

КАЗАНСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Д.Ф.Абзалилов

ЛЕКЦИИ
по математике
Часть 1

Казань – 2024

УДК 517

A14

Печатается по решению учебно-методической комиссии
Института математики и механики им. Н. И. Лобачевского.

Протокол № 1 от 8 октября 2024 г.

Рецензент

д.ф.-м.н, доцент

Ильин С.Н.

Абзалилов Д.Ф. Лекции по математике. Часть 1. – Казань: Казан. ун-т, 2024. – 169 с.

Представляет собой конспект лекций по математике, читаемых автором в 1-м семестре для студентов Химического института им. А. М. Бутлерова.

Соответствует программе курса математики для студентов 1-го курса всех форм обучения по направлениям подготовки 04.03.01 “Химия” и специальности 04.05.01 “Фундаментальная и прикладная химия”. Может быть использовано и студентами других естественно-научных специальностей.

© Казанский университет, 2024

© Абзалилов Д.Ф., 2024

Оглавление

1. Линейная алгебра	6
§1. Матрицы	6
§2. Определители	12
§3. Системы линейных уравнений	19
§4. Обратная матрица	27
§5. Ранг. Разрешимость систем линейных уравнений	33
§6. Собственные значения и векторы	39
§7. Квадратичные формы	47
2. Векторы и аналитическая геометрия	55
§8. Системы координат	56
§9. Векторы	62
§10. Произведения векторов	69
§11. Базис и векторные пространства	76
§12. Прямая на плоскости	78
§13. Плоскость в пространстве	83
§14. Прямая в пространстве	87
§15. Кривые второго порядка	93
§16. Поверхности второго порядка	102
3. Дифференциальное исчисление (фоп)	110
§17. Числовые последовательности	110
§18. Функции одной переменной	118
§19. Предел функции	131
§20. Производная функции	142
§21. Методы нахождения производных. Дифференциалы	149
§22. Теоремы о производных	154
§23. Исследование функции	161

Содержание II части

4. Интегральное исчисление (фоп)

- §24. Неопределённый интеграл
- §25. Методы интегрирования
- §26. Интегрирование дробно-рациональных функций
- §27. Интегрирование тригонометрических функций
- §28. Интегрирование иррациональных функций
- §29. Определённый интеграл
- §30. Приложения определённого интеграла

5. Несобственные интегралы, комплексные числа, ряды

- §31. Несобственные интегралы
- §32. Числовые ряды
- §33. Степенные ряды
- §34. Ряды Фурье
- §35. Комплексные числа

6. Дифференциальное исчисление (фнп)

- §36. Функции нескольких переменных
- §37. Полный дифференциал и градиент
- §38. Производная сложной, неявной и параметрической функции
- §39. Производные и дифференциалы высших порядков
- §40. Экстремум функции нескольких переменных
- §41. Условный экстремум. Метод множителей Лагранжа
- §42. Метод наименьших квадратов

Содержание III части

7. Дифференциальные уравнения

- §43. Обыкновенные дифференциальные уравнения
- §44. Методы решения дифференциальных уравнений
- §45. Дифференциальные уравнения высших порядков
- §46. Уравнения с постоянными коэффициентами
- §47. Системы дифференциальных уравнений
- §48. Устойчивость решений и стационарные точки
- §49. Уравнения в частных производных

8. Интегральное исчисление (фнип)

- §50. Кратные интегралы
- §51. Замена переменных в кратных интегралах
- §52. Приложения кратных интегралов
- §53. Криволинейные интегралы
- §54. Поверхностные интегралы
- §55. Элементы теории поля

9. Теория вероятностей и математическая статистика

- §56. Вероятность
- §57. Теоремы сложения и умножения вероятностей
- §58. Повторные испытания
- §59. Дискретные случайные величины
- §60. Непрерывные случайные величины
- §61. Системы нескольких случайных величин
- §62. Математическая статистика. Статистические оценки
- §63. Проверка статистических гипотез

Глава 1.

Линейная алгебра

Увы, невозможно объяснить, что такое Матрица... Ты должен увидеть это сам.

Морфеус

Линейной зависимостью переменной y от переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$ называется зависимость вида $y = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n$, где $a_1, a_2, \dots, a_n$ – некоторые постоянные. *Линейным уравнением* называется соотношение вида $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$. Если таких соотношений несколько, вместе они образуют *систему линейных уравнений*.

Линейные зависимости, уравнения и системы таких уравнений часто встречаются на практике. Изучением этих зависимостей занимается раздел математики, называемый *линейной алгеброй*.

§1. Матрицы

Определения. *Матрица* – это прямоугольная таблица чисел, состоящая из строк (элементов, расположенных по горизонтали) и столбцов (элементов, расположенных по вертикали). Для обозначения матриц будем использовать заглавные латинские буквы, например, A, B, C . Примеры матриц:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 4 \\ 3.5 & \frac{1}{7} & \sqrt{5} & \pi \end{pmatrix}.$$

Размер $m \times n$ матрицы означает, что в ней m строк и n столбцов. Так, приведённые выше матрицы A и B имеют размеры 3×2 и 2×4 соответственно.

Для обозначения входящих в матрицу элементов будем использовать соответствующие строчные буквы с двумя индексами. Так, a_{ij} – элемент матрицы A , стоящий на пересечении строки с номером “ i ” и столбца с номером “ j ”. Для приведённых выше матриц $a_{21} = 3$, $b_{14} = 4$. В общем виде матрица A размера $m \times n$ записывается так:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Квадратной матрицей порядка n называется матрица, у которой число строк и столбцов равно n . Элементы a_{ii} (т.е. элементы с одинаковыми индексами) образуют *главную диагональ* квадратной матрицы. Другими словами, главная диагональ соединяет левый верхний угол с правым нижним. Другую диагональ будем называть *побочной*. Так, в квадратной матрице третьего порядка

$$\begin{pmatrix} 2 & 7 & 9 \\ 4 & 5 & 0 \\ 1 & -1 & 6 \end{pmatrix}$$

на главной диагонали стоят числа 2, 5, 6, а на побочной – числа 9, 5, 1.

Симметричной называется квадратная матрица S , для всех элементов которой выполняется равенство $s_{ij} = s_{ji}$. Другими словами, в каждой паре элементов, расположенных симметрично относительно главной диагонали, элементы пары равны друг другу. Пример симметричной матрицы:

$$S = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 9 \\ 7 & 5 & 0 \\ 9 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Треугольной называется квадратная матрица, у которой элементы, расположенные выше или ниже главной диагонали, равны нулю. Например,

из двух приведённых ниже матриц, U является верхней треугольной, а L – нижней треугольной:

$$U = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 9 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 5 & 8 & 7 \end{pmatrix}.$$

Ступенчатой называется матрица, у которой в каждой строке первый ненулевой элемент располагается правее аналогичного элемента предыдущей строки. Пример ступенчатой матрицы:

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 8 & 9 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Диагональной называется квадратная матрица, у которой ненулевые элементы расположены только на главной диагонали. *Единичной* называется диагональная матрица, если все её диагональные элементы равны единице.¹ Приведённая ниже матрица D является диагональной, а E – единичной:

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

В дальнейшем матрица E у нас всегда будет обозначать единичную матрицу. *Нулевой* называется матрица, у которой все элементы равны нулю. Такую матрицу в дальнейшем будем обозначать буквой O .

Вектор-столбцом называется матрица, состоящая из одного столбца, *вектор-строкой* – матрица, состоящая из одной строки.

Базовые операции с матрицами. Две матрицы A и B называются равными ($A = B$), если во-первых, у них одинаковый размер, и во-вторых, все соответствующие элементы у них равны: $a_{ij} = b_{ij}$. Для матриц, в отличие от чисел, нет операций сравнения “ $<$ ” и “ $>$ ”.

¹Почему именно такая матрица называется единичной, будет объяснено позднее.

Транспонированием называется операция, при которой строки и столбцы матрицы меняются местами, сохраняя свой порядковый номер. Матрица, полученная транспонированием матрицы A , обозначается как A^T :

$$B = A^T \quad \Rightarrow \quad b_{ij} = a_{ji}. \quad (1.1)$$

Пример транспонирования матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что двойное транспонирование возвращает матрицу в исходное состояние. Симметричные матрицы не меняются при транспонировании, т.е. для них справедливо $A^T = A$.

Для матриц одного размера определена операция *сложения*. Суммой двух матриц A и B называется матрица C , элементы которой находятся по формуле $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, т.е. складываются элементы матриц, стоящие в одинаковых позициях. Пример сложения матриц:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 5 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad A + B = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 8 & 6 \\ 9 & 7 \end{pmatrix}.$$

Задание. Определите операцию вычитания и найдите разность $A - B$.

Матрицу можно *умножить на число*. Произведением числа λ и матрицы A называется матрица B , элементы которой находятся по формуле $b_{ij} = \lambda a_{ij}$, т.е. каждый элемент исходной матрицы умножается на данное число. Пример умножения матрицы на число:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad 3A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 9 & 12 \\ 15 & 18 \end{pmatrix}.$$

Задание. Определите операцию вычитания, используя комбинацию операций сложения и умножения на число.

В заключение приведём некоторые свойства введенных выше матричных операций:

$$\begin{array}{ll}
 1^\circ & A^{TT} = A, \\
 2^\circ & (A + B)^T = A^T + B^T, \\
 3^\circ & A + B = B + A, \\
 4^\circ & (A + B) + C = A + (B + C), \\
 5^\circ & (\lambda A)^T = \lambda A^T, \\
 6^\circ & (\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A, \\
 7^\circ & (\lambda \mu)A = \lambda(\mu A), \\
 8^\circ & \lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B.
 \end{array}$$

Задание. Докажите эти свойства, пользуясь соответствующими свойствами алгебры чисел.

Матричное умножение. Пусть матрица A имеет размер $m \times n$, а матрица B – размер $n \times \ell$ (число столбцов матрицы A совпадает с числом строк матрицы B). В этом случае данные матрицы можно *перемножить*, результатом является матрица C размера $m \times \ell$, элементы которой находятся по формуле

$$C = AB \Rightarrow c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj}. \quad (1.2)$$

Элемент c_{ij} произведения матриц A и B равен сумме элементов i -й строки матрицы A , умноженных на соответствующие элементы j -го столбца матрицы B .

Приведём пример умножения матриц:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow AB = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 3 & 12 & 0 \end{pmatrix}.$$

Также заметим, что матрицу B из данного примера нельзя умножить на матрицу A , потому что число столбцов B не совпадает с числом строк A . Две квадратные матрицы одного порядка можно перемножить друг на друга в любом порядке, но результат в общем случае будет зависеть от того, какая матрица выбрана первой и какая второй. Матричное умножение, в отличие от умножения чисел, не обладает таким свойством, как коммутативность:

$$AB \neq BA.$$

Задание. Убедитесь в некоммутативности умножения на примере умножения следующих матриц:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 10 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

В то же время, умножение обладает следующими свойствами:

- 1°. $(AB)C = A(BC)$,
- 2°. $(AB)^T = B^T A^T$,
- 3°. $(A + B)C = AC + BC$,
- 4°. $A(B + C) = AB + AC$,
- 5°. $AE = EA = A$,
- 6°. $(\lambda A)B = A(\lambda B) = \lambda(AB)$.

Смысл понятия единичной матрицы становится ясен из свойства 5°.

Задание. Докажите свойства 3°–6°.

Мы докажем не вполне очевидные свойства 1° и 2°.

◀ Для доказательства 1° введём вспомогательные матрицы $D = AB$, $F = DC$, $G = BC$, $H = AG$. Нам требуется доказать что $F = H$, т.е. выполняется $f_{ij} = h_{ij}$ для всех значений “ i ” и “ j ”. Используя (1.2), запишем

$$f_{ij} = \sum_k d_{ik} c_{kj} = \sum_k \left(\sum_r a_{ir} b_{rk} \right) c_{kj} = \sum_k \sum_r a_{ir} b_{rk} c_{kj}.$$

$$h_{ij} = \sum_r a_{ir} g_{rj} = \sum_r a_{ir} \left(\sum_k b_{rk} c_{kj} \right) = \sum_r \sum_k a_{ir} b_{rk} c_{kj}.$$

Т.к. при двойном суммировании знаки суммирования можно менять местами, это доказывает, что $f_{ij} = h_{ij}$. ▶

◀ Для доказательства 2° введём матрицы $C = AB$, $D = C^T$, $F = B^T$, $G = A^T$, $H = FG$. Нам требуется доказать что $D = H$, т.е. выполняется $d_{ij} = h_{ij}$ для всех значений “ i ” и “ j ”. Используя (1.1) и (1.2), запишем

$$d_{ij} = c_{ji} = \sum_k a_{jk} b_{ki}.$$

$$h_{ij} = \sum_k f_{ik} g_{kj} = \sum_k b_{ki} a_{jk} = \sum_k a_{jk} b_{ki}. \quad \blacktriangleright$$

§2. Определители

Определитель (детерминант) – это число, характеризующее квадратную матрицу и вычисляемое через элементы этой матрицы по определённом правилу. Определитель матрицы A будем обозначать как

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Определители малых порядков. Определим правило, по которому должен вычисляться определитель. Начнём с матриц малых порядков. Определитель матрицы первого порядка равен значению единственного элемента этой матрицы, т.е. если $A = (a_{11})$, то $\det A = a_{11}$.

Определитель второго порядка равен разности произведений элементов на главной и побочной диагоналях:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \quad (2.1)$$

Пример:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2.$$

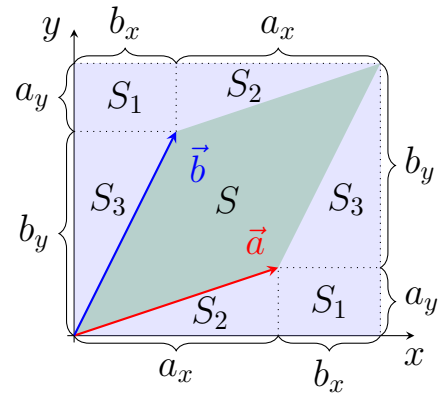
Геометрический смысл определителя второго порядка: определитель матрицы, столбцы которой составлены из координат векторов¹ $\vec{a}$ и $\vec{b}$, равен площади S параллелограмма, построенного на этих векторах, взятой со знаком “+” или “−”:

$$\begin{vmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \end{vmatrix} = \pm S.$$

Знак “+” выбирается, если ближайший поворот от вектора $\vec{a}$ к вектору $\vec{b}$ идет против часовой стрелки и “−” – если по часовой стрелке.

¹Понятие вектора будет дано позднее, в §9.

Для доказательства используем чертёж. Рассмотрим лишь вариант, когда поворот от $\vec{a}$ к $\vec{b}$ идет против часовой стрелки. Искомая площадь S параллелограмма равна площади прямоугольника со сторонами $a_x + b_x$ и $a_y + b_y$ минус удвоенные площади S_1 прямоугольника и S_2, S_3 треугольников.



$$S = (a_x + b_x)(a_y + b_y) - 2S_1 - 2S_2 - 2S_3.$$

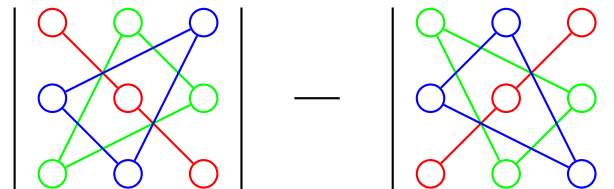
$$S = a_x a_y + a_x b_y + b_x a_y + b_x b_y - 2a_y b_x - a_x a_y - b_x b_y.$$

$$S = a_x b_y - a_y b_x.$$

Для вычисления определителя третьего порядка используется формула

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{aligned} & a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\ & - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Вычисление определителя третьего порядка можно схематически представить в виде “правила треугольников”:



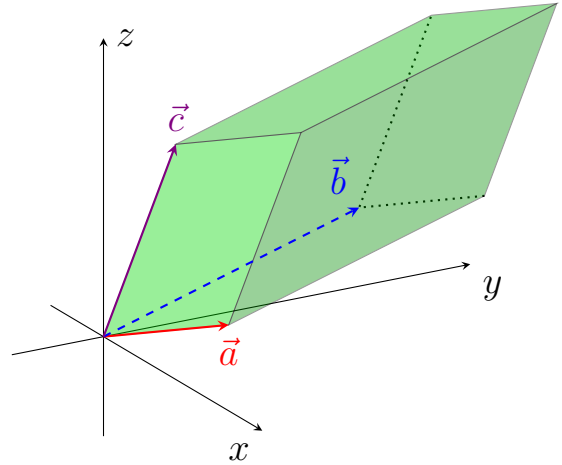
Задание. Убедитесь, что

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & -1 & 10 \end{vmatrix} = -36.$$

Геометрический смысл определителя третьего порядка: определитель матрицы, столбцы которой составлены из координат векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, равен объёму V параллелепипеда, построенного на этих векторах, взятому со знаком “+” или “−”:

$$\begin{vmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{vmatrix} = \pm V.$$

Знак “+” выбирается, если тройка векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ – правая, знак “–” – если левая. Определение правой и левой тройки векторов, а также доказательство равенства определителя объёму параллелепипеда будет дано позднее, в §10.



Определители произвольного порядка. Рассмотрим квадратную матрицу произвольного порядка n . Введём несколько определений.

Дополнительным минором M_{ij} к элементу a_{ij} называется определитель матрицы порядка $n - 1$, полученной вычёркиванием из матрицы A строки и столбца, в которых стоит элемент a_{ij} .

Пример:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \Rightarrow M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad M_{32} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}.$$

Алгебраическим дополнением A_{ij} к элементу a_{ij} называется дополнительный минор, взятый со знаком “+”, если $i + j$ чётно и со знаком “–”, если $i + j$ нечётно: $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$. Так

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \Rightarrow A_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad A_{32} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}.$$

Теперь можно сформулировать правило для вычисления определителя произвольного порядка. *Определитель* матрицы A равен сумме произведений элементов первой строки на их алгебраические дополнения:

$$\det A = \sum_{j=1}^n a_{1j} A_{1j} = a_{11} A_{11} + a_{12} A_{12} + \dots + a_{1n} A_{1n}. \quad (2.3)$$

Чтобы вычислить определитель порядка n , надо вначале найти алгебраические дополнения к элементам первой строки. Эти дополнения представляют собой определители порядка $n - 1$, и для их нахождения надо вычислить определители порядка $n - 2$. Продолжив этот процесс, мы дойдем до определителей первого порядка, каждый из которых представляет собой просто значение единственного элемента матрицы.

Задание. Убедитесь, что формулы (2.1) и (2.2) выводятся из общей формулы (2.3).

Задание. Докажите, что определитель треугольной (а также диагональной) матрицы равен произведению чисел, стоящих на главной диагонали.

Определитель матрицы обладает рядом свойств.

Теорема 2.1. При транспонировании определитель не меняется.

Теорема 2.2. Определитель матрицы A равен сумме произведений элементов любой её строки на их алгебраические дополнения:

$$\det A = \sum_{j=1}^n a_{ij}A_{ij} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in}.$$

Эта формула называется разложением определителя по строке i .

Мы не будем приводить доказательства теорем 2.1 и 2.2 в общем случае.

Задание. Убедитесь в справедливости этих теорем для $n = 3$.

Из теорем 2.1 и 2.2 можно вывести несколько важных следствий, которые облегчают нахождение определителей.

Следствие 2.2.1. При перестановке местами двух строк определитель меняет знак на противоположный, а абсолютное значение определителя сохраняется.

◀ Докажем это следствие для случая перестановки строк 1 и 2. Пусть $\Delta = a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13} - \dots$

Переставив местами строки 1 и 2, найдём определитель полученной матрицы разложением по второй строке. Все знаки при этом изменятся на противоположные, т.к. номер строки увеличится на единицу, вследствие чего

сумма $i + j$ изменит свою чётность. Миноры к элементам второй строки изменённой матрицы будут совпадать с минорами к элементам первой строки исходной матрицы, поэтому формула для нахождения определителя разложением по второй строке примет вид

$$\Delta^* = -a_{11}M_{11} + a_{12}M_{12} - a_{13}M_{13} + \dots = -\Delta. \quad \blacktriangleright$$

Задание. Докажите это следствие в случае, когда меняются строки 1 и 3. Подсказка: перестановку строк 1 и 3 можно получить, используя перестановки соседних строк.

Следствие 2.2.2. *Определитель матрицы A равен сумме произведений элементов какого-нибудь столбца на их алгебраические дополнения:*

$$\det A = \sum_{i=1}^n a_{ij}A_{ij} = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{nj}A_{nj}.$$

Эта формула называется разложением определителя по столбцу j .

Доказательство этого следствия вытекает из теоремы 2.1.

Следствие 2.2.3. *Если в матрице есть полностью нулевая строка или столбец, её определитель равен нулю.*

Для доказательства этого следствия надо использовать формулу разложения определителя по данной нулевой строке/столбцу.

