*

- *если $q < 1$, то ряд $\sum a_n$ сходится,*
- *если $q > 1$, то ряд $\sum a_n$ расходится.*

Замечание. Если $q = 1$, то про ряд $\sum a_n$ нельзя сказать определённо, сходится он или расходится.

***Пример* 32.7.** *Исследовать сходимость ряда*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n^2}.$$

Найдём число q, являющееся критерием радикального признака:

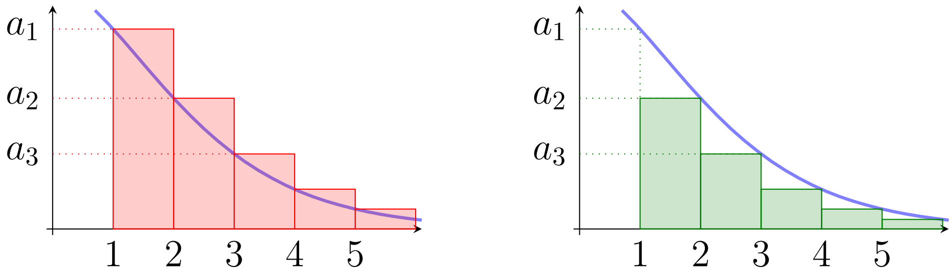
$$q = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n} = \frac{1}{3}\left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right)^2 = \frac{e^2}{3} \approx 2.463.$$

Т.к. $q > 1$, то исходный ряд расходится.

Интегральный признак Коши. Сформулируем и докажем ещё один важный признак сходимости знакоположительного ряда.

***Теорема* 32.7** (Интегральный признак Коши)**.** *Пусть $f(x)$ – непрерывная, положительная и монотонно убывающая на интервале $x \in (1, \infty)$ функция. Пусть также $a_n = f(n)$. Тогда интеграл $\int\limits_1^{\infty} f(x)\,dx$ и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ ведут себя одинаково.*

◀ Пусть $a_n = f(n)$ и $S = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$. Площади ступенчатых фигур, изображенных на рисунках равны S и $S - a_1$ соответственно:



Бесконечная криволинейная трапеция, ограниченная графиком $f(x)$, осью Ox и прямой $x = 1$ полностью включается в левую фигуру и, наоборот, правая фигура полностью включается в криволинейную трапецию. Использовав геометрический смысл определённого интеграла, запишем

$$S - a_1 < \int\limits_1^{\infty} f(x)\,dx < S.$$

Из этих неравенств следует, что из сходимости ряда следует ограниченность интеграла и, как следствие, его сходимость. Неравенства можно записать по другому:

$$\int\limits_1^{\infty} f(x)\,dx < S < a_1 + \int\limits_1^{\infty} f(x)\,dx.$$

откуда следует, что из сходимости интеграла также следует ограниченность и сходимость числового ряда. ▶

Замечание. Из одновременной сходимости интеграла и ряда не следует равенство значений интеграла и суммы ряда.

***Пример* 32.8.** *Исследовать на сходимость ряд*

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \ldots$$

Рассмотрим функцию $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$. Эта функция является положительной и монотонно убывающей, члены исходного ряда $a_n = f(n)$. Используем интегральный признак и рассмотрим неопределённый интеграл

$$\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\,\sqrt{x}\Big|_1^{\infty} = \infty.$$

Интеграл расходится, поэтому ряд также расходится.

Знакопеременные ряды. Абсолютная и условная сходимость. Ряд, в котором есть как положительные, так и отрицательные члены, называется *знакопеременным.*

Пусть $\sum a_n$ – знакопеременный ряд. Введём в рассмотрение новый знакоположительный ряд из абсолютных значений $\sum |a_n|$. Имеет место

***Теорема* 32.8.** *(Критерий абсолютной сходимости ряда.)*

- *Если $\sum |a_n|$ сходится, то исходный ряд тоже сходится и, говорят,* сходится абсолютно.
- *Если $\sum |a_n|$ расходится, то исходный ряд либо расходится, либо сходится. В случае сходимости говорят, что он* сходится условно.

Отличие абсолютно и условно сходящихся рядов заключается в возможности использования такого приёма, как перестановка слагаемых в ряде. Справедливы две следующие теоремы.

***Теорема* 32.9** (Коши)**.** *В абсолютно сходящемся ряде от перестановки слагаемых сумма не меняется.*

***Теорема* 32.10** (Риман)**.** *В условно сходящемся ряде перестановкой слагаемых можно получить ряд с любой суммой, включая значения $+\infty$ и $-\infty$.*

Эти теоремы примем без доказательства. Изменение суммы ряда в условно сходящем ряде проиллюстрируем на примере. Рассмотрим ряд

$$S = \frac{1}{1} - \frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \ldots$$

Докажем вначале, что он сходится, использовав определение сходимости через частичные суммы. Видно, что любая чётная частичная сумма $S_{2k} = 0$, а нечётная сумма $S_{2k-1} = \frac{1}{k}$. При $n \to \infty$ как чётная, так и нечётная частичная сумма в пределе дают 0, т.е.

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = 0.$$

Итак, исходный ряд сходится к нулю. Сходимость условная, т.к. ряд из абсолютных значений расходится. Далее, поменяв местами слагаемые в исходном ряде, получим новый ряд:

$$S_1 = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{3} + \ldots$$

Если раньше положительные и отрицательные слагаемые чередовались, то теперь в ряду вначале идут два положительных, а потом одно отрицательное слагаемое. Заметим, что при такой перестановке ни одно слагаемое не пропускается. Найдём сумму нового ряда:

$$S_1 = \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{1}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{3}\right) + \ldots =$$

$$= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) + \ldots = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{5\cdot 6} + \ldots$$

Этот ряд является сходящимся знакоположительным рядом и его сумма точно больше первого слагаемого $S_1 > \frac{1}{2}$, т.е. $S_1 \neq S$.

Замечание. Позднее будет показано, что $S_1 = \ln 2$.

Знакочередующиеся ряды. Признак Лейбница. Знакопеременный ряд называется *знакочередующимся*, если у него любые рядом стоящие члены имеют противоположные знаки.

***Теорема* 32.11** (Признак Лейбница)**.** *Пусть* $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots$ *– знакочередующийся ряд* ($a_n > 0$)*. Этот ряд сходится, если*

- *выполняется необходимый признак:* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$,
- *члены ряда монотонны:* $a_{n+1} \leqslant a_n$ *(для всех* $n > N$*).*

◀ Для доказательства рассмотрим частичные суммы ряда с чётным числом слагаемых. Заметим, что

$$S_{2n} - S_{2n-2} = a_{2n-1} - a_{2n} \geqslant 0 \quad \Rightarrow \quad S_{2n} \geqslant S_{2n-2}.$$

Т.е. последовательность $\{S_{2n}\}$ монотонно возрастает. С другой стороны

$$S_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3) - \ldots - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n} < a_1.$$

Поэтому последовательность $\{S_{2n}\}$ ограничена. По теореме Вейерштрасса любая ограниченная монотонная последовательность сходится, поэтому существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n} = S$. Рассмотрим теперь предел последовательности частичных сумм с нечётными индексами. При выполнении необходимого признака сходимости

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n+1} = \lim_{n\to\infty}(S_{2n} + a_{2n+1}) = S + \lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = S.$$

Итак, к числу S сходится как последовательность частичных сумм как с чётными, так и с нечётными индексами. Значит, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, следовательно, исходный знакочередующийся ряд сходится. ▶

***Пример* 32.9.** *Исследовать на сходимость ряд*

$$\frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \ldots$$

Этот ряд сходится, т.к. выполняются оба условия признака Лейбница:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0, \qquad \frac{1}{\sqrt{n+1}} < \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Т.к. ряд из абсолютных величин расходится (пример 32.8), то исходный ряд сходится условно. #

§33. Степенные ряды

Определение. *Функциональным рядом* называется бесконечная сумма последовательности функций $f_n(x)$, заданных на одном и том же множестве:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + \ldots$$

Для каждого фиксированного значения x данный ряд является числовым с коэффициентами $a_n = f_n(x)$. Можно определить *область сходимости* функционального ряда – это множество значений x, для которых получаемый числовой ряд сходится. Сумма ряда внутри области сходимости зависит от x, т.е. является функцией $S(x)$.

Степенным рядом называется бесконечная сумма одночленов $c_n x^n$, где n – неотрицательное целое число:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots$$

Степенной ряд является частным случаем функционального. Множество значений x, для которых степенной ряд сходится, называется *областью сходимости* ряда.

***Теорема* 33.1** (Теорема Абеля)**.** *Если степенной ряд сходится при $x = d$, то он сходится абсолютно на интервале $x \in (-|d|, |d|)$.*

◀ Если ряд $\sum c_n d^n$ сходится, то, согласно необходимому признаку сходимости, предел $\lim\limits_{n\to\infty} c_n d^n = 0$. Любая сходящая последовательность ограничена, поэтому $|c_n d^n| < M \quad \Rightarrow \quad |c_n| < \frac{M}{|d|^n}$.

Рассмотрим два знакоположительных ряда $\sum |c_n x^n|$ и $\sum M \left|\frac{x}{d}\right|^n$. Заметим, что каждый член первого ряда меньше соответствующего члена второго ряда. Но второй ряд $\sum M \left|\frac{x}{d}\right|^n = M \sum \left|\frac{x}{d}\right|^n$ для $x \in (-|d|, |d|)$ является сходящейся геометрической прогрессией. Поэтому, согласно признаку сравнения I (теорема 32.3), ряд из модулей $\sum |c_n x^n|$ также сходится. Это означает, что ряд $\sum c_n x^n$ сходится абсолютно. ▶

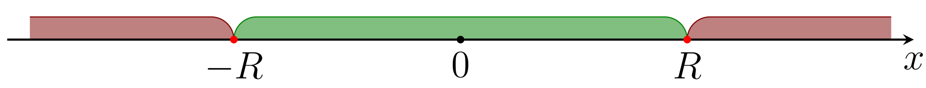
***Следствие* 33.1.1.** *Если ряд расходится при $x = d$, то он расходится при $x \in (-\infty, -|d|) \cup (|d|, \infty)$.*

Задание. Докажите следствие, используя теорему Абеля.

Следствием теоремы Абеля также является то, что для любого степенного ряда существует такое число R, что

- при $|x| < R$ ряд сходится,
- при $|x| > R$ ряд расходится.

Число R называется *радиусом сходимости* числового ряда.



В граничных точках $x = \pm R$ без предварительного исследования нельзя сказать, сходится степенной ряд или расходится.

Замечание. Существуют ряды, сходящиеся для всех x. В этом случае будем считать, что $R = \infty$. Также существуют ряды, для которых $R = 0$, т.е. область сходимости этих рядов состоит из одной точки $x = 0$.

Признаки Даламбера и Коши. Для нахождения радиуса сходимости степенного ряда по коэффициентам c_n можно использовать признаки Даламбера и Коши.

***Теорема* 33.2** (Признак Даламбера). *Если* $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{c_{n+1}}{c_n}\right| = d$, *то радиус сходимости* $R = \dfrac{1}{d}$.

◀ Найдём предел $q = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{c_{n+1}x^{n+1}}{c_n x^n}\right| = d\cdot|x|$.

По признаку Даламбера для числовых рядов при $|x| < \frac{1}{d}$ число $q < 1$ и ряд сходится. При $|x| > \frac{1}{d}$ число $q > 1$ и расходится. Значит, $\frac{1}{d}$ является радиусом сходимости. ▶

Замечание. Для рядов, содержащих только чётные или нечётные степени x предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|$ не существует, но может существовать $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+2}}{c_n}\right| = d_2$. Тогда $R^2 = \dfrac{1}{d_2}$.

***Пример* 33.1.** *Исследовать сходимость ряда*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n} = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \ldots$$

Для нахождения радиуса сходимости используем признак Даламбера:

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n}{n+1}\right| = 1.$$

Радиус сходимости $R = 1$, для точного определения области сходимости необходимо исследовать точки $x = \pm 1$.

При $x = 1$ данный ряд является гармоническим и он расходится. При $x = -1$ мы имеем знакочередующийся монотонный ряд, который сходится по признаку Лейбница. Область сходимости исходного ряда $x \in [-1, 1)$. #

***Пример* 33.2.** *Исследовать сходимость ряда*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

Находим радиус

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{n!}{(n+1)!}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

Радиус $R = \infty$. Ряд сходится для любого x. #

***Пример* 33.3.** *Исследовать сходимость ряда*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n^2\ 2^n} = \frac{x^2}{1^2 \cdot 2^1} + \frac{x^4}{2^2 \cdot 2^2} + + \frac{x^6}{3^2 \cdot 2^3} + \frac{x^8}{4^2 \cdot 2^4} + \dots$$

Этот ряд содержит только чётные степени. Поэтому для вычисления радиуса сходимости используем формулу

$$\frac{1}{R^2} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_{2n+2}}{c_{2n}}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{n^2\ 2^n}{(n+1)^2\ 2^{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{2(n+1)^2} = \frac{1}{2}.$$

Радиус $R = \sqrt{2}$. Ряд сходится для $x \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$. #

Задание. Объясните, почему данный ряд сходится в точках $x = \pm\sqrt{2}$.

***Теорема* 33.3** (Радикальный признак Коши)**.** *Если* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = d$, *то радиус сходимости* $R = \dfrac{1}{d}$.

◀ Найдём предел $q = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n x^n|} = d \cdot |x|$.

По радикальному признаку Коши для числовых рядов при $|x| < \frac{1}{d}$ число $q < 1$ и ряд сходится. При $|x| > \frac{1}{d}$ число $q > 1$ и ряд расходится. ▶

***Пример* 33.4.** *Исследовать сходимость ряда*

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n x^n = 2x + 2^2x^2 + 2^3x^3 + \dots$$

По радикальному признаку

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n} = 2.$$

Значит, $R = \frac{1}{2}$. При $x = \frac{1}{2}$ имеем ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 1^n$, он расходится. При $x = -\frac{1}{2}$ получаем ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n$, он тоже расходится. Ответ: область сходимости ряда $x \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. #

Ряд Тейлора – Маклорена. Пусть $f(x)$ – бесконечно раз дифференцируемая функция. Запишем для неё формулу Маклорена (см. §22):

$$f(x) = f(0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + r(x), \quad r(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} x^{n+1}.$$

Рассмотрим предел $n \to \infty$. Пусть для всех x из некоторого интервала выполнено условие

$$\lim_{n\to\infty} \frac{M_n}{n!} x^n = 0, \qquad M_n = \max f^{(n)}(x).$$

Тогда в формуле Маклорена $r(x) \to 0$ и функция $f(x)$ может быть записана в виде степенного ряда

$$f(x) = f(0) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \ldots \tag{33.1}$$

Этот ряд называется рядом Тейлора – Маклорена, коэффициенты данного степенного ряда связаны с суммой $f(x)$ ряда формулой

$$c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

Заметим, что равенство (33.1) справедливо не для всех x из области определения $f(x)$, а только для x из области сходимости степенного ряда.

Приведём ряды Тейлора – Маклорена для некоторых функций:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots, \qquad R = \infty,$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots, \qquad R = \infty,$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots, \qquad R = \infty,$$

$$(1+x)^\alpha = 1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3+\ldots, \qquad R=1, \quad (33.2)$$

$$\frac{1}{1-x} = 1+x+x^2+x^3+x^4+\ldots, \qquad R=1.$$

Ещё раз заметим, что два последних равенства справедливы только для $|x|<1$, хотя функции $(1+x)^\alpha$ и $\frac{1}{1-x}$ определены и для $|x|>1$.

Дифференцирование и интегрирование рядов. Пусть для всех $|x|<R$ справедливо разложение функции $f(x)$ в степенной ряд:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \ldots$$

Тогда для производной $f'(x)$ и первообразной $F(x)$ справедливы следующие разложения в степенные ряды:

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n c_n x^{n-1} = c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + \ldots,$$

$$F(x) = F(0) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} x^{n+1} = F(0) + c_0 x + \frac{c_1}{2}x^2 + \frac{c_2}{3}x^3 + \ldots, \quad (33.3)$$

причём радиусы сходимости новых рядов совпадают с радиусом R сходимости исходного ряда.

Т.о., с помощью приёмов дифференцирования и интегрирования возможно получение формул разложения функций в степенные ряды. Ещё один способ получения нового степенного ряда – умножение функции на x^k, где k – натуральное число:

$$x^k f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+k} = c_0 x^k + c_1 x^{k+1} + c_2 x^{k+2} + \ldots$$

***Пример* 33.5.** *Найти сумму ряда*

$$S(x) = x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} n x^n.$$

В качестве функции $f(x)$ выберем сумму геометрической прогрессии

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$$

Её производная имеет следующее разложение:

$$f'(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots$$

Умножив на x, получим искомый ряд

$$xf'(x) = \frac{x}{(1-x)^2} = x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + \ldots$$

Значит, сумма исходного ряда

$$S(x) = xf'(x) = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

Эта формула справедлива только для $|x| < 1$, т.к. радиус сходимости исходной суммы геометрической прогрессии равен единице. #

Задание. Докажите, что сумма степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n = x + 4x^2 + 9x^3 + 16x^4 + \ldots = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}.$$

***Пример* 33.6.** *Найти сумму ряда*

$$S(x) = x + 2\frac{x^2}{1!} + 3\frac{x^3}{2!} + 4\frac{x^4}{3!} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^n}{(n-1)!}.$$

В качестве $f(x)$ возьмём экспоненту

$$f(x) = e^x = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Умножим эту функцию на x и возьмём производную от произведения:

$$(xe^x)' = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n-1)!} \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Ещё раз умножив на x, окончательно получим

$$x(xe^x)' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^n}{(n-1)!}.$$

Значит, сумма исходного ряда

$$S(x) = x(xe^x)' = x(e^x + xe^x) = x(x+1)e^x. \qquad \#$$

Разложение $\ln(1+x)$ **и** $\operatorname{arctg} x$**.** Возьмём за основу геометрическую прогрессию со знаменателем $q=-x$:

$$f(x)=\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\dots$$

Первообразной $f(x)$ является $F(x)=\ln(1+x)$. По формуле (33.3), с учётом $F(0)=0$ получим разложение в степенной ряд логарифма:

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\dots$$

Данный ряд сходится при $x\in(-1,1]$. При $x=1$ получим условно сходящийся по признаку Лейбница ряд

$$\ln 2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\dots \tag{33.4}$$

Возьмём геометрическую прогрессию со знаменателем $q=-x^2$:

$$f(x)=\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-x^6+\dots$$

Первообразной $f(x)$ является $F(x)=\operatorname{arctg} x$. С учётом $F(0)=0$ по запишем разложение в степенной ряд арктангенса:

$$\operatorname{arctg} x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\dots$$

Этот ряд сходится при $x\in[-1,1]$. При $x=1$ получим формулу для нахождения числа π:

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\dots \tag{33.5}$$

***Пример* 33.7.** *Найти сумму ряда*

$$f(x)=x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{7}+\dots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}.$$

Продифференцировав этот ряд, получим геометрическую прогрессию со знаменателем $q=x^2$:

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}x^{2n-2}=1+x^2+x^4+x^6+\dots=\frac{1}{1-x^2}.$$

Значит,

$$f(x) = \int \frac{dx}{1-x^2} = -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}.$$

Постоянная C найдена из условия $f(0) = 0$. Радиус сходимости исходного ряда совпадает с радиусом сходимости геометрической прогрессии, т.е. $R = 1$. При $x = \frac{1}{3}$ получим формулу

$$\frac{1}{2}\ln 2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3\cdot 3^3} + \frac{1}{5\cdot 3^5} + \frac{1}{7\cdot 3^7} + \ldots \tag{33.6}$$

Заметим, что данная формула лучше подходит для вычисления $\ln 2$ по сравнению с формулой (33.4) из-за более быстрой сходимости. Действительно, найдём число n, для которого все члены ряда по абсолютному значению будут меньше 10^{-6}. В ряду (33.4) число $n = 10^6$, а в ряду (33.6) из неравенства $11\cdot 3^{11} > 10^6$ следует, что $n = 6$. #

***Пример* 33.8.** *Разложить* $f(x) = \arcsin x$ *в степенной ряд.*

Так как $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ разложим вначале $f'(x)$. Для этого используем биномиальный ряд (33.2) с показателем $\alpha = -\frac{1}{2}$:

$$(1-x^2)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1\cdot 3}{2^2\cdot 2!}x^4 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3\cdot 3!}x^6 + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2^4\cdot 4!}x^8 + \ldots$$

Двойным факториалом $n!!$ называется произведение чисел от 1 до n, имеющих ту же чётность, что и n. Заметим, что в числителях дробей полученного ряда стоят произведения нечётных чисел, т.е. двойные факториалы. Так, числитель пятого слагаемого данного ряда $1\cdot 3\cdot 5\cdot 7 = 7!!$ В знаменателях ряда также стоят двойные факториалы чётных чисел, например, $2^4\cdot 4! = (2\cdot 1)\cdot(2\cdot 2)\cdot(2\cdot 3)\cdot(2\cdot 4) = 2\cdot 4\cdot 6\cdot 8 = 8!!$ Значит,

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1!!}{2!!}x^2 + \frac{3!!}{4!!}x^4 + \frac{5!!}{6!!}x^6 + \frac{7!!}{8!!}x^6 + \ldots$$

Проинтегрировав, получим искомое разложение

$$\arcsin x = x + \frac{1!!}{2!!}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{3!!}{4!!}\cdot\frac{x^5}{5} + \frac{5!!}{6!!}\cdot\frac{x^7}{7} + \ldots$$ #

При $x = \frac{1}{2}$ получим формулу для вычисления числа π:

$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1!!}{2!!}\cdot\frac{1}{3\cdot 2^3} + \frac{3!!}{4!!}\cdot\frac{1}{5\cdot 2^5} + \frac{5!!}{6!!}\cdot\frac{1}{7\cdot 2^7} + \ldots$$

Задание. Объясните, почему данная формула лучше подходит для вычисления π по сравнению с формулой (33.5).

§34. Ряды Фурье

Определения. Рассмотрим функциональный ряд в случае, когда функции $f_n(x)$ являются тригонометрическими и равными либо $a_n \cos nx$, либо $b_n \sin nx$. Такой ряд называется *тригонометрическим рядом Фурье*:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) = \tag{34.1}$$

$$= \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + a_3 \cos 3x + \ldots$$

Сумма $f(x)$ этого ряда является периодической функцией с периодом 2π. Далее будем рассматривать её на отрезке $[-\pi, \pi]$. Числа a_0, a_n, b_n называются коэффициентами ряда Фурье. Рассмотрим задачу нахождения их значений по заданной функции $f(x)$.