Следствие 2.2.4. *Если в матрице есть две одинаковые строки или два одинаковых столбца, её определитель равен нулю.*

◀ Заметим, что при перестановке двух строк по следствию 2.2.1 определитель должен поменять знак, но если строки одинаковы, то матрица и, следовательно, её определитель не изменятся. Это возможно лишь в случае, когда определитель равен нулю. ▶

Следствие 2.2.5. *Общий множитель элементов какой-нибудь строки (или столбца) можно вынести за знак определителя.*

◀ Докажем это следствие для первой строки:

$$\begin{vmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \lambda a_{11} A_{11} + \lambda a_{12} A_{12} + \dots + \lambda a_{1n} A_{1n} = \\
 = \lambda (a_{11} A_{11} + a_{12} A_{12} + \dots + a_{1n} A_{1n}) = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \quad \blacktriangleright$$

Следствие 2.2.6. Если к какой-нибудь строке прибавить другую строку, умноженную на произвольное число, определитель не изменится. Аналогичное утверждение верно и для столбцов.

◀ Докажем это следствие для определителя, полученного прибавлением к первой строке второй, умноженной на число λ :

$$\begin{vmatrix} a_{11} + \lambda a_{21} & \cdots & a_{1n} + \lambda a_{2n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = (a_{11} + \lambda a_{21}) A_{11} + \dots + (a_{1n} + \lambda a_{2n}) A_{1n} = \\
 = (a_{11} A_{11} + \dots + a_{1n} A_{1n}) + \lambda (a_{21} A_{11} + \dots + a_{2n} A_{1n}) = \\
 = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \lambda \begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \quad \blacktriangleright$$

Здесь для определителя одинаковыми первыми двумя строками мы применили следствие 2.2.4.

Используя приведённые свойства определителей, можно упростить процесс их вычисления. Идея вычисления определителя состоит в следующем: в какой-нибудь строке или столбце определителя по следствию 2.2.6 надо

сделать все элементы, кроме одного, нулевыми. Далее, разложив определитель по этой строке или столбцу, перейти к определителю матрицы меньшего размера.

Приведём пример такого вычисления. Найдём определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 8 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 0 & -2 \end{vmatrix}.$$

Сделаем три нулевых элемента во второй строке. Для этого вначале прибавим ко второму столбцу третий, а затем вычтем из четвёртого столбца третий, умноженный на 2:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 5 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 7 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 5 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 7 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & -2 \end{vmatrix}.$$

В результате этих действий во второй строке остался лишь один ненулевой элемент. Поэтому разложим определитель по этой строке:

$$\Delta = - \begin{vmatrix} -1 & 5 & 1 \\ 2 & 7 & 0 \\ 1 & -2 & -2 \end{vmatrix}.$$

Сделаем в третьем столбце два нулевых элемента. Для этого прибавим к третьей строке удвоенную первую и разложим определитель по третьему столбцу:

$$\Delta = - \begin{vmatrix} -1 & 5 & 1 \\ 2 & 7 & 0 \\ -1 & 8 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ -1 & 8 \end{vmatrix} = -(2 \cdot 8 - 7 \cdot (-1)) = -23.$$

Теорема 2.3. Если A и B – квадратные матрицы порядка n , то $\det(AB) = \det(BA) = \det(A) \cdot \det(B)$.

Эту теорему оставим без доказательства.

Квадратные матрицы с нулевым определителем в дальнейшем будем называть *вырожденными*. Если же определитель матрицы отличен от нуля, то такая матрица называется *невырожденной*.

Геометрический смысл определителя порядка n : определитель матрицы, столбцы которой составлены из координат n -мерных векторов $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$, равен n -мерному объёму параллелепипеда, построенного на этих векторах, взятому со знаком “+” или “−”. Под n -мерным вектором подразумевается вектор, который имеет n координат и записывается в виде матрицы размера $n \times 1$.

§3. Системы линейных уравнений

Система линейных алгебраических уравнений в общем случае имеет вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ \vdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m. \end{cases} \quad (3.1)$$

Требуется найти неизвестные $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Основной матрицей этой системы называется матрица A , состоящая из коэффициентов при неизвестных. Введём также вектор-столбцы B свободных членов и X неизвестных:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Матричный вид системы (3.1):

$$AX = B. \quad (3.2)$$

Рассмотрим некоторые методы решения систем уравнений.

Метод Крамера. Рассмотрим случай, когда основная матрица A является квадратной (т.е. $m = n$, так что число уравнений совпадает с числом неизвестных) и невырожденной.

Умножим все уравнения системы (3.1) на алгебраические дополнения к элементам первого столбца матрицы A , т.е. первое уравнение умножим на A_{11} , второе уравнение на A_{21} и т.д. Затем, сложив все уравнения, получим:

$$\begin{aligned} & (a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + \dots + a_{n1}A_{n1})x_1 + \\ & (a_{12}A_{11} + a_{22}A_{21} + \dots + a_{n2}A_{n1})x_2 + \\ & \vdots \\ & (a_{1n}A_{11} + a_{2n}A_{21} + \dots + a_{nn}A_{n1})x_n = \\ & = b_1A_{11} + b_2A_{21} + \dots + b_nA_{n1}. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Каждая из скобок в этом равенстве, а также правая часть, является определителем какой-либо матрицы. Так, первая скобка – сумма произведений элементов первого столбца на их алгебраические дополнения – это определитель матрицы A , который в дальнейшем будем обозначать как Δ . Вторая скобка в (3.3) – это определитель матрицы, полученной из матрицы A заменой первого столбца вторым. Т.к. у этой матрицы первые два столбца одинаковы, её определитель равен нулю. Аналогично равны нулю третья и последующие скобки в равенстве (3.3). Правая часть (3.3) – это определитель матрицы, которая получена из матрицы A заменой первого столбца столбцом B :

$$b_1A_{11} + b_2A_{21} + \dots + b_nA_{n1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \Delta_1.$$

Т.о., равенство (3.3) принимает вид $\Delta x_1 = \Delta_1$, из которого $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}$.

Таким же образом можно найти и другие неизвестные рассматриваемой системы линейных уравнений:

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}, \quad j = 1, \dots, n, \tag{3.4}$$

где Δ_j – определитель матрицы, полученной из матрицы A заменой столбца j столбцом B .

Т.к. мы изначально предположили, что матрица A – невырожденная ($\Delta \neq 0$), исходная система (3.1) имеет *единственное* решение, имеющее вид (3.4).

Пример 3.1. Решить систему

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1, \\ 2x + 3y + z = 0, \\ 3x + y + 2z = 0. \end{cases}$$

Запишем основную матрицу системы и найдём её определитель Δ :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \Delta = 6 + 6 + 6 - 27 - 8 - 1 = -18.$$

Он получился отличным от нуля, поэтому система имеет единственное решение. Для его нахождения вычислим все вспомогательные определители, заменив столбцы матрицы A столбцом свободных членов¹:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 1 = 5 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{5}{-18} = -\frac{5}{18}.$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 3 - 4 = -1 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-1}{-18} = \frac{1}{18}.$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 - 9 = -7 \quad \Rightarrow \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{-7}{-18} = \frac{7}{18}. \quad \#$$

¹Последнюю неизвестную z можно было найти и непосредственно из любого уравнения исходной системы.

В заключение отметим, что метод Крамера является простым способом решения систем линейных уравнений в случае, когда основная матрица системы является квадратной и невырожденной. С ростом числа неизвестных n количество вычислений по этому методу растёт очень быстро (порядок роста $\sim n^4$). Поэтому этот метод, в основном, используется для решения систем с небольшим числом уравнений.

Метод Гаусса. Этот метод лишен недостатков метода Крамера: метод Гаусса применим для случая произвольной основной матрицы системы. Кроме того, для систем с n неизвестными количество вычислений по данному методу имеет порядок n^3 , что существенно меньше, чем в методе Крамера. Поэтому метод Гаусса является одним из основных методов решения систем линейных уравнений, в том числе, с помощью вычислительной техники.

Для удобства введём понятие *расширенной матрицы* $\bar{A}$ системы (3.1), получаемой добавлением к основной матрице A столбца B :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array} \right).$$

По данной матрице восстановление исходной системы не составляет труда.

Введём также понятие *элементарных преобразований* над строками матрицы. Отнесём к ним следующие преобразования:

- перестановка двух (или большего количества) строк матрицы,
- умножение (или деление) строки на любое число, не равное нулю,
- прибавление к строке (или вычитание из строки) другой строки, умноженной на любое число.

Задание. Докажите, что применение элементарных преобразований к строкам расширенной матрицы $\bar{A}$ не меняет решения системы.

Отметим также, что при элементарных преобразованиях столбцов матрицы множество решений системы может измениться. Допускается лишь менять местами столбцы, но при этом будет меняться порядок переменных

в исходной системе. Например, если в исходной системе порядок переменных был $\{x, y, z\}$, то после смены столбцов 1 и 3 порядок станет $\{z, y, x\}$.

Суть метода Гаусса заключается в последовательном исключении неизвестных из уравнений системы. Рассмотрим исходную систему (3.1). Предположим, что мы хотим исключить переменную x_1 из всех уравнений, кроме одного – первого из уравнений системы. В таком случае в качестве первого уравнения в системе мы должны выбрать то, где коэффициент при x_1 отличен от нуля. Предположим, что $a_{11} \neq 0$. Изменим второе уравнение системы, вычтя из него первое уравнение, умноженное на число $\frac{a_{21}}{a_{11}}$. В новом втором уравнении уже не будет члена с x_1 . Аналогичным образом изменим третье и все последующие уравнения системы, вычтя из третьего уравнения первое, умноженное на число $\frac{a_{31}}{a_{11}}$, и т.д. В результате получим систему, эквивалентную данной и содержащую x_1 только в первом уравнении. Далее исключим неизвестную x_2 из всех уравнений, кроме первого и второго. Для этого на второе место поставим то уравнение системы, в котором коэффициент при x_2 не равен нулю. Вычтя это уравнение, умноженное на соответствующее число, из всех уравнений, начиная с третьего, мы получим требуемую систему. Проведем эту операцию последовательно со всеми неизвестными.

Все вышесказанное эквивалентно приведению матрицы $\bar{A}$ к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований. В процессе таких преобразований мы можем получить следующие ситуации:

- На каком-то шаге получена полностью нулевая строка $(0 \ 0 \ \dots \ 0 \mid 0)$, что эквивалентно уравнению $0 = 0$. Данную строку из матрицы исключим и продолжим выполнение шагов.
- На каком-то шаге получена строка вида $(0 \ 0 \ \dots \ 0 \mid b)$, где $b \neq 0$. Эта строка соответствует невозможному уравнению $0 = b \neq 0$. Делаем вывод, что исходная система *несовместна*, т.е. не имеет решений.
- Матрица приведена к треугольному виду, при этом число оставшихся строк равно числу неизвестных (в каждой строке первый ненулевой элемент стоит на главной диагонали основной матрицы). Это означает, что система имеет *единственное решение*.

- Матрица приведена к ступенчатому виду, но число оставшихся строк меньше числа неизвестных. Это означает, что система имеет *бесконечное множество решений*. Если число оставшихся строк равно r , то из них мы сможем определить лишь r неизвестных, остальные $n - r$ неизвестных выбираются произвольно.

Далее, начиная с последнего уравнения и поднимаясь выше, последовательно определяются все неизвестные.

Пример 3.2. Решить систему методом Гаусса:

$$\begin{cases} x - 2y - z + t = 1, \\ x - 8y - 2z - 3t = -2, \\ 2x + 2y - z + 7t = 7, \\ x + y + 2z + t = 1. \end{cases}$$

Запишем расширенную матрицу системы:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -8 & -2 & -3 & -2 \\ 2 & 2 & -1 & 7 & 7 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \end{array} \right) \sim$$

Сначала с помощью первой строки сделаем три нуля в первом столбце: вычтем из второй и четвертой строки первую, а из третьей строки – удвоенную первую. Получим эквивалентную систему

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -6 & -1 & -4 & -3 \\ 0 & 6 & 1 & 5 & 5 \\ 0 & 3 & 3 & 0 & 0 \end{array} \right) \sim$$

Для удобства поменяем знаки у элементов второй строки (умножим её на -1), а четвертую строку разделим на 3:

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 6 & 1 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \sim$$

Теперь займёмся вторым столбцом. Удобно, когда элемент, стоящий во второй строке и втором столбце, равен единице. Для этого поменяем местами вторую и четвертую строки:

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 6 & 1 & 5 & 5 \end{array} \right) \sim$$

Далее вычтем из четвертой строки третью, из третьей строки – вторую, умноженную на 6:

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right).$$

Мы привели матрицу к треугольному виду, поэтому процесс элементарных преобразований завершаем. Теперь осталось найти неизвестные. Начиная с последней строки и поднимаясь на каждом шаге на строку выше, будем последовательно определять неизвестные, начиная с последней. Так, последняя строка соответствует уравнению $t = 2$. Третья строка соответствует уравнению $-5z + 4t = 3$. Подставив в неё значение t , найдём $z = 1$. Из второй строки $y + z = 0$ определим $y = -1$ и, наконец, из первой строки $x - 2y - z + t = 1$ найдём $x = 2$. #

Пример 3.3. Решить систему методом Гаусса:

$$\begin{cases} x - 2y + 5z - 9t &= -1, \\ 3x + y + 8z - 13t &= 0, \\ 3x + 8y + z + t &= 1, \\ x + y + 2z + t &= 5. \end{cases}$$

Запишем расширенную матрицу системы:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 5 & -9 & -1 \\ 3 & 1 & 8 & -13 & 0 \\ 3 & 8 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 5 \end{array} \right) \sim$$

Сначала с помощью первой строки сделаем три нуля в первом столбце: вычтем из четвёртой строки первую, а из второй и третьей строки первую, умноженную на три. Получим

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 5 & -9 & -1 \\ 0 & 7 & -7 & 14 & 3 \\ 0 & 14 & -14 & 28 & 4 \\ 0 & 3 & -3 & 10 & 6 \end{array} \right) \sim$$

Далее вычтем из третьей строки удвоенную вторую:

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 5 & -9 & -1 \\ 0 & 7 & -7 & 14 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & -3 & 10 & 6 \end{array} \right).$$

На этом процесс преобразований заканчиваем, мы получили строку, соответствующую невозможному уравнению. Решений у системы нет. #

Пример 3.4. Решить систему методом Гаусса:

$$\begin{cases} x + y - 5z & = 2, \\ 2x + y + 3z - 5t & = 1, \\ 3x + 2y - 2z - 5t & = 3, \\ 7x + 5y - 9z - 10t & = 8. \end{cases}$$

Запишем расширенную матрицу системы:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -5 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & -5 & 1 \\ 3 & 2 & -2 & -5 & 3 \\ 7 & 5 & -9 & -10 & 8 \end{array} \right) \sim$$

С помощью первой строки сделаем три нуля в первом столбце: вычтем из остальных строк первую, умноженную на соответствующее число:

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -5 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & -1 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & -2 & 26 & -10 & -6 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -5 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \sim$$

на следующем шаге с помощью второй строки были сделаны нули во втором столбце. При этом получились две нулевые строки. Эти строки выкидываем из расширенной матрицы:

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -5 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 13 & -5 & -3 \end{array} \right).$$

Данная матрица является ступенчатой, процесс преобразований заканчиваем. Т.к. осталось только две строки, мы сможем определить только две переменные из четырёх, оставшиеся переменные выберем произвольно. Так, в последней строке содержится три неизвестные величины, две из них (z и t) выбираем произвольно, в третью (y) выражаем:

$$z = C, \quad t = D, \quad y = 13C - 5D + 3.$$

Первая строка матрицы соответствует уравнению $x + y - 5z = 2$, из неё найдём неизвестную x :

$$x = -8C + 5D - 1.$$

Мы получили общее решение, содержащее две произвольные постоянные C и D . Принимая эти постоянные равными каким-то определённым числам, можно получить различные частные решения. Например, при $C = D = 0$ получим решение: $x = -1$, $y = 3$, $z = 0$, $t = 0$. При $C = 1$, $D = 2$ получим: $x = 1$, $y = 6$, $z = 1$, $t = 2$. #

§4. Обратная матрица

Понятие обратной матрицы. Пусть A – квадратная матрица. *Обратной матрицей* A^{-1} к матрице A называется квадратная матрица того

же порядка, умножение которой на исходную с любой стороны даёт единичную матрицу:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E.$$

Рассмотрим примеры. Даны матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Т.к. $AB = E$ и $BA = E$ (убедитесь в этом), то $B = A^{-1}$.

Задание. Попробуйте найти матрицу, обратную к матрице

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Отметим некоторые свойства обратной матрицы.

1°. Существует не более одной обратной матрицы.

$$2°. (A^{-1})^{-1} = A.$$

$$3°. (\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda} A^{-1}.$$

$$4°. (A^{-1})^T = (A^T)^{-1}.$$

$$5°. (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

$$6°. \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}.$$

7°. Для вырожденных матриц не существует обратных.

◀ Докажем 1°. Пусть для матрицы A существуют две такие различные матрицы B и C , что $BA = E$ и $AC = E$. Рассмотрим тройное произведение BAC . С одной стороны, $BAC = B(AC) = BE = B$. С другой стороны, $BAC = (BA)C = EC = C$. Получили противоречие $B = C$. ▶

◀ Докажем 5°. Пусть $C = AB$, $D = B^{-1}A^{-1}$. Нам надо доказать, что $C^{-1} = D$, что равносильно равенству $CD = DC = E$.

$$CD = (AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AEA^{-1} = AA^{-1} = E.$$

Равенство $DC = E$ доказывается аналогично. ▶

Задание. Докажите оставшиеся свойства. Для доказательства 6° примените теорему 2.3.

Рассмотрим два метода нахождения обратной матрицы: метод алгебраических дополнений и метод Жордана – Гаусса. Указанные методы являются аналогами изложенных выше методов решения систем уравнений – методов Крамера и Гаусса соответственно.

Метод алгебраических дополнений. Пусть A – невырожденная квадратная матрица порядка n . Найдём для каждого элемента этой матрицы алгебраическое дополнение и составим из них матрицу:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Эту матрицу будем называть матрицей алгебраических дополнений. Найдём результат умножения исходной матрицы A на транспонированную матрицу к $\tilde{A}$:

$$A\tilde{A}^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \Delta & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \Delta \end{pmatrix}.$$

Задание. Докажите, что результирующая матрица будет иметь именно такой вид, т.е. будет диагональной, причём каждый диагональный элемент равен определителю.

Разделив обе стороны данного равенства на Δ , получим:

$$\frac{1}{\Delta}A\tilde{A}^T = E \Rightarrow A \cdot \left(\frac{1}{\Delta}\tilde{A}^T\right) = E \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\tilde{A}^T.$$

Мы фактически доказали следующее утверждение:

Теорема 4.1. Обратная матрица равна единице, делённой на определитель исходной матрицы и умноженной на транспонированную матрицу алгебраических дополнений элементов исходной матрицы.

Поэтому для нахождения обратной матрицы можно использовать следующий алгоритм:

1. Вычисляем определитель матрицы $\Delta = \det A$. Если он получился равным нулю, то матрица является вырожденной и обратной матрицы не существует. Для всех остальных случаев вычисления продолжаем.
2. Находим дополнительные миноры M_{ij} и алгебраические дополнения A_{ij} ко всем элементам исходной матрицы.
3. Заполняем матрицу алгебраических дополнений $\tilde{A}$.
4. Полученную матрицу транспонируем: $\tilde{A}^T$.
5. Умножив на число $\frac{1}{\Delta}$, получим обратную матрицу: $A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \tilde{A}^T$.

Пример 4.1. Найти обратную матрицу к данной:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Вначале вычисляем определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & 5 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} = 1.$$

Далее находим алгебраические дополнения:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -8, \quad A_{12} = - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -5, \quad \dots, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1.$$

Составляем матрицу алгебраических дополнений:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} -8 & -5 & 6 \\ 18 & 11 & -13 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Транспонируем и делим на определитель:

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \tilde{A}^T = \begin{pmatrix} -8 & 18 & 1 \\ -5 & 11 & 1 \\ 6 & -13 & -1 \end{pmatrix}. \quad \#$$

Метод Жордана – Гаусса. Пусть A – квадратная невырожденная матрица порядка n . Припишем к ней справа единичную матрицу:

$$(A|E) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array} \right).$$

К строкам полученной матрицы размера $n \times 2n$ применим элементарные преобразования¹ с целью превратить левую часть матрицы в единичную. Воспользуемся тем фактом, что выполнение элементарных преобразований строк матрицы $(A|E)$ равносильно домножению её слева на подходящую квадратную матрицу B , т.е. в результате преобразования матрица будет иметь вид $(BA|BE) = (BA|B)$. Если в результате таких преобразований мы получим матрицу вида $(E|B)$, это будет означать, что $BA = E$ или $B = A^{-1}$.

Задание. Определите вид матрицы B , домножение на которую слева соответствует следующим элементарным преобразованиям матрицы A :

- перестановка первой и второй строки матрицы A ,
- умножение второй строки матрицы A на число λ ,
- прибавление к третьей строке матрицы A первой строки.

Пример 4.2. Найти обратную матрицу из примера 4.1 методом Жордана – Гаусса.

Припишем к исходной матрице единичную и начнём применять элементарные преобразования к строкам:

$$(A|E) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 5 & 7 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 5 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \sim$$

Здесь из первой строки вычтена вторая, умноженная на 2, а к третьей строке прибавлена вторая. Т.о., в первом столбце получено два нуля. Далее меняем местами первую и вторую строку, чтобы ненулевой элемент

¹Эти преобразования описаны в §3 на стр. 22

оказался на первой позиции и продолжаем элементарные преобразования:

$$\begin{aligned} & \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 6 & 5 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & -2 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -6 & 13 & 1 \end{array} \right) \sim \\ & \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -8 & 18 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & 11 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -6 & 13 & 1 \end{array} \right) \sim \end{aligned}$$

Задание. Разберитесь, какие именно элементарные преобразования были применены в этом примере.