Нахождение коэффициентов ряда Фурье. Проинтегрировав (34.1) по интервалу $(-\pi, \pi)$, получим

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2}\,dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_{-\pi}^{\pi} a_n \cos nx\,dx + \int_{-\pi}^{\pi} b_n \sin nx\,dx \right) = a_0\pi.$$

Здесь мы использовали формулы, справедливые для любого натурального числа n:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\,dx = 2\int_{0}^{\pi} \cos nx\,dx = \frac{2}{n} \sin nx \Big|_0^{\pi} = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx\,dx = 0.$$

Последний интеграл равен нулю как интеграл от нечётной функции по симметричному отрезку. Следовательно, коэффициент a_0 выражается через $f(x)$ по формуле

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx.$$

Далее умножим (34.1) на $\cos mx$ и проинтегрируем по интервалу $(-\pi,\pi)$:

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx\,dx = 0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\int\limits_{-\pi}^{\pi}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)\cos mx\,dx\right).$$

Вычислим входящие в сумму интегралы:

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cos mx\,dx = \int\limits_{0}^{\pi}\cos(n-m)x\,dx + \int\limits_{0}^{\pi}\cos(n+m)x\,dx =$$

$$= \int\limits_{0}^{\pi}\cos(n-m)x\,dx = \begin{cases} 0, & (n\neq m),\\ \pi, & (n=m).\end{cases}$$

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sin nx\cos mx\,dx = 0,$$

как интеграл от нечётной функции. В итоге получим

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx\,dx = a_m\pi \quad\Rightarrow\quad a_m = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx\,dx.$$

Задание. Докажите формулу

$$b_m = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin mx\,dx.$$

Итак, коэффициенты ряда Фурье функции $f(x)$ находятся по формулам

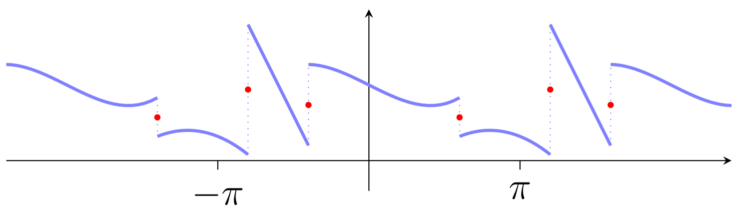
$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx.$$

Условия сходимости ряда Фурье. Напомним, что для существования разложения функции $f(x)$ в степенной ряд по формуле (33.1) требуется условие бесконечной дифференцируемости функции. Это ограничение значительно сужает класс функций, для которых существуют разложения в степенной ряд. Условия, при которых существует разложение функции ряд Фурье (34.1) менее требовательны к виду функции. В частности, не требуется дифференцируемость и даже непрерывность функции. Эти условия сформулированы в следующей теореме:

***Теорема* 34.1** (Дирихле)**.** *Пусть $f(x)$ – 2π-периодическая функция, имеющая на отрезке $(-\pi,\pi)$ конечное число точек разрыва I рода и конечное число участков монотонности. Тогда*

- *Если в точке x_0 функция $f(x)$ непрерывна, то ряд Фурье в этой точке сходится к $f(x_0)$.*
- *Если в точке x_0 функция $f(x)$ терпит разрыв, то ряд Фурье в этой точке сходится к среднему арифметическому значений лево- и правостороннего предела, т.е. к числу* $\dfrac{f(x_0-0)+f(x_0+0)}{2}$.



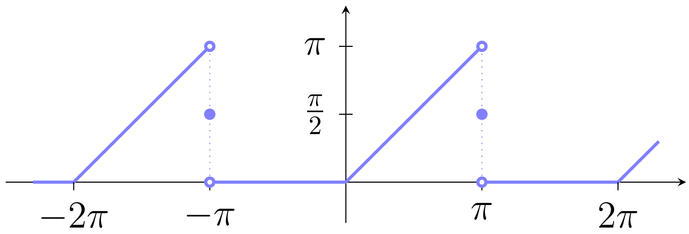
Данную теорему примем без доказательства.

Задание. Удовлетворяют ли следующие функции условиям теоремы?

$$f_1(x)=\begin{cases}\frac{|x^3-x|}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}\quad,\qquad f_2(x)=\begin{cases}x\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 1, & x=0.\end{cases}$$

***Пример* 34.1.** *Разложить следующую функцию* $f(x)=$
$$=\begin{cases}x, & x\in[0,\pi),\\ 0, & x\in(-\pi,0],\\ \frac{\pi}{2}, & x=\pm\pi\end{cases}$$ *в ряд Фурье на отрезке* $[-\pi,\pi]$.

Построим график функции на отрезке $[-\pi, \pi]$:



Найдём коэффициенты a_0 и a_n:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} x\,dx = \frac{1}{\pi}\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^\pi = \frac{\pi}{2},$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} x\cos nx\,dx =$$

$$= \left\{\begin{array}{ll} u = x, & du = dx \\ dv = \cos nx dx, & v = \frac{1}{n}\sin nx \end{array}\right\} = \left.\frac{x}{\pi n}\sin nx\right|_0^\pi - \frac{1}{\pi n}\int\limits_0^\pi \sin nx\,dx =$$

$$= \left.\frac{1}{\pi n^2}\cos nx\right|_0^\pi = \frac{1}{\pi n^2}(\cos n\pi - 1) = -\frac{1-(-1)^n}{\pi n^2}.$$

Итак, для чётных n имеем $a_n = 0$, а для нечётных $a_n = -\frac{2}{\pi n^2}$.

Найдём коэффициенты b_n:

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} x\sin nx\,dx =$$

$$= \left\{\begin{array}{ll} u = x, & du = dx \\ dv = \sin nx dx, & v = -\frac{1}{n}\cos nx \end{array}\right\} = -\left.\frac{x}{\pi n}\cos nx\right|_0^\pi + \frac{1}{\pi n}\int\limits_0^\pi \cos nx dx =$$

$$= -\frac{\pi}{\pi n}(-1)^n + \left.\frac{1}{\pi n^2}\sin nx\right|_0^\pi = \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

Значит, данная функция имеет следующее разложение в ряд Фурье:

$$f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \ldots\right) +$$

$$+\left(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} + \frac{\sin 5x}{5} + \ldots\right). \qquad \#$$

Разложение функции в ряд по синусам/косинусам. Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $[0, \pi]$. Продолжим её на отрезок $[-\pi, 0]$ чётным образом, т.е. так, чтобы выполнялось равенство $f(-x) = f(x)$. Полученную чётную функцию разложим в ряд Фурье на отрезке $[-\pi, \pi]$. Заметим, что все коэффициенты b_n будут равны нулю как следствие того, что функции $f(x)\sin nx$ являются нечётными и интегралы от них по отрезку $[-\pi, \pi]$ обращаются в нуль. Функции $f(x)\cos nx$ являются чётными и интегралы по отрезку $[-\pi, \pi]$ равны удвоенным интегралам по отрезку $[0, \pi]$. Поэтому справедливо следующее разложение, называемое разложением функции в ряд по косинусам:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx,$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} f(x)\,dx, \qquad a_n = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx.$$

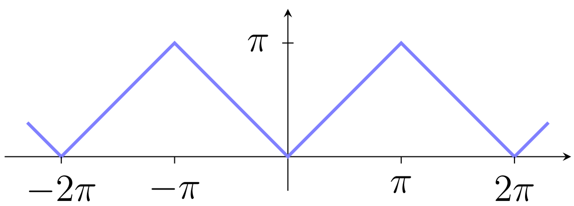
Функцию $f(x)$, определённую на отрезке $[0, \pi]$, можно продолжить на отрезок $[-\pi, 0]$ и нечётным образом, по условию $f(-x) = -f(x)$. Разложение полученной функции в ряд Фурье называется разложением функции в ряд по синусам:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx, \qquad b_n = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx.$$

Задание. Объясните, почему коэффициенты $a_0 = a_n = 0$.

Пример 34.2. *Разложить функцию $f(x) = x$, заданную на отрезке $[0, \pi]$, в ряд по косинусам.*

Доопределим чётным образом функцию на отрезке $[-\pi, 0]$ и далее на всю числовую ось по условию периодичности:



Находим коэффициенты разложения в ряд:

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} x\,dx = \pi,$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} x\cos nx\,dx = \begin{cases} 0, & n \text{ – чётное},\\ -\dfrac{4}{\pi n^2}, & n \text{ – нечётное}. \end{cases}$$

В итоге получим

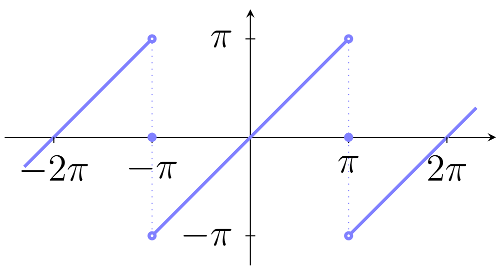
$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \ldots\right). \qquad \#$$

Задание. Подставив в последнюю формулу $x = 0$, найдите сумму ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \ldots$$

Пример 34.3. *Разложить функцию $f(x) = x$, заданную на отрезке $[0, \pi]$ в ряд по синусам.*

Доопределим нечётным образом функцию на отрезке $[-\pi, 0]$ и построим её график:



Находим коэффициенты

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} x\sin nx\,dx = (-1)^{n+1}\frac{2}{n}.$$

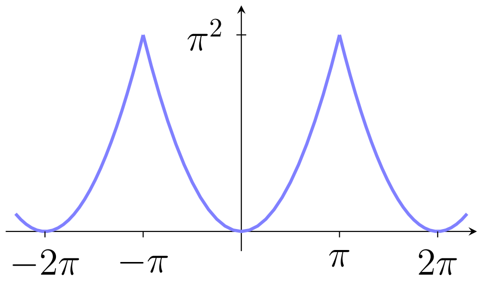
Итоговое разложение

$$f(x) = 2\left(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} + \frac{\sin 5x}{5} + \ldots\right). \qquad \#$$

***Пример* 34.4.** *Найти значение числового ряда*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\ldots.$$

Рассмотрим 2π-периодичную функцию, заданную на отрезке $[-\pi,\pi]$ уравнением $f(x)=x^2$.



Функция является чётной ($b_n=0$), находим оставшиеся коэффициенты:

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi}x^2dx=\frac{2}{\pi}\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^{\pi}=\frac{2\pi^2}{3},$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi}x^2\cos nx\,dx=\left\{\begin{matrix}u=x^2, & du=2xdx\\ dv=\cos nxdx, & v=\frac{1}{n}\sin nx\end{matrix}\right\}=$$

$$=-\frac{4}{\pi n}\int\limits_0^{\pi}x\sin nx\,dx=(-1)^n\frac{4}{n^2}.$$

Получим, что на отрезке $[-\pi,\pi]$ справедливо разложение

$$x^2=\frac{\pi^2}{3}-4\left(\frac{\cos x}{1^2}-\frac{\cos 2x}{2^2}+\frac{\cos 3x}{3^2}-\frac{\cos 4x}{4^2}+\frac{\cos 5x}{5^2}-\ldots\right).$$

Подставив $x=\pi$ (при этом $\cos n\pi=(-1)^n$), получим

$$\pi^2=\frac{\pi^2}{3}+4\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\ldots\right).$$

Искомый ряд стоит в скобках, найдём его:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\ldots=\frac{1}{4}\left(\pi^2-\frac{\pi^2}{3}\right)=\frac{\pi^2}{6}.\qquad\#$$

Задание. Подставив в полученный ряд Фурье значение $x = 0$, докажите формулу

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \ldots = \frac{\pi^2}{12}.$$

Обобщение на произвольный период. [1]

Пусть $f(x)$ является 2ℓ-периодической функцией. Введём новую переменную t, связанную с x линейной зависимостью $x = \frac{\ell t}{\pi}$ и рассмотрим новую функцию $g(t) = f\left(\frac{\ell t}{\pi}\right)$, она будет 2π-периодической и для неё справедливо разложение в ряд Фурье:

$$f\left(\frac{\ell t}{\pi}\right) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos nt + b_n \sin nt\right).$$

Перейдём в этой формуле к x, используя связь $t = \frac{\pi x}{\ell}$:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{\ell} + b_n \sin \frac{n\pi x}{\ell}\right).$$

Получим формулы для коэффициентов данного ряда Фурье. Так

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{\ell t}{\pi}\right) dt = \left\{t = \frac{\pi x}{\ell}, \quad dt = \frac{\pi dx}{\ell}\right\} = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x)\, dx.$$

Аналогично

$$a_n = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \cos \frac{n\pi x}{\ell} dx, \qquad b_n = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \sin \frac{n\pi x}{\ell} dx.$$

Если функция задана на отрезке $[0, \ell]$ и требуется разложить её в ряд по косинусам, то

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{\ell},$$

$$a_0 = \frac{2}{\ell} \int_{0}^{\ell} f(x)\, dx, \qquad a_n = \frac{2}{\ell} \int_{0}^{\ell} f(x) \cos \frac{n\pi x}{\ell}\, dx.$$

[1] Данный раздел является факультативным.

Разложение в ряд по синусам имеет вид

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{\ell}, \qquad b_n = \frac{2}{\ell}\int\limits_0^{\ell} f(x)\sin\frac{n\pi x}{\ell}\,dx.$$

§35. Комплексные числа

Множества чисел. *Натуральные* числа – числа, возникающие естественным образом при счёте: 1, 2, 3, 4, 5, 6, $\ldots$. Множество натуральных чисел обозначается символом $\mathbb{N}$. Операция сложения является замкнутой в этом множестве – сумма любых натуральных чисел также является натуральным числом. Для разрешения уравнений, включающих в себя операцию сложения, вводится обратная операция – вычитание:

$$2 + x = 7 \quad \Rightarrow \quad x = 7 - 2 = 5.$$

В отличие от сложения, операция вычитания является незамкнутой во множестве натуральных чисел. Например, уравнение $7 + x = 2$ не имеет решений в классе натуральных чисел, т.е. выражение $2 - 7$ не определено. Для того, чтобы данное выражение приобрело смысл, множество чисел расширяют.

Множество *целых* чисел ($\mathbb{Z}$) – расширение множества натуральных чисел, получаемое добавлением к нему нуля и отрицательных чисел. В этом множестве операции сложения, вычитания и умножения являются замкнутыми. Исключением является операция деления, являющаяся обратной к умножению. Например, уравнение

$$2x = 8 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{8}{2} = 4$$

разрешимо, а уравнение $2x = 7$ не имеет решений в классе целых чисел. Множество целых чисел также можно расширить так, чтобы операция деления имела смысл для любых пар чисел (за исключением операции деления на ноль).

Рациональные числа – числа, которое можно представить в виде дроби $\frac{m}{n}$, где m – целое число, а n – натуральное. В множестве рациональных чисел ($\mathbb{Q}$) четыре базовые математические операции являются замкнутыми. В то же время, есть другие математические операции, выражения с использованием которых не определены во множестве $\mathbb{Q}$. Рассмотрим, например, операцию возведения в степень. Уравнения $x^2 = 9$ и $2^x = 8$ имеют решения, в то же время уравнения $x^2 = 7$ и $2^x = 7$ уже не разрешимы. Операции извлечения корня и взятия логарифма незамкнуты в $\mathbb{Q}$. Чтобы конструкции типа $\sqrt{7}$ и $\log_2 7$ обрели смысл, также расширяют множество чисел.

Вещественные (действительные) числа – математический объект, возникший из потребности измерения геометрических и физических величин окружающего мира, а также проведения таких вычислительных операций, как извлечение корня, вычисление значений логарифмов, нахождение значений тригонометрических функций и т.п. Множество вещественных чисел обозначается символом $\mathbb{R}$. Геометрический смысл вещественных чисел – каждому такому числу можно поставить в соответствие точку на так называемой числовой прямой и обратно, каждой точке прямой можно поставить в соответствие некоторое вещественное число, притом только одно.

В то же время, для вещественных чисел также существуют неразрешимые уравнения. Приведём примеры таких уравнений:

$$x^2 = -1, \qquad e^x = -1, \qquad \cos x = 2.$$

Выражения $\sqrt{-1}$, $\ln(-1)$, $\arccos(2)$ не определены во множестве вещественных чисел и естественно, возникает вопрос о расширении понятия множества числа с целью того, чтобы эти и многие другие математические выражения обрели смысл.

Определение комплексного числа. Предположим, что уравнение $x^2 + 1 = 0$ разрешимо, обозначим один из корней данного уравнение как i. Это число называют мнимой единицей. Другими словами, i – формальный объект, который обладает свойством $i^2 = -1$.

Комплексные числа – числа вида $x + iy$, где x и y – вещественные числа, называемые действительной (Re) и мнимой (Im) частями комплексного числа соответственно:

$$z = x + iy \quad \Leftrightarrow \quad x = \operatorname{Re} z, \quad y = \operatorname{Im} z.$$

Примеры комплексных чисел: $2 + 3i$, $-4i$, $\sqrt{2} + i \ln 3$. Множество этих чисел обозначается символом $\mathbb{C}$. Вещественные числа также включаются в это множество, для них мнимая часть числа равна нулю.

Комплексно-сопряжённым к $z = x + iy$ называется число $\bar{z} = x - iy$.

Операции с комплексными числами. Пусть z и w – комплексные числа: $z = x + iy$, $w = u + iv$.

Два комплексных числа называются равными, если одновременно равны их действительные и мнимые части:

$$z = w \quad \Leftrightarrow \quad x = u, \quad y = v.$$

Заметим, что другие операции сравнения (“$>$”, “$<$”) не определены для комплексных чисел.

Сложение комплексных чисел выполняется по правилу:

$$z + w = (x + iy) + (u + iv) = \underbrace{(x + u)}_{\operatorname{Re}(z+w)} + i\underbrace{(y + v)}_{\operatorname{Im}(z+w)}.$$

Аналогично определяется операция вычитания. Для операции умножения двух комплексных чисел используется дистрибутивный закон:

$$z \cdot w = (x + iy)(u + iv) = xu + x(iv) + (iy)u - yv = \underbrace{(xu - yv)}_{\operatorname{Re}(zw)} + i\underbrace{(xv + yu)}_{\operatorname{Im}(zw)}.$$

Заметим, что для любого комплексного числа результат умножения на сопряжённое является вещественным числом:

$$z \cdot \bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 - (iy)^2 = x^2 + y^2.$$

Благодаря этому, определяется операция деления комплексных чисел:

$$\frac{z}{w} = \frac{x + iy}{u + iv} = \frac{(x + iy)(u - iv)}{(u + iv)(u - iv)} = \underbrace{\frac{xu + yv}{u^2 + v^2}}_{\operatorname{Re}\frac{z}{w}} + i\underbrace{\frac{yu - xv}{u^2 + v^2}}_{\operatorname{Im}\frac{z}{w}}.$$

***Пример* 35.1.** *Найти* $z+w$, $z-w$, zw, $\dfrac{z}{w}$, *если* $z=6-2i$, $w=1+i$.

Проведём требуемые операции:

$$z+w=(6-2i)+(1+i)=(6+1)+(-2i+i)=7-i,$$

$$z-w=(6-2i)-(1+i)=(6-1)+(-2i-i)=5-3i,$$

$$zw=(6-2i)(1+i)=6+6i-2i-2i^2=8+4i,$$

$$\frac{z}{w}=\frac{(6-2i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{6-6i-2i+2i^2}{2}=2-4i. \qquad \#$$

***Пример* 35.2.** *Решить квадратное уравнение* $x^2+2x+5=0$.

Вычислим дискриминант $D=4-20=-16$, квадратный корень из него в вещественных числах не определён. В то же время $(4i)^2=-16$, поэтому можно принять, что $\sqrt{-16}=\pm 4i$. Находим корни уравнения:

$$x_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{-16}}{2}=\frac{-2\pm 4i}{2}=-1\pm 2i. \qquad \#$$

Задание. Проверьте справедливость теоремы Виета для данного квадратного уравнения.

Любое квадратное уравнение при отрицательном дискриминанте имеет два комплексных корня. Заметим, что эти корни являются комплексно-сопряжёнными числами.[1]

Задание. Найдите корни уравнения $x^4+x^2+1=0$. Для этого можно воспользоваться равенством $x^4+x^2+1=(x^2+1)^2-x^2$.

***Пример* 35.3.** *Найти собственные значения и векторы матрицы* $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$.

Составим характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & -1 \\ 5 & 2-\lambda \end{vmatrix}=\lambda^2-6\lambda+13=0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2}=3\pm 2i.$$

[1] Подразумевается, что коэффициенты квадратного уравнения являются вещественными числами. Если же коэффициенты квадратного уравнения будут комплексными, корни не обязаны быть комплексно-сопряжёнными числами.

Найдём собственный вектор X_1 для $\lambda_1 = 3 + 2i$ методом Гаусса:

$$\begin{pmatrix} 1-2i & -1 \\ 5 & -1-2i \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 5 & -1-2i \\ 5 & -1-2i \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 5 & -1-2i \end{pmatrix}.$$

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1+2i \\ 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 \\ 1-2i \end{pmatrix}. \qquad \#$$

Задание. Найдите собственный вектор X_2 для $\lambda_2 = 3 - 2i$.

Основная теорема алгебры и разложение многочлена на множители. В множестве комплексных чисел справедлива

***Теорема* 35.1** (Основная теорема алгебры)**.** *Любой многочлен степени n имеет ровно n корней (с учётом комплексных и кратных корней).*

Данную теорему примем без доказательства.

***Теорема* 35.2.** *Если $P(x)$ – многочлен с вещественными коэффициентами и комплексное число z – его корень, то $\overline{z}$ тоже является корнем этого многочлена.*

◀ Требуется показать, что из равенства $P(z) = 0$ следует $P(\overline{z}) = 0$. Заметим, что для двух комплексных чисел z_1 и z_2 справедливы следующие равенства:

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}, \qquad \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}.$$

Поэтому

$$P(\overline{z}) = a_n\overline{z}^n + \ldots + a_1\overline{z} + a_0 = \overline{a_n z^n + \ldots + a_1 z + a_0} = \overline{P(z)} = \overline{0} = 0. \text{ ▶}$$

Как следствие теоремы, любой многочлен с вещественными коэффициентами может иметь только чётное число комплексных корней.

Теперь мы готовы доказать теорему 26.1, сформулированную ранее.

◀ Если многочлен $Q(x)$ имеет корни z_1, z_2, $\ldots z_n$, то его разложение на множители имеет вид

$$Q(x) = b_n x^n + \ldots + b_1 x + b_0 = b_n(x - z_1)\cdots(x - z_n).$$

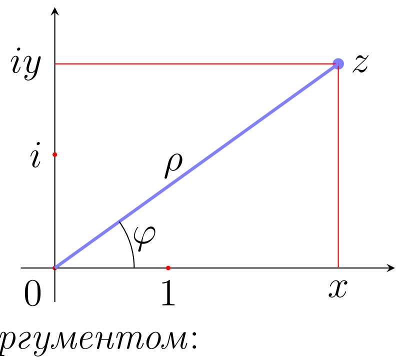
Если корень z_k является вещественным числом, то выражение $x - z_k$ – вещественный многочлен первой степени. Если же z_k – комплексное число ($z_k = \alpha + i\beta$), то в разложении на множители будут присутствовать два комплекснозначных многочлена $(x - \alpha - i\beta)$ и $(x - \alpha + i\beta)$, произведение которых

$$(x - \alpha - i\beta)(x - \alpha + i\beta) = (x - \alpha)^2 + \beta^2$$

является вещественным многочленом второй степени. ▶

Геометрическая интерпретация комплексных чисел. Ранее мы определили комплексное число как выражение вида $z = x + iy$.

Это выражение называется *алгебраической формой* представления комплексного числа. Отметим на плоскости точку с координатами (x, y). Эта точка является образом комплексного числа $z = x+iy$, и наоборот, каждой точке плоскости можно поставить в соответствие некоторое комплексное число. Мнимая единица переходит в точку $y = 1$ на оси ординат. Если геометрической интерпретацией множества вещественных чисел является числовая прямая, то геометрической интерпретацией множества комплексных чисел является числовая плоскость.



Введём на этой плоскости полярную систему координат (ρ, φ):

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi. \end{cases}$$

Полярный радиус ρ называют *модулем* комплексного числа, а полярный угол φ – его *аргументом*:

$$\rho = |z|, \qquad \varphi = \arg z.$$

Заметим, что аргумент комплексного числа определяется с точностью до 2π. Для однозначности, обычно указывается аргумент, лежащий в интервале $\varphi \in [0, 2\pi)$.

Само комплексное число записывается через модуль и аргумент в виде

$$z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Это выражение называется *тригонометрической формой* представления комплексного числа.

Задание. Отметить на числовой плоскости точки, соответствующие числам, найти модуль и аргумент чисел и записать числа в тригонометрической форме.

$$z_1 = 1 + i, \quad z_2 = i, \quad z_3 = -1, \quad z_4 = 3 - 3i.$$

Формула Эйлера. Запишем ряд Тейлора – Маклорена для экспоненциальной функции при аргументе $i\varphi$:

$$e^{i\varphi} = 1 + i\varphi + \frac{(i\varphi)^2}{2!} + \frac{(i\varphi)^3}{3!} + \frac{(i\varphi)^4}{4!} + \frac{(i\varphi)^5}{5!} + \ldots$$

Заметим, что $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, $i^5 = i$. Значения степеней мнимой единицы повторяются по циклу 1, i, -1, $-i$. Поэтому

$$e^{i\varphi} = 1 + i\varphi - \frac{\varphi^2}{2!} - i\frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^4}{4!} + i\frac{\varphi^5}{5!} - \ldots$$

Множитель i входит в каждое второе слагаемое, сгруппировав отдельно слагаемые, стоящие на нечётных и чётных местах, получим

$$e^{i\varphi} = \left(1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - \ldots\right) + i\left(\varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \ldots\right).$$

Первая скобка соответствует разложению в ряд Тейлора – Маклорена функции $\cos\varphi$, а вторая – функции $\sin\varphi$. Поэтому

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi.$$

Данная формула называется формулой Эйлера. С помощью этой формулы получим ещё одно представление для комплексного числа:

$$z = \rho e^{i\varphi},$$

называемое *показательной формой.*

***Пример* 35.4.** *Представить числа $z_1 = 1 + i$ и $z_2 = -1$ в показательной форме.*

Модуль числа z_1 равен расстоянию от точки $(0,0)$ до точки $(1,1)$. Поэтому $\rho_1 = = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$.

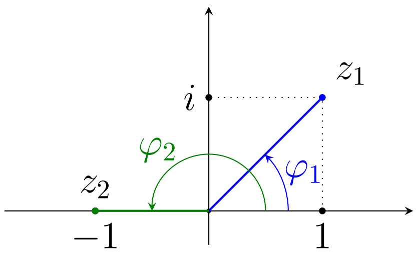
Модуль этого числа $\varphi_1 = \frac{\pi}{4}$.

Поэтому $1+i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.

Модуль числа z_2 равен расстоянию от точки $(0,0)$ до точки $(-1,0)$, поэтому $\rho_2 = 1$.

Аргумент z_2 равен $\varphi_2 = \pi$.

Значит, $-1 = e^{i\pi}$. #



Задание. Представить числа $z_3 = i$ и $z_4 = 3-3i$ в показательной форме.

Заметим, что из формулы $e^{i\pi} = -1$ следует $\ln(-1) = i\pi$. Так определяются логарифмы от отрицательных чисел.[1]

Умножение, деление и возведение в степень чисел в показательной форме. Пусть комплексные числа $z_1 = \rho_1 e^{i\varphi_1}$ и $z_2 = \rho_2 e^{i\varphi_2}$. Запишем их произведение и частное:

$$z_1 \cdot z_2 = (\rho_1 e^{i\varphi_1})(\rho_2 e^{i\varphi_2}) = (\rho_1\rho_2)e^{i(\varphi_1+\varphi_2)},$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1 e^{i\varphi_1}}{\rho_2 e^{i\varphi_2}} = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}.$$

Заметим, что данные операции в показательной форме выполняются значительно проще, чем для чисел, записанных в алгебраической форме.

Рассмотрим также операцию возведения в степень:

$$z = \rho e^{i\varphi}, \quad w = z^n \quad \Rightarrow \quad w = \rho^n e^{in\varphi}.$$

Итак, модуль степени комплексного числа равен той же степени модуля основания, а аргумент степени равен аргументу основания, умноженному на показатель степени.

***Пример* 35.5.** *Найти* $(1+i)^{10}$.

[1]Вообще говоря, функция логарифма является многозначной. Т.к. $e^{i(\varphi+2\pi k)} = e^{i\varphi}$, то комплексно-значный логарифм определяется с точностью до множителя $i \cdot 2\pi k$. Все значения логарифма от числа -1 задаются формулой $\ln(-1) = i\pi(1+2k)$.

Исходное число записано в алгебраической форме. Перед тем, как выполнить операцию возведения в степень, перейдём в показательную форму:

$$1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

Поэтому

$$(1+i)^{10} = (\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}})^{10} = (\sqrt{2})^{10}e^{i\frac{10\pi}{4}} = 2^5 e^{i\frac{5\pi}{2}} = 32e^{i\frac{5\pi}{2}}.$$

Ответ записан в показательной форме. Для перехода в алгебраическую, используем формулу Эйлера:

$$e^{i\frac{5\pi}{2}} = \cos\frac{5\pi}{2} + i\sin\frac{5\pi}{2} = i.$$

Запишем ответ: $(1+i)^{10} = 32i$. #

Извлечение корня из комплексного числа. Дано комплексное число $z = \rho e^{i\varphi}$. Определим операцию извлечения корня степени n: $w = \sqrt[n]{z}$. Т.е. требуется найти такое число $w = re^{i\psi}$, что $w^n = z$. Сравнив модули и аргументы чисел $w^n = r^n e^{in\psi}$ и $z = \rho e^{i\varphi}$, запишем

$$\begin{cases} r^n = \rho, \\ n\psi = \varphi + 2\pi k, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} r = \sqrt[n]{\rho}, \\ \psi = \frac{\varphi + 2\pi k}{n}. \end{cases}$$

Операция извлечения корня является неоднозначной. Действительно, согласно основной теореме алгебры, корень числа является решением алгебраического уравнения порядка n и, следовательно, существует n различных корней:[1]

$$w_k = \sqrt[n]{\rho} \cdot e^{i\frac{\varphi + 2\pi k}{n}} \quad (k = 0, 1, \ldots, n-1). \tag{35.1}$$

***Пример* 35.6.** *Решить уравнение* $w^3 = 8$.

Первый способ. Перенесём 8 влево и разложим на множители:

$$w^3 - 8 = 0 \quad \Rightarrow \quad (w-2)(w^2 + 2w + 4) = 0.$$

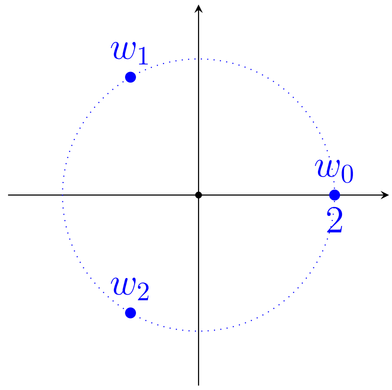
[1]Не следует путать понятия алгебраического и арифметического корня числа. В данном параграфе говорится про алгебраические корни. Когда же извлекается корень $\sqrt[n]{\rho}$ из модуля ρ комплексного числа подразумевается арифметический корень. Значение данного корня является неотрицательным вещественным числом и определяется однозначно.

Приравняв множители к нулю, определим все корни:

$$w_1 = 2, \quad w_2 = -1 - i\sqrt{3}, \quad w_3 = -1 + i\sqrt{3}.$$

Второй способ. По формуле (35.1)

$$w_k = \sqrt[3]{8} e^{i\frac{2\pi k}{3}} = 2e^{i\frac{2\pi k}{3}}, \quad k = 0, 1, 2.$$



Значит,

$$\begin{aligned}
w_0 &= 2e^{i0} = 2,\\
w_1 &= 2e^{i\frac{2\pi}{3}} = 2(\cos\tfrac{2\pi}{3} + i\sin\tfrac{2\pi}{3}) = -1 + i\sqrt{3},\\
w_2 &= 2e^{i\frac{4\pi}{3}} = 2(\cos\tfrac{4\pi}{3} + i\sin\tfrac{4\pi}{3}) = -1 - i\sqrt{3}.
\end{aligned}$$

Найденные корни отмечены на числовой плоскости. Заметим, что они лежат на окружности радиуса 2 в вершинах правильного треугольника. #

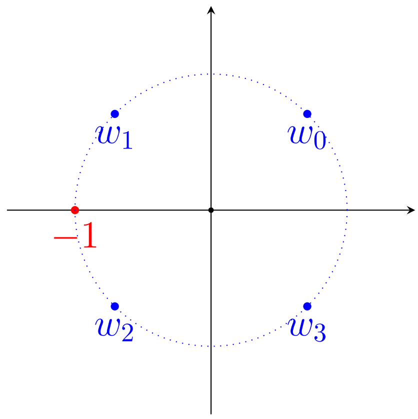
***Пример* 35.7.** *Решить уравнение* $w^4 = -1$.

Т.к. число -1 записывается в показательной форме как $e^{i\pi}$, то по формуле (35.1)

$$w_k = e^{i\frac{\pi + 2\pi k}{4}}, \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

Значит, четыре значения корня равны

$$\begin{aligned}
w_0 &= e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2},\\
w_1 &= e^{i\frac{3\pi}{4}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2},\\
w_2 &= e^{i\frac{5\pi}{4}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2},\\
w_3 &= e^{i\frac{7\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}.
\end{aligned}$$



Заметим, что корни лежат на окружности радиуса 1 в вершинах квадрата. #

Сформулируем утверждение, справедливое для всех корней степени n: все они лежат на окружности с центром в начале координат и радиусом $\sqrt[n]{\rho}$. Все корни разбивают данную окружность на дуги одной длины, т.е. располагаются в вершинах правильного n-угольника.

Задание. Найти все значения $\sqrt[3]{i}$ и изобразить их на числовой плоскости.

Функции комплексного аргумента. Определим функции нахождения логарифма и экспоненты от комплексного числа $z = x + iy = \rho e^{i\varphi}$:

$$\ln z = \ln(\rho e^{i(\varphi+2\pi k)}) = \ln\rho + \ln e^{i(\varphi+2\pi k)} = \ln\rho + i(\varphi + 2\pi k),$$

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i\sin y).$$

Заметим, что логарифм (как и аргумент) комплексного числа определяется не однозначно, существует бесконечное число значений логарифма, отличающиеся друг от друга на $i \cdot 2\pi k$.

С использованием функций $\ln z$ и e^z можно определить и операцию возведения в комплекснозначную степень: $z^w = e^{w\ln z}$.

***Пример* 35.8.** *Записать в алгебраической форме:* e^{1+i}, $\ln(1+i)$, $(1+i)^i$.

Для нахождения экспоненты используем формулу Эйлера:

$$e^{1+i} = e^1 e^i = e\,(\cos 1 + i\sin 1) \approx 1.47 + 2.29i.$$

Для вычисления логарифма перейдём в показательную форму: $1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$, откуда

$$\ln(1+i) = \ln\left(\sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4}+2\pi k\right)}\right) = \ln\sqrt{2} + i\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi k\right) \approx 0.35 + i(0.79 + 2\pi k).$$

Для возведения в комплексную степень используем найденный логарифм:

$$(1+i)^i = e^{i\cdot\ln(1+i)} = e^{i\left(\ln\sqrt{2}+i\frac{\pi}{4}\right)} = e^{-\frac{\pi}{4}}e^{i\ln\sqrt{2}} =$$

$$= e^{-\frac{\pi}{4}}\left(\cos(\ln\sqrt{2}) + i\sin(\ln\sqrt{2})\right) \approx 0.43 + 0.15i. \qquad \#$$

Записав формулы Эйлера для e^{ix} и e^{-ix}, получим связь тригонометрических функций и экспоненты:

$$\begin{cases} e^{ix} = \cos x + i\sin x, \\ e^{-ix} = \cos x - i\sin x, \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

Заметим, что полученные формулы похожи на определения гиперболических функций

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Этим и объясняется схожесть свойств тригонометрических и гиперболических функций. Сравнив приведённые формулы, получим формулы перехода от одних функций к другим:

$$\operatorname{ch}(ix) = \cos x, \quad \operatorname{sh}(ix) = i \sin x, \quad \cos(ix) = \operatorname{ch} x, \quad \sin(ix) = i \operatorname{sh} x.$$

***Пример* 35.9.** *Решить уравнение* $\cos x = 2$.

Из основного тригонометрического тождества $\sin x = \pm\sqrt{1-\cos^2 x} = \pm\sqrt{-3} = \pm\sqrt{3}i$. Значит, $e^{ix} = \cos x + i \sin x = 2 \pm i\sqrt{3}i = 2 \pm \sqrt{3}$.

В итоге $ix = \ln(2 \pm \sqrt{3}) + i \cdot 2\pi k, \quad \Rightarrow \quad x = \pm i \ln(2+\sqrt{3}) + 2\pi k.$ #

Заметим, что следствием того, что логарифм комплексного числа является принимает бесконечное число значений, явилось то, что уравнение $\cos x = 2$ также имеет бесконечное число решений, отличающихся друг от друга на $2\pi k$.

Задание. Записать в алгебраической форме $\sin(2+3i)$.

Комплексная форма рядов Фурье. [1] Подставим в формулу (34.1) выражения для $\sin x$ и $\cos x$ через комплексную экспоненту:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \frac{e^{i\pi x} + e^{-i\pi x}}{2} + b_n \frac{e^{i\pi x} - e^{-i\pi x}}{2i} b_n \right),$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n - ib_n}{2} e^{i\pi x} + \frac{a_n + ib_n}{2} e^{-i\pi x} \right).$$

Введём обозначения: $c_0 = \frac{a_0}{2}$, $c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}$, $c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}$. Тогда ряд Фурье примет вид, называемый комплексной формой этого ряда:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx},$$

где комплексные коэффициенты c_n ряда находятся по формулам

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx}\, dx.$$

Последняя формула справедлива для положительных и отрицательных n, а также для $n = 0$.

[1] Данный раздел является факультативным.

Глава 6. Дифференциальное исчисление (фнп)

Один, два, много.

Числительные племени Мумбо-Юмбо

Моно-, ди-, поли- (греч.),
Уно-, би-, мульти- (лат.).

Приставки племени учёных

В этой главе мы познакомимся с функциями нескольких переменных (фнп). Такие понятия, как предел, производная и дифференциал функции имеют для таких функций особенности, поэтому нам придется заново дать определения этих понятий и рассмотреть их свойства применительно к фнп.

§36. Функции нескольких переменных

Определение функции нескольких переменных. Переменная y называется функцией переменных x_1, x_2, …, x_n, если каждой совокупности $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ соответствует единственное значение y. Совокупность аргументов можно принять за вектор $\vec{x} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, т.е. рассматривать функцию векторного аргумента:

$$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(\vec{x}).$$

Примеры фнп:

- Объём цилиндра $V(r,h) = \pi r^2 h$ – функция двух переменных: радиуса r основания и высоты h;
- Объём параллелепипеда $V(a,b,c) = abc$ – функция трёх переменных: длин сторон a, b и c.

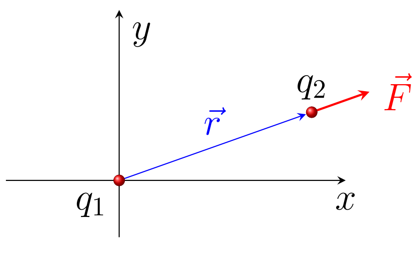
Как же и для функции одной переменной (фоп), существуют различные способы аналитического задания фнп: явное, неявное и параметрическое. Так, для функции z переменных x и y эти способы задания имеют вид:

- явный: $z = f(x,y)$;
- неявный: $F(x,y,z) = 0$;
- параметрический: $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$, $z = z(u,v)$. Параметрами здесь являются переменные u и v, число параметров совпадает с числом переменных.

Понятие вектор-функции. Значение фнп также может быть не числом, а вектором $\vec{y} = \{y_1, y_2, \ldots, y_m\}$. Такие функции будем называть вектор-функциями: $\vec{y} = \vec{f}(\vec{x})$. Их можно представить как совокупность обычных фнп, каждая из которых представляет одну координату вектор-функции. Например, явный способ задания вектор-функции с тремя координатами имеет вид:

$$\vec{y} = \vec{f}(\vec{x}) \quad \Leftrightarrow \quad y_1 = P(\vec{x}), \quad y_2 = Q(\vec{x}), \quad y_3 = R(\vec{x}).$$

***Пример* 36.1.** *В начале координат находится точечный заряд величины q_1. Записать уравнения для координат вектора силы $\vec{F}$, действующей на заряд q_2, расположенный в точке с координатами x, y, z.*



Введём радиус вектор $\vec{r} = \{x,y,z\}$, его длина $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Единичный вектор (орт) $\vec{e}$ данного направления может быть получен, если вектор разделить на его длину: $\vec{e} = \dfrac{\vec{r}}{r}$. По закону Кулона модуль вектора силы пропорционален произведению зарядов $q_1 q_2$ и обратно пропорционален квадрату r^2 расстояния: $F = k\dfrac{q_1 q_2}{r^2}$. Сам вектор равен произведению его модуля на орт направления: $\vec{F} = \{P,Q,R\} = k\dfrac{q_1 q_2}{r^2}\dfrac{\vec{r}}{r}$.

Запишем координаты вектора силы:

$$P(x,y,z) = \frac{kq_1q_2x}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}, \qquad Q(x,y,z) = \frac{kq_1q_2y}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}},$$
$$R(x,y,z) = \frac{kq_1q_2z}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}.$$

Область определения фнп. В дальнейшем мы будем в основном рассматривать функцию двух переменных. Если для фоп область определения представляет собой совокупность интервалов/точек на прямой, то для функции двух переменных область представляет собой совокупность областей/линий/точек на плоскости.

***Пример* 36.2.** *Найти области определения функций:*

а) $z = \sqrt{1-x^2-y^2}$;

б) $z = \ln(x+y)$;

в) $z = \sqrt{1-x}\cdot\sqrt{1-y}\cdot\sqrt{x+y-1}$.

Так, для первой функции подкоренное выражение должно быть неотрицательно, поэтому областью определения является круг $x^2+y^2 \leqslant 1$. Для второй функции должно выполняться условие $x+y>0$, область определения представляет собой полуплоскость, расположенную выше прямой $y=-x$. Областью определения третьей функции является треугольник, полученным пересечением трёх полуплоскостей $x \leqslant 1$, $y \leqslant 1$, $x+y \geqslant 1$.

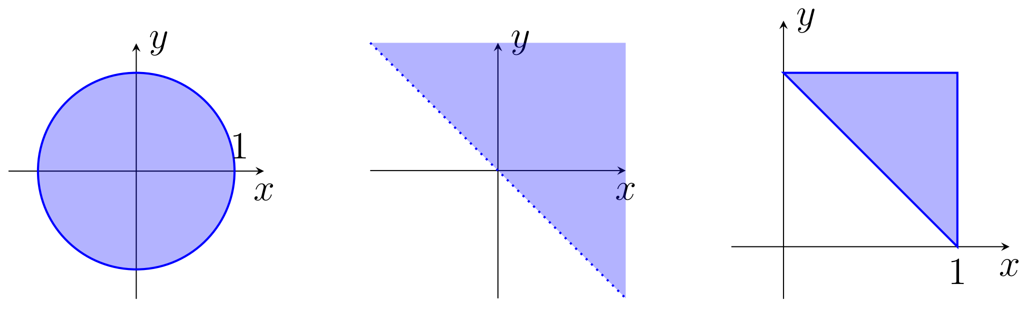


График фнп. Если график фоп представляет собой некоторую линию, лежащую на плоскости, то график функции двух переменных представляет собой поверхность, расположенную в пространстве.[1] Так, графиком функции $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ является верхняя полусфера.

[1] Строго говоря, график функции представляет собой поверхность для непрерывных функций. Понятие непрерывности будет рассмотрено позднее.

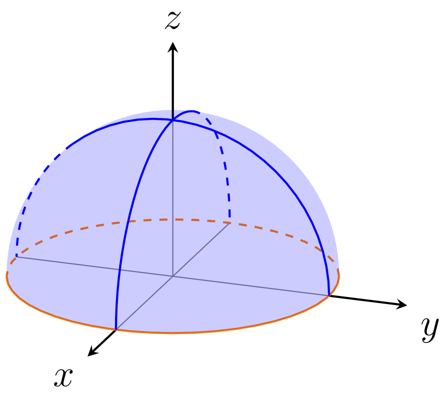
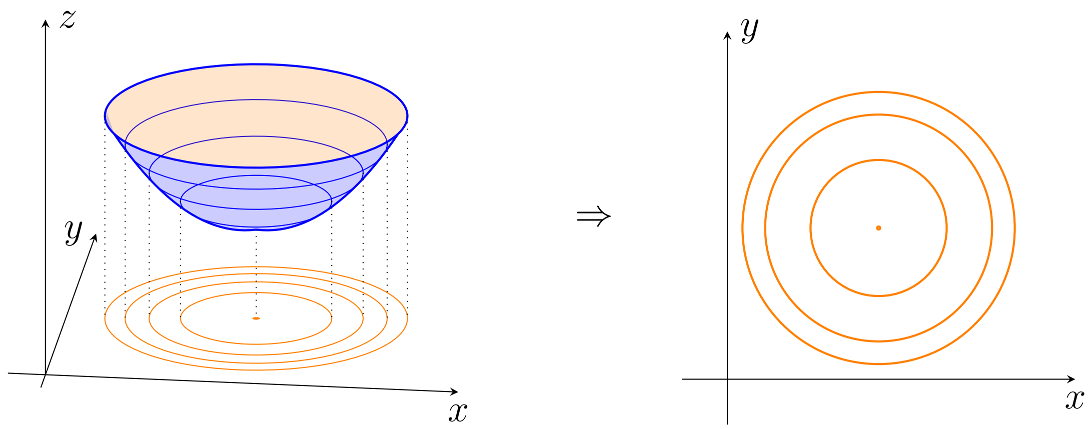
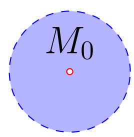


График функции двух переменных можно изобразить и на плоскости с помощью так называемых *линий уровня* – линий пересечения графика поверхности $z = f(x, y)$ и плоскостей $z = \text{const}$.



Предел фнп. Пусть $M_0(x_0, y_0)$ – произвольная точка на плоскости и $\delta > 0$.

Множество $U_\delta(M_0)$ всех точек, удалённых от M_0 менее, чем на δ называется *δ-окрестностью* точки $M_0(x_0, y_0)$.