В заключение, умножив последнюю строку на -1 , слева получим единичную матрицу:

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -8 & 18 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & 11 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & -13 & -1 \end{array} \right).$$

Матрица, полученная в правой части, и будет обратной:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -8 & 18 & 1 \\ -5 & 11 & 1 \\ 6 & -13 & -1 \end{pmatrix}. \quad \#$$

Решение матричных уравнений. Рассмотрим систему линейных уравнений (3.2), когда основная матрица A является квадратной и невырожденной. Также допустим, что матрица A^{-1} нам известна. Умножим обе части уравнения $AX = B$ слева на A^{-1} :

$$AX = B \Rightarrow A^{-1}AX = A^{-1}B \Rightarrow EX = A^{-1}B \Rightarrow X = A^{-1}B.$$

Итак, искомый вектор-столбец неизвестных X равен произведению матриц A^{-1} и B .

Данное решение справедливо не только для системы линейных уравнений, в которой матрицы X и B представляют собой вектор-столбцы, решение справедливо также для матриц X и B и с другим количеством столбцов при условии, что матрица A является квадратной невырожденной.

Задание. Пусть матрицы A , B являются невырожденными квадратными матрицами. Выразите X из матричного уравнения: $A \cdot X \cdot B = C$.

§5. Ранг. Разрешимость систем линейных уравнений

Понятие ранга матрицы. Пусть A – произвольная матрица размера $m \times n$. *Минором* порядка k матрицы A называется определитель матрицы, элементы которой расположены на пересечении каких-то k строк и каких-то k столбцов матрицы A .

Рангом матрицы называется наибольший из порядков всех её ненулевых миноров. Ранг матрицы A будем обозначать как $\text{rank } A$.

Пример 5.1. Найти ранг матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 2 & 6 & 9 \\ 3 & 7 & 9 \\ 4 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

Данная матрица имеет порядок 4×3 и имеет миноры 1-го, 2-го и 3-го порядка. Если вычеркнуть третью и четвертую строку, а также третий столбец, то полученный минор второго порядка будет ненулевой:

$$M_{34,3} = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = -4.$$

Это означает, что ранг исходной матрицы равен по крайней мере двум. Он будет равен трем, если мы найдём ненулевой минор третьего порядка. У исходной матрицы четыре минора третьего порядка, но все они равны нулю. Значит, $\text{rank } A = 2$. #

Задание. Убедитесь, что все миноры третьего порядка равны нулю.

Пусть $X_1, X_2, \dots, X_k$ – некоторые столбцы матрицы A . Тогда их *линейной комбинацией* называется столбец вида $\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \dots + \lambda_k X_k$.

Столбцы $X_1, X_2, \dots, X_k$ называются *линейно зависимыми*, если существуют неравные нулю одновременно числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ такие, что линейная комбинация $\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \dots + \lambda_k X_k$ является нулевым столбцом. Если таких чисел не существует, то столбцы $X_1, X_2, \dots, X_k$ называются *линейно независимыми*.

Отметим некоторые свойства ранга матрицы.

- 1°. Ранг невырожденной квадратной матрицы равен её порядку.
- 2°. Ранг нулевой матрицы равен нулю.
- 3°. Транспонирование не меняет ранг матрицы.
- 4°. Элементарные преобразования над строками/столбцами не меняют ранг матрицы.
- 5°. Отбрасывание нулевой строки/столбца не меняет ранг матрицы.
- 6°. Ранг матрицы равен числу её линейно независимых строк/столбцов.

Задание. Попробуйте самостоятельно доказать первые пять свойств.

Также приведём две теоремы о ранге матрицы AB , являющейся произведением двух матриц порядков $m \times n$ и $n \times \ell$:

Теорема 5.1. *Ранг произведения двух матриц не может превосходить ранг каждого из множителей: $\text{rank}(AB) \leq \min(\text{rank } A, \text{rank } B)$.*

Теорема 5.2 (Неравенство Сильвестра). $\text{rank}(AB) \geq \text{rank } A + \text{rank } B - n$.

Эти теоремы даются без доказательств.

Если, например, матрица A имеет размер 4×3 , а матрица B – размер 3×5 , то из теоремы 5.1 следует, что ранг матрицы $C = AB$ размера 4×5 не может превосходить трёх. Если известно, что ранги матриц A и B в точности равны трём, то из теоремы 5.2 следует, что $\text{rank}(C) \geq 3$.

Способы нахождения ранга матрицы. Использование определения не всегда удобно для вычисления ранга матриц больших порядков, т.к. число миноров может быть очень большим. Поэтому существуют более простые способы нахождения ранга.

Метод элементарных преобразований. Данный метод основан на свойстве, что ранг матрицы не меняется при элементарных преобразованиях. Поэтому ранг матрицы равен числу ненулевых строк в матрице после

приведения её к ступенчатому виду при помощи элементарных преобразований над строками матрицы.

Аналогичные операции можно проводить и со столбцами.¹

Метод окаймляющих миноров. В данном методе определение ранга начинают с поиска ненулевых миноров 1-го порядка, и на каждом шаге порядок рассматриваемых миноров увеличивается на единицу. Пусть в матрице A найден ненулевой минор k -го порядка M . Тогда рассматриваются не все миноры $(k+1)$ -го порядка, а только те, которые включают в себя минор M (они и называются окаймляющими минорами). Если все окаймляющие миноры равны нулю или построить окаймляющий минор невозможно, то ранг матрицы A равен k . Если среди окаймляющих миноров найдется ненулевой, то вся процедура повторяется уже с новым найденным ненулевым минором большего порядка.

Число решений системы линейных уравнений. Существование и количество решений системы линейных уравнений (3.1) тесно связано с рангами основной и расширенной матриц системы. Заметим, что $\text{rank } A$ не может быть больше, чем $\text{rank } \bar{A}$, т.к. все миноры матрицы A являются также минорами и матрицы $\bar{A}$.

Теорема 5.3 (Теорема Кронеккера – Капелли). *Система линейных уравнений не имеет решений (несовместна), если $\text{rank } A < \text{rank } \bar{A}$.*

Система линейных уравнений имеет решение, если $\text{rank } A = \text{rank } \bar{A}$. При этом

- *решение единственно, если $\text{rank } A = n$;*
- *имеется бесконечное множество решений, если $\text{rank } A < n$. Число $k = n - \text{rank } A$ определяет количество произвольных постоянных в общем решении системы.*

◀ Доказательство основано на свойстве неизменности ранга матриц при элементарных преобразованиях. Действительно, приведём $\bar{A}$ к ступенчатому виду. Рассмотрим возможные варианты

¹В отличие от метода Гаусса решения систем линейных уравнений, где элементарные преобразования проводятся только со строками.

- Если у нас появилась строка $(0 \ 0 \ \dots \ 0 \mid b)$, то это означает, что у основной матрицы число ненулевых строк меньше числа ненулевых строк расширенной, т.е. $\text{rank } A < \text{rank } \bar{A}$. Но появление данной строки также означает, что система не имеет решений.
- Если число ненулевых строк основной и расширенной матрицы равно числу неизвестных ($\text{rank } A = \text{rank } \bar{A} = n$), это означает, что ступенчатая матрица является треугольной и возможно однозначное определение всех неизвестных.
- Если число ненулевых строк основной и расширенной матрицы меньше числа неизвестных ($\text{rank } A = \text{rank } \bar{A} < n$), то определяются только $r = \text{rank } A$ из них, оставшиеся $n - r$ неизвестных выбираются произвольно. ►

Пример 5.2. Исследовать число решений системы в зависимости от значений параметров a и b :

$$\begin{cases} ax + y + z = 2, \\ 2x - 2y + z = 6, \\ x - y - z = b. \end{cases}$$

Запишем основную матрицу системы и найдём её определитель

$$\det A = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = (a+1) \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 3(a+1).$$

Так, при $a \neq -1$ определитель матрицы не равен нулю, что означает $\text{rank } A = 3$. Ранг расширенной матрицы $\text{rank } \bar{A} = 3$, т.к., с одной стороны, он не может быть больше числа строк $\bar{A}$ и, с другой стороны, не может быть меньше, чем $\text{rank } A$. Поэтому при $a \neq -1$ и при любом значении b система имеет единственное решение.

Рассмотрим теперь случай $a = -1$. Ранг основной матрицы $\text{rank } A = 2$.

Найдём ранг матрицы $\bar{A}$ методом элементарных преобразований:

$$\text{rank } \bar{A} = \text{rank} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & -1 & b \end{pmatrix} = \text{rank} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & b+2 \end{pmatrix}.$$

При $b \neq -2$ (и $a = -1$) ранг расширенной матрицы больше ранга основной матрицы, поэтому система решений не имеет.

При $b = -2$ (и $a = -1$) ранг расширенной матрицы равен рангу основной матрицы, поэтому система имеет бесконечное число решений. Т.к. ранги равны двум, а число неизвестных в системе $n = 3$, то общее решение будет содержать $3 - 2 = 1$ произвольную постоянную. #

Однородные системы уравнений. Если в системе линейных уравнений все правые части уравнений равны нулю, то такая система называется однородной:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0, \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases}$$

В матричном виде она записывается как $AX = O$.

Однородная система всегда имеет тривиальное решение $X = O$ ($x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$).

Если $\text{rank } A = n$ (для квадратной матрицы это означает, что $\det A \neq 0$), то других решений однородная система не имеет.

Нетривиальные решения однородной системы существуют в случае, когда $\text{rank } A < n$ (для квадратной матрицы это означает, что $\det A = 0$).

Вид общего решения системы линейных уравнений. Имеет место следующая

Теорема 5.4. Если $X_1, X_2, \dots, X_k$ – различные решения однородной системы, то их линейная комбинация $\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \dots + \lambda_k X_k$ тоже будет решением.

◀ Если $X_1, \dots, X_k$ – решения однородной системы, то верны следующие равенства: $AX_1 = O, \dots, AX_k = O$. Пусть $X = \lambda_1 X_1 + \dots + \lambda_k X_k$. Нам нужно доказать, что X также является решением, т.е. произведение AX равно нулевой матрице:

$$A(\lambda_1 X_1 + \dots + \lambda_k X_k) = \lambda_1 AX_1 + \dots + \lambda_k AX_k = O + \dots + O = O. \quad \blacktriangleright$$

Решения $X_1, X_2, \dots, X_k$ однородной системы уравнений называются *линейно независимыми*, если ни одно из них не может быть представлено в виде линейной комбинации оставшихся.

Если A – основная матрица однородной системы, то у такой системы существует $k = n - \text{rang } A$ независимых решений. Они образуют *фундаментальную систему решений* $X_1, X_2, \dots, X_k$.

Следствие 5.4.1 (Вид общего решения однородной системы). Если $X_1, X_2, \dots, X_k$ – фундаментальная система решений однородной системы, то общее решение этой системы можно записать в виде

$$X = C_1 X_1 + C_2 X_2 + \dots + C_k X_k,$$

где $C_1, C_2, \dots, C_k$ – произвольные числа.

Перейдём теперь к рассмотрению неоднородной системы $AX = B$, где $B \neq O$.

Теорема 5.5. Если $\tilde{X}$ – частное решение неоднородной системы $AX = B$ и X_0 – решение однородной системы $AX = O$, то сумма $\tilde{X} + X_0$ будет решением неоднородной системы.

◀ Пусть $A\tilde{X} = B, AX_0 = O$. Тогда $A(\tilde{X} + X_0) = A\tilde{X} + AX_0 = B + O = B$. ▶

Следствие 5.5.1 (Вид общего решения неоднородной системы). Если $\tilde{X}$ – частное решение неоднородной системы, а $X_1, X_2, \dots, X_k$ – фундаментальная система решений соответствующей однородной системы, то общее решение неоднородной системы можно записать в виде

$$X = \tilde{X} + C_1 X_1 + C_2 X_2 + \dots + C_k X_k. \quad (5.1)$$

Пример 5.3. Исследовать структуру решения системы уравнений, решённой в примере 3.4.

В указанном примере был получен следующий ответ

$$X = \begin{pmatrix} -8C + 5D - 1 \\ 13C - 5D + 3 \\ C \\ D \end{pmatrix}.$$

Запишем это решение в другом виде:

$$X = \begin{pmatrix} -1 - 8C + 5D \\ 3 + 13C - 5D \\ 0 + 1C + 0D \\ 0 + 0C + 1D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C \begin{pmatrix} -8 \\ 13 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + D \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Данный вид решения полностью согласуется с формулой (5.1). Легко убедиться, что столбцы

$$\tilde{X} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_1 = \begin{pmatrix} -8 \\ 13 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

являются частным решением неоднородной системы и двумя линейно независимыми решениями однородной системы соответственно.

§6. Собственные значения и векторы

Определение. Пусть A – известная квадратная матрица порядка n . Если X – вектор-столбец размера $n \times 1$, то произведение AX также будет иметь такой же размер. В ряде задач бывает нужно найти такой *ненулевой вектор* X , чтобы векторы X и AX были коллинеарны,¹ т.е. существовало такое число λ , что $AX = \lambda X$.

¹Определение коллинеарности векторов будет дано в §9.

В этом случае число λ называется *собственным значением*, а X – *собственным вектором* матрицы A .

Перепишем данное равенство по-другому:

$$AX = \lambda X \quad \Rightarrow \quad (A - \lambda E)X = O. \quad (6.1)$$

У нас получилась однородная система линейных уравнений. Если матрица $A - \lambda E$ невырождена, то у этой системы имеется лишь тривиальное решение, что не согласуется с определением собственного вектора. Ненулевое решение система (6.1) имеет лишь в случае, когда матрица $A - \lambda E$ вырождена:

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Это уравнение называется *характеристическим уравнением* и служит для поиска собственных значений матрицы A . Далее для каждого найденного собственного значения $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ решается уравнение (6.1) и находятся собственные векторы $X_1, X_2, \dots$. Заметим, что из свойств решения однородных систем уравнений следует, что собственный вектор определяется с точностью до постоянной¹, т.е. если X_1 – собственный вектор, соответствующий значению λ_1 , то и μX_1 ($\mu \neq 0$) также будет собственным вектором, отвечающим значению λ_1 . Для единообразной записи длину собственного вектора подбирают так, чтобы все его координаты были целыми взаимно простыми числами, либо записывают вектор единичной длины. Направление собственного вектора можно выбрать так, чтобы его первая ненулевая координата была положительной.

¹Если ранг r матрицы $A - \lambda E$ меньше $n - 1$, то собственный вектор, соответствующий λ , будет определяться с точностью не до одной, а до $n - r$ постоянных. Это следует из теоремы Кронекера – Капелли.

Пример 6.1. Найти собственные значения и векторы матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Запишем характеристическое уравнение:

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 4 - \lambda & 1 & 1 \\ 1 & 3 - \lambda & 2 \\ 1 & 2 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Получим два нуля в третьем столбце. Для этого вначале прибавим ко второй строке третью, а затем вычтем из третьего столбца второй:

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 4 - \lambda & 1 & 1 \\ 2 & 5 - \lambda & 5 - \lambda \\ 1 & 2 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 - \lambda & 1 & 0 \\ 2 & 5 - \lambda & 0 \\ 1 & 2 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Разложив определитель по третьему столбцу, получим

$$\det(A - \lambda E) = (1 - \lambda) \begin{vmatrix} 4 - \lambda & 1 \\ 2 & 5 - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda)(\lambda^2 - 9\lambda + 18) = 0.$$

Первое собственное значение равно единице, два других значения найдём, решив квадратное уравнение:

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 3, \quad \lambda_3 = 6.$$

Теперь займёмся нахождением собственных векторов. Начнём с собственного вектора, соответствующего λ_1 . Запишем матрицу системы и найдём решение методом Гаусса:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -5 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Т.к. в однородной системе столбец правых частей при всех элементарных преобразованиях всегда будет оставаться нулевым, для экономии места он опускается.

Пусть $x_3 = C$, тогда из второй строки следует $x_2 = -C$. Из первой строки найдём $x_1 = 0$. Приняв $C = -1$,¹ запишем собственные векторы:

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{X}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Длина последнего вектора $\tilde{X}_1$ равна 1. Для нахождения $\tilde{X}_1$ мы разделили все координаты вектора X_1 на его длину. #

Задание. Найдите собственные векторы X_2 и X_3 , соответствующие значениям $\lambda_2 = 3$ и $\lambda_3 = 6$. Ниже приведены ответы:

$$X_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{X}_2 = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{6} \end{pmatrix}, \quad X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{X}_3 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Характеристический многочлен. *Характеристическим многочленом* квадратной матрицы A называется многочлен $\chi(\lambda) = \det(A - \lambda E)$.

Приведём некоторые его свойства:

- 1°. Корни многочлена $\chi(\lambda)$ – собственные значения A .
- 2°. Для матрицы A порядка n степень многочлена $\chi(\lambda)$ равна n . Как следствие, количество собственных значений не может превышать порядок матрицы.²

◀ Свойство 1° следует из определения собственных значений.

Свойство 2° следует из того факта, что при вычислении определителя одним из слагаемых будет произведение чисел, стоящих на главной диагонали. Т.к. каждый диагональный элемент матрицы $A - \lambda E$ содержит $(-\lambda)$, то в характеристическом многочлене будет слагаемое $(-1)^n \lambda^n$. Оно и определяет наивысшую степень. ▶

¹Если взять $C = 1$, то первая ненулевая координата вектора будет отрицательна.

²Данное следствие вытекает из основной теоремы алгебры. Вообще говоря, если учитывать кратные и комплексные корни, то можно утверждать, что характеристический многочлен всегда имеет ровно n собственных значений. О комплексных числах и корнях многочленов будет сказано в части 2, §35.

Спектральное разложение матрицы. Пусть квадратная матрица A имеет ровно n собственных значений $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, соответствующие этим значениям собственные векторы обозначим как $X_1, X_2, \dots, X_n$. Составим две квадратные матрицы. У первой матрицы V столбец с номером j является вектором X_j , а вторая матрица Λ – диагональная, j -й элемент её диагонали равен λ_j :

$$V = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ X_1 & X_2 & \dots & X_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{pmatrix}, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}. \quad (6.2)$$

Перемножив матрицы A и V , с учётом свойств собственных векторов $AX_i = \lambda_i X_i$ получим

$$AV = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1 X_1 & \lambda_2 X_2 & \dots & \lambda_n X_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{pmatrix}.$$

Перемножив матрицы V и Λ , получим ту же самую матрицу, следовательно, $AV = V\Lambda$.

Далее предположим, что матрица V – невырожденная, что означает линейную независимость собственных векторов $X_1, X_2, \dots, X_n$. Тогда существует обратная матрица V^{-1} и

$$AV = V\Lambda \Rightarrow A = V\Lambda V^{-1}. \quad (6.3)$$

Последняя формула называется *спектральным разложением* квадратной матрицы A , представленной в виде произведения трёх матриц: матрицы V собственных векторов, диагональной матрицы Λ собственных значений и матрицы V^{-1} – обратной к V .

Выполним спектральное разложение матрицы A из примера 6.1 двумя способами:

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & -1/2 \\ 1/3 & -1/6 & -1/6 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

В первом случае были использованы векторы X_1, X_2, X_3 с целыми координатами, а во втором – векторы $\tilde{X}_1, \tilde{X}_2, \tilde{X}_3$ единичной длины. Матрицы V^{-1} в этих разложениях найдены по матрице V стандартным методом. Заметим, что в случае единичных собственных векторов матрица V^{-1} совпала с матрицей V^T .

Ортогональные матрицы. Квадратная матрица A называется *ортогональной*, если обратная к ней совпадает с транспонированной: $A^{-1} = A^T$.

Матрица V , составленная из собственных векторов единичной длины матрицы A (пример 6.1), оказалась ортогональной:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 2/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Это получилось не случайно. Имеют место следующие теоремы:

Теорема 6.1. У любой симметричной матрицы A порядка n имеется ровно n собственных значений.

Данную теорему примем без доказательства.

Теорема 6.2. Если у симметричной матрицы A все собственные значения различны, то матрица V , составленная из собственных векторов единичной длины, будет ортогональной.

◀ Рассмотрим произведение $W = V^T V$. Для доказательства теоремы нам нужно показать, что W – единичная матрица. Действительно, если $V^T V = E$, то отсюда следует $V^T = V^{-1}$. Матрица W будет единичной, если её диагональные элементы будут равны единице, а остальные – нулю.

Рассмотрим вначале диагональный элемент w_{ii} . Он получается в результате умножения строки i матрицы V^T на столбец i матрицы V . В этой

строке и этом столбце стоят координаты собственного вектора X_i , следовательно, $w_{ii} = X_i^T X_i$. Но т.к. все собственные векторы имеют единичную длину, то $w_{ii} = 1$. Теперь рассмотрим недиагональный элемент w_{ij} . Рассуждая аналогичным образом, можно заключить, что $w_{ij} = X_i^T X_j$. Покажем, что это произведение равно нулю.

Рассмотрим число $s = X_i^T A X_j$. С одной стороны, оно равно

$$s = X_i^T (A X_j) = X_i^T (\lambda_j X_j) = \lambda_j (X_i^T X_j).$$

С другой стороны,

$$s = X_i^T A X_j = (A^T X_i)^T X_j = (A X_i)^T X_j = (\lambda_i X_i)^T X_j = \lambda_i (X_i^T X_j).$$

Здесь мы учли тот факт, что матрица A – симметричная и $A^T = A$. Приравняв оба выражения, получим

$$(\lambda_j - \lambda_i) X_i^T X_j = 0 \quad \Rightarrow \quad X_i^T X_j = 0.$$

Множитель $\lambda_j - \lambda_i$ не может равняться нулю, т.к. по условию все собственные значения различны. ►

В заключение запишем формулу спектрального разложения (6.3) для симметричной матрицы:

$$A = V \Lambda V^T.$$

Выразим из этой формулы Λ :

$$\Lambda = V^T A V. \tag{6.4}$$

Последняя формула называется формулой *приведения симметричной матрицы к диагональному виду*, а ортогональная матрица V в этой формуле – матрицей перехода.

След матрицы. Следом $\text{tr } A$ квадратной матрицы A называется сумма элементов, стоящих на главной диагонали:

$$\text{tr } A = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn} = \sum_{i=1}^n a_{ii}.$$

Отметим некоторые свойства следа:

$$1^\circ. \operatorname{tr}(A + B) = \operatorname{tr} A + \operatorname{tr} B.$$

$$2^\circ. \operatorname{tr}(\lambda A) = \lambda \operatorname{tr} A.$$

$$3^\circ. \operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA).$$

◀ Свойства 1° и 2° очевидны. Докажем 3° . Пусть $C = AB$, тогда

$$\operatorname{tr} C = \sum_{i=1}^n c_{ii} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{ji}.$$

Если $D = BA$, то

$$\operatorname{tr} D = \sum_{j=1}^n d_{jj} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n b_{ji} a_{ij} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ij} b_{ji}. \quad \blacktriangleright$$

Докажем две важные теоремы о свойствах собственных значений.

Теорема 6.3. Если у матрицы A ровно n собственных значений, то их произведение равно определителю $\det A$.

◀ Используем спектральное разложение (6.3):

$$\det A = \det(V \Lambda V^{-1}) = \det V \cdot \det \Lambda \cdot \det V^{-1} = \det \Lambda.$$

Матрица Λ – диагональная и её определитель равен произведению чисел, стоящих на главной диагонали. ▶

Теорема 6.4. Если у матрицы A ровно n собственных значений, то их сумма равна следу $\operatorname{tr} A$.

◀ Опять используем спектральное разложение (6.3):

$$\operatorname{tr} A = \operatorname{tr}(V \cdot \Lambda V^{-1}) = \operatorname{tr}(\Lambda V^{-1} \cdot V) = \operatorname{tr}(\Lambda \cdot V^{-1}V) = \operatorname{tr} \Lambda.$$

Здесь мы использовали свойство 3° следа. ▶

Задание. Для матрицы

$$\begin{pmatrix} 5 & 6 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

были найдены два собственных значения: $\lambda_1 = -2$ и $\lambda_2 = 2$. Производя только вычисления в уме, определите третье собственное значение.

§7. Квадратичные формы

Определения. *Квадратичной формой* называется однородный многочлен второй степени

$$s = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j, \quad (a_{ij} = a_{ji}), \quad (7.1)$$

где $x_1, x_2, \dots, x_n$ — переменные.

Если все суммы вида $a_{ij}x_i x_j + a_{ji}x_j x_i$, где $i \neq j$, записать в виде $2a_{ij}x_i x_j$, получим

$$s = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \dots + a_{nn}x_n^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + \dots$$

Введём в рассмотрение симметричную матрицу A и вектор-столбец X :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

С помощью этих матриц квадратичную форму (7.1) можно записать в матричном виде:

$$s = X^T A X. \quad (7.2)$$

Матрица A называется матрицей квадратичной формы.

Задание. Записать квадратичную форму $s = x^2 + 9y^2 + z^2 + 6xy + 2xz - 4yz$ в матричном виде.

Если матрица A является диагональной, то говорят, что форма имеет *канонический вид*. Такая квадратичная форма не содержит попарных произведений переменных:

$$s = \sum_{i=1}^n a_{ii} x_i^2 = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \dots + a_{nn}x_n^2.$$

Знакоопределённость квадратичных форм. Квадратичная форма называется *положительно определённой*, если $s > 0$ для любого ненулевого вектора X . Квадратичная форма называется *отрицательно определённой*, если $s < 0$ для любого ненулевого вектора X . Квадратичная форма называется *знакопеременной*, если для каких-то векторов X значение s положительно, а для других X – отрицательно.

Рассмотрим примеры квадратичных форм от двух переменных:

- $s = x^2 + 2y^2$. Данная квадратичная форма является положительно определённой, т.к. сумма квадратов не может быть отрицательной и принимает нулевое значение только тогда, когда все переменные равны нулю.
- $s = x^2 - 2y^2$. Данная квадратичная форма является знакопеременной. Так, при $x = 1, y = 0$ она принимает положительное значение, а при $x = 0, y = 1$ – отрицательное.
- $s = x^2 - 2xy + y^2$. Данная квадратичная форма не может принимать отрицательные значения, т.к. её можно записать в виде $s = (x - y)^2$. Поэтому она не является знакопеременной. С другой стороны, она и не является положительно определённой, т.к. существует ненулевой вектор $(x = 1, y = 1)$, на котором она принимает нулевое значение. Квадратичные формы, принимающие только неотрицательные значения, называются *неотрицательно определёнными*.
- $s = x^2 + 4xy + 3y^2$. Чтобы определить тип этой квадратичной формы, перепишем её в другом виде: $s = (x + 2y)^2 - y^2$. По новому виду становится понятно, что эта квадратичная форма является знакопеременной.

Задание. Для каких значений x и y последняя квадратичная форма принимает положительные значения? Отрицательные значения?

Вопрос определения типа квадратичной формы является очень важным в некоторых задачах. Для квадратичных форм канонического вида определить их тип не составляет труда. Для квадратичных форм общего вида можно использовать метод их приведения к каноническому виду с помощью замены переменных.

Замена переменных в квадратичной форме. Пусть P – невырожденная квадратная матрица порядка n . Введём новые переменные $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n$, которые связаны со старыми соотношением

$$X = P\tilde{X}, \quad \tilde{X} = \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \vdots \\ \tilde{x}_n \end{pmatrix}. \quad (7.3)$$

Матрица P называется матрицей перехода, её невырожденность нужна для взаимно однозначного соответствия между X и $\tilde{X}$, обратный переход даётся соотношением: $\tilde{X} = P^{-1}X$.

Подставив (7.3) в (7.2), получим

$$s = (P\tilde{X})^T A (P\tilde{X}) = \tilde{X}^T (P^T A P) \tilde{X} = \tilde{X}^T B \tilde{X}, \quad B = P^T A P. \quad (7.4)$$

Квадратичная форма s в новых переменных также имеет матричное представление, аналогичное (7.2), но уже с изменённой матрицей B .

Смысл замены переменных состоит в том, чтобы новая матрица B после замены стала диагональной. Тогда квадратичная форма примет канонический вид.

Метод Лагранжа. Этот метод приведения квадратичной формы к каноническому виду путём замены переменных состоит в выделении полных квадратов. Рассмотрим этот метод на конкретном примере.

Пример 7.1. Привести квадратичную форму к каноническому виду: $s = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 4xy + 6xz + 8yz$.

Запишем вначале слагаемые с переменной x и соберём из них полный квадрат:

$$s = x^2 + 2x(2y + 3z) + 2y^2 + 3z^2 + 8yz = (x + 2y + 3z)^2 - 2y^2 - 4yz - 6z^2.$$

Далее соберём полный квадрат из слагаемых с переменной y :

$$s = (x + 2y + 3z)^2 - 2(y^2 + 2yz) - 6z^2 = (x + 2y + 3z)^2 - 2(y + z)^2 - 4z^2.$$

Введём новые переменные: $\tilde{z} = z$, $\tilde{y} = y + z$, $\tilde{x} = x + 2y + 3z$, тогда квадратичная форма в этих переменных примет канонический вид $s = \tilde{x}^2 - 2\tilde{y}^2 - 4\tilde{z}^2$.

Найдём обратную замену: $z = \tilde{z}$, $y = \tilde{y} - \tilde{z}$, $x = \tilde{x} - 2(\tilde{y} - \tilde{z}) - 3\tilde{z} = \tilde{x} - 2\tilde{y} - \tilde{z}$.

Эта зависимость в матричном виде ($X = P\tilde{X}$) имеет вид:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{pmatrix}.$$

Мы смогли найти такую матрицу P , чтобы после замены матрица $B = P^T A P$ стала диагональной:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad \#$$

Пример 7.2. Привести квадратичную форму к каноническому виду: $s = 2xy - 6xz - 2yz$.

В этом примере нет слагаемых, являющихся квадратом какой-либо переменной. Поэтому мы не можем сразу собрать полный квадрат. Сделаем вначале промежуточную замену: $x = u - v$, $y = u + v$. Тогда

$$s = 2(u - v)(u + v) - 6(u - v)z - 2(u + v)z = 2u^2 - 8uz - 2v^2 + 4vz.$$

Далее соберём полные квадраты:

$$s = 2(u - 2z)^2 - 8z^2 - 2(v - z)^2 + 2z^2 = 2(u - 2z)^2 - 2(v - z)^2 - 6z^2.$$

Каноническая форма примет канонический вид, если сделать замену $\tilde{z} = z$, $\tilde{y} = v - z$, $\tilde{x} = u - 2z$.

Найдём обратную замену: $z = \tilde{z}$, $y = u + v = \tilde{x} + \tilde{y} + 3\tilde{z}$, $x = u - v = \tilde{x} - \tilde{y} + \tilde{z}$.

Матрица P перехода и матрица B квадратичной формы после замены переменных имеют вид:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = P^T A P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}. \quad \#$$

Ортогональное преобразование квадратичной формы. Возьмём за основу формулу (6.4) приведения симметричной матрицы к диагональному виду. Из формулы (7.4) изменения матрицы квадратичной формы после замены переменных следует, что если в качестве матрицы P перехода взять матрицу V собственных векторов, квадратичная форма примет канонический вид:

$$s = \tilde{X}^T \Lambda \tilde{X} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \tilde{x}_i^2, \quad (7.5)$$

где λ_i – собственные числа матрицы A .

Пример 7.3. Ортогональным преобразованием привести квадратичную форму к каноническому виду и исследовать знакоопределённость: $s = 4x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 2xy + 2xz + 4yz$.

Матрица данной квадратичной формы имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Для этой матрицы в примере 6.1 мы уже находили собственные векторы единичной длины, составим из них матрицу

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

По известным собственным значениям запишем итоговую квадратичную форму в каноническом виде: $s = \tilde{x}^2 + 3\tilde{y}^2 + 6\tilde{z}^2$. Т.к. она является суммой квадратов, можно сделать вывод, что данная квадратичная форма является положительно определённой. #

Теорема 7.1 (Критерий знакоопределённости квадратичной формы). *Дана матрица A квадратичной формы.*

- *Если все её собственные значения λ_i положительны, то квадратичная форма является положительно определённой.¹*
- *Если все её собственные значения отрицательны, то квадратичная форма является отрицательно определённой.*
- *Если есть как положительные, так и отрицательные собственные значения, то квадратичная форма является знакопеременной.*

◀ Доказательство элементарно и следует из формулы (7.5). ▶

Знакоопределённость квадратичной формы второго порядка.

Рассмотрим квадратичную форму от двух переменных, имеющую матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Наша задача – найти, при каких значениях коэффициентов a_{11} , a_{12} , a_{22} форма будет положительно/отрицательно определённой. По теореме 6.3 произведение собственных значений равно определителю матрицы. Поэтому, если $\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 < 0$, то собственные значения будут разных знаков, и это по теореме 7.1 означает, что квадратичная форма является знакопеременной. Если же $\Delta > 0$, то собственные значения одного знака, и квадратичная форма является либо положительно определённой, либо отрицательно определённой.

По теореме 6.4 сумма собственных значений равна сумме диагональных элементов $a_{11} + a_{22}$. Поэтому квадратичная форма будет определена положительно, если $a_{11} + a_{22} > 0$ и $\Delta > 0$. Квадратичная форма будет определена отрицательно, если $a_{11} + a_{22} < 0$ и $\Delta > 0$. Заметим, что вместо суммы $a_{11} + a_{22} > 0$ можно смотреть только на знак a_{11} или a_{22} , ведь при $\Delta > 0$ диагональные элементы имеют одинаковые знаки, т.к. $a_{11}a_{22} \geq a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$.

Критерий Сильвестра. Рассмотрим теперь вопрос о знакоопределённости квадратичных форм от n переменных.

¹Если собственные значения либо положительны, либо равны нулю, то квадратичная форма будет неотрицательно определённой.

Введём понятие углового минора. *Угловым минором* δ_k квадратной матрицы A называется определитель, составленный из элементов матрицы, находящихся в первых k строках и первых k столбцах этой матрицы:

$$\delta_1 = a_{11}, \quad \delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \dots, \quad \delta_n = \det A.$$

Теорема 7.2 (Критерий Сильвестра). *Дана матрица A квадратичной формы.*

- Если все её угловые миноры $\delta_1, \dots, \delta_n$ положительны, то квадратичная форма определена положительно.
- Если знаки угловых миноров $\delta_1, \dots, \delta_n$ чередуются, причём $\delta_1 < 0$, то квадратичная форма определена отрицательно.

Для случая $n = 2$ мы эту теорему доказали выше, для общего случая эта теорема даётся без доказательства.

Заметим, что если один или несколько угловых миноров равны нулю, критерий Сильвестра не позволит установить тип квадратичной формы. В этих случаях следует применять другие методы, например, использовать знаки собственных значений матрицы квадратичной формы или привести форму к каноническому виду методом Лагранжа.

Пример 7.4. Установить знакоопределённость квадратичной формы $s = 7x^2 + 8y^2 + z^2 + 6xy - 4xz$.

Запишем матрицу квадратичной формы

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 3 & -2 \\ 3 & 8 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вычислим её угловые миноры:

$$\delta_1 = 7, \quad \delta_2 = \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} = 47, \quad \delta_3 = \begin{vmatrix} 7 & 3 & -2 \\ 3 & 8 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 3 & -2 \\ 3 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 15.$$

Все угловые миноры положительны, поэтому, по критерию Сильвестра, данная квадратичная форма определена положительно. #

Задание. Установите знакоопределённость квадратичной формы $s = 9x^2 + 5y^2 + z^2 + 10xy + 2xz + 4yz$.

Глава 2.

Векторы и аналитическая геометрия

Геометрия нужна для тех, кто не понимает формулы, алгебра – для тех, у кого плохо с пространственным мышлением. Аналитическая геометрия – наука для тех, у кого плохо и с тем и с другим.

Д. Стэтхэм

Аналитическая геометрия – раздел геометрии, в котором геометрические фигуры и их свойства исследуются средствами алгебры, в том числе и линейной. Основным методом исследования является так называемый координатный метод. Каждой геометрической фигуре он ставит в соответствие некоторое уравнение, связывающее её координаты, и далее свойства фигуры исследуются путём анализа этого уравнения. Такой метод “алгебраизации” геометрических свойств доказал свою универсальность и плодотворно применяется во многих естественных науках.

Перед тем, как приступить к изучению аналитической геометрии, мы вначале познакомимся с системами координат и изучим основы *векторной алгебры*. Эта наука изучает свойства линейных операций с векторами, к которым относятся сложение, умножение вектора на число, различные произведения векторов – скалярное, векторное, смешанное и т.п.

§8. Системы координат

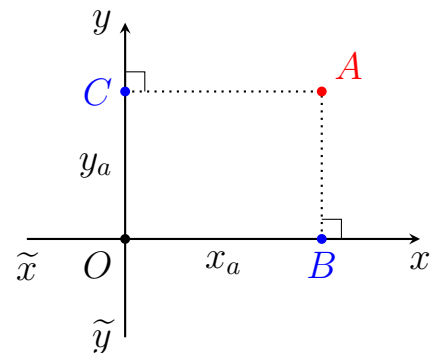
Прямоугольная система координат на плоскости. *Координатами* точки называется набор чисел, определяющих положение этой точки в пространстве. Количество таких чисел определяется размерностью пространства. Так, положение точки на прямой задаётся одной координатой, на плоскости – двумя, в пространстве – тремя координатами.

Опишем процесс получения наиболее простой и часто используемой *прямоугольной* (декартовой) системы координат на плоскости:

- Выбирается начало отсчёта (точка O).
- Через эту точку проводится первая ось – ось абсцисс Ox . Под *осью* будет подразумеваться прямая с выбранным направлением, началом отсчёта и единицей масштаба.
- Перпендикулярно оси абсцисс через начало отсчёта проводится вторая ось – ось ординат Oy . В *правосторонней* системе координат направление этой оси выбирают так, чтобы ось ординат получалась при повороте оси абсцисс на угол 90° против часовой стрелки. В дальнейшем мы будем использовать только правосторонние системы координат.

Наиболее часто используемые направления осей: ось абсцисс направлена вправо, а ось ординат – вверх.

Положение точки A в такой системе координат определяется двумя координатами: абсциссой x_a и ординатой y_a – длинами отрезков OB и OC . При этом координате x_a приписывается знак “–”, если точка B лежит на луче $O\tilde{x}$ (а не на луче Ox), а координате y_a приписывается знак “–”, если точка C лежит на луче $O\tilde{y}$.

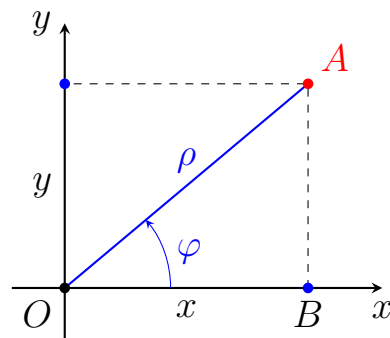


Полярная система координат. Рассмотрим ещё одну систему координат на плоскости, называемую *полярной*.

Первая координата, называемая *полярным радиусом* ρ , равна длине от-

резка OA . Вторая координата – *полярный угол* φ – есть величина угла между осью Ox и отрезком OA . Полярному углу приписывается знак “+”, если поворот от направления оси Ox к направлению отрезка OA идёт против часовой стрелки, при повороте по часовой стрелке углу приписывается знак “–”.

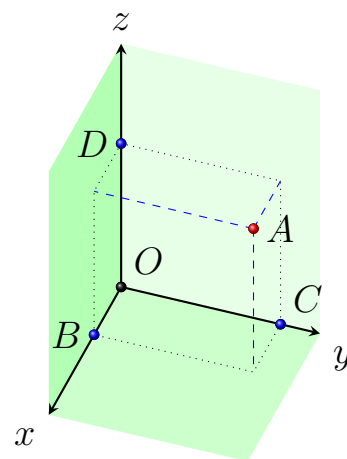
В начале координат O полярный радиус равен нулю ($\rho = 0$), а полярный угол не определён. В остальных точках плоскости $\rho > 0$, а полярный угол всегда определяется с точностью до постоянной $2\pi k$. Для однозначного задания полярного угла можно условиться, что $\varphi \in [0, 2\pi)$.



Из соотношений в прямоугольном треугольнике OAB следует связь между прямоугольными и полярными координатами:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi, \\ y = \rho \sin \varphi, \end{cases} \quad \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}. \end{cases}$$

Прямоугольная система координат в пространстве. Добавим к прямоугольной системе координат на плоскости третью ось – ось аппликат Oz . Эту ось направляют перпендикулярно плоскости Oxy . В *правосторонней* системе координат положительное направление оси Oz выбирают так, чтобы поворот от оси Ox к оси Oy шёл против часовой стрелки, если этот поворот наблюдать со стороны положительного направления оси Oz (правило правой руки).



Положение любой точки в пространстве определяется тремя координатами: абсциссой x , ординатой y и аппликатой z .

Цилиндрическая система координат. Обобщением полярной системы координат на случай пространства является *цилиндрическая* система координат.

В ней положение точки определяется тройкой чисел: ρ , φ , z . Первые две координаты ρ и φ являются полярными координатами точки P – основания перпендикуляра, опущенного из точки на плоскость Oxy . Третья координата z определяется так же, как и в прямоугольной системе координат.