Если из $U_\delta(M_0)$ выбросить саму точку M_0, то полученное множество $\dot{U}_\delta(M_0)$ называют *проколотой δ-окрестностью* точки $M_0(x_0, y_0)$. Для любой точки $M(x, y) \in \dot{U}_\delta(M_0)$ выполнено условие $0 < |MM_0| < \delta$.

Число A называется *пределом*[1] функции $f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такая проколотая δ-окрестность

[1]Точнее говоря, пределом по Коши, поскольку есть и другие определения этого понятия, например, по Гейне.

$\dot{U}_\delta(M_0)$, что для любой точки $M(x,y) \in \dot{U}_\delta(M_0)$ выполнено условие $|f(M)-$ $- A| < \varepsilon$. В этом случае пишут

$$\lim_{M \to M_0} f(M) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x,y) = A.$$

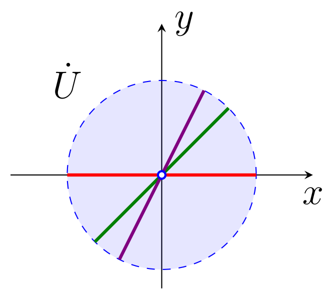
Также, как и для фоп, можно ввести понятие предела функции в бесконечно удалённой точке, а также понятия бесконечно большой и бесконечно малой функции в точке.

Отметим, что как и для фоп, предел функции не зависит от того, какое значение принимает функция в точке M_0. Это значение даже не обязано существовать.

Введём приращения аргументов $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = y - y_0$. Пусть также $\vec{\Delta\ell} = \{\Delta x, \Delta y\}$ – вектор приращения и $\Delta\ell = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$ – длина этого вектора. Заметим, что условие того, что точка $M(x,y) \in U_\delta(M_0)$ эквивалентно неравенству $\Delta\ell < \delta$. Также отметим, что предельный переход $M \to M_0$ соответствует переходу $\Delta\ell \to 0$.

***Пример* 36.3.** *Найти предел функции* $z = \frac{xy}{x^2+y^2}$ *в точке* $(0,0)$.

Данная функция не определена в точке $(0,0)$, но определена в проколотой δ-окрестности этой точки. Выберем некоторую такую δ-окрестность, и перейдём в полярную систему координат: $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$. Тогда



$$z = \frac{\rho^2 \cos\varphi \sin\varphi}{\rho^2} = \frac{1}{2}\sin 2\varphi.$$

Рассмотрим интервал оси Ox, лежащий в ней (на рисунке отмечен красным цветом). На этом интервале $\varphi = 0$, и для всех точек интервала $z = 0$.

Далее рассмотрим интервал прямой $y = x$, лежащий внутри δ-окрестности (на рисунке отмечен зелёным цветом). Для всех точек этого интервала $\varphi = \frac{\pi}{4}$ и $z = \frac{1}{2}$. Т.к. внутри любой δ-окрестности есть точки, в которых функция равна нулю и точки, в которых функция равна $\frac{1}{2}$, можно сделать вывод, что искомого предела не существует.

Можно рассмотреть и другие точки δ-окрестности. Например, во всех точках интервала прямой $y = 2x$ (фиолетовый цвет на рисунке) значение функции $f(x, 2x) = \frac{2}{5}$. #

***Пример* 36.4.** *Найти предел функции* $z = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$ *в точке* $(0,0)$.

Эта функция также не определена в точке $(0,0)$. Перейдём в полярную систему координат

$$z = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} = \frac{\rho^3 \cos^2 \varphi \sin \varphi}{\rho^2} = \rho \cos^2 \varphi \sin \varphi.$$

Поэтому

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} z = \lim_{\rho \to 0} z = \lim_{\rho \to 0} \rho \cos^2 \varphi \sin \varphi = 0. \qquad \#$$

Частные и полное приращения. Пусть функция $z = f(x, y)$ определена в окрестности точки (x_0, y_0).

Частными приращениями $\Delta_x z$ и $\Delta_y z$ функции $z = f(x, y)$ называются разности

$$\Delta_x z = f(x, y_0) - f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0),$$

$$\Delta_y z = f(x_0, y) - f(x_0, y_0) = f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0).$$

Полным приращением Δz функции $z = f(x, y)$ называется разность

$$\Delta z = f(x, y) - f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0).$$

Так, если в полном приращении принять $\Delta y = 0$ или $\Delta x = 0$, то мы получим частные приращения $\Delta_x z$ и $\Delta_y z$.

***Пример* 36.5.** *Найти полное и частные приращения функции* $z = x^2 + xy$.

$\Delta z = (x_0 + \Delta x)^2 + (x_0 + \Delta x)(y_0 + \Delta y) - (x_0^2 + x_0 y_0)$.

Раскрыв скобки и сократив слагаемые, получим

$\Delta z = 2x_0 \Delta x + (\Delta x)^2 + y_0 \Delta x + x_0 \Delta y + \Delta x \Delta y$.

Приняв поочередно $\Delta y = 0$ и $\Delta x = 0$, получим

$\Delta_x z = 2x_0 \Delta x + (\Delta x)^2 + y_0 \Delta x$,

$\Delta_y z = x_0 \Delta y$.

Заметим, что $\Delta z \neq \Delta_x z + \Delta_y z$. #

Непрерывность функции. Функция $z = f(x, y)$ *непрерывна* в точке (x_0, y_0), если она определена в этой точке и предел её полного приращения равен нулю при стремлении к нулю длины вектора приращения:

$$\lim_{\Delta\ell\to 0}\Delta z = \lim_{\Delta\ell\to 0} f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0) = 0. \tag{36.1}$$

Как мы видим, данное определение совпадает с определением непрерывности фоп (см. §19).

***Пример* 36.6.** *Дана функция* $z = \begin{cases} x\sin\frac{1}{y}, & y \neq 0,\\ 0, & y = 0.\end{cases}$

Является ли она непрерывной в точке $(0, 0)$*? В точке* $(1, 0)$*?*

Рассмотрим точку $(0, 0)$. Приращение $|\Delta z| = |\Delta x \sin\frac{1}{\Delta y}| < |\Delta x| \leqslant \Delta\ell$. Значит, $\lim\limits_{\Delta\ell\to 0}\Delta z = 0$, функция z непрерывна в этой точке.

Точка $(1, 0)$. Приращение $\Delta z = (1+\Delta x)\sin\frac{1}{\Delta y}$. Предел

$$\lim_{\Delta\ell\to 0}(1+\Delta x)\sin\frac{1}{\Delta y} = \lim_{\Delta y\to 0}\sin\frac{1}{\Delta y}$$

не существует. Значит, данная функция разрывна в этой точке. #

Частные производные. Дана функция $z = f(x, y)$ и точка (x_0, y_0).

Частной производной $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ этой функции по переменной x называется предел отношения частного приращения $\Delta_x z$ функции к приращению Δx аргумента, при $\Delta x \to 0$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}.$$

Кроме обозначения $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ для частной производной также используется запись z'_x. Частная производная функции по переменной y определяется аналогично:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = z'_y = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}.$$

Также, как и для производных фоп, для нахождения частных производных не обязательно использовать определение. Для этого можно использовать свойства производной фоп и таблицу производных, а также придерживаться правила: при вычислении производной по какой-либо переменной все остальные переменные считается постоянными.

***Пример* 36.7.** *Найти частные производные функций:*
а) $z = x^y$, *б)* $u = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$, *в)* $v = \dfrac{x}{x^2+y^2}$.

Использовав таблицу производных и правило вычисления производной сложной функции, получим

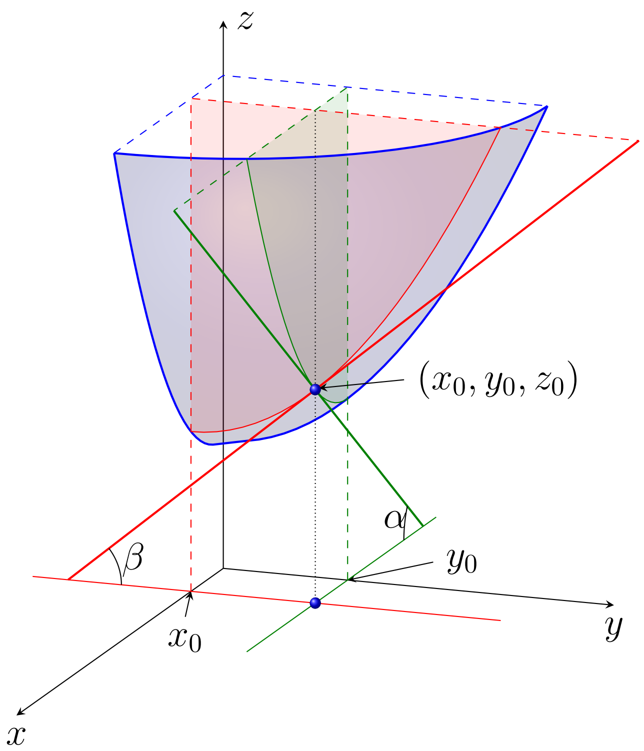
$$z'_x = \frac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1}, \qquad z'_y = \frac{\partial z}{\partial y} = x^y \ln x,$$

$$u'_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{y}{x^2+y^2}, \qquad u'_y = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{x}{x^2+y^2},$$

$$v'_x = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}, \qquad v'_y = \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}.$$

Геометрический смысл частной производной. Напомним геометрический смысл производной фоп: её значение равно тангенсу угла наклона касательной к графику функции. Похожая ситуация и для частной производной $\frac{\partial z}{\partial x}$: её значение в точке (x_0, y_0) равно тангенсу угла α между осью Ox и касательной к кривой пересечения поверхности $z = f(x, y)$ и плоскости $y = y_0$: $\frac{\partial z}{\partial x} = \operatorname{tg}\alpha$.

Аналогично $\frac{\partial z}{\partial y} = \operatorname{tg}\beta$, где β – угол между осью Oy и кривой пересечения поверхности $z = f(x, y)$ и плоскости $x = x_0$.



§37. Полный дифференциал и градиент

Частные дифференциалы. Для фоп $y = f(x)$ дифференциал dy определялся как линейная часть приращения функции:

$$\Delta y = \underbrace{P(x)\Delta x}_{dy} + \varepsilon(\Delta x), \qquad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\varepsilon(\Delta x)}{\Delta x} = 0, \qquad P(x) = f'(x).$$

Для функции двух переменных $z = f(x, y)$ аналогично определяются частные дифференциалы $d_x z$ и $d_y z$. Они являются линейными частями частных приращений $\Delta_x z$ и $\Delta_y z$:

$$\Delta_x z = \underbrace{P(x, y)\Delta x}_{d_x z} + \varepsilon_x(\Delta x), \qquad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\varepsilon_x(\Delta x)}{\Delta x} = 0, \qquad P(x, y) = f'_x(x, y),$$

$$\Delta_y z = \underbrace{Q(x, y)\Delta y}_{d_y z} + \varepsilon_y(\Delta y), \qquad \lim_{\Delta y\to 0}\frac{\varepsilon_y(\Delta y)}{\Delta y} = 0, \qquad Q(x, y) = f'_y(x, y).$$

Полный дифференциал функции. Функция $z = f(x, y)$ называется *дифференцируемой*, если существуют такие числа P и Q, что полное приращение Δz может быть представлено в виде

$$\Delta z = P \cdot \Delta x + Q \cdot \Delta y + \varepsilon(\Delta x, \Delta y), \qquad \lim_{\Delta \ell\to 0}\frac{\varepsilon(\Delta x, \Delta y)}{\Delta \ell} = 0,$$

Дифференциалом функции $dz = P\cdot\Delta x + Q\cdot\Delta y$ называется линейная часть полного приращения функции.

Заметим, что существование чисел P и Q равносильно существованию вектора $\{P, Q\}$, при этом полный дифференциал представляет собой скалярное произведение этого вектора на вектор приращения $\vec{\Delta\ell} = \{\Delta x, \Delta y\}$.

Для фоп $y = f(x)$ существование производной $f'(x)$ равносильно существованию дифференциала dy, т.к. между ними есть простая связь $dy = f'(x)dx$. Как мы дальше убедимся, для фнп $z = f(x, y)$ существование всех частных производных (что равносильно существованию всех частных дифференциалов) *не гарантирует* существование полного дифференциала!

***Теорема* 37.1** (Необходимое условие дифференцируемости)**.** *Если функция дифференцируема в точке, то она непрерывна в этой же точке.*

◀ Предположим, что функция дифференцируема. Найдём предел полного приращения функции:

$$\lim_{\Delta\ell\to 0}\Delta z=\lim_{\Delta\ell\to 0}\left(P\Delta x+Q\Delta y+\frac{\varepsilon(\Delta x,\Delta y)}{\Delta\ell}\cdot\Delta\ell\right).$$

Предел каждого слагаемого в этой сумме равен нулю. Следовательно, подное приращение $\Delta z\to 0$ и функция непрерывна. ▶

***Теорема* 37.2** (Достаточное условие дифференцируемости)**.** *Если у функции $z=f(x,y)$ частные производные f'_x и f'_y существуют и непрерывны в окрестности точки (x_0,y_0), то функция дифференцируема в этой точке и её полный дифференциал $dz=d_xz+d_yz=f'_x(x_0,y_0)\cdot\Delta x+f'_y(x_0,y_0)\cdot\Delta y$.*

◀ Из условий непрерывности частных производных следует $f'_x(x,y)=f'_x(x_0,y_0)+r_x$, $f'_y(x,y)=f'_y(x_0,y_0)+r_y$, причём $r_x,r_y\to 0$ при $x\to x_0, y\to y_0$. Запишем полное приращение функции:

$\Delta z=f(x,y)-f(x_0,y_0)=\Big[f(x,y)-f(x_0,y)\Big]+\Big[f(x_0,y)-f(x_0,y_0)\Big].$

По теореме Лагранжа, стоящие в квадратных скобках приращения

$f(x,y)-f(x_0,y)=f'_x(x_c,y)\Delta x=(f'_x(x_0,y_0)+r_x)\Delta x,\quad x_c\in(x_0,x),$

$f(x_0,y)-f(x_0,y_0)=f'_y(x_0,y_c)\Delta y=(f'_y(x_0,y_0)+r_y)\Delta y,\quad y_c\in(y_0,y).$

Значит,

$\Delta z=\underbrace{f'_x(x_0,y_0)\Delta x+f'_y(x_0,y_0)\Delta y}_{dz}+\underbrace{r_x\Delta x+r_y\Delta y}_{\varepsilon(\Delta x,\Delta y)}.$

Для завершения доказательства дифференцируемости функции осталось показать, что $\lim\limits_{\Delta\ell\to 0}\dfrac{\varepsilon(\Delta x,\Delta y)}{\Delta\ell}=\lim\limits_{\Delta\ell\to 0}\left(\dfrac{r_x\Delta x}{\Delta\ell}+\dfrac{r_y\Delta y}{\Delta\ell}\right)=0$. Рассмотрим первое слагаемое $\dfrac{r_x\Delta x}{\Delta\ell}$. Множитель $r_x\to 0$, а дробь $\dfrac{\Delta x}{\Delta\ell}$ ограничена. Поэтому предел произведения также стремится к нулю. Аналогично доказывается, что $\lim\limits_{\Delta\ell\to 0}\dfrac{r_y\Delta y}{\Delta\ell}=0$. ▶

Кроме дифференциала dz функции для фнп $z=f(x,y)$ вводят понятие *дифференциалов* dx и dy *аргументов*, которые совпадают с приращениями аргументов: $dx=\Delta x,\qquad dy=\Delta y.$

Итак, в случае, когда у функции $z(x,y)$ частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ существуют и непрерывны в некоторой окрестности $U_\delta(M_0)$, то полный дифференциал dz в точке M_0 также существует и имеет вид

$$dz = d_x z + d_y z = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy. \tag{37.1}$$

***Пример* 37.1.** *Найти дифференциалы функций*
а) $z = x^y$, *б)* $u = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$, *в)* $v = \dfrac{x}{x^2+y^2}$.

С учётом примера 36.7 запишем:

$$dz = yx^{y-1}dx + x^y \ln x dy = x^y\left(\frac{y}{x}dx + \ln x dy\right),$$

$$du = \frac{xdy - ydx}{x^2+y^2},$$

$$dv = \frac{(y^2-x^2)dx - 2xydy}{(x^2+y^2)^2}. \qquad \#$$

Уравнение касательной плоскости. Дана дифференцируемая функция $z = f(x,y)$ и точка (x_0,y_0). Обозначим $z_0 = f(x_0,y_0)$. Согласно определению дифференциала, полное приращение в точке (x_0,y_0)

$$z - z_0 = \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} \cdot \Delta x + \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)} \cdot \Delta y + \varepsilon(\Delta x, \Delta y).$$

Если в этом равенстве отбросить нелинейный член $\varepsilon(\Delta x,\Delta y)$, то получится уравнение плоскости, которая называется *касательной плоскостью.* Итак, уравнение этой плоскости имеет вид

$$z - z_0 = \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} \cdot (x - x_0) + \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)} \cdot (y - y_0).$$

Перенеся все слагаемые влево, раскрыв скобки и обозначив сумму постоянных буквой D, получим уравнение плоскости общего вида:

$$-\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} \cdot x - \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)} \cdot y + z + D = 0.$$

Вектор $\vec{n}$ нормали к касательной плоскости имеет координаты

$$\vec{n} = \left\{-\frac{\partial z}{\partial x}, -\frac{\partial z}{\partial y}, 1\right\}. \tag{37.2}$$

***Пример* 37.2.** *Найти уравнение касательной плоскости, проведённой в точке* $(1, 2)$ *к графику функции* $z = x^2 + xy$.

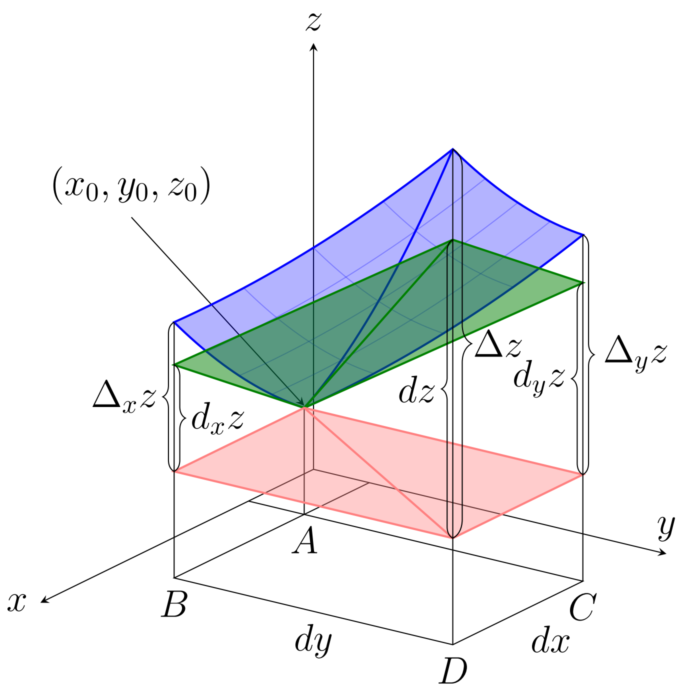
Найдём аппликату точки касания $z_0 = x^2 + xy\big|_{(1,2)} = 1^2 + 1 \cdot 2 = 3$. Определим значения частных производных в точке касания:

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,2)} = 2x + y|_{(1,2)} = 2 + 2 = 4, \quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,2)} = x|_{(1,2)} = 1.$$

Подставим полученные значения в уравнение касательной плоскости:

$$z - 3 = 4(x - 1) + 1(y - 2) \quad \Rightarrow \quad 4x + y - z - 3 = 0. \qquad \#$$

Геометрический смысл полного дифференциала. Построим график функции $z = f(x, y)$ (синий цвет на рисунке) и касательную плоскость (зелёный цвет). Красным цветом показана плоскость $z = f(x_0, y_0) = \text{const}$.



Рассмотрим три прямые, параллельные оси Oz и пересекающие плоскость Oxy в точках $B(x_0 + dx, y_0)$, $C(x_0, y_0 + dy)$ и $D(x_0 + dx, y_0 + dy)$. Приращения функции $\Delta_x z$, $\Delta_y z$, Δz являются длинами отрезков на соответствующих прямых между красной и синей поверхностями. Дифференциалы $d_x z$, $d_y z$, dz – длины аналогичных отрезков между красной и зелёной плоскостями.

Итак, полный дифференциал функции в точке (x_0, y_0) равен приращению аппликаты касательной плоскости, проведённой в точке (x_0, y_0) к графику функции $z = f(x, y)$.

Приближённое вычисление малых приращений. Для малых приращений $\Delta z \approx dz$, поэтому для приближённого вычисления функций можно использовать формулу

$$z(x + \Delta x, y + \Delta y) \approx z(x, y) + z'_x(x, y)\Delta x + z'_y(x, y)\Delta y.$$

***Пример* 37.3.** *Вычислить приближённое значение* $4.98^{1.05}$.

Рассмотрим функцию $z = x^y$ и запишем её приближение в окрестности точки $(5, 1)$:

$$z(x, y) \approx z(5, 1) + z'_x(5, 1) \cdot \Delta x + z'_y(5, 1) \cdot \Delta y.$$

Найдём значения z, z'_x и z'_y в точке $(5, 1)$:

$$z(5, 1) = 5, \quad z'_x(5, 1) = yx^{y-1}\big|_{(5,1)} = 1, \quad z'_y(5, 1) = x^y \ln x|_{(5,1)} = 5 \ln 5.$$

Значит, в окрестности точки $(5, 1)$,

$$z(5 + \Delta x, 1 + \Delta y) \approx 5 + \Delta x + 5 \ln 5 \cdot \Delta y.$$

Подставим приращения $\Delta x = 4.98 - 5 = -0.02$ и $\Delta y = 1.05 - 1 = 0.05$:

$$z(4.98, 1.05) \approx 5 - 0.02 + 5 \ln 5 \cdot 0.05 = 4.98 + 0.25 \ln 5 \approx 5.38236.$$

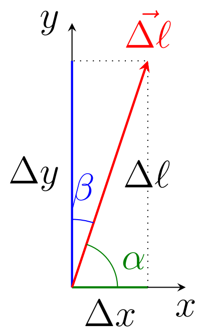
Точное значение функции $4.98^{1.05} = 5.39623$, погрешность вычисления составила $\varepsilon \approx 1.4 \cdot 10^{-2}$. Позже, в примере 39.5, будет рассмотрен способ, позволяющий вычислить требуемое значение с меньшей погрешностью. $\#$

Производная по направлению. Пусть функция $z = f(x, y)$ определена в окрестности точки (x_0, y_0).

Зададим вектор приращения $\vec{\Delta\ell} = \{\Delta x, \Delta y\}$. Рассмотрим сонаправленный ему единичный вектор $\vec{\ell} = \{\cos\alpha, \cos\beta\}$, где α и β – углы между вектором и осями Ox и Oy. Координаты этого вектора называются направляющими косинусами. Из очевидного условия $\vec{\Delta\ell} = \Delta\ell \cdot \vec{\ell}$ следует $\Delta x = \Delta\ell \cos\alpha$, $\Delta y = \Delta\ell \cos\beta$.