Связь между прямоугольными и цилиндрическими координатами определяется формулами

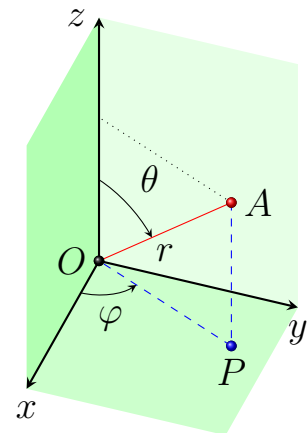
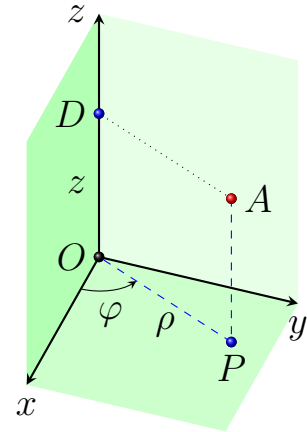
$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi, \\ y = \rho \sin \varphi, \\ z = z. \end{cases}$$

Сферическая система координат. В *сферической* системе координат положение точки определяется тройкой чисел: r , θ , φ . Первая координата r равна длине отрезка OA , вторая координата θ – углу между осью Oz и отрезком OA . Этот угол всегда лежит в интервале $\theta \in [0, \pi]$. Третья координата φ – величина полярного угла точки P , являющегося основанием перпендикуляра AP . Из треугольника OPA следует связь $\rho = r \sin \theta$, откуда

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi, \\ y = r \sin \theta \sin \varphi, \\ z = r \cos \theta. \end{cases}$$

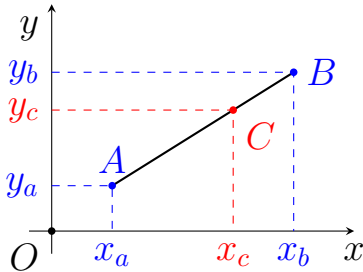
Длина отрезка, деление отрезка в заданном соотношении. Рассмотрим прямоугольную систему координат. Пусть задана точка A с координатами (x_a, y_a, z_a) и точка B (x_b, y_b, z_b) . Тогда длина отрезка AB выражается формулой

$$AB = \sqrt{(x_a - x_b)^2 + (y_a - y_b)^2 + (z_a - z_b)^2},$$



следующей из теоремы Пифагора. Координаты точки M , являющейся серединой отрезка AB , находятся по формулам:

$$x_m = \frac{x_a + x_b}{2}, \quad y_m = \frac{y_a + y_b}{2}, \quad z_m = \frac{z_a + z_b}{2}.$$



Рассмотрим более общую задачу. Пусть C – точка на отрезке AB , для которой выполнено условие $\frac{AC}{CB} = \lambda$, где $\lambda > 0$ – известное число. Требуется найти координаты этой точки.

Проекции отрезка AB на координатные оси также делятся в заданном соотношении. Запишем соотношение проекций на ось Ox :

$$\frac{x_c - x_a}{x_b - x_c} = \lambda \quad \Rightarrow \quad x_c = \frac{x_a + \lambda x_b}{1 + \lambda}.$$

$$\text{Аналогично } y_c = \frac{y_a + \lambda y_b}{1 + \lambda}, \quad z_c = \frac{z_a + \lambda z_b}{1 + \lambda}.$$

Пример 8.1. В пространстве расположен треугольник с координатами вершин $A(1, 1, 1)$, $B(5, 1, 5)$, $C(9, 3, 3)$. Из вершины A проведены медиана AM и биссектриса AN . Найти их длины.

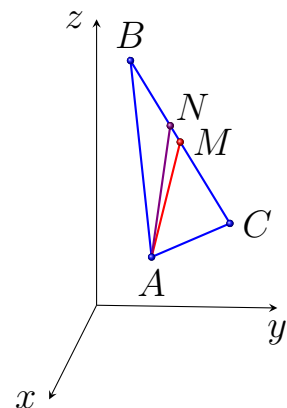
Найдём вначале координаты точки M , как середины отрезка BC :

$$x_m = \frac{x_b + x_c}{2} = \frac{5 + 9}{2} = 7,$$

$$y_m = \frac{1 + 3}{2} = 2, \quad z_m = \frac{5 + 3}{2} = 4.$$

Зная координаты концов отрезка, найдём его длину: $AM = \sqrt{(1 - 7)^2 + (1 - 2)^2 + (1 - 4)^2} = \sqrt{46}$.

Теперь найдём координаты точки N . Из свойства биссектрисы в треугольнике



$$\frac{BN}{NC} = \frac{AB}{AC} = \frac{\sqrt{(1 - 5)^2 + (1 - 1)^2 + (1 - 5)^2}}{\sqrt{(1 - 9)^2 + (1 - 3)^2 + (1 - 3)^2}} = \frac{4\sqrt{2}}{6\sqrt{2}} = \frac{2}{3}.$$

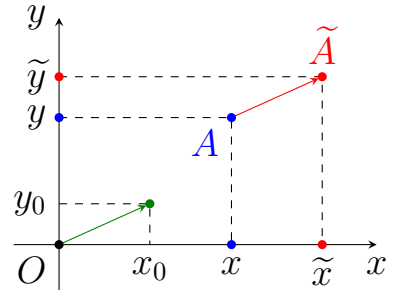
Точка N делит отрезок BC в соотношении $\lambda = \frac{2}{3}$. Значит,

$$x_n = \frac{x_b + \lambda x_c}{1 + \lambda} = \frac{5 + \frac{2}{3} \cdot 9}{1 + \frac{2}{3}} = 6.6,$$

$$y_n = \frac{1 + \frac{2}{3} \cdot 3}{1 + \frac{2}{3}} = 1.8, \quad z_n = \frac{5 + \frac{2}{3} \cdot 3}{1 + \frac{2}{3}} = 4.2.$$

Длина отрезка $AN = \sqrt{(1 - 6.6)^2 + (1 - 1.8)^2 + (1 - 4.2)^2} = 0.8 \cdot \sqrt{66}$. #

Параллельный сдвиг. Рассмотрим движение, называемое параллельным сдвигом: все точки плоскости перемещаются в одном и том же направлении на одинаковое расстояние. Известно, что начало координат переместилось в точку с координатами (x_0, y_0) . Требуется определить координаты $(\tilde{x}, \tilde{y})$ точки, в которую переместится произвольная точка A с координатами (x, y) . Решение этой задачи не представляет сложностей, искомые координаты равны



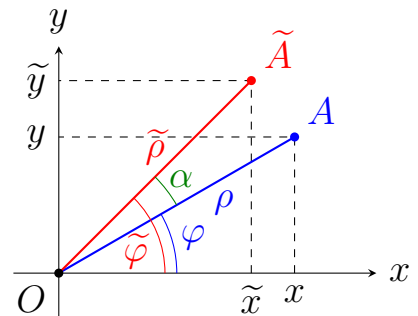
$$\begin{cases} \tilde{x} = x + x_0, \\ \tilde{y} = y + y_0. \end{cases}$$

Запишем эти соотношения в матричном виде:

$$\tilde{X} = X + X_0, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \tilde{X} = \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix}, \quad X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}.$$

Сдвиг в пространстве также описывается этой же формулой, но все входящие в формулу матрицы имеют размер 3×1 .

Поворот. Рассмотрим другой вид движения, называемый поворотом: все точки плоскости поворачиваются против часовой стрелки на угол α , при этом начало координат остаётся неподвижным. Требуется определить координаты $(\tilde{x}, \tilde{y})$ точки, в которую переместится произвольная точка A с координатами (x, y) .



Перейдём в полярные координаты. После поворота полярный радиус не изменится, а полярный угол у всех точек увеличится на α :

$$\begin{cases} \tilde{\rho} = \rho, \\ \tilde{\varphi} = \varphi + \alpha. \end{cases}$$

Перейдём от полярных координат к прямоугольным:

$$\begin{cases} \tilde{x} = \tilde{\rho} \cos \tilde{\varphi} = \rho \cos(\varphi + \alpha) = \rho \cos \varphi \cos \alpha - \rho \sin \varphi \sin \alpha, \\ \tilde{y} = \tilde{\rho} \sin \tilde{\varphi} = \rho \sin(\varphi + \alpha) = \rho \sin \varphi \cos \alpha + \rho \cos \varphi \sin \alpha. \end{cases}$$

Заменяя $\rho \cos \varphi$ на x , а $\rho \sin \varphi$ на y , получим

$$\begin{cases} \tilde{x} = x \cos \alpha - y \sin \alpha, \\ \tilde{y} = y \cos \alpha + x \sin \alpha. \end{cases}$$

Это соотношение запишем в матричном виде:

$$\tilde{X} = TX, \quad T = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}. \quad (8.1)$$

Матрица T называется *матрицей поворота*. Заметим, что $\det T = 1$. Первый и второй столбцы этой матрицы содержат координаты векторов, полученных из единичных векторов $\vec{i}$, $\vec{j}^1$ поворотом на угол α . Обратный переход от новых координат $\tilde{X}$ к старым X даёт формула $X = T^{-1}\tilde{X}$, где

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} = T^T.$$

Значит, матрица поворота является ортогональной матрицей.

Поворот в пространстве можно определить тремя углами. Формула перехода от старых координат к новым имеет вид (8.1), где каждому повороту соответствует своя матрица T размера 3×3 . Отметим некоторые свойства этой матрицы:

- $\det T = 1$.

¹Определение этих векторов будет дано в §9, пункт “Координаты векторов”.

- Каждый столбец матрицы поворота содержит координаты векторов, полученных из единичных векторов $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ после поворота.
- Матрица поворота ортогональна: $T^{-1} = T^T$.

◀ Докажем последнее свойство, равносильное равенству $T^T T = E$. Диагональные элементы матрицы $T^T T$ представляют собой квадраты длин вектор-столбцов матрицы T , поэтому они равны единице. Недиагональные элементы равны скалярному произведению¹ двух различных вектор-столбцов матрицы T . Вследствие ортогональности этих векторов, все недиагональные элементы матрицы $T^T T$ равны нулю. ▶

Связь движения и переноса системы координат. Выше были рассмотрены два вида движения плоскости – параллельный сдвиг и поворот. Рассмотрим теперь задачу переноса системы координат. Пусть Oxy – старая система координат, а $\tilde{O}\tilde{x}\tilde{y}$ – новая система, полученная параллельным переносом старой. Координаты начала отсчёта $\tilde{O}$ в старой системе обозначим как (x_0, y_0) . Тогда переход от старых координат (x, y) к новым $(\tilde{x}, \tilde{y})$ фактически представляет параллельный сдвиг на вектор $-X_0$, т.е.

$$\tilde{X} = X - X_0, \quad X = \tilde{X} + X_0, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \tilde{X} = \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix}, \quad X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим теперь задачу выбора новой системы координат путём поворота старой системы на угол α . Переход от старых координат (x, y) к новым $(\tilde{x}, \tilde{y})$ фактически представляет поворот на угол $-\alpha$, т.е.

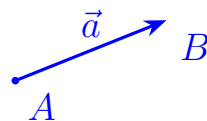
$$\tilde{X} = T^T X, \quad X = T \tilde{X}, \quad T = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

§9. Векторы

Определение. В разделе линейной алгебры вектором называлась матрица, состоящая из одного столбца или строки. Дадим другое определение вектора, называемое геометрическим, и покажем, что эти два определения эквивалентны.

¹Определение скалярного произведения и понятие ортогональности векторов будут даны в §10.

Вектор – направленный отрезок, для которого указано, какая из его граничных точек является началом, а какая — концом. Для обозначения вектора будем использовать символ “ $\rightarrow$ ”, записанный над именем вектора. Так, $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ – вектор, начинающийся в точке A и заканчивающийся в точке B .



Длина вектора – неотрицательное число, равное длине отрезка, соединяющего начало и конец этого вектора. Для обозначения длины вектора $\overrightarrow{AB}$ будем либо опускать символ “ $\rightarrow$ ”, либо писать вектор в прямых скобках (модуль): $a = |\vec{a}| = AB = |\overrightarrow{AB}|$.

Нулевым вектором $\vec{0}$ называется вектор, начинающийся и заканчивающийся в одной точке. Для этого вектора понятие направления теряет смысл. Иногда этому вектору удобно приписать произвольное направление в зависимости от конкретной ситуации.

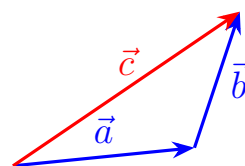
Два вектора называются равными, если равны их длины и направления. Равные векторы лежат либо на одной прямой, либо на параллельных прямых, а концы этих векторов “указывают” в одну сторону.



На рисунке изображены 5 векторов. У векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{e}$ одинаковые длины. У векторов $\vec{a}$, $\vec{d}$, $\vec{e}$ одинаковые направления. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{e}$ равны. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{c}$ не равны, хотя имеют одинаковые длины и лежат на параллельных прямых. Такие векторы называются *противоположными*: $\vec{c} = -\vec{a}$.

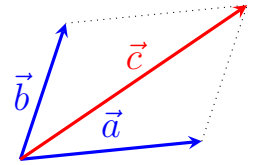
Базовые операции. Для нахождения *суммы* двух векторов можно использовать одно из следующих правил.

Правило треугольника. Для сложения векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ по этому правилу надо отложить вектор $\vec{b}$ от конца вектора $\vec{a}$. Тогда суммой $\vec{a} + \vec{b}$ называется вектор, начало которого совпадает с началом вектора $\vec{a}$, а конец – с концом вектора $\vec{b}$. По правилу треугольника можно сложить и более двух векторов,



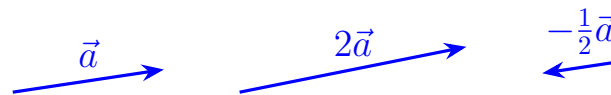
при этом каждый следующий суммируемый вектор следует откладывать от конца предыдущего вектора.

Правило параллелограмма. Для сложения векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ по этому правилу надо совместить начала обоих векторов. Далее следует построить параллелограмм, сторонами которого являются исходные векторы. Суммой $\vec{a} + \vec{b}$ называется вектор, совпадающий с диагональю этого параллелограмма, и начало которого совпадает с началом исходных векторов.



Для векторов также существует операция *вычитания*. Так, разностью $\vec{a} - \vec{b}$ называется вектор, являющийся суммой вектора $\vec{a}$ и вектора $-\vec{b}$ (противоположного к вектору $\vec{b}$).

Вектор можно *умножить на число*. Произведением $\lambda\vec{a}$ называется вектор, который имеет длину $|\lambda|a$ и направление, совпадающее либо с направлением вектора $\vec{a}$ при $\lambda > 0$, либо с направлением вектора $-\vec{a}$ при $\lambda < 0$. Ниже приведён пример умножения вектора $\vec{a}$ на числа $\lambda = 2$ и $\lambda = -\frac{1}{2}$:



Векторы единичной длины называются *ортами*. Любой вектор $\vec{a}$ можно представить в виде произведения орта $\vec{e}$ данного направления и числа a , равного длине вектора: $\vec{a} = a\vec{e}$. Орт любого направления можно получить, умножив произвольный вектор $\vec{a}$ в данном направлении на число, обратное длине вектора: $\vec{e} = \frac{1}{a} \cdot \vec{a}$.

Приведём некоторые свойства введённых выше векторных операций сложения и умножения на число:

- 1°. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$,
- 2°. $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$,
- 3°. $(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$,
- 4°. $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$,
- 5°. $\lambda(\mu\vec{a}) = \mu(\lambda\vec{a}) = (\lambda\mu)\vec{a}$.

Линейная зависимость, коллинеарность и компланарность векторов. Пусть даны векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m$. *Линейной комбинацией*

этих векторов называется вектор вида $\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \dots + \lambda_m \vec{a}_m$. Векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m$ называются *линейно зависимыми*, если существуют неравные нулю одновременно числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ такие, что линейная комбинация $\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \dots + \lambda_m \vec{a}_m$ равняется нулевому вектору. Если таких чисел не существует, то векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m$ называются *линейно независимыми*.

Два вектора называются *коллинеарными*, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых. Если хотя бы один из векторов является нулевым, то векторы будут коллинеарны вне зависимости от направления другого вектора.

Теорема 9.1. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны $\Leftrightarrow$ векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ линейно зависимы.

◀ $\Rightarrow$ Рассмотрим вначале случай, когда хотя бы один из векторов является нулевым, например, $\vec{a} = \vec{0}$. Тогда при $\lambda = 1$ и $\mu = 0$ получим $\lambda \vec{a} + \mu \vec{b} = \vec{0}$. Значит, векторы линейно зависимы.

Остался случай, когда оба вектора являются ненулевыми. Рассмотрим орты $\vec{e} = \frac{1}{a} \vec{a}$ и $\vec{e}_1 = \frac{1}{b} \vec{b}$. Эти два вектора имеют одинаковую единичную длину и расположены на параллельных прямых. Поэтому, либо $\vec{e}_1 = \vec{e}$, либо $\vec{e}_1 = -\vec{e}$.

$$\vec{e}_1 = \vec{e} \Rightarrow \frac{1}{b} \vec{b} = \frac{1}{a} \vec{a} \Rightarrow b \vec{a} + (-a) \vec{b} = \vec{0}.$$

$$\vec{e}_1 = -\vec{e} \Rightarrow \frac{1}{b} \vec{b} = -\frac{1}{a} \vec{a} \Rightarrow b \vec{a} + a \vec{b} = \vec{0}.$$

В обоих случаях векторы линейно зависимы.

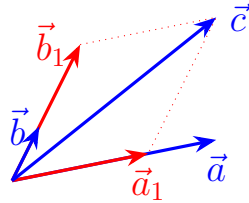
$\Leftarrow$ Если векторы линейно зависимы, то существуют неравные нулю одновременно числа λ и μ такие, что $\lambda \vec{a} + \mu \vec{b} = \vec{0}$. Пусть $\mu \neq 0$, тогда $\vec{b} = -\frac{\lambda}{\mu} \vec{a}$. По определению умножения вектора на число, вектор $\vec{b}$ сонаправлен либо с $\vec{a}$, либо с $-\vec{a}$. В обоих случаях векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны. ▶

Следствие 9.1.1. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны $\Leftrightarrow$ векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ пропорциональны, т.е. существует число λ такое, что $\vec{b} = \lambda \vec{a}$ (или $\vec{a} = \lambda \vec{b}$).

Три вектора называются *компланарными*, если они лежат в одной плоскости или на параллельных плоскостях.

Теорема 9.2. Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны $\Leftrightarrow$ векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ линейно зависимы.

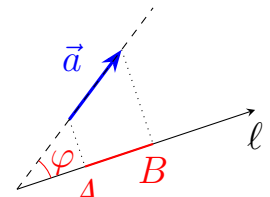
◀ $\Rightarrow$ Рассмотрим вначале случай, когда векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны. Тогда существуют λ и μ , не равные нулю одновременно, для которых $\lambda\vec{a} + \mu\vec{b} + 0 \cdot \vec{c} = \vec{0}$.



Остался случай, когда векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны. Построим все три вектора из одной точки. Из конца вектора $\vec{c}$ проведём прямые, параллельные векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Тогда, согласно правилу параллелограмма, $\vec{c} = \vec{a}_1 + \vec{b}_1$, где вектор $\vec{a}_1$ коллинеарен $\vec{a}$, а вектор $\vec{b}_1$ коллинеарен $\vec{b}$. По следствию 9.1.1, $\vec{a}_1 = \lambda\vec{a}$ и $\vec{b}_1 = \mu\vec{b}$. Поэтому, $\lambda \cdot \vec{a} + \mu \cdot \vec{b} - 1 \cdot \vec{c} = \vec{0}$.

$\Leftarrow$ Если векторы линейно зависимы, то существуют неравные нулю одновременно числа λ , μ и ν такие, что $\lambda\vec{a} + \mu\vec{b} + \nu\vec{c} = \vec{0}$. Пусть $\nu \neq 0$, тогда $\vec{c} = -\frac{\lambda}{\nu}\vec{a} - \frac{\mu}{\nu}\vec{b}$. Следовательно, вектор $\vec{c}$ по построению лежит в плоскости векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$. ▶

Проекция вектора на ось. Пусть дан вектор $\vec{a}$ и некоторая ось ℓ . Из начала и конца вектора опустим перпендикуляры на ось, основания этих перпендикуляров обозначим как A и B соответственно. Пусть также φ – угол между осью ℓ и вектором $\vec{a}$. Проекцией $\text{пр}_\ell \vec{a}$ вектора $\vec{a}$ на ось ℓ называется число, равное длине отрезка AB , взятое со знаком “+”, если угол φ острый, и со знаком “–”, если угол тупой. Свойства проекции:

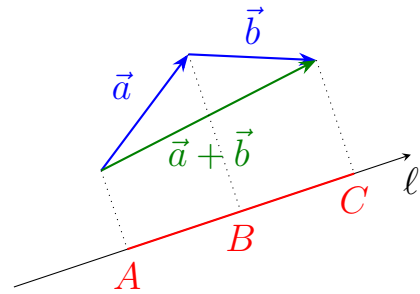


- 1°. $\text{пр}_\ell \vec{a} = a \cos \varphi$,
- 2°. $\text{пр}_\ell(\lambda\vec{a}) = \lambda \cdot \text{пр}_\ell \vec{a}$,
- 3°. $\text{пр}_\ell(\vec{a} + \vec{b}) = \text{пр}_\ell \vec{a} + \text{пр}_\ell \vec{b}$.

Задание. Докажите свойства 1° и 2°.

◀ Для доказательства свойства 3° используем чертёж. Построим вектор $\vec{b}$ так, чтобы он начинался в конце вектора $\vec{a}$. В случае, если углы между осью ℓ и векторами острые, то $\text{пр}_\ell \vec{a} = AB$, $\text{пр}_\ell \vec{b} = BC$ и $\text{пр}_\ell (\vec{a} + \vec{b}) = AC$. Из очевидного соотношения $AB + BC = AC$ следует доказательство нужного свойства. ▶

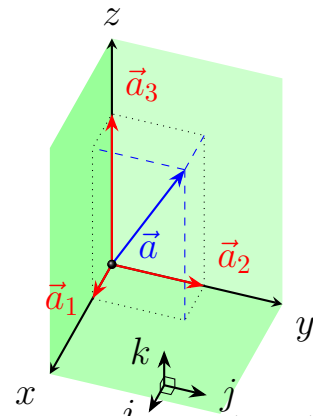
Задание. Докажите свойство 3° в случае, если угол между ℓ и $\vec{a}$ острый, а между ℓ и $\vec{b}$ – тупой.



Координаты вектора. Введём прямоугольную систему координат и рассмотрим некоторый вектор $\vec{a}$. *Координатами* вектора называются его проекции на координатные оси:

$$a_x = \text{пр}_x \vec{a}, \quad a_y = \text{пр}_y \vec{a}, \quad a_z = \text{пр}_z \vec{a}.$$

Орты координатных осей обозначим через $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$. Введём коллинеарные им векторы: $\vec{a}_1 = a_x \vec{i}$, $\vec{a}_2 = a_y \vec{j}$, $\vec{a}_3 = a_z \vec{k}$. Из правила сложения векторов понятно, что $\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3$. Следовательно, любой вектор можно представить как линейную комбинацию ортов координатных осей:



$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}. \quad (9.1)$$

Формулу (9.1) в сокращённом виде будем записывать как $\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$. Отметим важный факт: вектор полностью определяется своими координатами, т.е. по известным координатам, согласно формуле (9.1), однозначно восстанавливается вектор. Поэтому вектором можно считать не только направленный отрезок, но и тройку его координат. Это определение соответствует введённому в разделе линейной алгебры определению вектора как частного случая матрицы, состоящей из одного столбца (вектор-столбец) или одной строки (вектор-строка). Данное определение вектора можно обобщить, т.е. рассматривать векторы не только с тремя, а с любым другим числом координат. Число n координат вектора соответствует размерности пространства $\mathbb{R}^n$, в котором он располагается.

Заметим, что если началом вектора служит начало координат, то координаты вектора совпадают с координатами его конца. Если же вектор начинается в точке $A(x_a, y_a, z_a)$, а заканчивается в точке $B(x_b, y_b, z_b)$, то координаты вектора $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ будут равны

$$a_x = x_b - x_a, \quad a_y = y_b - y_a, \quad a_z = z_b - z_a.$$

Длина вектора совпадает с длиной отрезка, и поэтому длину вектора можно найти по его координатам:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \quad (9.2)$$

Рассмотрим введённые ранее векторные операции сложения и умножения на число для векторов, заданных в координатной форме.

Операции над векторами в координатной форме. Даны два вектора: $\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$ и $\vec{b} = \{b_x, b_y, b_z\}$. Найдём сумму $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ этих векторов:

$$\vec{c} = (a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}) + (b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}) = (a_x + b_x)\vec{i} + (a_y + b_y)\vec{j} + (a_z + b_z)\vec{k}.$$

Множители перед ортами $\vec{i}$, $\vec{j}$ и $\vec{k}$ представляют собой координаты вектора суммы, т.е. $c_x = a_x + b_x$, $c_y = a_y + b_y$, $c_z = a_z + b_z$.

Сложение векторов полностью согласуется с матричным сложением:

$$\begin{pmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим операцию умножения вектора $\vec{a}$ на число λ :

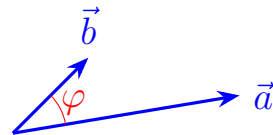
$$\vec{b} = \lambda\vec{a} = \lambda(a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}) = (\lambda a_x)\vec{i} + (\lambda a_y)\vec{j} + (\lambda a_z)\vec{k}.$$

Т.е. $b_x = \lambda a_x$, $b_y = \lambda a_y$, $b_z = \lambda a_z$, что согласуется с операцией умножения матрицы на число:

$$\begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}.$$

§10. Произведения векторов

Скалярное произведение. Даны два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$. *Скалярным произведением* этих векторов называется число, равное произведению длин этих векторов, умноженное на косинус угла между ними:



$$(\vec{a}, \vec{b}) = ab \cos \varphi. \quad (10.1)$$

Для обозначения скалярного произведения мы будем использовать круглые скобки, в других источниках оно может обозначаться точкой: $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

Заметим, что $\text{пр}_{\vec{b}} \vec{a} = a \cos \varphi$ и $\text{пр}_{\vec{a}} \vec{b} = b \cos \varphi$, поэтому

$$\text{пр}_{\vec{a}} \vec{b} = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{a}, \quad \text{пр}_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{b}. \quad (10.2)$$

Два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются *ортогональными*, если их скалярное произведение равно нулю:

$$(\vec{a}, \vec{b}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a} \perp \vec{b}.$$

Если оба вектора имеют ненулевую длину, то из (10.1) следует, что угол между такими ортогональными векторами равен 90° . Если же хотя бы один из векторов является нулевым, то векторы будут ортогональны вне зависимости от направления другого вектора.

Свойства скалярного произведения:

- 1°. $(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a})$,
- 2°. $(\lambda \vec{a}, \vec{b}) = (\vec{a}, \lambda \vec{b}) = \lambda(\vec{a}, \vec{b})$,
- 3°. $(\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{c}) + (\vec{b}, \vec{c})$,
- 4°. $(\vec{a}, \vec{a}) = a^2 \Rightarrow a = \sqrt{(\vec{a}, \vec{a})}$.

◀ Доказательство 3° следует из свойства 3° проекции вектора на ось:

$$(\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}) = c \cdot \text{пр}_{\vec{c}} (\vec{a} + \vec{b}) = c(\text{пр}_{\vec{c}} \vec{a} + \text{пр}_{\vec{c}} \vec{b}) = (\vec{a}, \vec{c}) + (\vec{b}, \vec{c}). \quad \blacktriangleright$$

Задание. Докажите свойства 1°, 2° и 4°, используя определение (10.1) скалярного произведения.

Получим выражение для записи скалярного произведения в координатной форме. Пусть даны координаты векторов $\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$ и $\vec{b} = \{b_x, b_y, b_z\}$. Рассмотрим их скалярное произведение, при этом используем свойства 2° и 3°:

$$\begin{aligned} (\vec{a}, \vec{b}) &= (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}, b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}) = a_x b_x (\vec{i}, \vec{i}) + a_x b_y (\vec{i}, \vec{j}) + \\ &+ a_x b_z (\vec{i}, \vec{k}) + a_y b_x (\vec{j}, \vec{i}) + a_y b_y (\vec{j}, \vec{j}) + a_y b_z (\vec{j}, \vec{k}) + a_z b_x (\vec{k}, \vec{i}) + \\ &+ a_z b_y (\vec{k}, \vec{j}) + a_z b_z (\vec{k}, \vec{k}). \end{aligned}$$

Учтём, что векторы $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ ортогональны друг другу, поэтому $(\vec{i}, \vec{j}) = (\vec{i}, \vec{k}) = (\vec{j}, \vec{k}) = 0$. Длины векторов равны единице, поэтому $(\vec{i}, \vec{i}) = (\vec{j}, \vec{j}) = (\vec{k}, \vec{k}) = 1$. Окончательно получим

$$(\vec{a}, \vec{b}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

Приложения скалярного произведения. С помощью скалярного произведения можно находить углы. Для угла φ между векторами $\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$ и $\vec{b} = \{b_x, b_y, b_z\}$ справедлива формула

$$\cos \varphi = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{a \cdot b} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}. \quad (10.3)$$

Пример 10.1. Даны координаты точек $A(1, 1, 1)$, $B(2, 3, 4)$, $C(-2, 3, 2)$. Найти величину угла BAC .

Найдём координаты векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{AB} = \{2 - 1, 3 - 1, 4 - 1\} = \{1, 2, 3\},$$

$$\overrightarrow{AC} = \{-2 - 1, 3 - 1, 2 - 1\} = \{-3, 2, 1\}.$$

По формуле (10.3)

$$\cos \varphi = \frac{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})}{AB \cdot AC} = \frac{1 \cdot (-3) + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} \cdot \sqrt{3^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{4}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{14}} = \frac{2}{7}.$$

Значит, $\varphi = \arccos \frac{2}{7} \approx 73.4^\circ$.

#

Свойство 4° скалярного произведения бывает полезно в задаче нахождения длины вектора, в случае, когда у вектора неизвестны координаты и формула (9.2) неприменима.

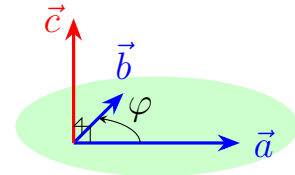
Пример 10.2. Длины векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равны $a = 2$, $b = 3$, угол между векторами $\varphi = \frac{\pi}{3}$. Найти длину вектора $\vec{c} = 3\vec{a} - 4\vec{b}$.

$$\begin{aligned} c^2 &= (\vec{c}, \vec{c}) = (3\vec{a} - 4\vec{b}, 3\vec{a} - 4\vec{b}) = 9(\vec{a}, \vec{a}) - 24(\vec{a}, \vec{b}) + 16(\vec{b}, \vec{b}) = \\ &= 9 \cdot 2^2 - 24 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cos \frac{\pi}{3} + 16 \cdot 3^2 = 108 \quad \Rightarrow \quad c = \sqrt{108}. \end{aligned} \quad \#$$

Векторное произведение. Упорядоченная тройка некомпланарных векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ называется *правой*, если кратчайший поворот от направления вектора $\vec{a}$ к направлению вектора $\vec{b}$ совершается против часовой стрелки, если смотреть на плоскость векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ со стороны вектора $\vec{c}$. Если же такой поворот совершается по часовой стрелке, то тройка $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ называется *левой*.

Пусть даны два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Векторным произведением этих векторов называется вектор $\vec{c}$, удовлетворяющий условиям:

- длина этого вектора равна произведению длин векторов, умноженному на синус угла между ними: $c = ab \sin \varphi$,
- вектор $\vec{c}$ ортогонален векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$,
- векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ образуют правую тройку.



Для обозначения векторного произведения мы будем использовать квадратные скобки $\vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}]$, в других источниках оно может обозначаться крестом: $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$.

Свойства векторного произведения:

- 1°. $[\vec{a}, \vec{b}] = -[\vec{b}, \vec{a}]$,
- 2°. $[\lambda \vec{a}, \vec{b}] = [\vec{a}, \lambda \vec{b}] = \lambda [\vec{a}, \vec{b}]$,
- 3°. $[\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}] = [\vec{a}, \vec{c}] + [\vec{b}, \vec{c}]$,
- 4°. Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ коллинеарны $\Leftrightarrow [\vec{a}, \vec{b}] = \vec{0}$.

Задание. Докажите свойств 1°, 2° и 4°, используя определение векторного произведения.

Доказательство свойства 3° мы приведём позже, после того, как введём понятие смешанного произведения и рассмотрим его свойства.

Получим выражение для записи векторного произведения в координатной форме. Пусть даны координаты векторов $\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$ и $\vec{b} =$

$= \{b_x, b_y, b_z\}$. Тогда их векторное произведение, при этом используем свойства 2° и 3° :

$$\begin{aligned} [\vec{a}, \vec{b}] &= [a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}, b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}] = a_x b_x [\vec{i}, \vec{i}] + a_x b_y [\vec{i}, \vec{j}] + \\ &+ a_x b_z [\vec{i}, \vec{k}] + a_y b_x [\vec{j}, \vec{i}] + a_y b_y [\vec{j}, \vec{j}] + a_y b_z [\vec{j}, \vec{k}] + a_z b_x [\vec{k}, \vec{i}] + \\ &+ a_z b_y [\vec{k}, \vec{j}] + a_z b_z [\vec{k}, \vec{k}]. \end{aligned}$$

Учтём, что векторы $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ ортогональны друг другу и образуют правую тройку, поэтому $[\vec{i}, \vec{j}] = \vec{k}$, $[\vec{j}, \vec{k}] = \vec{i}$, $[\vec{k}, \vec{i}] = \vec{j}$. Кроме того, $[\vec{i}, \vec{i}] = [\vec{j}, \vec{j}] = [\vec{k}, \vec{k}] = \vec{0}$, следовательно

$$[\vec{a}, \vec{b}] = (a_y b_z - a_z b_y) \vec{i} + (a_z b_x - a_x b_z) \vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \vec{k}.$$

Эту формулу легче запомнить, если использовать формулу разложения определителя третьего порядка по первой строке:

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \left\{ \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \right\} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

Приложения векторного произведения. Площадь S параллелограмма со сторонами a и b и углом φ между ними равна $S = ab \sin \varphi$, что совпадает с длиной вектора $[\vec{a}, \vec{b}]$. Площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, в два раза меньше: $S = \frac{1}{2} |[\vec{a}, \vec{b}]|$.

Пример 10.3. Найти площадь $\triangle ABC$, если даны координаты вершин $A(1, 2, 0)$, $B(1, 0, 3)$, $C(0, 2, 3)$.

Найдём координаты векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{AB} = \{1 - 1, 0 - 2, 3 - 0\} = \{0, -2, 3\},$$

$$\overrightarrow{AC} = \{0 - 1, 2 - 2, 3 - 0\} = \{-1, 0, 3\}.$$

Векторное произведение

$$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = \{-6, -3, -2\}.$$

Следовательно, площадь треугольника $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \sqrt{36 + 9 + 4} = \frac{7}{2}$. #

Пример 10.4. Длины векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равны $a = 2$, $b = 3$, угол между векторами $\varphi = \frac{\pi}{3}$. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{c} = 3\vec{a} - 4\vec{b}$ и $\vec{d} = \vec{a} + \vec{b}$.

Найдём векторное произведение $[\vec{c}, \vec{d}] = [3\vec{a} - 4\vec{b}, \vec{a} + \vec{b}] = 3[\vec{a}, \vec{a}] + 3[\vec{a}, \vec{b}] - 4[\vec{b}, \vec{a}] - 4[\vec{b}, \vec{b}] = \vec{0} + 3[\vec{a}, \vec{b}] + 4[\vec{a}, \vec{b}] - \vec{0} = 7[\vec{a}, \vec{b}]$.

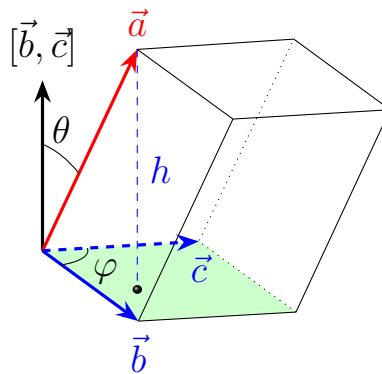
Искомая площадь $S = |[\vec{c}, \vec{d}]| = 7|[\vec{a}, \vec{b}]| = 7 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \sin \frac{\pi}{3} = 21\sqrt{3}$. #

Смешанное произведение. Дана упорядоченная тройка векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$. Смешанным произведением этих векторов называется число, равное скалярному произведению векторов $\vec{a}$ и $[\vec{b}, \vec{c}]$:

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]).$$

Для обозначения смешанного произведения будем использовать, как и для скалярного произведения, круглые скобки.

Теорема 10.1 (Геометрический смысл смешанного произведения). Смешанное произведение равно объёму параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, взятому со знаком “+”, если тройка векторов правая, и со знаком “−”, если тройка левая.



◀ В качестве основания параллелепипеда выберем параллелограмм, образованный векторами $\vec{b}$ и $\vec{c}$. Его площадь $S = bc \sin \varphi = |[\vec{b}, \vec{c}]|$. Если тройка $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ правая, то угол θ между $\vec{a}$ и $[\vec{b}, \vec{c}]$ острый, и высота h , опущенная на основание, равна $h = a \cos \theta$. Объём V параллелепипеда равен $V = Sh = |[\vec{b}, \vec{c}]| \cdot a \cdot \cos \theta$. Следовательно, по определению скалярного произведения, $V = (\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]) = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$.

Случай левой тройки $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ рассматривается аналогично. ►

Свойства смешанного произведения:

$$1^\circ. (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}) = (\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}) = -(\vec{a}, \vec{c}, \vec{b}) = -(\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}) = -(\vec{c}, \vec{b}, \vec{a}),$$

$$2^\circ. (\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]) = ([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c}),$$

$$3^\circ. (\lambda \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a}, \lambda \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{b}, \lambda \vec{c}) = \lambda (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}),$$

$$4^\circ. (\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}) = (\vec{a}, \vec{c}, \vec{d}) + (\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}),$$

$$5^\circ. \text{Векторы } \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ компланарны} \Leftrightarrow (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0.$$

Доказательство свойств 1° и 5° следует из теоремы 10.1.

Задание. Докажите свойства 2° , 3° и 4° , используя свойства скалярного произведения, а также свойство 1° смешанного.

◀ Докажем теперь свойство 3° векторного произведения. Пусть из трёх векторов $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ составлен вектор $[\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}]$. Умножим его скалярно на произвольный вектор $\vec{d}$:

$$([\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}], \vec{d}) = (\vec{a} + \vec{b}, [\vec{c}, \vec{d}]) = (\vec{a}, [\vec{c}, \vec{d}]) + (\vec{b}, [\vec{c}, \vec{d}]) = ([\vec{a}, \vec{c}], \vec{d}) + ([\vec{b}, \vec{c}], \vec{d}) = ([\vec{a}, \vec{c}] + [\vec{b}, \vec{c}], \vec{d}).$$

В ходе преобразований было использовано свойство 2° смешанного произведения. Равенство $([\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}], \vec{d}) = ([\vec{a}, \vec{c}] + [\vec{b}, \vec{c}], \vec{d})$ справедливо для любого вектора $\vec{d}$, следовательно, $[\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}] = [\vec{a}, \vec{c}] + [\vec{b}, \vec{c}]$. ►

Задание. Обоснуйте, почему из равенства $(\vec{a}, \vec{d}) = (\vec{b}, \vec{d})$, справедливого для произвольного вектора $\vec{d}$, следует $\vec{a} = \vec{b}$.

Получим выражение для записи смешанного произведения в координатной форме. Пусть даны векторы $\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$, $\vec{b} = \{b_x, b_y, b_z\}$ и $\vec{c} = \{c_x, c_y, c_z\}$. Тогда их смешанное произведение

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]) = a_x \begin{vmatrix} b_y & b_z \\ c_y & c_z \end{vmatrix} - a_y \begin{vmatrix} b_x & b_z \\ c_x & c_z \end{vmatrix} + a_z \begin{vmatrix} b_x & b_y \\ c_x & c_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Мы автоматически доказали геометрический смысл определителя третьего порядка (см. §2): определитель по абсолютной величине равен объёму параллелепипеда, построенного на трёх векторах, координаты которых образуют строки или столбцы данного определителя.

Приложения смешанного произведения. Смешанное произведение, согласно теореме 10.1, может быть использовано для нахождения объёма параллелепипеда. Объём V тетраэдра, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, в 6 раз меньше объёма соответствующего параллелепипеда: $V = \frac{1}{6} |(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})|$.

Пример 10.5. Найти объём тетраэдра $ABCD$ с вершинами $A(1, 1, 1)$, $B(4, 4, 4)$, $C(3, 5, 5)$, $D(2, 4, 7)$.

Найдём координаты векторов $\overrightarrow{AB} = \{3, 3, 3\}$, $\overrightarrow{AC} = \{2, 4, 4\}$, $\overrightarrow{AD} = \{1, 3, 6\}$. Смешанное произведение

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 18.$$

Значит, объём тетраэдра

$$V = \frac{1}{6} |(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})| = \frac{1}{6} \cdot 18 = 3. \quad \#$$

Условия коллинеарности, ортогональности и компланарности векторов. С использованием полученных ранее формул записи произведений векторов в координатной форме получим условия коллинеарности, ортогональности и компланарности векторов.

Два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, если они линейно зависимы:

$$\vec{a}, \vec{b} \text{ коллинеарны} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}. \quad (10.4)$$

Другим критерием коллинеарности векторов является равенство нулевому вектору их векторного произведения $[\vec{a}, \vec{b}] = \vec{0}$.

Два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ ортогональны, если их скалярное произведение равно нулю:

$$\vec{a}, \vec{b} \text{ ортогональны} \quad \Leftrightarrow \quad a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0. \quad (10.5)$$

Три вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны, если их смешанное произведение равно нулю:

$$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ компланарны} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0. \quad (10.6)$$

Пример 10.6. Даны векторы $\vec{a}\{2, 1, 5\}$ и $\vec{b}\{3, y, z\}$. При каких числах y и z эти векторы будут коллинеарны?

Применим условие коллинеарности (10.4):

$$\frac{2}{3} = \frac{1}{y} = \frac{5}{z} \Rightarrow y = \frac{3}{2}, \quad z = \frac{15}{2}. \quad \#$$

Пример 10.7. Даны векторы $\vec{a}\{2, 1, 5\}$ и $\vec{b}\{3, 4, z\}$. При каком числе z эти векторы будут ортогональны?

Согласно условию ортогональности (10.5),

$$2 \cdot 3 + 1 \cdot 4 + 5 \cdot z = 0 \Rightarrow z = -\frac{10}{5} = -2. \quad \#$$

Пример 10.8. Даны векторы $\vec{a}\{1, 2, 3\}$, $\vec{b}\{3, 0, -1\}$ и $\vec{c}\{4, 1, z\}$. При каком числе z эти векторы будут компланарны?

Применим условие компланарности (10.6):

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & z \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -8 + 9 + 1 - 6z = 0 \Rightarrow z = \frac{1}{3}. \quad \#$$

§11. Базис и векторные пространства

Определение базиса в пространстве. Докажем вначале теорему:

Теорема 11.1. Любые 4 вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ линейно зависимы.