Приращением $\Delta_\ell z$ *функции* $z = f(x, y)$ *по направлению* $\vec{\ell}$ называется разность

$$\Delta_\ell z = f(x_0 + \Delta\ell\cos\alpha, y_0 + \Delta\ell\cos\beta) - f(x_0, y_0).$$



Производной функции $z(x, y)$ *по направлению* $\vec{\ell}$ называется предел

$$\frac{\partial z}{\partial \ell} = \lim_{\Delta\ell\to 0}\frac{\Delta_\ell z}{\Delta\ell}.$$

Если функция дифференцируема, то, по определению дифференциала,

$$\Delta_\ell z = dz + \varepsilon(\Delta\ell), \qquad dz = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta\ell\cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta\ell\cos\beta.$$

Поэтому, с учётом $\frac{\varepsilon(\Delta\ell)}{\Delta\ell} \to 0$, получим связь между производной по направлению и частными производными:

$$\frac{\partial z}{\partial \ell} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}\cos\beta. \tag{37.3}$$

Заметим, что производные по направлениям осей Ox и Oy совпадают с соответствующими частными производными.

Пример 37.4. *Найти производные функции* $z = x^2 + xy$ *в точке* $(1, 2)$ *по направлениям, образующих с осью* Ox *углы в* $30°, 45°, 135°, 180°$.

Запишем вначале значения частных производных в заданной точке:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + y, \quad \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=1\\y=2}} = 4. \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = x, \quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=2}} = 1.$$

Далее, по (37.3), найдём значения производных по направлению:

$$\begin{array}{lll}
30°: & \vec{\ell} = \left\{\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \dfrac{1}{2}\right\} & \dfrac{\partial z}{\partial \ell} = 4\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{4\sqrt{3}+1}{2} \approx 3.96, \\
45°: & \vec{\ell} = \left\{\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right\} & \dfrac{\partial z}{\partial \ell} = 4\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{5\sqrt{2}}{2} \approx 3.53, \\
135°: & \vec{\ell} = \left\{\dfrac{-\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right\} & \dfrac{\partial z}{\partial \ell} = -4\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{-3\sqrt{2}}{2} \approx -2.12, \\
180°: & \vec{\ell} = \{-1, 0\} & \dfrac{\partial z}{\partial \ell} = -4.
\end{array}$$

#

Градиент. Пусть функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в окрестности точки (x_0, y_0). Рассмотрим вектор $\vec{g} = \{\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\}$. Производная по направлению единичного вектора $\vec{\ell} = \{\cos\alpha, \cos\beta\}$, согласно формулы (37.3), запишется как скалярное произведение этих векторов

$$\frac{\partial z}{\partial \ell} = (\vec{g}, \vec{\ell}) = |\vec{g}| \cdot \cos(\widehat{\vec{g}, \vec{\ell}}).$$

Производная по направлению будет максимальна, когда $\cos\varphi = 1$, т.е. когда векторы $\vec{g}$ и $\vec{\ell}$ сонаправлены. Следовательно, $\vec{g}$ – вектор, в направлении которого производная максимальна, производная в этом направлении равна длине этого вектора.

Градиентом $\operatorname{grad} z$ называется вектор, своим направлением указывающий направление наибольшего возрастания функции, а по модулю равный производной этой функции в этом направлении.

Вектор градиента в прямоугольных координатах имеет координаты

$$\operatorname{grad} z = \left\{\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right\}.$$

***Пример* 37.5.** *Найти градиент функции $z = x^2 + xy$ в точке $(1, 2)$ и производную в направлении градиента.*

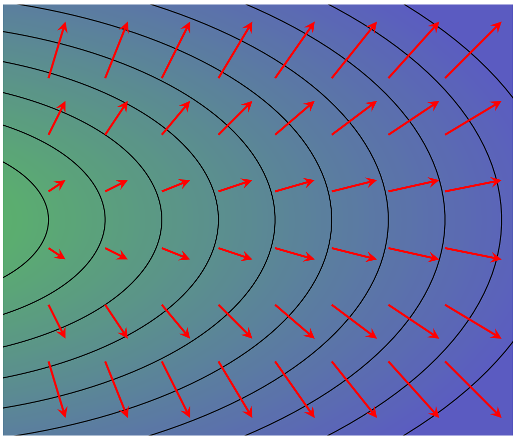
Запишем найденные частные производные функции z в виде координат вектора градиента:

$$\operatorname{grad} z = \{2x + y, x\}, \qquad \operatorname{grad} z|_{\substack{x=1\\y=2}} = \{4, 1\}.$$

$$\frac{\partial z}{\partial \ell} = |\operatorname{grad} z| = \sqrt{4^2 + 1^2} = \sqrt{17} \approx 4.12. \qquad \#$$

Отметим основные свойства градиента:

- Производная по направлению $\vec{\ell}$ равна проекции градиента на заданное направление: $\dfrac{\partial z}{\partial \ell} = (\operatorname{grad} z, \vec{\ell}) = \text{пр}_\ell \operatorname{grad} z$.
- Пусть $\vec{d\ell} = \{dx, dy\}$ – вектор приращения. Тогда полный дифференциал равен скалярному произведению вектора градиента на вектор приращения: $dz = \dfrac{\partial z}{\partial x}dx + \dfrac{\partial z}{\partial y}dy = (\operatorname{grad} z, \vec{d\ell})$.
- В дифференцируемой точке градиент ортогонален линии уровня.



§38. Производная сложной, неявной и параметрической функции

Производная сложной функции. Пусть $z = f(u, v, w)$ – функция переменных u, v и w которые, в свою очередь, являются функциями переменных x и y: $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$, $w = w(x, y)$. Функция $z(x, y) = f(u(x, y), v(x, y), w(x, y))$, также, как и в случае фоп, называется сложной функцией. В этой записи переменные x и y будем называть независимыми, а u, v и w – зависимыми.

По формуле (37.1) найдём дифференциал

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u}du + \frac{\partial z}{\partial v}dv + \frac{\partial z}{\partial w}dw =$$

$$= \frac{\partial z}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy\right) + \frac{\partial z}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy\right) + \frac{\partial z}{\partial w}\left(\frac{\partial w}{\partial x}dx + \frac{\partial w}{\partial y}dy\right) =$$

$$= \left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial y}\right)dy.$$

С другой стороны, z является функцией от переменных x и y, поэтому $dz = \dfrac{\partial z}{\partial x}dx + \dfrac{\partial z}{\partial y}dy$. Значит

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x}, \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial y}. \end{aligned} \tag{38.1}$$

Сделаем важное замечание насчёт различия между обычной производной фоп $y' = \dfrac{dy}{dx}$ и частной производной фнп $z'_x = \dfrac{\partial z}{\partial x}$. Так, $\dfrac{dy}{dx}$ можно считать отношением дифференциалов, поэтому имеет место соотношение вида $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du}\dfrac{du}{dx}$, являющееся формулой производной сложной функции. Но частную производную $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ нельзя считать отношением величины "∂z" к величине "∂x". Вообще говоря, конструкции "∂z" и "∂x", написанные по отдельности, лишены смысла. В записи выражении $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ хоть и присутствует дробная черта, но её не следует воспринимать как деление. Поэтому, например, $\dfrac{\partial z}{\partial x} \neq \dfrac{\partial z}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x}$.

Матрица Якоби. Для сложных функций удобно использовать векторное представление. Так, для рассмотренной выше функции, можно ввести векторы: $\vec{s} = \{u, v, w\}$ и $\vec{r} = \{x, y\}$, тогда $z(\vec{r}) = f(\vec{s}(\vec{r}))$.

Матрицей Якоби называется матрица

$$J_{xy}^{uvw} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial w}{\partial x} & \dfrac{\partial w}{\partial y} \end{pmatrix},$$

каждая строка которой является градиентом одной координаты вектор-функции $\vec{s}(\vec{r})$. Эту матрицу можно воспринимать как градиент вектор-функции $\vec{s}(\vec{r})$. И наоборот, градиент функции z по зависимым переменным u, v и w, а также градиент z по независимым переменным x и y можно представить в виде однострочных матриц Якоби:

$$J_{uvw}^{z} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial w} \end{pmatrix}, \quad J_{xy}^{z} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial z}{\partial x} & \dfrac{\partial z}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

Равенства (38.1) можно записать в виде

$$J_{xy}^{z} = J_{uvw}^{z} \cdot J_{xy}^{uvw}.$$

Данное матричное равенство означает, что градиент сложной функции $z(\vec{r})$ равен произведению градиента $z(\vec{s})$ на градиент $\vec{s}(\vec{r})$. Это равенство является аналогом формулы $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du} \cdot \dfrac{du}{dx}$ вычисления производной сложной функции для фоп.

***Пример* 38.1.** *Задана функция, зависящая от полярного радиуса и угла:* $z = z(\rho, \varphi)$. *Найти производную* $\dfrac{\partial z}{\partial x}$.

Полярные координаты связаны с прямоугольными формулами:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi, \end{cases} \qquad \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2+y^2}, \\ \varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}, \end{cases}$$

Вычислим $\dfrac{\partial\rho}{\partial x} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \dfrac{x}{\rho} = \cos\varphi, \quad \dfrac{\partial\varphi}{\partial x} = -\dfrac{y}{x^2+y^2} = -\dfrac{\sin\varphi}{\rho}.$

Искомую производную $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ найдём по формуле производной сложной функции:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial\rho}\frac{\partial\rho}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial\rho}\cos\varphi - \frac{\partial z}{\partial\varphi}\frac{\sin\varphi}{\rho}. \qquad \#$$

Задание. Докажите, что

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial\rho}\sin\varphi + \frac{\partial z}{\partial\varphi}\frac{\cos\varphi}{\rho}.$$

Якобиан. Пусть переменная z зависит от n переменных $u_1, u_2, \ldots, u_n$. Введём новые переменные $x_1, x_2, \ldots, x_n$, связанные со старыми некоторыми зависимостями $u_k = u_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, где $k = 1, 2, \ldots, n$.

Для связи градиентов функций $z(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ и $z(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ используется матрица Якоби

$$J = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial u_1}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial u_1}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial u_2}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial u_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial u_n}{\partial x_1} & \dfrac{\partial u_n}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial u_n}{\partial x_n} \end{pmatrix},$$

которая будет квадратной. *Якобианом* $\dfrac{\partial(u_1,\dots,u_n)}{\partial(x_1,\dots,x_n)}$ называется определитель этой матрицы:

$$\frac{\partial(u_1,\dots,u_n)}{\partial(x_1,\dots,x_n)}=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial u_1}{\partial x_2} & \dots & \dfrac{\partial u_1}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial u_2}{\partial x_2} & \dots & \dfrac{\partial u_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial u_n}{\partial x_1} & \dfrac{\partial u_n}{\partial x_2} & \dots & \dfrac{\partial u_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}.$$

***Пример* 38.2.** *Найти якобиан перехода от полярных координат к прямоугольным.*

Матрица Якоби (с учётом формул из примера 38.1) имеет вид

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial\rho}{\partial x} & \dfrac{\partial\rho}{\partial y} \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial x} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial y} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \dfrac{x}{\rho} & \dfrac{y}{\rho} \\ -\dfrac{y}{\rho^2} & \dfrac{x}{\rho^2} \end{pmatrix}.$$

Найдём якобиан этой матрицы:

$$\frac{\partial(\rho,\varphi)}{\partial(x,y)}=\frac{x}{\rho}\frac{x}{\rho^2}+\frac{y}{\rho}\frac{y}{\rho^2}=\frac{x^2+y^2}{\rho^3}=\frac{1}{\rho}.$$

Задание. Найдите якобиан обратного перехода, т.е. перехода от прямоугольных координат к полярным.

Производная неявной функции. Пусть зависимость переменной y от переменной x дана в неявном виде: $F(x,y)=0$. Рассмотрим выражение $F(x,y)$ как функцию двух переменных. Тогда её дифференциал

$$dF=\frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y}dy=0.$$

Из этого соотношения следует формула для нахождения производной неявно заданной функции $y(x)$:

$$y'=\frac{dy}{dx}=-\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial y}}.$$

***Пример* 38.3.** *Найти производную функции* $x^4+y^4-x^2y^2-a^4=0$.

$$\frac{\partial F}{\partial x}=4x^3-2xy^2, \quad \frac{\partial F}{\partial y}=4y^3-2x^2y \quad \Rightarrow$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{4x^3-2xy^2}{4y^3-2x^2y}=\frac{x(y^2-2x^2)}{y(2y^2-x^2)}. \qquad \#$$

Пусть $F(x,y,z)=0$ – неявно заданная функция переменной z от переменных x и y. Найдём значения частных производных $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$. Для этого рассмотрим выражение $F(x,y,z)$ как функцию трёх переменных. Её дифференциал

$$dF=\frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y}dy+\frac{\partial F}{\partial z}dz=0.$$

Выразим их этого равенства dz:

$$dz=-\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}dx-\frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}dy.$$

С учётом формулы (37.1), получим искомые формулы для частных производных неявно заданной функции:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}. \tag{38.2}$$

Уравнение касательной плоскости для неявно заданной функции. Запишем координаты вектора нормали к касательной плоскости (37.2) с учётом (38.2):

$$\vec{n}_1=\left\{\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}},\frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}},1\right\}.$$

Умножение вектора на число даёт коллинеарный вектор, поэтому удобнее в качестве нормали к касательной плоскости взять вектор

$$\vec{n}=\left\{\frac{\partial F}{\partial x},\frac{\partial F}{\partial y},\frac{\partial F}{\partial z}\right\}.$$

Тогда уравнение касательной плоскости примет вид

$$\frac{\partial F}{\partial x}\cdot(x-x_0)+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot(y-y_0)+\frac{\partial F}{\partial z}\cdot(z-z_0)=0.$$

***Пример* 38.4.** *Найти уравнение касательной плоскости, проведённой в точке* (x_0,y_0,z_0) *к эллипсоиду* $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$.

Запишем искомое уравнение

$$\frac{2x_0}{a^2}\cdot(x-x_0)+\frac{2y_0}{b^2}\cdot(y-y_0)+\frac{2z_0}{c^2}\cdot(z-z_0)=0.$$

Это выражение можно упростить, для этого поделим на 2 и раскроем скобки:

$$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}+\frac{z_0z}{c^2}-\left(\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2}\right)=0.$$

Учтя, что точка (x_0,y_0,z_0) принадлежит эллипсоиду, получим

$$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}+\frac{z_0z}{c^2}=1. \qquad \#$$

Производная параметрически заданной функции. Пусть функция $z=z(x,y)$ задана параметрически:

$$\begin{cases} x=x(u,v),\\ y=y(u,v),\\ z=z(u,v). \end{cases}$$

Найдём значения частных производных $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$. Для этого рассмотрим сложную функцию $z(u,v)$, для которой запишем градиент

$$\begin{pmatrix}\dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial v}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial z}{\partial x} & \dfrac{\partial z}{\partial y}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v}\\[2mm] \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v}\end{pmatrix}.$$

Транспонировав, получим матричное равенство

$$\begin{pmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u}\\[2mm] \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dfrac{\partial z}{\partial x}\\[2mm] \dfrac{\partial z}{\partial y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial z}{\partial u}\\[2mm] \dfrac{\partial z}{\partial v}\end{pmatrix},$$

являющееся системой линейных уравнений для определения производных $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$. Найдём их методом Крамера:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\dfrac{\partial(z,y)}{\partial(u,v)}}{\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\dfrac{\partial(x,z)}{\partial(u,v)}}{\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}}. \tag{38.3}$$

Данные формулы являются аналогом формулы $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy/dt}{dx/dt}$ вычисления производной неявно заданной функции для фоп.

Уравнение касательной плоскости для параметрически заданной функции. Запишем вектор нормали к касательной плоскости, использовав формулы (37.2) и (38.3):

$$\vec{n}_1 = \left\{ -\frac{\dfrac{\partial(z,y)}{\partial(u,v)}}{\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}}, -\frac{\dfrac{\partial(x,z)}{\partial(u,v)}}{\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}}, 1 \right\} = \left\{ \frac{\dfrac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}}{\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}}, \frac{\dfrac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}}{\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}}, 1 \right\}.$$

Здесь мы поменяли порядок следования переменных в некоторых якобианах, что равносильно перестановке соответствующих строк в матрице Якоби. Как известно из свойств определителей, при перестановке строк определитель меняет знак. Для записи уравнения касательной плоскости удобно пользоваться коллинеарным вектором нормали

$$\vec{n} = \left\{ \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}, \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}, \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right\}.$$

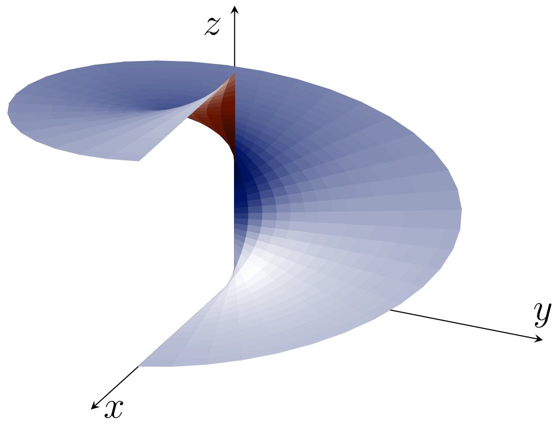
Тогда уравнение касательной плоскости примет вид

$$\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} \cdot (x - x_0) + \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} \cdot (y - y_0) + \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \cdot (z - z_0) = 0. \tag{38.4}$$

***Пример* 38.5.** *Найти уравнение касательной плоскости, проведённой к геликоиду*

$$\begin{cases} x = u\cos v, \\ y = u\sin v, \\ z = v \end{cases}$$

при значениях параметров u_0 и v_0.



Вычислим якобианы

$$\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\sin v & u\cos v\\ 0 & 1\end{vmatrix}=\sin v,$$

$$\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}0 & 1\\ \cos v & -u\sin v\end{vmatrix}=-\cos v,$$

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\cos v & -u\sin v\\ \sin v & u\cos v\end{vmatrix}=u\cos^2 v+u\sin^2 v=u.$$

Точка, через которую проводится касательная плоскость, имеет координаты $(u_0\cos v_0, u_0\sin v_0, v_0)$. Подставив полученные выражения в (38.4), запишем уравнение плоскости:

$$\sin v_0\cdot(x-u_0\cos v_0)-\cos v_0\cdot(y-u_0\sin v_0)+u_0\cdot(z-v_0)=0.$$

Раскрыв скобки, произведём упрощение:

$$\sin v_0\cdot x-\cos v_0\cdot y+u_0 z=u_0 v_0.$$ #

§39. Производные и дифференциалы высших порядков.

Производные высших порядков. Пусть $z=z(x,y)$ – дифференцируемая функция. Тогда производными второго порядка называются

$$z''_{xx}=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right),\qquad z''_{xy}=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right),$$

$$z''_{yx}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right),\qquad z''_{yy}=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right).$$

Производные z''_{xx}, z''_{yy} называют *чистыми*, а производные z''_{xy}, z''_{yx} – *смешанными*. Аналогично производным второго порядка определяются производные более высоких порядков, например:

$$z'''_{xxy} = \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right), \qquad z^{(4)}_{xxyx} = \frac{\partial^4 z}{\partial x^2 \partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}\right).$$

***Пример* 39.1.** *Найти производные второго порядка от функций* $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$, $\varphi = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$.

Последовательно находим производные $\rho(x, y)$:

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \qquad \frac{\partial \rho}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \qquad \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} = \frac{y^2}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}},$$

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial y^2} = \frac{x^2}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}, \quad \frac{\partial^2 \rho}{\partial x \partial y} = -\frac{xy}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}, \quad \frac{\partial^2 \rho}{\partial y \partial x} = -\frac{xy}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}.$$

Перейдём к функции $\varphi(x, y)$:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{y}{x^2+y^2}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{x}{x^2+y^2},$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}, \qquad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = -\frac{x^2+y^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}, \qquad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}. \qquad \#$$

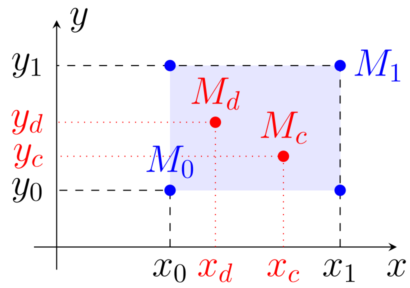
В примере выше для обеих функций смешанные производные z''_{xy} и z''_{yx} получились равными. Имеет место следующая

***Теорема* 39.1.** *Если функция $f(x, y)$, а также её производные f'_x, f'_y, f''_{xy}, f''_{yx} непрерывны в некоторой окрестности точки (x_0, y_0), то смешанные производные в этой точке равны: $f''_{xy} = f''_{yx}$.*

◀ Возьмём точку $M_1(x_1, y_1)$ из окрестности $M_0(x_0, y_0)$ и рассмотрим выражение $w = \dfrac{f(x_1, y_1) - f(x_1, y_0) - f(x_0, y_1) + f(x_0, y_0)}{(x_1 - x_0)(y_1 - y_0)}$.

Введём функцию $\psi(x) = \dfrac{f(x, y_1) - f(x, y_0)}{y_1 - y_0}$.

Заметим, что $w = \dfrac{\psi(x_1) - \psi(x_0)}{x_1 - x_0}$. По теореме Лагранжа для функции $\psi(x)$, $w = \psi'(x_c)$, где $x_c \in (x_0, x_1)$.



Следовательно, $w = \dfrac{f'_x(x_c, y_1) - f'_x(x_c, y_0)}{y_1 - y_0}$.

Введём функцию $g(y) = f'_x(x_c, y)$ и заметим, что $w = \dfrac{g(y_1) - g(y_0)}{y_1 - y_0} =$
$= g'(y_c) = f''_{xy}(x_c, y_c), \quad y_c \in (y_0, y_1)$.

Итак, мы получили, что значение w равно смешанной производной f''_{xy} в некоторой точке $M_c(x_c, y_c)$, лежащей в прямоугольнике, две противоположные вершины которого образованы точками M_0 и M_1.

Далее введём в рассмотрение функцию $\varphi(y) = \dfrac{f(x_1, y) - f(x_0, y)}{x_1 - x_0}$. Аналогично, с использованием теоремы Лагранжа,

$$w = \frac{\varphi(y_1) - \varphi(y_0)}{y_1 - y_0} = \varphi'(y_d) = \frac{f'_y(x_1, y_d) - f'_y(x_0, y_d)}{x_1 - x_0} = f''_{yx}(x_d, y_d),$$

где $x_d \in (x_0, x_1)$, $y_d \in (y_0, y_1)$. Значит, значение w равно смешанной производной f''_{yx} в некоторой точке $M_d(x_d, y_d)$, также лежащей в упомянутом выше прямоугольнике.

Устремив $M_1 \to M_0$, получим $M_c \to M_0$, $M_d \to M_0$.

Из непрерывности смешанных производных следует, что равенство $f''_{xy}(M_c) = f''_{yx}(M_d)$ перейдёт в $f''_{xy}(M_0) = f''_{yx}(M_0)$. ▶

Из доказанной теоремы следует также равенство соответствующих производных высших порядков, например,

$$\frac{\partial^3 z}{\partial^2 x \partial y} = \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x} = \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial^2 x}.$$

Для этого требуется, чтобы функция и её производные были непрерывны в некоторой окрестности точки, в которой вычисляется производная.

Замечание. Если смешанные производные существуют, но не непрерывны, то они могут оказаться разными.

Так, в *примере Шварца* рассматривается функция $z(x, y) = xy\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$. В точке $(0, 0)$ данное выражение не определено, но в пределе $z \to 0$, потому функция доопределяется из условия непрерывности: $z(0,0) = 0$. Смешанные производные в точке $(0,0)$ у этой функции существуют, они равны

$$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_{\substack{x=0\\y=0}} = -1, \qquad \left.\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}\right|_{\substack{x=0\\y=0}} = 1.$$

Значения различны, это является следствием того, что рассматриваемые вторые производные (в отличие от z, z'_x и z'_y) не являются непрерывными в окрестности точки $(0,0)$.

***Пример* 39.2.** *Задана функция, зависящая от полярного радиуса и угла:* $z = z(\rho, \varphi)$. *Найти выражение* $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

Начнём с нахождения $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$. Из примера (38.1) следует

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{\partial \rho}\cos\varphi - \frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{\partial \varphi}\frac{\sin\varphi}{\rho} = \frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{\partial z}{\partial \rho}\cos\varphi - \frac{\partial z}{\partial \varphi}\frac{\sin\varphi}{\rho}\right)\cos\varphi -$$

$$-\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{\partial z}{\partial \rho}\cos\varphi - \frac{\partial z}{\partial \varphi}\frac{\sin\varphi}{\rho}\right)\frac{\sin\varphi}{\rho} = \frac{\partial^2 z}{\partial \rho^2}\cos^2\varphi - \frac{\partial^2 z}{\partial \rho \partial \varphi}\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\rho} +$$

$$+\frac{\partial z}{\partial \varphi}\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\rho^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial \rho \partial \varphi}\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\rho} + \frac{\partial z}{\partial \rho}\frac{\sin^2\varphi}{\rho} + \frac{\partial^2 z}{\partial \varphi^2}\frac{\sin^2\varphi}{\rho^2} + \frac{\partial z}{\partial \varphi}\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\rho^2}.$$

Итак,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial \rho^2}\cos^2\varphi - \frac{\partial^2 z}{\partial \rho \partial \varphi}\frac{\sin 2\varphi}{\rho} + \frac{\partial z}{\partial \varphi}\frac{\sin 2\varphi}{\rho^2} + \frac{\partial z}{\partial \rho}\frac{\sin^2\varphi}{\rho} + \frac{\partial^2 z}{\partial \varphi^2}\frac{\sin^2\varphi}{\rho^2}$$

Аналогично можно получить

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial \rho^2}\sin^2\varphi + \frac{\partial^2 z}{\partial \rho \partial \varphi}\frac{\sin 2\varphi}{\rho} - \frac{\partial z}{\partial \varphi}\frac{\sin 2\varphi}{\rho^2} + \frac{\partial z}{\partial \rho}\frac{\cos^2\varphi}{\rho} + \frac{\partial^2 z}{\partial \varphi^2}\frac{\cos^2\varphi}{\rho^2}.$$

Сложив два этих равенства и применив основное тригонометрическое тождество, получим:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial \rho^2} + \frac{\partial z}{\partial \rho}\frac{1}{\rho} + \frac{\partial^2 z}{\partial \varphi^2}\frac{1}{\rho^2}.$$ #

Дифференциалы высших порядков. Пусть $z = z(x, y)$ – дифференцируемая функция. Тогда её полный дифференциал $dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$ является функцией, зависящей от x, y, dx и dy.

Дифференциалом второго порядка называется полный дифференциал от dz: $d^2z = d(dz)$. При вычислении этого дифференциала приращения dx, dy независимых переменных рассматриваются как постоянные величины, поэтому $d(dx) = 0$, $d(dy) = 0$. Поэтому

$$d^2z = d(dz) = d\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right) = d\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)dx + d\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)dy =$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)dx + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)dy\right)dx + \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)dx + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)dy\right)dy.$$

В итоге, с учётом равенства смешанных производных, получим связь дифференциала второго порядка со вторыми производными:

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2.$$

Аналогично дифференциалам второго порядка, вводятся дифференциалы третьего $d^3z = d(d^2z)$ и более высоких порядков $d^nz = d(d^{n-1}z)$. Эти дифференциалы также связаны с производными соответствующих порядков, например,

$$d^3z = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}dx^3 + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}dx^2dy + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}dxdy^2 + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}dy^3.$$

Общая формула для дифференциала произвольного порядка символически записывается по аналогии с биномом Ньютона:

$$d^nz = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n z.$$

***Пример* 39.3.** *Найти $d^2\varphi$ для $\varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$.*

Использовав результаты примера 39.1, запишем

$$d^2\varphi = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}dx^2 + 2\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}dxdy - \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}dy^2.$$

Этот дифференциал можно записать в виде одной дроби

$$d^2\varphi = 2\frac{xy(dx^2-dy^2)+(y^2-x^2)dxdy}{(x^2+y^2)^2}.$$

Формула Тейлора. Напомним вид формулы Тейлора для фоп:

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\Delta x^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\Delta x^{n+1}.$$

где $\Delta x = x - x_0$, $c \in (x_0, x)$. Т.к. $d^k f(x_0) = f^{(k)}(x_0)\Delta x^k$, то эту формулу можно записать с использованием дифференциалов:

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{d^k f(x_0)}{k!} + \frac{d^{n+1} f(c)}{(n+1)!}.$$

***Теорема* 39.2.** *Пусть $f(x, y)$ имеет непрерывные производные до $(n+1)$ включительно. Тогда в окрестности точки (x_0, y_0) справедлива формула Тейлора*

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{d^k f(x_0, y_0)}{k!} + \frac{d^{n+1} f(c_x, c_y)}{(n+1)!}, \tag{39.1}$$

где $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = y - y_0$, $c_x \in (x_0, x)$, $c_y \in (y_0, y)$.

Данную теорему будем использовать без доказательства.

***Пример* 39.4.** *Записать формулу Тейлора для функции $z = e^x \sin y$ в окрестности точки $(0, 0)$ при $n = 3$.*

Последовательно находим производные

$$\begin{aligned}
&z_0 = z\Big|_{(0,0)} = 0, && \frac{\partial z}{\partial x} = e^x \sin y|_{(0,0)} = 0,\\
&\frac{\partial z}{\partial y} = e^x \cos y\Big|_{(0,0)} = 1, && \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = e^x \sin y\Big|_{(0,0)} = 0,\\
&\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = e^x \cos y\Big|_{(0,0)} = 1, && \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = -e^x \sin y\Big|_{(0,0)} = 0,\\
&\frac{\partial^3 z}{\partial^2 x \partial y} = e^x \cos y\Big|_{(0,0)} = 1, && \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = -e^x \cos y\Big|_{(0,0)} = -1.
\end{aligned}$$

Запишем дифференциалы в точке $(0, 0)$ с учётом того, что $dx = x - 0 = x$, $dy = y - 0 = y$:

$$dz = 1 \cdot y, \quad d^2 z = 2xy, \quad d^3 z = 3x^2 y - y^3.$$

Итак, формула Тейлора для исходной функции с отброшенным остаточным членом имеет вид

$$e^x \sin y \approx z_0+dz+\frac{d^2z}{2}+\frac{d^3z}{6}=0+y+\frac{2xy}{2}+\frac{3x^2y-y^3}{6}=y+xy+\frac{x^2y}{2}-\frac{y^3}{6}.$$

***Пример* 39.5.** *Вычислить* $4.98^{1.05}$ *с точностью до слагаемых 2 порядка.*

В примере 37.3 значение $4.98^{1.05}$ было вычислено с точностью до слагаемых первого порядка. Для более точного вычисления используем формулу Тейлора для функции $z=x^y$ в окрестности точки $(5,1)$ при $n=2$:

$$z(x,y)\approx z(5,1)+z'_x\Delta x+z'_y\Delta y+\frac{1}{2}(z''_{xx}\Delta x^2+2z''_{xy}\Delta x\Delta y+z''_{yy}\Delta y^2).$$

Последовательно находим значения функции и её производных в данной точке:

$$z(5,1)=5,\qquad z'_x=yx^{y-1}=1,\qquad z'_y=x^y\ln x=5\ln 5,$$

$$z''_{xx}=y(y-1)x^{y-2}=0,\qquad z''_{xy}=x^{y-1}+yx^{y-1}\ln x=1+\ln 5,$$
$$z''_{yy}=x^y\ln^2 x=5\ln^2 5.$$

Подставим в формулу Тейлора:
$z(1+\Delta x,1+\Delta y)\approx 5+\Delta x+5\ln 5\Delta y+(1+\ln 5)\Delta x\Delta y+2.5\ln^2 5(\Delta y)^2.$
Для приращений $\Delta x=4.98-5=-0.02$ и $\Delta y=1.05-1=0.05$ получим
$z(4.98,1.05)\approx 1-0.02+0.25\ln 5-(1+\ln 5)0.001+0.00625\ln^2 5\approx 5.39594.$
Точное значение $4.98^{1.05}=5.39623$, погрешность вычисления составила $\varepsilon\approx 2.9\cdot 10^{-4}$. #

Условия полного дифференциала. Пусть $z=z(x,y)$ – дифференцируемая функция, тогда нахождение её полного дифференциала используется формула (37.1), согласно которой $dz=P(x,y)dx+Q(x,y)dy$, где $P(x,y)=\dfrac{\partial z}{\partial x},\quad Q(x,y)=\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

Интересна обратная задача: выражение $P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ считается заданным и требуется установить, является ли оно полным дифференциалом? Т.е. существует ли какая-нибудь функция $z(x,y)$, дифференциал которой $dz=P(x,y)dx+Q(x,y)dy$?

***Теорема* 39.3** (Условие полного дифференциала функции двух переменных)**.** *Чтобы выражение* $P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ *было полным дифференциалом, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие* $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$.

◀ Необходимость $\Rightarrow$: Пусть $P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ есть полный дифференциал функции z. Значит, $P=\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $Q=\dfrac{\partial z}{\partial y}$. Тогда $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$, $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$. Смешанные производные равны, необходимость доказана.

Достаточность $\Leftarrow$: Условие $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$ выполнено. Для доказательства требуется предъявить такую функцию z, для которой $dz=P(x,y)dx+{}$ $+Q(x,y)dy$. Это будет сделано позднее, в §53. ▶

***Пример* 39.6.** *Является ли выражение* $(2x-3y^2+1)dx+(2-6xy)dy$ *полным дифференциалом? В случае утвердительного ответа восстановить функцию.*

Найдём производные

$$P=2x-3y^2+1,\quad \frac{\partial P}{\partial y}=-6y,\qquad Q=2-6xy,\quad \frac{\partial Q}{\partial x}=-6y.$$

Производные равны, поэтому исходное выражение является полным дифференциалом. Восстановим функцию z:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=P=2x-3y^2+1\quad\Rightarrow\quad z=x^2-3y^2x+x+g(y).$$

Здесь мы проинтегрировали функцию P по переменной x, посчитав вторую переменную y постоянной. Заметим, что полученная после интегрирования функция, вместо произвольной постоянной C, содержит некоторую произвольную функцию $g(y)$. Для нахождения этой функции используем условие $\dfrac{\partial z}{\partial y}=Q$:

$$-6xy+g'(y)=2-6xy\quad\Rightarrow\quad g'(y)=2\quad\Rightarrow\quad g(y)=2y+C.$$

Ответ: $z(x,y)=x^2-3y^2x+x+2y+C$. #

Пусть $u=u(x,y,z)$ – дифференцируемая функция, тогда её полный дифференциал $du=Pdx+Qdy+Rdz$, где $P=\dfrac{\partial u}{\partial x}$, $Q=\dfrac{\partial u}{\partial y}$, $R=\dfrac{\partial u}{\partial z}$. Также рассмотрим обратную задачу: по известному выражению $Pdx+Qdy+Rdz$ следует определить, является ли оно полным дифференциалом?

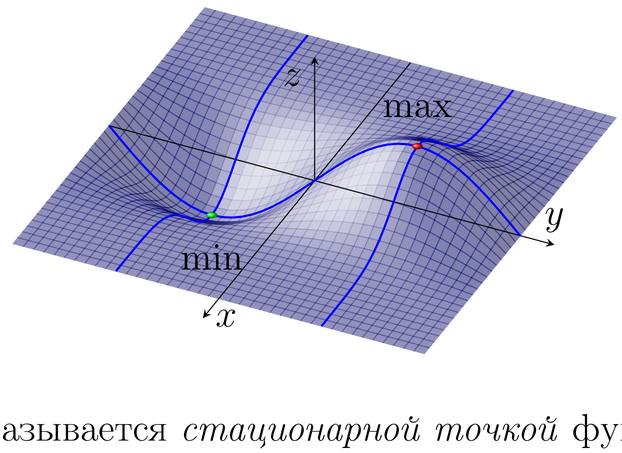
***Теорема* 39.4** (Условие полного дифференциала функции трёх переменных)**.** *Чтобы выражение $P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz$ было полным дифференциалом, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие три условия:*

$$\frac{\partial R}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial z},\quad \frac{\partial P}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial x},\quad \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}.$$

◀ Необходимость в этой теореме доказывается как и в теореме 39.3. Достаточность также будет показана позднее, в §54. ▶

§40. Экстремум функции нескольких переменных

Безусловный экстремум. Точка $M_0(x_0,y_0)$ называется точкой *локального минимума*, если для всех точек $M(x,y)$ из некоторой проколотой δ-окрестности этой точки выполнено $f(x,y)>f(x_0,y_0)$. Точка $M_0(x_0,y_0)$ называется точкой *локального максимума*, если для всех точек $M(x,y)$ из некоторой проколотой δ-окрестности этой точки выполнено $f(x,y)<f(x_0,y_0)$. Точки максимума и минимума называются точками *экстремума*.



Точка $M_0(x_0,y_0)$ называется *стационарной точкой* функции $f(x,y)$, если в ней все частные производные равны нулю:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=0,\quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=0.$$

***Теорема* 40.1** (Необходимое условие экстремума фнп). *Если $M_0(x_0, y_0)$ – точка экстремума функции $f(x, y)$ и в ней существуют частные производные, то M_0 – стационарная точка.*

◀ Зафиксируем переменную $y = y_0$. Тогда функция $\psi(x) = f(x, y_0)$ будет иметь максимум в точке x_0. Из леммы Ферма

$$\psi'(x_0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0.$$

Аналогично доказывается, что $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$. ▶

***Пример* 40.1.** *Найти все стационарные точки функции $z = x^3 + 3xy^2 - - 15x - 12y$.*

Найдём частные производные и приравняем их к нулю:

$$\begin{cases} z'_x = 3x^2 + 3y^2 - 15 = 0, \\ z'_y = 6xy - 12 = 0, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = 5, \\ xy = 2. \end{cases} \quad \Rightarrow$$

$$\begin{cases} y = 2/x, \\ x^2 + \frac{4}{x^2} = 5, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x^4 - 5x^2 + 4 = 0, \\ y = 2/x. \end{cases}$$

Решив уравнение $x^4 - 5x^2 + 4 = (x^2 - 1)(x^2 - 4) = 0$, найдём стационарные точки: $M_1(1, 2)$, $M_2(-1, -2)$, $M_3(2, 1)$, $M_4(-2, -1)$. #

Достаточное условие экстремума функции двух переменных. Матрица Гессе. Пусть $f(x, y)$ – дважды дифференцируемая функция и (x_0, y_0) – её стационарная точка. Полный дифференциал df в этой точке равен нулю вследствие равенства нулю всех частных производных первого порядка. Запишем формулу Тейлора (39.1) для $n = 1$ с учётом $df = 0$:

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{1}{2} d^2 f(x_c, y_c).$$

Следовательно, полное приращение функции

$$\Delta f = f(x, y) - f(x_0, y_0) = \frac{1}{2} d^2 f = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2 \right).$$

Стоящий в скобках дифференциал второго порядка d^2f является квадратичной формой дифференциалов dx, dy:

$$d^2f = \begin{pmatrix} dx & dy \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}.$$

Если эта квадратичная форма является положительно определённой, то $\Delta f > 0$ для всех точек (x, y). Это означает, что стационарная точка (x_0, y_0) является точкой минимума. Если квадратичная форма определена отрицательно, то стационарная точка является точкой максимума. Если же квадратичная форма знакопеременна, то Δf может принимать как положительные, так и отрицательные значения, что означает отсутствие экстремума в данной точке.

Матрица H квадратичной формы d^2f называется *матрицей Гессе*:

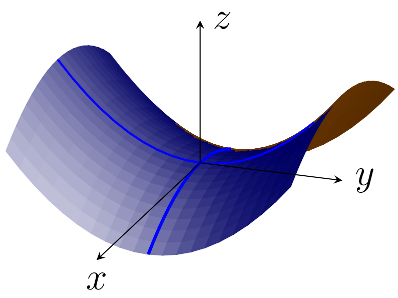
$$H = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix},$$

а её определитель $\det H$ – *гессианом.*

***Теорема* 40.2** (Достаточное условие экстремума функции двух переменных)**.** *Стационарная точка* $M_0(x_0, y_0)$ *функции* $f(x, y)$ *будет точкой экстремума, если гессиан этой функции в* M_0 *положителен:* $\det H = f''_{xx} f''_{yy} - (f''_{xy})^2 > 0$*. В случае* $f''_{xx} > 0$ *точка* M_0 *будет точкой минимума, при* $f''_{xx} < 0$ *– точкой максимума.*

◀ Доказательство следует из критерия знакоопределённости квадратичной формы второго порядка (см. §7). ▶

Заметим, что при отрицательном гессиане ($\det H < 0$) экстремума не будет. Такая стационарная точка называется седловой.



Достаточное условие экстремума для большего числа переменных. Пусть $M_0(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – стационарная точка функции n переменных $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Приращение функции Δf в данной точке, согласно формуле Тейлора, запишется в виде квадратичной формы

$$\Delta f = \frac{1}{2} d^2 f = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j.$$

Матрица Гессе этой квадратичной формы имеет вид

$$H = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}.$$

Введём в рассмотрение угловые миноры этой матрицы:

$$\delta_1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}, \quad \delta_2 = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{vmatrix}, \quad \ldots, \quad \delta_n = \det H.$$

***Теорема* 40.3** (Достаточное условие экстремума фнп)**.** *Пусть функция $f(x_1,\ x_2,\ \ldots, x_n)$ дважды непрерывно дифференцируема в окрестности стационарной точки M_0. Все угловые миноры δ_k матрицы Гессе отличны от нуля. Тогда точка M_0*

- *будет точкой минимума, если все угловые миноры положительны.*

- *будет точкой максимума, если знаки угловых миноров чередуются, причём $\delta_1 < 0$.*
- *не будет точкой экстремума во всех остальных случаях.*

Доказательство следует из критерия Сильвестра (см. §7).

Заметим, что если один или несколько угловых миноров δ_k равны нулю, то для определения типа стационарной точки следует провести дополнительные исследования по исследованию знакоопределённости квадратичной формы d^2f.

***Пример* 40.2.** *Исследовать стационарные точки примера 40.1 на экстремум.*

Найдём вторые производные $z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$ и запишем их в виде матрицы Гессе:

$$H = \begin{pmatrix} 6x & 6y \\ 6y & 6x \end{pmatrix}, \qquad \det H = 36(x^2 - y^2).$$

Рассмотрим по очереди все четыре стационарные точки данной функции. В точке $M_1(1,2)$ гессиан $\det H = 36(1^2 - 2^2) < 0$, то данная точка является седловой и экстремума в этой точке нет.

Точка $M_2(-1,-2)$ также является седловой.

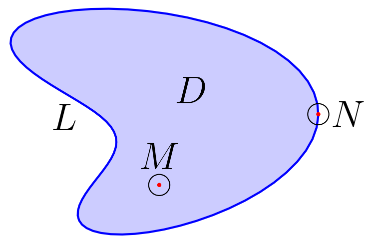
В точке $M_3(2,1)$ гессиан положителен: $\det H = 36(2^2 - 1^2) > 0$, что означает наличие тут экстремума. Для определения типа этого экстремума определим знак второй производной: $z''_{xx} = 6 \cdot 2 > 0$. Данная точка является точкой минимума. #

Задание. Докажите, что точка $M_4(-2,-1)$ является точкой максимума.

Нахождение наибольшего и наименьшего значения функции в области. Точка M называется *внутренней* точкой области D, если она принадлежит этой области вместе со своей некоторой δ-окрестностью.

Точка N называется *граничной* точкой области D, если для любой её δ-окрестности есть точки, как принадлежащие, так и не принадлежащие D. *Границей* L называется множество всех граничных точек области D.

Если все точки области D являются внутренними, т.е. нет ни одной граничной точки, лежащей в D, то такая область называется *открытой*. Если же $L \subset D$, то область D называется *замкнутой*.



Область D называется *ограниченной*, если есть некоторая δ-окрестность, содержащая D. В противном случае область называется *неограниченной*. Приведём примеры областей на плоскости (x, y):

- $x^2 + y^2 < 1$ – открытая ограниченная область,
- $x^2 + y^2 \leqslant 1$ – замкнутая ограниченная область,
- $x^2 + y^2 > 1$ – открытая неограниченная область,
- $x^2 + y^2 \geqslant 1$ – замкнутая неограниченная область.

Рассмотрим следующую задачу: Дана функция $z = f(x, y)$, определённая во всех точках замкнутой области D. Требуется найти наименьшее и наибольшее значение этой функции.

***Теорема* 40.4** (Теорема Вейерштрасса о компакте)**.** *Если функция непрерывна в ограниченной замкнутой области D, то эта функция ограничена и достигает в этой области своего минимального и максимального значения.*

Ранее мы уже приводили формулировку этой теоремы применительно для фоп (см. §22). Как и ранее, данную теорему примем без доказательства. Поясним лишь формулировку этой теоремы. Слова "функция достигает своего минимального и максимального значения" означают, что существуют две такие точки $M_1, M_2 \in D$, что для всех точек $M \in D$ выполняется $f(M_1) \leqslant f(M) \leqslant f(M_2)$.

Отметим, что если хотя бы одна из точек M_1 или M_2 является внутренней, то, согласно определению точки экстремума и необходимого условия экстремума, эта точка будет стационарной. В то же время, если одна или обе эти точки являются граничными, то частные производные в ней (них) не обязаны обращаться в нуль.

Задание. Объясните, почему внутренняя нестационарная точка не может являться точкой, в которой достигается минимум или максимум.

***Пример* 40.3.** *Найти наибольшее и наименьшее значение функции* $z = x^2 + y^2 - 12x + 16y$ *в области* $x^2 + y^2 \leqslant 25$.

Для начала найдём стационарные точки:

$$\begin{cases} z'_x = 2x - 12 = 0, \\ z'_y = 2y + 16 = 0, \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} x = 6, \\ y = -8. \end{cases}$$

Данная точка не лежит в области D, поэтому мы делаем вывод, что функция не может достичь экстремального значения во внутренних точках области. Следовательно, минимальное и максимальное значения достигаются на границе L, которая является окружностью $x^2 + y^2 = 25$.