◀ Если векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ компланарны, то они линейно зависимы. Добавление к ним четвёртого вектора сохраняет свойство линейной зависимости. Поэтому рассмотрим случай некомпланарных векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. В случае линейной зависимости четвёрки векторов существуют такие числа λ , μ , ν , что $\vec{d} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b} + \nu\vec{c}$. Это равенство в координатной форме имеет вид системы линейных уравнений:

$$\begin{pmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_x \\ d_y \\ d_z \end{pmatrix}.$$

По критерию компланарности, смешанное произведение векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ не равно нулю, поэтому основная матрица системы невырождена. А это значит, что система линейных уравнений имеет единственное решение. ►

Базисом называется такой набор векторов, что любой вектор может быть единственным образом представлен в виде линейной комбинации векторов из этого набора. Как следует из предыдущей теоремы, в пространстве базис образует любая тройка некопланарных векторов. В дальнейшем векторы базиса будем обозначать как $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$. Добавление к ним произвольного вектора $\vec{d}$ делает их линейно зависимыми. Как следствие, однозначно находятся числа λ , μ , ν такие, что

$$\vec{d} = \lambda \vec{e}_1 + \mu \vec{e}_2 + \nu \vec{e}_3.$$

Данная запись является *разложением вектора $\vec{d}$ по базису $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$* . Коэффициенты λ , μ , ν называются *координатами вектора $\vec{d}$ в базисе $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$* . Напомним, что обычные координаты вектора, согласно формуле (9.1), являются коэффициентами разложения вектора по базису $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$.

Базис называется *ортogonalным*, если он состоит из взаимно ортогональных векторов. Базис называется *ортонормированным*, если он ортогонален и образован единичными векторами. Известный нам базис $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ является ортонормированным.

Задание. Докажите, что векторы $\vec{e}_1 = \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right\}$, $\vec{e}_2 = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right\}$, $\vec{e}_3 = \left\{ \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}} \right\}$ образуют ортонормированный базис.

Векторные пространства $\mathbb{R}^n$. До этого мы рассматривали векторы, расположенные в пространстве. Базис этого пространства состоит из трёх векторов, поэтому каждый вектор, расположенный в пространстве, отождествляется с упорядоченным набором трёх его координат. Множество таких векторов образует векторное пространство $\mathbb{R}^3$. В то же время, векторы, лежащие на плоскости, однозначно определяются набором двух координат, и все множество векторов на плоскости образует пространство $\mathbb{R}^2$.

По аналогии, можно ввести понятие векторного пространства $\mathbb{R}^n$. Каждый вектор этого пространства отождествляется с упорядоченным набором

из n координат, для записи которых используется матрица, состоящая из одного столбца (или строки).

Операции сложения векторов и умножения вектора на число аналогичны операциям сложения матриц и умножения матрицы на число. Скалярное произведение двух векторов $\vec{a} = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ и $\vec{b} = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ определяется как

$$(\vec{a}, \vec{b}) = \sum_{i=1}^n a_i b_i,$$

что эквивалентно умножению вектор-строки на вектор-столбец. Длина вектора из пространства $\mathbb{R}^n$ определяется как

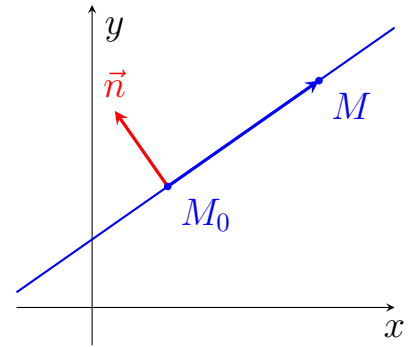
$$a = |\vec{a}| = \sqrt{(\vec{a}, \vec{a})} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}.$$

Также можно ввести понятие угла между векторами. Так, косинус угла определяется по формуле (10.3).

Базис в пространстве $\mathbb{R}^n$ состоит из n векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$. Произвольный вектор можно однозначно представить в виде линейной комбинации векторов этого базиса.

§12. Прямая на плоскости

Уравнение прямой. Дана точка $M_0(x_0, y_0)$ и ненулевой вектор $\vec{n} = \{A, B\}$. Требуется записать уравнение прямой, проходящей через точку M_0 перпендикулярно вектору $\vec{n}$, который будем называть вектором нормали. Пусть $M(x, y)$ – некоторая произвольная точка этой прямой, построим вектор $\overrightarrow{M_0M} = \{x - x_0, y - y_0\}$. Векторы $\vec{n}$ и $\overrightarrow{M_0M}$ ортогональны и, по критерию (10.5),



$$(\vec{n}, \overrightarrow{M_0M}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0. \quad (12.1)$$

Последнее уравнение называется *уравнением прямой, проходящей через заданную точку перпендикулярно заданному вектору*.

Дана точка $M_0(x_0, y_0)$ и ненулевой вектор $\vec{a} = \{\ell, m\}$. Требуется записать уравнение прямой, проходящей через точку M_0 параллельно вектору $\vec{a}$, который будем называть направляющим вектором. Пусть $M(x, y)$ – некоторая произвольная точка этой прямой, построим вектор $\overrightarrow{M_0M} = \{x - x_0, y - y_0\}$. Векторы $\vec{a}$ и $\overrightarrow{M_0M}$ коллинеарны и, по критерию (10.4),

$$\vec{a} \parallel \overrightarrow{M_0M} \Leftrightarrow \frac{x - x_0}{\ell} = \frac{y - y_0}{m}. \quad (12.2)$$

Последнее уравнение называется *уравнением прямой, проходящей через заданную точку параллельно заданному вектору*.

Если в (12.1) раскрыть скобки и ввести постоянную $C = -Ax_0 - By_0$, то уравнение прямой примет вид

$$Ax + By + C = 0. \quad (12.3)$$

Уравнение (12.3) называется *общим уравнением прямой*.

Рассмотрим случай, когда $B \neq 0$. Выразив y из общего уравнения прямой, получим

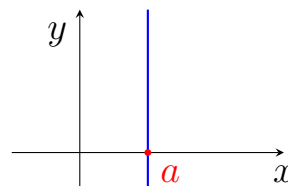
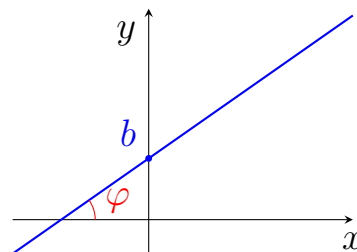
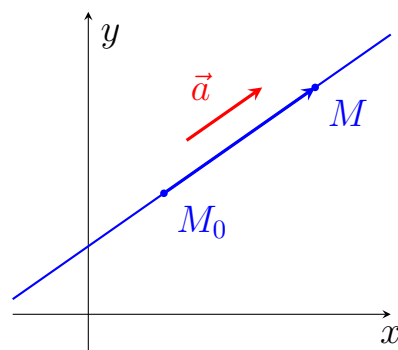
$$y = kx + b, \quad (12.4)$$

где $k = -A/B$, $b = -C/B$. Уравнение (12.4) называется *уравнением прямой с угловым коэффициентом*. Угловым коэффициент k равен тангенсу угла φ между прямой и осью Ox , свободный член b – координате точки пересечения прямой и оси Oy .

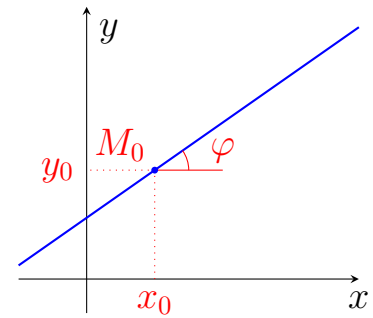
Рассмотрим теперь случай $B = 0$. Тогда в равенстве (12.3) отсутствует y , поэтому для таких прямых нет уравнения вида (12.4). Обозначив $a = -C/A$, получим уравнение

$$x = a.$$

Все прямые такого вида параллельны оси Oy , где постоянная a – координата точки пересечения прямой и оси Ox .



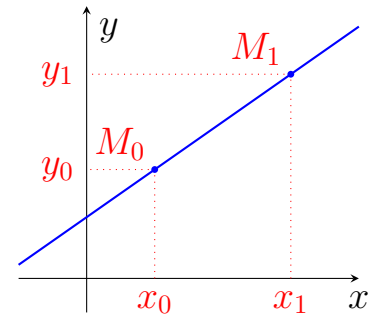
Пусть дана точка $M_0(x_0, y_0)$, через которую проходит прямая, и известен угловой коэффициент k (т.е. задан угол между прямой и осью Ox). Тогда уравнение прямой имеет вид $y = kx + b$ с неизвестной постоянной b . Её найдём из условия, что прямая проходит через точку M_0 : $y_0 = kx_0 + b$, откуда получим



$$y - y_0 = k(x - x_0). \quad (12.5)$$

Это уравнение прямой с заданным угловым коэффициентом, проходящей через заданную точку.

Пусть даны две точки $M_0(x_0, y_0)$ и $M_1(x_1, y_1)$, через которые проходит прямая. Возьмём за основу уравнение (12.2), в качестве направляющего вектора выберем $\overrightarrow{M_0M_1} = \{x_1 - x_0, y_1 - y_0\}$, откуда



$$\frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}. \quad (12.6)$$

Это уравнение прямой, проходящей через две точки.

Пример 12.1. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $(3, 4)$ под углом 45° .

Угловой коэффициент этой прямой $k = \operatorname{tg} 45^\circ = 1$. По формуле (12.5) получим $y - 4 = 1 \cdot (x - 3) \Rightarrow y = x + 1$. #

Пример 12.2. Найти уравнение прямой, проходящей через точки $A(-3, 2)$ и $B(1, -1)$.

По формуле (12.6) получим $\frac{y - 2}{-1 - 2} = \frac{x + 3}{1 + 3} \Rightarrow y = -\frac{3}{4}x - \frac{1}{4}$. #

Отметим ещё пару уравнений прямых. Формула

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

называется *уравнением прямой в отрезках*. Эта прямая пересекает оси координат в точках $x = a$ и $y = b$.

Обозначив любую из дробей в (12.2) за t , получим систему

$$\begin{cases} x = x_0 + lt, \\ y = y_0 + mt, \end{cases}$$

называемую *параметрическим уравнением прямой*. Здесь переменная t является параметром, который пробегает значения от $-\infty$ до $+\infty$.

Угол между прямыми. Даны две прямые, заданные уравнениями $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$. Найдём угол φ , который отсчитывается против часовой стрелки от первой до второй прямой. Очевидно, что $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$, взяв от обеих частей тангенс, получим

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg}(\varphi_2 - \varphi_1) = \frac{\operatorname{tg} \varphi_2 - \operatorname{tg} \varphi_1}{1 + \operatorname{tg} \varphi_1 \operatorname{tg} \varphi_2}.$$

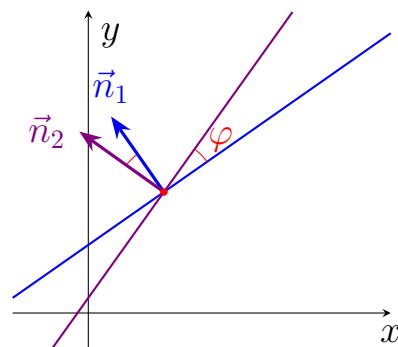
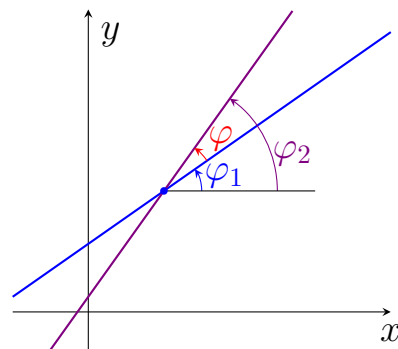
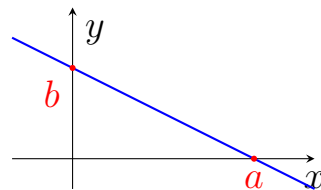
Приняв во внимание геометрический смысл углового коэффициента, получим

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}. \quad (12.7)$$

Две прямые параллельны ($\varphi = 0$), если их угловые коэффициенты равны: $k_1 = k_2$. Если прямые перпендикулярны ($\varphi = \pi/2$), то, с учётом факта, что тангенс прямого угла не существует, получим, что знаменатель правой части равенства (12.7) обращается в нуль: $k_1 k_2 = -1$.

Получим формулу для нахождения угла между двумя прямыми в случае задания их уравнениями общего вида: $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$. Угол φ равен углу между нормальными векторами $\vec{n}_1 = \{A_1, B_1\}$ и $\vec{n}_2 = \{A_2, B_2\}$ и, по формуле (10.3),

$$\cos \varphi = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}.$$



Условие параллельности прямых следует из коллинеарности $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \Rightarrow A_1 B_2 = A_2 B_1.$$

Условие перпендикулярности прямых следует из ортогональности $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$:

$$A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0.$$

Пример 12.3. Дана прямая $y = 3x - 1$. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $(3, 4)$ и

а) параллельной данной.

б) перпендикулярной данной.

У прямой $y = 3x - 1$ угловой коэффициент $k = 3$. Прямая, параллельная данной, имеет такой же угловой коэффициент $k_1 = 3$. Поэтому её уравнение запишется в виде

$$y - 4 = 3(x - 3) \Rightarrow y = 3x - 5.$$

У прямой, перпендикулярной данной, коэффициент $k_2 = -\frac{1}{k_1} = -\frac{1}{3}$. Её уравнение

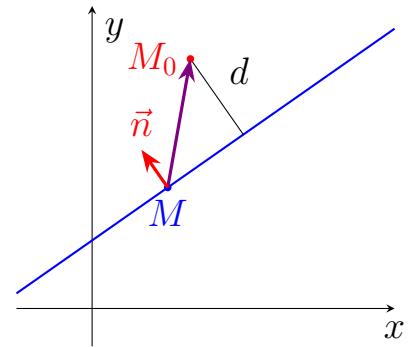
$$y - 4 = -\frac{1}{3}(x - 3) \Rightarrow y = -\frac{1}{3}x + 5. \quad \#$$

Расстояние от точки до прямой. Пусть дана прямая $Ax + By + C = 0$ и точка $M_0(x_0, y_0)$, не лежащая на этой прямой. Надо найти расстояние d от точки до прямой. Возьмём на прямой какую-нибудь точку $M(x, y)$. Тогда расстояние равно модулю проекции вектора $\overrightarrow{MM_0} = \{x_0 - x, y_0 - y\}$ на нормаль $\vec{n} = \{A, B\}$. Согласно формуле (10.2),

$$d = \frac{|\overrightarrow{MM_0}, \vec{n}|}{|\vec{n}|} = \frac{|A(x_0 - x) + B(y_0 - y)|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

С учётом $C = -Ax - By$, окончательно получим

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$



Задание. Покажите, что расстояние от точки $M_0(x_0, y_0)$ до прямой, заданной уравнением с угловым коэффициентом $y = kx + b$, равно

$$d = \frac{|kx_0 + b - y_0|}{\sqrt{k^2 + 1}}.$$

Пример 12.4. Дана прямая, заданная уравнением $y = 3x - 1$. Найти расстояние от точки $M_0(3, 4)$ до этой прямой и координаты ближайшей к M_0 точки на прямой.

Для нахождения расстояния используем приведённую формулу, откуда

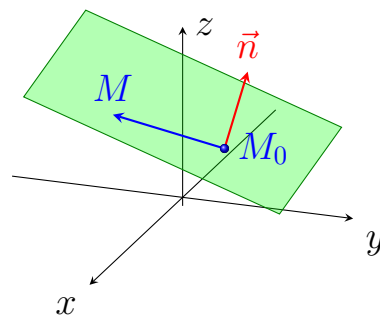
$$d = \frac{|3 \cdot 3 - 1 - 4|}{\sqrt{3^2 + 1}} = \frac{4}{\sqrt{10}} = \frac{2\sqrt{10}}{5}.$$

Для определения ближайшей точки запишем вначале уравнение прямой, перпендикулярной данной и проходящей через точку M_0 : $y = -\frac{1}{3}x + 5$. Искомая точка – точка пересечения двух прямых:

$$\begin{cases} y = 3x - 1, \\ y = -\frac{1}{3}x + 5, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1.8, \\ y = 4.4. \end{cases} \quad \#$$

§13. Плоскость в пространстве

Уравнение плоскости. В пространстве дана точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и ненулевой вектор $\vec{n} = \{A, B, C\}$. Требуется записать уравнение плоскости, проходящей через точку M_0 перпендикулярно вектору $\vec{n}$, который будем называть вектором нормали. Пусть $M(x, y, z)$ – некоторая произвольная точка этой плоскости, построим вектор $\overrightarrow{M_0M} = \{x - x_0, y - y_0, z - z_0\}$. Векторы $\vec{n}$ и $\overrightarrow{M_0M}$ ортогональны и, по критерию (10.5),



$$(\vec{n}, \overrightarrow{M_0M}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \quad (13.1)$$

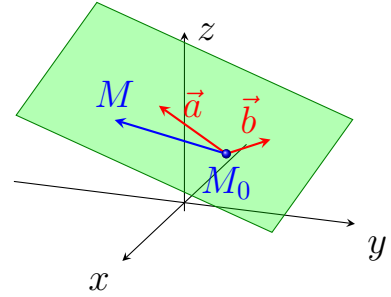
Последнее уравнение называется *уравнением плоскости, проходящей через заданную точку перпендикулярно заданному вектору*.

Если в (13.1) раскрыть скобки и ввести постоянную $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$, то уравнение плоскости примет вид

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

оно называется *уравнением плоскости общего вида*.

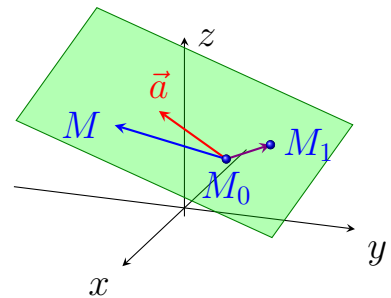
Дана точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и два ненулевых вектора $\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$ и $\vec{b} = \{b_x, b_y, b_z\}$. Требуется записать уравнение плоскости, проходящей через точку M_0 параллельно векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Пусть $M(x, y, z)$ – некоторая произвольная точка этой плоскости, построим вектор $\overrightarrow{M_0M} = \{x - x_0, y - y_0, z - z_0\}$. Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\overrightarrow{M_0M}$ компланарны и, по критерию (10.6),



$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = 0.$$

Последнее уравнение называется *уравнением плоскости, проходящей через заданную точку параллельно заданным векторам*.

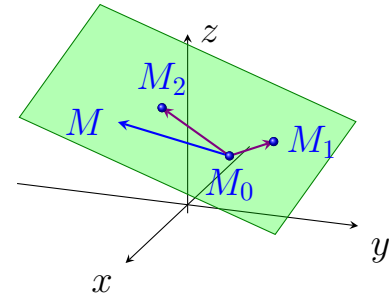
Даны две точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и ненулевой вектор $\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$. Требуется записать уравнение плоскости, проходящей через точки M_0 и M_1 параллельно вектору $\vec{a}$. Пусть $M(x, y, z)$ – некоторая произвольная точка этой плоскости, построим векторы $\overrightarrow{M_0M} = \{x - x_0, y - y_0, z - z_0\}$ и $\overrightarrow{M_0M_1} = \{x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0\}$. Векторы $\vec{a}$, $\overrightarrow{M_0M}$ и $\overrightarrow{M_0M_1}$ компланарны и, по критерию (10.6),



$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = 0.$$

Последнее уравнение называется *уравнением плоскости, проходящей через две заданные точки параллельно заданному вектору*.

Даны три точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$, $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$, не лежащие на одной прямой. Требуется записать уравнение плоскости, проходящей через эти точки. Пусть $M(x, y, z)$ – некоторая произвольная точка этой плоскости, построим векторы $\overrightarrow{M_0M} = \{x-x_0, y-y_0, z-z_0\}$, $\overrightarrow{M_0M_1} = \{x_1-x_0, y_1-y_0, z_1-z_0\}$ и $\overrightarrow{M_0M_2} = \{x_2-x_0, y_2-y_0, z_2-z_0\}$. Векторы $\overrightarrow{M_0M}$, $\overrightarrow{M_0M_1}$ и $\overrightarrow{M_0M_2}$ компланарны и, по критерию (10.6),



$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ x_2-x_0 & y_2-y_0 & z_2-z_0 \end{vmatrix} = 0. \quad (13.2)$$

Последнее уравнение называется *уравнением плоскости, проходящей через три заданные точки*.

Пример 13.1. Записать уравнение плоскости, проходящей через точку $M(1, 2, 3)$ перпендикулярно вектору $\vec{n}\{3, -1, 5\}$.

По формуле (13.1)

$$3(x-1) - 1(y-2) + 5(z-3) = 0 \quad \Rightarrow \quad 3x - y + 5z - 16 = 0. \quad \#$$

Пример 13.2. Записать уравнение плоскости, проходящей через точки $M_0(1, 2, 3)$, $M_1(2, 3, 4)$, $M_2(5, 2, 0)$.