Число граничных точек, бесконечно, поэтому мы не можем, как ранее для фоп, перебрать их. Введём параметризацию границы – окружности с радиусом 5 и центром в начале координат: $x = 5\cos t$, $y = 5\sin t$. Подставив данную параметризацию в выражение для функции, найдём

$z(t) = 5(5 - 12\cos t + 16\sin t)$.

Задача поиска минимума/максимума для функции двух переменных свелась к задаче поиска минимума/максимума функции одной переменной. Ищем производную

$$z' = 5(12\sin t + 16\cos t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{tg} t = -\frac{4}{3}.$$

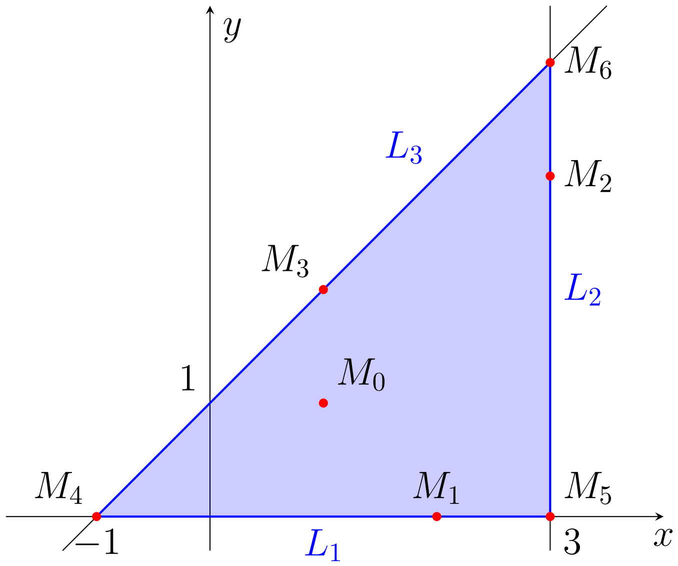
Для $t \in [0, 2\pi]$ есть две такие точки:

$$\begin{cases} \cos t = 3/5, \\ \sin t = -4/5, \end{cases} \qquad \begin{cases} \cos t = -3/5, \\ \sin t = 4/5. \end{cases}$$

С учётом параметризации $x = 5\cos t$, $y = 5\sin t$, минимальное и максимальное значение может достигаться только в точках $(3, -4)$ и $(-3, 4)$. Вычислим в этих точках значение функции: $z(3, -4) = -75$, $z(-3, 4) = 125$. Поэтому $z_{\min} = -75$ и $z_{\max} = 125$, эти значения достигаются в точках $(3, -4)$ и $(-3, 4)$ соответственно. #

***Пример* 40.4.** *Найти наибольшее и наименьшее функции* $z = x^2 + 2xy - y^2 - 4x$ *в треугольнике* $x \leqslant 3, y \geqslant 0, y \leqslant x + 1$.

Сделаем чертёж области.



Для начала найдём стационарные точки функции:

$$\begin{cases} z'_x = 2x + 2y - 4 = 0, \\ z'_y = 2x - 2y = 0, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 1, \\ y = 1. \end{cases}$$

Данная точка $M_0(1,1)$ лежит в области, значение функции в ней $z_0 = -2$. Других стационарных точек у функции нет, поэтому перейдём к граничным точкам. Граница состоит из трёх отрезков, обозначенных на рисунке как L_1, L_2 и L_3. Рассмотрим их по очереди.

Уравнением L_1 является $y = 0$, поэтому $z|_{L_1} = x^2 - 4x$. Производная этой функции $z' = 2x - 4$ равна нулю в точке с координатой $x = 2$. Данная точка отмечена на рисунке как $M_1(2,0)$, значение функции в ней $z_1 = -4$.

Уравнением L_2 является $x = 3$, поэтому $z|_{L_2} = 6y - y^2 - 3$. Производная этой функции $z' = 6 - 2y$ равна нулю в точке с координатой $y = 3$. Данная точка отмечена на рисунке как $M_2(3,3)$, значение функции в ней $z_2 = 6$.

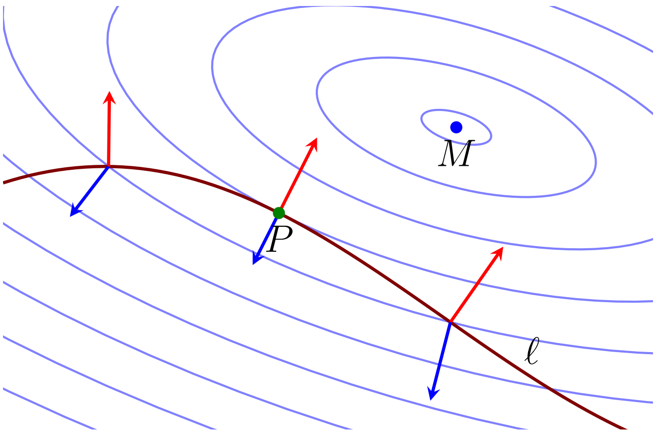
Уравнением L_3 является $y = x + 1$, поэтому $z|_{L_3} = 2x^2 - 4x - 1$. Производная этой функции $z' = 4x - 4$ равна нулю в точке с координатой $x = 1$. Данная точка отмечена на рисунке как $M_3(1,2)$, значение функции в ней $z_3 = -3$.

Также следует рассмотреть точки $M_4(-1,0)$, $M_5(3,0)$ и $M_6(3,4)$, которые являются границами отрезков L_1, L_2, L_3. Значения функции в них $z_4 = 5$, $z_5 = -3$, $z_6 = 5$.

Рассмотрев все значения z_0, z_1, ..., z_6, делаем вывод о том, что минимальное значение функции $z_{\min} = -4$ достигается в точке M_1. Максимальное значение функции $z_{\max} = 6$ достигается в точке M_2. #

§41. Условный экстремум. Метод множителей Лагранжа

Задача для функции двух переменных и одного ограничения. Дана функция $f(x, y)$ двух переменных и линия ℓ, заданная в неявном виде $\varphi(x, y) = 0$. Требуется на этой линии найти такую точку $P(x_0, y_0)$, что в ней функция f достигает своего экстремального (т.е. минимального или максимального) значения, т.е. для всех точек $(x, y) \in \ell$ из некоторой δ-окрестности P выполнено $f(x, y) \geqslant f(x_0, y_0)$ для минимума и $f(x, y) \leqslant$ $\leqslant f(x_0, y_0)$ для максимума. Условие, что искомая точка должна лежать на ℓ в дальнейшем будем называть ограничением.



На рисунке синим цветом проиллюстрированы линии уровня функции $f(x, y)$. Если искать безусловный экстремум, т.е. не учитывать ограничение, то экстремальное значение функции будет достигаться в точке M. Градиент функции $f(x, y)$ в некоторых точках линии ℓ показан в виде синих векторов. Рассмотрим также функцию $\varphi(x, y)$, в этом случае линия ℓ будет являться одной из линий уровня этой функции. Красными векторами показан градиент $\varphi(x, y)$. Заметим, что в искомой точке P векторы градиента функций $f(x, y)$ и $\varphi(x, y)$ коллинеарны.

Запишем условие коллинеарности векторов градиентов:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = -\lambda \dfrac{\partial \varphi}{\partial x}, \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = -\lambda \dfrac{\partial \varphi}{\partial y}. \end{cases}$$

Введём функцию $\mathcal{L}(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y)$ трёх переменных. Тогда записанное выше условие коллинеарности градиентов будет эквивалентно условию равенства нулю частных производных функции $\mathcal{L}$ по переменным x и y. Равенство нулю частной производной по λ соответствует условию того, что точка принадлежит линии ℓ.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 0, \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 0 \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} + \lambda \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} + \lambda \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = 0, \\ \varphi(x, y) = 0. \end{cases}$$

Т.о., получена система из трёх уравнений для поиска трёх неизвестных x_0, y_0, λ. Заметим, что постоянная λ изначально не входила в число искомых, но нам пришлось её ввести для получения замкнутой системы.

Задача в общем случае. Необходимые условия условного экстремума. Дана функция n переменных $f(x_1, \ldots, x_n)$ и m ограничений ($m < n$), заданных уравнениями $\varphi_1 = 0$, …, $\varphi_m = 0$. Из множества точек, для которых выполнены все ограничения, требуется найти такую точку $P(x_{10}, \ldots, x_{n0})$, в которой функция f достигает своего экстремального значения.

$$\begin{cases} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to \min\ (\max), \\ \varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \\ \vdots \\ \varphi_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0. \end{cases}$$

Для решения задачи вводится функция Лагранжа $\mathcal{L} = f + \sum\limits_{k=1}^{m} \lambda_k \varphi_k$, зависящая от $n + m$ переменных. Для нахождения их значений в точке экстремума решается система из $n+m$ уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_j} = 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, n, \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_k} = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, m. \end{cases}$$

Эти условия называются *необходимыми условиями условного экстремума.* Все экстремальные точки должны быть решениями этой системы, но не каждое решение этой системы будет экстремальной точкой. Все найденные решения системы необходимо проверить на экстремальность, используя достаточные условия.

Достаточные условия условного экстремума для функции двух переменных и одного ограничения. Рассмотрим для начала случай функции двух переменных и одного ограничения. В точке минимума должны выполняться необходимые условия и второй дифференциал $d^2\mathcal{L}$ должен представлять положительно определённую квадратичную форму от переменных dx и dy. Но, в отличие от безусловного экстремума, дифференциалы dx и dy являются зависимыми, эту зависимость можно получить из ограничения $\varphi(x, y) = 0$, продифференцировав которое получим

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy = 0.$$

Запишем $d^2\mathcal{L}$ с учётом данной связи:

$$d^2\mathcal{L} = \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial y^2} dy^2 = \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x \partial y} dx \left(-\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x}}{\frac{\partial \varphi}{\partial y}} dx \right) +$$

$$+\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial y^2} \left(-\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x}}{\frac{\partial \varphi}{\partial y}} dx \right)^2 = -\frac{dx^2}{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2} h,$$

где

$$h = -\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x^2} + 2\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x \partial y} - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial y^2}.$$

Последнее выражение удобно записать в виде определителя

$$h = \begin{vmatrix} 0 & \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} & \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} & \dfrac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} & \dfrac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial y^2} \end{vmatrix}.$$

Квадратичная форма $d^2\mathcal{L}$ будет определена положительно, если $h < 0$. Данное условие является *достаточным условием* того, что стационарная точка является точкой минимума. В случае $h > 0$ квадратичная форма будет определена отрицательно и стационарная точка является точкой максимума.

Достаточные условия условного экстремума для общего случая. [1] Для формулировки *достаточных условий условного экстремума* в общем случае введём матрицу Гессе функции Лагранжа:

$$H = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \dfrac{\partial \varphi_m}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial \varphi_m}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial \varphi_m}{\partial x_1} & \dfrac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x_1^2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} & \cdots & \dfrac{\partial \varphi_m}{\partial x_n} & \dfrac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}.$$

Под угловым минором h_k будем понимать определитель матрицы, составленной из первых k строк и первых k столбцов матрицы H. Теперь можно сформулировать достаточные условия экстремума в общем случае:

- Если знаки угловых миноров $h_{2m+1}, \ldots, h_{m+n}$ одинаковы и совпадают с $(-1)^m$, то стационарная точка является точкой минимума.
- Если знаки угловых миноров $h_{2m+1}, \ldots, h_{m+n}$ чередуются, причём знак минора h_{2m+1} совпадает со знаком с $(-1)^{m+1}$, то стационарная точка является точкой максимума.

[1] Данный раздел является факультативным.

- Если знаки угловых миноров $h_{2m+1}, \ldots, h_{m+n}$ отличны от двух описанных выше случаев, то стационарная точка не будет являться точкой экстремума.

Замечание. Данным критерием следует пользоваться, если ни один из миноров $h_{2m+1}, \ldots, h_{m+n}$ не равен нулю. В противном случае для определения вида стационарной точки требуется дополнительное исследование.

***Пример* 41.1.** *Найти точки экстремума функции $z = x^2 y$ при ограничении $x^2 + y^2 = 3$.*

Запишем функцию Лагранжа и найдём её частные производные:

$$\mathcal{L} = x^2 y + \lambda(x^2 + y^2 - 3), \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 2xy + 2\lambda x = 0, \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = x^2 + 2\lambda y = 0, \\ x^2 + y^2 = 3. \end{cases}$$

Преобразуем полученную систему уравнений:

$$\begin{cases} x(y+\lambda) = 0, \\ x^2 = -2\lambda y, \\ x^2 + y^2 = 3. \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 0, \\ 2\lambda y = 0, \\ x^2 + y^2 = 3. \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \lambda = -y, \\ x^2 = 2y^2, \\ 3y^2 = 3. \end{cases}$$

Получим 6 стационарных точек: $(0, \pm\sqrt{3})$, $(\pm\sqrt{2}, \pm 1)$. Т.к. область, на которой выполняется ограничение $x^2 + y^2 = 3$ является ограниченной и замкнутой, то минимальное и максимальное значения достигаются в одной из этих стационарных точек (граничных точек область не имеет). Вычислив значения функции z в этих точках, получим $z_{\min} = -2$ в точках $(\pm\sqrt{2}, -1)$, а $z_{\max} = 2$ в точках $(\pm\sqrt{2}, 1)$. #

***Пример* 41.2.** *Найти экстремум функции $u = xyz$ трёх переменных при ограничении $x + y + z = 3a$, где $a > 0$.*

Функция Лагранжа $\mathcal{L} = xyz + \lambda(x + y + z - 3a)$, её стационарные точки удовлетворяют системе

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = yz + \lambda = 0, \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = xz + \lambda = 0, \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} = xy + \lambda = 0, \\ x + y + z = 3a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = -yz, \\ (x-y)z = 0, \\ (x-z)y = 0, \\ x + y + z = 3a. \end{cases}$$

Данной системе удовлетворяют 4 стационарные точки: $(3a, 0, 0)$, $(0, 3a, 0)$, $(0, 0, 3a)$ и (a, a, a). Ограничение $x + y + z = 3a$ представляет собой плоскость, эта область не является ограниченной, поэтому теорема Вейерштрасса в данном случае неприменима. Поэтому, для определения типа стационарных точек, используем достаточное условие.

Найдём вторые производные функции Лагранжа и запишем их в виде матрицы Гессе:

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & z & y \\ 1 & z & 0 & x \\ 1 & y & x & 0 \end{pmatrix}.$$

Тип стационарной точки зависит от двух угловых миноров h_3 и h_4 этой матрицы:

$$h_3 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & z \\ 1 & z & 0 \end{vmatrix} = 2z,$$

$$h_4 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & z & y \\ 1 & z & 0 & x \\ 1 & y & x & 0 \end{vmatrix} = x^2 + y^2 + z^2 - 2(xy + xz + yz).$$

Согласно достаточного условия условного экстремума, для точки минимума должны выполняться условия $h_3 < 0$ и $h_4 < 0$, а для точки максимума – условия $h_3 > 0$ и $h_4 < 0$. Проверим точки.

- В точке $(0,0,3a)$ миноры $h_3 = 6a > 0$, $h_4 = 9a^2 > 0$, что означает, что экстремума нет.
- Из симметрии функции и ограничения относительно переменных следует, что аналогичная ситуация будет в точках $(0,3a,0)$ и $(0,0,3a)$.
- В точке (a,a,a) миноры $h_3 = 2a > 0$, $h_4 = -3a^2 < 0$, что означает, что данная точка является точкой максимума. #

***Пример* 41.3.** *Найти точки экстремума функции $u = xy + yz$ при наличии двух ограничений $x^2 + y^2 = 2$, $y + z = 2$ в области $x, y, z > 0$.*

Функция Лагранжа $\mathcal{L} = xy + yz + \lambda(x^2 + y^2 - 2) + \mu(y + z - 2)$, её стационарные точки удовлетворяют системе

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = y + 2\lambda x = 0, \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = x + z + 2\lambda y + \mu = 0, \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} = y + \mu = 0, \\ x^2 + y^2 = 2 \\ y + z = 2 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} \mu = -y, \\ z = 2 - y, \\ 2\lambda = -\dfrac{y}{x}, \\ x^2 = 2 - y^2, \\ x + (2 - y) - \dfrac{y^2}{x} - y = 0. \end{cases}$$

Преобразуем последнее уравнение:

$$\frac{x^2 - y^2}{x} + 2(1 - y) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{2 - 2y^2}{x} + 2(1 - y) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{2(1 + y)(1 - y)}{x} + \frac{2x(1 - y)}{x} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2\frac{(1 - y)(1 + y + x)}{x} = 0.$$

Выражение $1+y+x$ не может равняться нулю вследствие положительности переменных. Поэтому $y = 1$. Далее находим $x = \sqrt{2 - y^2} = 1$ и $z = 2 - y = 1$. У нас имеется только одна стационарная точка $(1, 1, 1)$.

Запишем матрицу Гессе функции Лагранжа:

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2x & 2y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2x & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2y & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

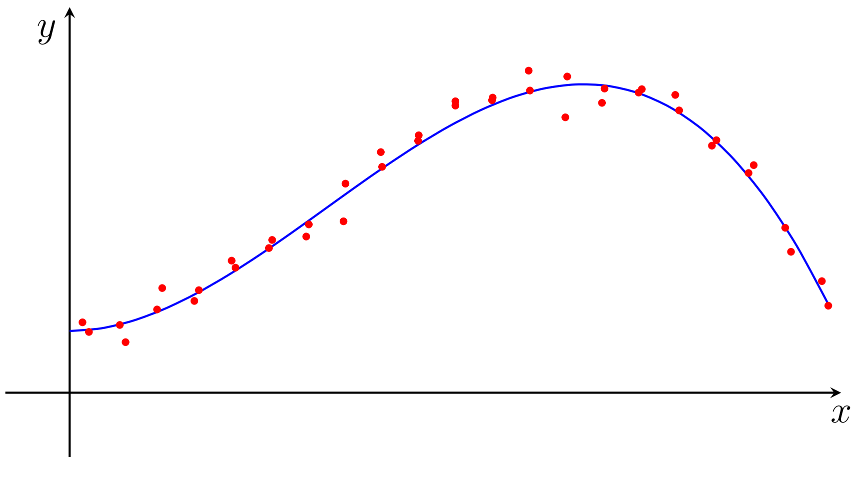
В данной задаче $n = 3$ и $m = 2$, вид стационарной точки зависит только от одного углового минора $h_5 = \det H$. В стационарной точке

$$\det H = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -24.$$

Знак h_5 совпадает со знаком $(-1)^{m+1}$, поэтому точка $(1, 1, 1)$ является точкой максимума. #

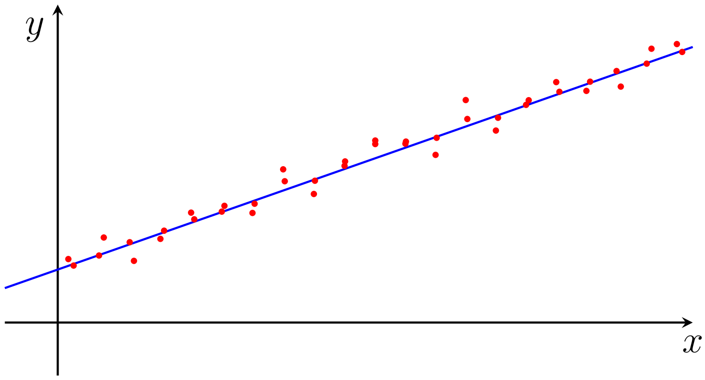
§42. Метод наименьших квадратов

Постановка задачи. На практике часто приходится пользоваться эмпирическими формулами, составленными на основе данных, полученных из опыта и наблюдений. Такие данные, как правило, содержат ошибки и погрешности. Одним из методов составления этих формул является метод наименьших квадратов.



Требуется найти зависимость одной физической величины (y) от другой (x). Для этого проводят n измерений при различных значениях физической величины x. Значения y_i измеряемой величины, проведённые при значениях x_i на рисунке отмечены красными точками. Считается, что измерения величин y_i проведены с ошибками, требуется найти зависимость $y(x)$, график которой показан на рисунке синей линией.

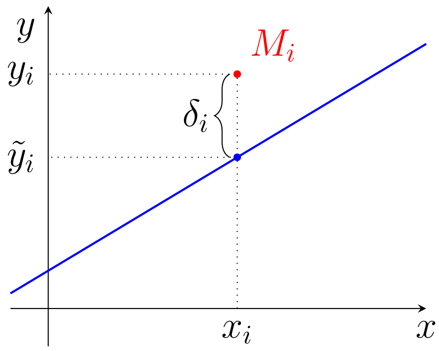
Линейная регрессия y на x. Рассмотрим случай, когда искомая зависимость $y(x)$ предполагается линейной, т.е. имеет вид $y = kx + b$.



Даны координаты контрольных точек (x_i, y_i), где $i = 1, \ldots, n$, требуется найти два параметра k и b прямой, наиболее близко проходящей к контрольным точкам.

Ошибка в измерении i равна длине вертикального отрезка δ_i:

$\delta_i = |\tilde{y}_i - y_i| = |kx_i + b - y_i|.$



В методе наименьших квадратов в качестве минимизируемой функции выбирается сумма квадратов всех ошибок δ_i:

$$F(k, b) = \sum_{i=1}^{n} \delta_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (kx_i + b - y_i)^2 \to \min$$

Запишем необходимые условия экстремума:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial k} = 2\sum\limits_{i=1}^{n}(kx_i + b - y_i)x_i = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial b} = 2\sum\limits_{i=1}^{n}(kx_i + b - y_i) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i, \\ k\sum\limits_{i=1}^{n} x_i + b\sum\limits_{i=1}^{n} 1 = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i. \end{cases}$$

Введём новые обозначения. Средними значениями $\overline{x}$ и $\overline{y}$ назовём средние арифметические всех значений исходных данных:

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i, \quad \overline{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i.$$

Аналогично введём средние значения $\overline{x^2}$ и $\overline{xy}$:

$$\overline{x^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2, \qquad \overline{xy} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

Тогда система для нахождение неизвестных параметров k и b примет вид

$$\begin{cases} k\overline{x^2} + b\overline{x} = \overline{xy}, \\ k\overline{x} + b = \overline{y}, \end{cases}$$

или в матричном виде

$$\begin{pmatrix} \overline{x^2} & \overline{x} \\ \overline{x} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{xy} \\ \overline{y} \end{pmatrix}.$$

Применив, например, метод Крамера, получим

$$k = \frac{\overline{xy} - \overline{x}\cdot\overline{y}}{\overline{x^2} - \left(\overline{x}\right)^2}, \qquad b = \frac{\overline{x^2}\cdot\overline{y} - \overline{xy}\cdot\overline{x}}{\overline{x^2} - \left(\overline{x}\right)^2}.$$

После подстановки найденных значений в уравнение $y = kx + b$, получим уравнение прямой, называемое *уравнением прямой линейной регрессии* y *на* x. Оно имеет вид:

$$y - \overline{y} = \left[\frac{\overline{xy} - \overline{x}\cdot\overline{y}}{\overline{x^2} - \left(\overline{x}\right)^2}\right](x - \overline{x})$$

Задание. Сформулируйте задачу нахождения прямой линейной регрессии x на y и запишите уравнение данной прямой.

***Пример* 42.1.** *Результаты измерений представлены в таблице.*[1] *Требуется найти уравнение прямой линейной регрессии* y *на* x.

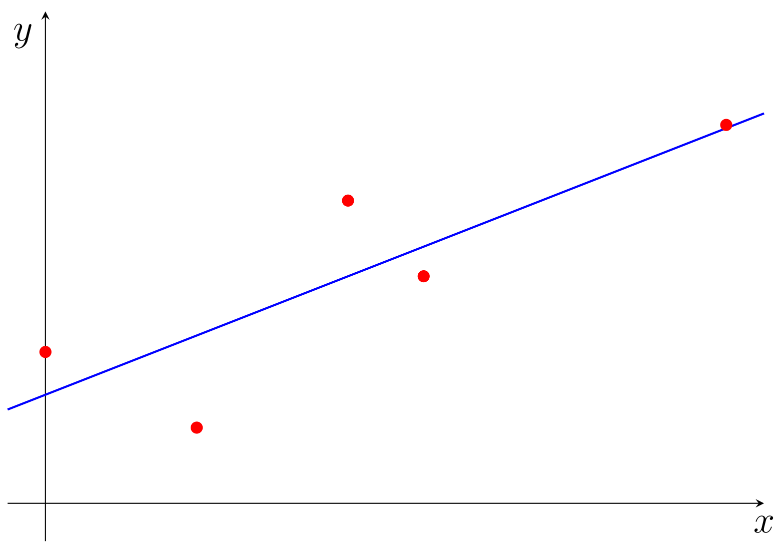
i	1	2	3	4	5
x_i	0	2	4	5	9
y_i	2	1	4	3	5

[1] В данном обучающем примере число измерений ($n = 5$) было взято малым только из-за удобства вычислений. На практике для получения правдоподобных результатов число измерений n должно быть на порядок или даже порядки больше. Для проведения вычислений следует использовать компьютерные программы.

Находим средние значения по данным таблицы:
$\overline{x} = \frac{1}{5}(0 + 2 + 4 + 5 + 9) = 4,$
$\overline{y} = \frac{1}{5}(2 + 1 + 4 + 3 + 5) = 3,$
$\overline{x^2} = \frac{1}{5}(0^2 + 2^2 + 4^2 + 5^2 + 9^2) = 25.2,$
$\overline{xy} = \frac{1}{5}(0 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 4 \cdot 4 + 5 \cdot 3 + 9 \cdot 5) = 15.6.$
Уравнение прямой имеет вид:

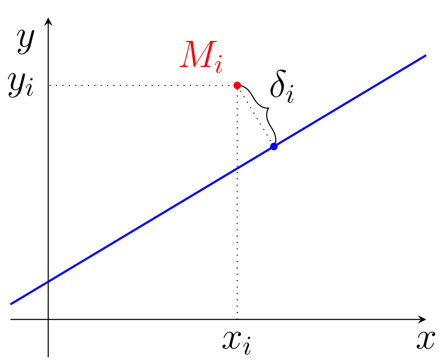
$$y - 3 = \left[\frac{15.6 - 4 \cdot 3}{25.2 - 4^2}\right](x - 4) \quad \Rightarrow \quad y = \frac{9}{23}x + \frac{33}{23}.$$

Исходные данные представлены на рисунке в виде точек, найденная прямая изображена синим цветом. #



Ортогональная линейная регрессия. Рассмотрим немного другую задачу, отличие которой от предыдущей заключается в том, что ошибка измерений содержится не только в значениях y_i, но и в значениях x_i.

Зависимость также предполагается линейной, уравнение прямой выбирается в общем виде $Ax + By + C = 0$ с нормировкой $A^2 + B^2 = 1$. Но, в этом случае, расстояние от точек измерений до данной прямой измеряется по нормали:



$$\delta_i = \frac{|Ax_i + By_i + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = |Ax_i + By_i + C|.$$

В качестве минимизируемой функции также выбирается сумма квадратов всех ошибок δ_i:

$$F(A,B,C) = \sum_{i=1}^{n} \delta_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (Ax_i + By_i + C)^2 \to \min$$

при ограничении $A^2 + B^2 = 1$.

Для решения задачи поиска условного экстремума запишем функцию Лагранжа:

$\mathcal{L}(A,B,C,\lambda) = F(A,B,C) - \lambda(A^2 + B^2 - 1)$.

Необходимые условия экстремума имеют вид:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial A} = 2\sum\limits_{i=1}^{n}(Ax_i^2 + Bx_iy_i + Cx_i) - 2\lambda A = 0, \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial B} = 2\sum\limits_{i=1}^{n}(Ax_iy_i + By_i^2 + Cy_i) - 2\lambda B = 0, \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial C} = 2\sum\limits_{i=1}^{n}(Ax_i + By_i + C) = 0, \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = A^2 + B^2 - 1 = 0. \end{cases}$$

Как и раньше, перейдём к средним значениям:

$$\begin{cases} A\overline{x^2} + B\overline{xy} + C\overline{x} = \lambda A, \\ A\overline{xy} + B\overline{y^2} + C\overline{y} = \lambda B, \\ A\overline{x} + B\overline{y} + C = 0, \\ A^2 + B^2 = 1. \end{cases}$$

Из третьего уравнения $C = -A\overline{x} - B\overline{y}$. Подставив это выражение в первые два уравнения, запишем их в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} \overline{x^2} - (\overline{x})^2 & \overline{xy} - \overline{x}\cdot\overline{y} \\ \overline{xy} - \overline{x}\cdot\overline{y} & \overline{y^2} - (\overline{y})^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}.$$

Стоящую слева квадратную матрицу второго порядка обозначим как M, эта матрица называется *ковариационной матрицей*. Вектор-столбец неизвестных коэффициентов A и B обозначим как V. Матричное уравнение примет вид $MV = \lambda V$ и полученная задача фактически является задачей поиска собственного вектора V известной матрицы M.

Решением задачи минимизации является собственный вектор V единичной длины ковариационной матрицы M, соответствующий наименьшему собственному значению.[1] Уравнение прямой ортогональной регрессии имеет вид

$$A(x-\overline{x})+B(y-\overline{y})=0.$$

Заметим также, что данное уравнение прямой, как и уравнение прямой линейной регрессии, проходит через точку с координатами $(\overline{x},\overline{y})$.

***Пример* 42.2.** *Данные измерений представлены в таблице. Требуется найти уравнение прямой ортогональной регрессии.*

i	1	2	3	4	5
x_i	0	2	4	5	9
y_i	2	1	4	3	5

В примере 42.1 для исходных данных были найдены значения $\overline{x}=4$, $\overline{y}=3$, $\overline{x^2}=25.2$, $\overline{xy}=15.6$. В данной задаче также необходимо найти $\overline{y^2}$:

$\overline{y^2}=\frac{1}{5}(2^2+1^2+4^2+3^2+5^2)=11.$

Составим ковариационную матрицу

$$M=\begin{pmatrix}\overline{x^2}-(\overline{x})^2 & \overline{xy}-\overline{x}\cdot\overline{y}\\ \overline{xy}-\overline{x}\cdot\overline{y} & \overline{y^2}-(\overline{y})^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9.2 & 3.6\\ 3.6 & 2\end{pmatrix}.$$

Характеристическое уравнение имеет вид $\lambda^2-11.2\lambda+5.44=0$, корни которого равны $\lambda_1\approx 0.51$, $\lambda_2\approx 10.69$. Собственный вектор единичной длины, соответствующий наименьшему собственному значению λ_1, равен

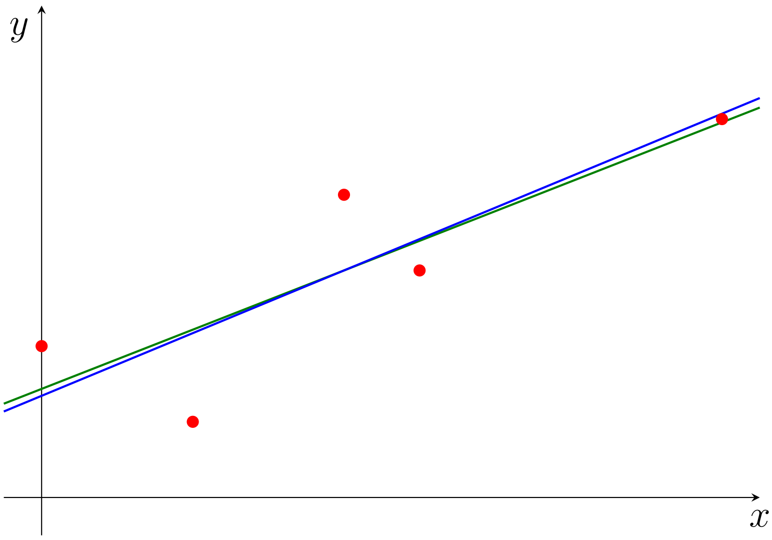
$$\begin{pmatrix}A\\ B\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-0.383\\ 0.924\end{pmatrix}.$$

Т.о., уравнение прямой ортогональной регрессии имеет вид

$$-0.383(x-4)+0.924(y-3)=0 \quad\Rightarrow\quad y=0.414x+1.343. \qquad \#$$

На рисунке данная прямая проведена синим цветом, для сравнения зелёным цветом проведена прямая линейной регрессии y на x.

[1] Почему решением является собственный вектор, соответствующий наименьшему из двух собственных значений, будет показано позже, когда задача будет разобрана в общем случае.

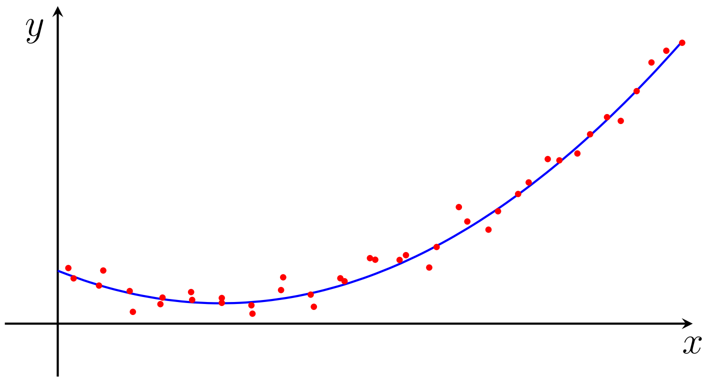


Сведение нелинейных зависимостей к линейной. Уравнения прямых линейных регрессий можно использовать и для поиска нелинейных зависимостей. Заметим, что в этом случае решение будет являться приближённым, что приемлемо, если нахождение точного решения задачи минимизации затруднительно.

Приведём несколько примеров таких нелинейных зависимостей:

- Обратно пропорциональная зависимость $y = \frac{k}{x-b}$. Данную зависимость можно представить в виде $x = k \cdot \frac{1}{y} + b$ и рассматривать как линейную относительно переменных $z = \frac{1}{y}$ и x.
- Показательная зависимость $y = ae^{kx}$. Данную зависимость можно представить в виде $\ln y = kx + \ln a$ и рассматривать как линейную относительно переменных x и $z = \ln y$.
- Степенная зависимость $y = ax^k$. Данную зависимость можно представить в виде $\ln y = k \ln x + \ln a$ и рассматривать как линейную относительно переменных $t = \ln x$ и $z = \ln y$.

Квадратичная зависимость. Рассмотрим точное решение для квадратичной зависимости. Требуется найти уравнение параболы с уравнением $y = ax^2 + bx + c$, наиболее близко проходящей к заданным точкам.



Все расстояния измеряются по вертикали, минимизируемой функцией является суммой их квадратов:

$$F(a,b,c)=\sum_{i=1}^{n}(ax_i^2+bx_i+c-y_i)^2\to\min.$$

Запишем необходимые условия экстремума:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial a}=0,\\[2mm] \dfrac{\partial F}{\partial b}=0,\\[2mm] \dfrac{\partial F}{\partial c}=0,\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}\sum\limits_{i=1}^{n}(ax_i^4+bx_i^3+cx_i^2-y_ix_i^2)=0,\\ \sum\limits_{i=1}^{n}(ax_i^3+bx_i^2+cx_i-y_ix_i)=0,\\ \sum\limits_{i=1}^{n}(ax_i^2+bx_i+c-y_i)=0.\end{cases}$$

После перехода к средним значениям, получим

$$\begin{cases}a\overline{x^4}+b\overline{x^3}+c\overline{x^2}=\overline{yx^2},\\ a\overline{x^3}+b\overline{x^2}+c\overline{x}=\overline{yx},\\ a\overline{x^2}+b\overline{x}+c=\overline{y},\end{cases}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{pmatrix}\overline{x^4}&\overline{x^3}&\overline{x^2}\\ \overline{x^3}&\overline{x^2}&\overline{x}\\ \overline{x^2}&\overline{x}&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\overline{yx^2}\\ \overline{yx}\\ \overline{y}\end{pmatrix}.$$

Т.о., задача свелась к линейной системе из трёх уравнений, решение которой не представляет труда.

Многомерная линейная регрессия. [1] Даны точки $(x_{1i}, x_{2i}, \ldots, x_{mi}, y_i)$, полученные в результате n измерений ($i=\overline{1,n}$). Для удобства будем считать, что средние значения всех переменных $\overline{x_1}=\ldots=\overline{x_m}=\overline{y}=0$. Если это не так, то, вычтя из всех значений каждой переменной её

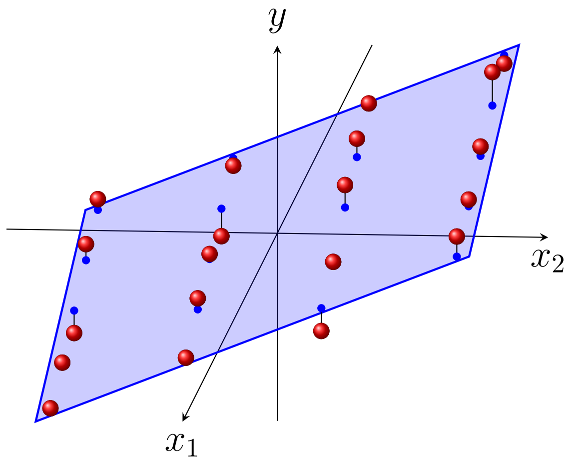
[1] Данный раздел является факультативным.

среднее, всегда можно добиться получения нулевого среднего. Например, для значений $x = \{0, 1, 3, 4, 7\}$ среднее равно $\overline{x} = 3$, вычтя это значение, получим $x^* = \{-3, -2, 0, 1, 4\}$ со средним $\overline{x^*} = 0$. Данное преобразование является параллельным сдвигом и не искажает исходные данные.

Считается, что переменная y линейно зависит от переменных x_j, т.е. имеет место зависимость

$$y = \sum_{j=1}^{m} A_j x_j.$$

Данное уравнение является уравнением гиперплоскости, проходящей через начало координат. Искомыми параметрами являются значения коэффициентов A_j. Требуется подобрать такие значения A_j, чтобы эта гиперплоскость как можно ближе проходила к заданным точкам.



Как и в случае нахождения прямой линейной регрессии y на x, расстояния δ_i от точек до гиперплоскости измеряются параллельно оси Oy. Минимизируемая функция в методе наименьших квадратов имеет вид

$$F(A_j) = \sum_{i=1}^{n} \delta_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{m} A_j x_{ji} - y_i \right)^2 \to \min .$$

Перейдём к матричному представлению. Пусть

$$V = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_m \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1} & y_{m2} & \cdots & x_{mn} \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Вектор-столбец $\Delta = X^T V - Y$ будет содержать ошибки δ_i, а сама функция F запишется как

$$F(V) = \sum_{i=1}^{n} \delta_i^2 = \Delta^T \Delta = (X^T V - Y)^T (X^T V - Y).$$

Раскрыв скобки, получим

$$F(V) = V^T X X^T V - Y^T X^T V - V^T X Y + Y^T Y \to \min .$$

Т.к. $Y^T Y$ является постоянной и не зависит от V, а $Y^T X^T V = V^T X Y$, то задача сводится к минимизации функции

$$F^*(V) = V^T X X^T V - 2Y^T X^T V \to \min .$$

Вектор-столбец частных производных, содержащий элементы $\frac{\partial F^*}{\partial A_j}$ для данного функции примет вид

$$\frac{dF^*}{dV} = 2(X X^T V - X Y).$$

Приравняв эту матрицу к нулевой (что соответствует стационарной точке), найдём искомую матрицу V как решение системы линейных уравнений

$$X X^T V = X Y \quad \Rightarrow \quad V = (X X^T)^{-1} X Y.$$

Пример 42.3. *Данные измерений представлены в таблице. Найти коэффициенты A, B плоскости $z = Ax + By$, наиболее близко проходящей к заданным точкам.*

i	1	2	3	4	5
x_i	-2	-2	0	1	3
y_i	0	1	-3	0	2
z_i	-4	-5	-2	3	8

Заметим, что $\overline{x} = \overline{y} = \overline{z} = 0$, поэтому выполнять параллельный сдвиг данных не нужен. Введём матрицы

$$X = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \\ -2 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}.$$

Найдём матрицы XX^T и XY:

$$XX^T = \begin{pmatrix} 18 & 4 \\ 4 & 14 \end{pmatrix}, \qquad XY = \begin{pmatrix} 45 \\ 17 \end{pmatrix}.$$

Запишем систему линейных уравнений:

$$\begin{pmatrix} 18 & 4 \\ 4 & 14 \end{pmatrix} V = \begin{pmatrix} 45 \\ 17 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad V \approx \begin{pmatrix} 2.381 \\ 0.534 \end{pmatrix}.$$

Уравнение искомой плоскости имеет вид $z = 2.381x + 0.534y$. #

Многомерная ортогональная регрессия. [1] Даны точки $(x_{1i}, \ldots, x_{mi})$, полученные в результате n измерений ($i = \overline{1, n}$). Как и в предыдущем пункте, будем считать, что средние значения всех переменных $\overline{x_1} = \ldots = \overline{x_m} = 0$. Зависимость

$$\sum_{j=1}^{m} A_j x_j = 0$$

является уравнением гиперплоскости, проходящей через начало координат. Требуется найти значения коэффициентов A_j, при которых эта гиперплоскость проходит как можно ближе к заданным точкам. Для однозначного определения коэффициентов дополнительно потребуем выполнение условия нормировки: вектор нормали $\vec{n} = \{A_1, \ldots, A_m\}$ к данной гиперплоскости имеет единичную длину:

$$|\vec{n}|^2 = \sum_{j=1}^{m} A_j^2 = 1.$$

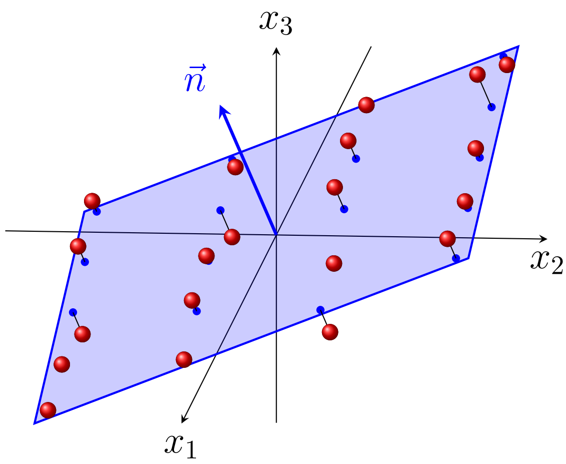
Расстояния δ_i от точек до гиперплоскости измеряется по нормали:

$$\delta_i = \frac{1}{|\vec{n}|} \left| \sum_{j=1}^{m} A_j x_{ji} \right| = \left| \sum_{j=1}^{m} A_j x_{ji} \right|.$$

Минимизируемая функция имеет вид

$$F(A_j) = \sum_{i=1}^{n} \delta_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{m} A_j x_{ji} \right)^2 \to \min.$$

[1] Данный раздел является факультативным.



Перейдём к матричному представлению. Пусть

$$V = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_m \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1} & y_{m2} & \cdots & x_{mn} \end{pmatrix}.$$

Вектор-столбец $\Delta = X^T V$ будет содержать ошибки δ_i, а сама задача минимизации запишется как

$$F(V) = \sum_{i=1}^{n} \delta_i^2 = \Delta^T \Delta = V^T X X^T V \to \min, \qquad V^T V = 1.$$

Введём функцию Лагранжа

$$\mathcal{L} = V^T X X^T V - \lambda V^T V = V^T (X X^T - \lambda E) V.$$

Равенству нулю частных производных функции Лагранжа эквивалентно выполнению условия

$$\frac{d\mathcal{L}}{dV} = O \quad \Rightarrow \quad (XX^T - \lambda E)V = O \quad \Rightarrow \quad (XX^T)V = \lambda V.$$

Это задача нахождения собственного вектора ковариационной матрицы $M = XX^T$. Если V – собственный вектор единичной длины, соответствующий собственному значению λ, то значение минимизируемой функции

$$F(V) = V^T M V = V^T \lambda V = \lambda V^T V = \lambda.$$

Глобальный минимум $F(V)$ достигается при векторе V, который соответствует наименьшему собственному значению λ.

***Пример* 42.4.** *Данные измерений представлены в таблице. Найти единичную нормаль $\vec{n} = \{A, B, C\}$ плоскости $Ax + By + Cz = 0$, наиболее близко проходящей к заданным точкам.*

i	1	2	3	4	5
x_i	-2	-2	0	1	3
y_i	0	1	-3	0	2
z_i	-4	-5	-2	3	8

Вначале найдём ковариационную матрицу $M = XX^T$:

$$M = \begin{pmatrix} 18 & 4 & 45 \\ 4 & 14 & 17 \\ 45 & 17 & 118 \end{pmatrix}.$$

Собственные значения этой матрицы найдены приближённо:

$$\lambda_1 \approx 137.69, \qquad \lambda_2 \approx 12.06, \qquad \lambda_3 \approx 0.25.$$

Наименьшим собственным значением является λ_3, соответствующий ему собственный вектор единичной длины, также найденный приближенно

$$V \approx \begin{pmatrix} 0.905 \\ 0.200 \\ -0.375 \end{pmatrix}.$$

Поэтому уравнение искомой плоскости имеет вид

$$0.905x + 0.200y - 0.375z = 0 \quad \Rightarrow \quad z = 2.415x + 0.534y. \qquad \#$$

Дополнительная литература

1. Шипачев В.С. Высшая математика: учеб. для вузов – М.: Высшая школа, 1998 – 479 с.
2. Баврин И.И. Краткий курс высшей математики для химико-биологических и медицинских специальностей – М.: Физматлит, 2003 – 328 с.
3. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления, т.1: учеб. для втузов – М.: Наука. Физматлит, 1985 – 432 с.
4. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления, т.2: учеб. для втузов – М.: Наука. Физматлит, 1985 – 560 с.
5. Канатников А.Н., Крищенко А.П., Четвериков В.Н. Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных: учеб. для вузов (Сер. Математика в техн. ун-те, вып. V) – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2000 – 456 с.
6. Зарубин В.С., Иванова Е.Е., Кувыркин Г.Н. Интегральное исчисление функций одного переменного: учеб. для вузов (Сер. Математика в техн. ун-те, вып. VI) – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 1999 – 528 с.
7. Власова Е.А. Ряды: учеб. для вузов (Сер. Математика в техн. ун-те, вып. IX) – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2006 – 616 с.