По формуле (13.2)

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 2-1 & 3-2 & 4-3 \\ 5-1 & 2-2 & 0-3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрыв определитель, получим

$$-3x + 7y - 4z + 1 = 0. \quad \#$$

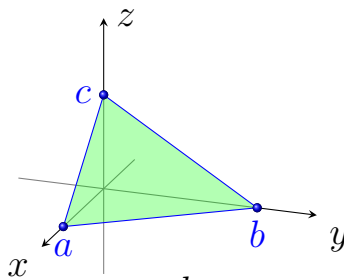
Отметим ещё одно уравнение плоскости.

Формула

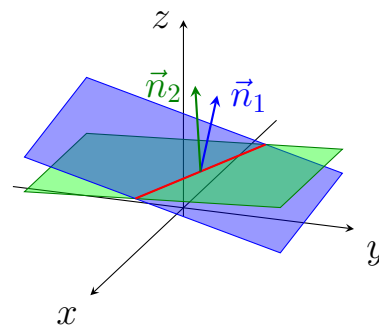
$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

называется *уравнением плоскости в отрезках*.

Эта плоскость пересекает оси координат в точках $x = a$, $y = b$ и $z = c$.



Угол между плоскостями. Даны две плоскости с уравнениями $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$. Требуется найти угол φ между ними. Это угол равен углу между нормальными к этим плоскостям, т.е. углу между векторами $\vec{n}_1 = \{A_1, B_1, C_1\}$ и $\vec{n}_2 = \{A_2, B_2, C_2\}$. Согласно формуле (10.3), косинус этого угла



$$\cos \varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

Две плоскости будут параллельны, если векторы $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$ коллинеарны. По условию (10.4), для этого должны выполняться равенства

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.$$

Две плоскости будут перпендикулярны, если векторы $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$ ортогональны. По условию (10.5), критерий перпендикулярности плоскостей имеет вид

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.$$

Пример 13.3. Найти угол между плоскостями $x = z$ и $y = z$.

Запишем координаты векторов нормалей к этим плоскостям:

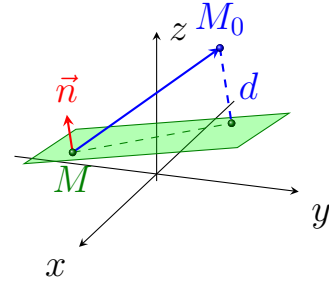
$$x - z = 0: \Rightarrow \vec{n}_1\{1, 0, -1\}, \quad y - z = 0: \Rightarrow \vec{n}_2\{0, 1, -1\}.$$

Следовательно,

$$\cos \varphi = \frac{1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + (-1) \cdot (-1)}{\sqrt{1 + 0 + 1} \sqrt{0 + 1 + 1}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi = 60^\circ.$$

#

Расстояние от точки до плоскости. Дана плоскость $Ax + By + Cz + D = 0$ и точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$, не лежащая на этой плоскости. Надо найти расстояние d от точки M_0 до плоскости. Возьмём на плоскости какую-нибудь точку $M(x, y, z)$. Тогда расстояние равно модулю проекции вектора $\overrightarrow{MM_0} = \{x_0 - x, y_0 - y, z_0 - z\}$ на нормаль $\vec{n} = \{A, B, C\}$. Согласно уравнению (10.2), искомое расстояние



$$d = \frac{|\overrightarrow{MM_0}, \vec{n}|}{|\vec{n}|} = \frac{|A(x_0 - x) + B(y_0 - y) + C(z_0 - z)|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

С учётом $D = -Ax - By - Cz$, окончательно получим

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \quad (13.3)$$

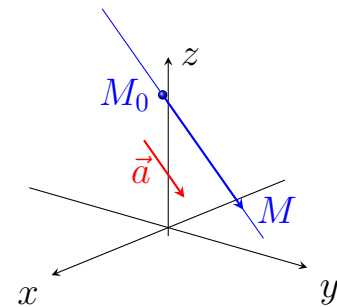
Пример 13.4. Найти расстояние от точки $M_0(1, 2, 3)$ до плоскости $6x - 2y + 3z + 10 = 0$.

Применим формулу (13.3) к нашим данным:

$$d = \frac{|6 \cdot 1 - 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 10|}{\sqrt{6^2 + 2^2 + 3^2}} = \frac{21}{7} = 3. \quad \#$$

§14. Прямая в пространстве

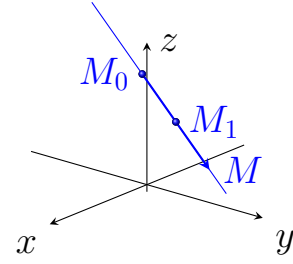
Уравнение прямой. В пространстве дана точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и ненулевой вектор $\vec{a} = \{\ell, m, p\}$. Требуется записать уравнение прямой, проходящей через точку M_0 параллельно вектору $\vec{a}$, который будем называть направляющим вектором. Пусть $M(x, y, z)$ — некоторая произвольная точка этой прямой, построим вектор $\overrightarrow{M_0M} = \{x - x_0, y - y_0, z - z_0\}$. Векторы $\vec{a}$ и $\overrightarrow{M_0M}$ коллинеарны и, по критерию (10.4),



$$\frac{x - x_0}{\ell} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{p}. \quad (14.1)$$

Последнее уравнение называется *каноническим уравнением прямой*.

Даны точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и $M_1(x_1, y_1, z_1)$. Требуется записать уравнение прямой, проходящей через эти точки. Пусть $M(x, y, z)$ – некоторая произвольная точка этой прямой, построим вектор $\overrightarrow{M_0M} = \{x - x_0, y - y_0, z - z_0\}$. Векторы $\overrightarrow{M_0M_1}$ и $\overrightarrow{M_0M}$ коллинеарны и, по критерию (10.4),



$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}. \quad (14.2)$$

Последнее уравнение называется *уравнением прямой, проходящей через две точки*.

Пример 14.1. Записать уравнение прямой, которая проходит через точки $M_0(1, 2, 3)$ и $M_1(4, -5, 3)$.

По формуле (14.2)

$$\frac{x - 1}{4 - 1} = \frac{y - 2}{-5 - 2} = \frac{z - 3}{3 - 3} \Rightarrow \frac{x - 1}{3} = \frac{y - 2}{-7} = \frac{z - 3}{0}.$$

Заметим, что наличие нуля в знаменателе не говорит о том, что данной прямой не существует. В этом случае числитель дроби тоже должен равняться нулю, т.е. координата z для всех точек прямой равна 3. #

Пример 14.2. Записать уравнение прямой, являющейся линией пересечения плоскостей

$$\begin{cases} x + 2y + 3z + 4 = 0, \\ 3x - 2y + z - 4 = 0. \end{cases}$$

Векторы нормали к данным плоскостям $\vec{n}_1 = \{1, 2, 3\}$ и $\vec{n}_2 = \{3, -2, 1\}$. Прямая лежит в обеих плоскостях, следовательно, она перпендикулярна обоим векторам. В качестве направляющего вектора $\vec{a}$ прямой можно взять вектор, коллинеарный векторному произведению $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$:

$$[\vec{n}_1, \vec{n}_2] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \{8, 8, -8\} \Rightarrow \vec{a} = \{1, 1, -1\}.$$

Осталось найти координаты какой-нибудь точки прямой. Эта точка должна быть одним из решений системы линейных уравнений, состоящей из двух уравнений плоскостей. Эта система из двух уравнений с тремя неизвестными имеет бесконечное множество решений, примем, например, $z_0 = 0$:

$$\begin{cases} x_0 + 2y_0 + 4 = 0, \\ 3x_0 - 2y_0 - 4 = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = 0, \\ y_0 = -2. \end{cases}$$

Запишем уравнение прямой по формуле (14.1):

$$\frac{x}{1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z}{-1}. \quad \#$$

Получим ещё одно уравнение прямой. Обозначив любую из дробей в (14.1) за t , получим систему

$$\begin{cases} x = x_0 + \ell t, \\ y = y_0 + m t, \\ z = z_0 + p t. \end{cases}$$

Эта система называется *параметрическим уравнением прямой*, параметром является вспомогательная переменная t , пробегающая значения от $-\infty$ до $+\infty$.

Пример 14.3. Найти точку пересечения плоскости $x + 2y + 3z + 4 = 0$ и прямой $\frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-5}{2}$.

Запишем параметрическое уравнение этой прямой:

$$\begin{cases} x = 2 + t, \\ y = -1 - t, \\ z = 5 + 2t. \end{cases}$$

Подставив в уравнение плоскости, получим уравнение

$$(2+t) + 2(-1-t) + 3(5+2t) + 4 = 0 \Rightarrow 5t = -19 \Rightarrow t = -3.8.$$

Далее, подставив найденное t в параметрическое уравнение прямой, найдём искомые координаты:

$$\begin{cases} x = 2 + (-3.8) = -1.8, \\ y = -1 - (-3.8) = 2.8, \\ z = 5 - 2 \cdot 3.8 = -2.6. \end{cases} \quad \#$$

Пример 14.4. Дана точка $M_0(1, 2, 3)$ и плоскость $6x - 2y + 3z + 10 = 0$. Найти координаты ближайшей к M_0 точки плоскости.

Запишем параметрическое уравнение прямой, проходящей через M_0 параллельно вектору $\vec{n}$ нормали к плоскости:

$$\begin{cases} x = 1 + 6t, \\ y = 2 - 2t, \\ z = 3 + 3t. \end{cases}$$

Искомая точка M – точка пересечения прямой и плоскости. Найдём её, как в предыдущем примере:

$$6(1 + 6t) - 2(2 - 2t) + 3(3 + 3t) + 10 = 0 \quad \Rightarrow \quad t = -\frac{21}{49} = -\frac{3}{7}.$$

Далее найдём координаты точки M :

$$\begin{cases} x_m = 1 - 6 \cdot \frac{3}{7}, \\ y_m = 2 + 2 \cdot \frac{3}{7}, \\ z_m = 3 - 3 \cdot \frac{3}{7} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad M \left(-\frac{11}{7}, \frac{20}{7}, \frac{12}{7} \right). \quad \#$$

Угол между прямой и плоскостью.

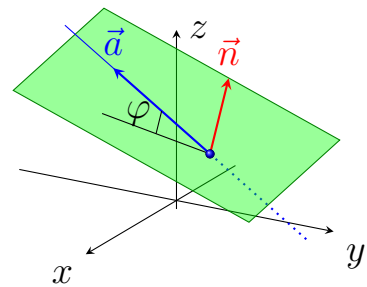
Дана плоскость $Ax + By + Cz + D = 0$ и прямая

$$\frac{x - x_0}{\ell} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{p}.$$

Требуется найти угол φ между ними. Заметим,

что $\sin \varphi$ равен косинусу угла между направляющим вектором $\vec{a}$ прямой и нормалью $\vec{n}$ плоскости, поэтому

$$\sin \varphi = \cos(\widehat{\vec{n}, \vec{a}}) = \frac{(\vec{n}, \vec{a})}{n \cdot a} = \frac{A\ell + Bm + Cp}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \sqrt{\ell^2 + m^2 + p^2}}.$$

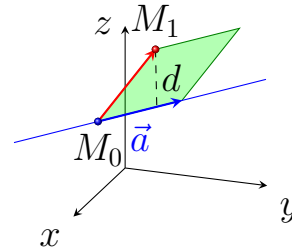


Прямая будет параллельна плоскости ($\varphi = 0$), если $A\ell + Bm + Cp = 0$.
 Прямая будет перпендикулярна плоскости ($\varphi = 90^\circ$), если $\frac{A}{\ell} = \frac{B}{m} = \frac{C}{p}$.

Расстояние от точки до прямой. Дана прямая

$$\frac{x - x_0}{\ell} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{p}.$$

и точка $M_1(x_1, y_1, z_1)$, не лежащая на ней. Требуется найти расстояние d от точки до прямой.



Пусть $\vec{a} = \{\ell, m, p\}$ – направляющий вектор прямой, построим также вектор $\overrightarrow{M_0M_1} = \{x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0\}$. Расстояние d – высота параллелограмма, построенного на векторах $\overrightarrow{M_0M_1}$ и $\vec{a}$. Для вычисления площади S параллелограмма используем векторное произведение, откуда

$$d = \frac{S}{|\vec{a}|} = \frac{|[\overrightarrow{M_0M_1}, \vec{a}]|}{|\vec{a}|}. \quad (14.3)$$

Пример 14.5. Найти расстояние от точки $M_1(0, 2, 3)$ до прямой

$$\frac{x - 3}{2} = \frac{y - 1}{1} = \frac{z + 1}{2}$$

и координаты ближайшей к M_1 точки на прямой.

По каноническому уравнению запишем координаты опорной точки, направляющего вектора и вектора $\overrightarrow{M_0M_1}$:

$$M_0(3, 1, -1), \quad \vec{a} = \{2, 1, 2\}, \quad \overrightarrow{M_0M_1} = \{0 - 3, 2 - 1, 3 + 1\} = \{-3, 1, 4\}.$$

Найдём векторное произведение

$$[\overrightarrow{M_0M_1}, \vec{a}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \{-2, 14, -5\}.$$

Искомое расстояние определим по формуле (14.3):

$$d = \frac{|[\overrightarrow{M_0M_1}, \vec{a}]|}{|\vec{a}|} = \frac{\sqrt{2^2 + 14^2 + 5^2}}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{\sqrt{225}}{\sqrt{9}} = \frac{15}{3} = 5.$$

Теперь найдём координаты ближайшей точки. Из параметрического уравнения прямой запишем координаты произвольной точки M прямой и координаты вектора $\overrightarrow{MM_1}$:

$$M(3 + 2t, 1 + t, -1 + 2t), \quad \overrightarrow{MM_1} = \{-3 - 2t, 1 - t, 4 - 2t\}.$$

Если точка M – ближайшая, то вектор $\overrightarrow{MM_1}$ должен быть ортогонален направляющему вектору $\vec{a}$:

$$(\vec{a}, \overrightarrow{MM_1}) = 0 \Rightarrow 2(-3 - 2t) + 1(1 - t) + 2(4 - 2t) = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{3}.$$

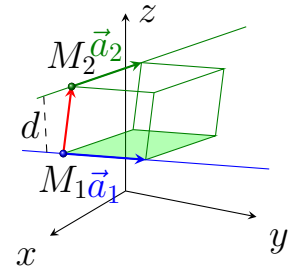
Значит, координаты $M(3 + 2 \cdot \frac{1}{3}, 1 + \frac{1}{3}, -1 + 2 \cdot \frac{1}{3}) = M(\frac{11}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{1}{3})$. #

Расстояние между скрещивающимися прямыми. Даны две прямые, заданные уравнениями

$$\frac{x - x_1}{\ell_1} = \frac{y - y_1}{m_1} = \frac{z - z_1}{p_1}, \quad \frac{x - x_2}{\ell_2} = \frac{y - y_2}{m_2} = \frac{z - z_2}{p_2}.$$

Требуется найти расстояние d между ними.

Пусть $\vec{a}_1 = \{\ell_1, m_1, p_1\}$, $\vec{a}_2 = \{\ell_2, m_2, p_2\}$ – направляющие векторы прямых, построим также вектор $\overrightarrow{M_1M_2} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}$. Через точку M_1 проведём плоскость, параллельную векторам $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$. Первая прямая будет лежать в этой плоскости, а вторая будет ей параллельна. Искомое расстояние d – расстояние от любой точки второй прямой до построенной плоскости. Взяв в качестве точки второй прямой точку M_2 , с использованием формулы нахождения расстояния от точки до плоскости, получим



$$d = \frac{|(\overrightarrow{M_1M_2}, \vec{n})|}{|\vec{n}|}.$$

Нормаль к плоскости определим через векторное произведение $\vec{n} = [\vec{a}_1, \vec{a}_2]$, откуда

$$d = \frac{|(\overrightarrow{M_1M_2}, \vec{a}_1, \vec{a}_2)|}{|[\vec{a}_1, \vec{a}_2]|} = \frac{V}{S}.$$

Числитель дроби – объём V параллелепипеда, построенного на векторах $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$, а знаменатель – площадь S основания параллелепипеда, образованного векторами $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$.

Пример 14.6. Найти расстояние между скрещивающимися прямыми:

$$\frac{x+2}{0} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-4}{-3}, \quad \frac{x}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+4}{6}.$$

По заданным каноническим уравнениям прямых определим опорные точки: $M_1(-2, 1, 4)$, $M_2(0, 1, -4)$.

Найдём координаты вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$ и направляющих векторов:

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \{2, 0, -8\}, \quad \vec{a}_1\{0, 2, -3\}, \quad \vec{a}_2\{1, -2, 6\}.$$

Вычислим объём V параллелепипеда:

$$(\overrightarrow{M_1M_2}, \vec{a}_1, \vec{a}_2) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -8 \\ 0 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & 6 \end{vmatrix} = 24 - 12 + 16 = 28 \Rightarrow V = |28| = 28.$$

Площадь S основания – модуль вектора $[\vec{a}_1, \vec{a}_2]$:

$$[\vec{a}_1, \vec{a}_2] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & 6 \end{vmatrix} = \{6, -3, -2\} \Rightarrow S = \sqrt{6^2 + 3^2 + 2^2} = 7.$$

Расстояние между прямыми

$$d = \frac{V}{S} = \frac{28}{7} = 4. \quad \#$$

§15. Кривые второго порядка

Определения. Как уже было сказано, уравнение прямой на плоскости имеет вид

$$Ax + By + C = 0.$$

Это уравнение называется также уравнением кривой первого порядка, т.к. степень вхождения переменных в каждое слагаемое этого уравнения не превышает единицы.

Уравнением кривой второго порядка называется уравнение

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2b_1x + 2b_2y + c = 0,$$

в котором максимальная степень переменных x и y равна двум.

Данное уравнение кривой второго порядка запишем в матричном виде

$$X^T A X + 2B^T X + c = 0, \quad (15.1)$$

где матрицы

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}.$$

Первое слагаемое в уравнении (15.1) представляет собой квадратичную форму, второе слагаемое – линейную форму, а последнее слагаемое называется свободным членом.

Другой вид уравнения кривой второго порядка

$$X_1^T A_1 X_1 = 0 \quad (15.2)$$

получается с помощью матриц

$$X_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{12} & a_{22} & b_2 \\ b_1 & b_2 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ B^T & c \end{pmatrix}.$$

Пусть $\delta = \det A$ и $\Delta = \det A_1$. Эти два числа называются инвариантами кривой второго порядка. При изменении системы координат путём параллельного переноса и путём поворота, матрицы A и A_1 меняются, но их определители δ и Δ остаются неизменными.¹ Докажем это.

¹Заметим, что при умножении уравнения кривой на какую-нибудь постоянную k , т.е. при изменении всех элементов матриц A и A_1 в k раз, инварианты δ и Δ изменяются, хотя новое уравнение задаёт ту же кривую, что и исходное уравнение.

Теорема 15.1. Числа δ и Δ не меняются при изменении системы координат путём параллельного переноса $X = \tilde{X} + X_0$ и поворота $X = T\tilde{X}$.

◀ Рассмотрим вначале параллельный перенос. Заменяем в уравнении (15.1) матрицу X на сумму $\tilde{X} + X_0$:

$$(\tilde{X} + X_0)^T A (\tilde{X} + X_0) + 2B^T (\tilde{X} + X_0) + c = 0.$$

$$\tilde{X}^T A \tilde{X} + \tilde{X}^T A X_0 + X_0^T A \tilde{X} + X_0^T A X_0 + 2B^T \tilde{X} + 2B^T X_0 + c = 0.$$

Каждое слагаемое здесь представляет число, матрица A является симметричной, поэтому $\tilde{X}^T A X_0 = (\tilde{X}^T A X_0)^T = X_0^T A \tilde{X}$. Запишем уравнение с учётом этого:

$$\tilde{X}^T A \tilde{X} + 2(\tilde{X}^T A X_0 + B^T \tilde{X}) + (X_0^T A X_0 + 2B^T X_0 + c) = 0.$$

Итак, уравнение кривой в новых координатах имеет вид

$$\tilde{X}^T A \tilde{X} + 2\tilde{B}^T \tilde{X} + \tilde{c} = 0, \quad \tilde{B} = A X_0 + B, \quad \tilde{c} = X_0^T A X_0 + 2B^T X_0 + c. \quad (15.3)$$

Матрица A квадратичной формы при параллельном переносе не меняется, следовательно, определитель δ останется прежним.

Из уравнения (15.3) восстановим матрицу $\tilde{A}_1$:

$$\tilde{A}_1 = \begin{pmatrix} A & A X_0 + B \\ (A X_0 + B)^T & X_0^T A X_0 + 2B^T X_0 + c \end{pmatrix} = R^T A_1 R, \quad R = \begin{pmatrix} E & X_0 \\ O & 1 \end{pmatrix}.$$

Поскольку $\det R = 1$, получим

$$\det \tilde{A}_1 = \det R^T \cdot \det A_1 \cdot \det R = \det A_1 = \Delta,$$

следовательно при параллельном переносе Δ не меняется.

Рассмотрим теперь поворот. Заменяем в (15.1) матрицу X на $T\tilde{X}$:

$$\tilde{X}^T \tilde{A} \tilde{X} + 2\tilde{B}^T \tilde{X} + c = 0, \quad \tilde{A} = T^T A T, \quad \tilde{B} = T^T B. \quad (15.4)$$

Определитель $\det \tilde{A} = \det T^T \cdot \det A \cdot \det T = \det A = \delta$. Здесь мы учли свойство матрицы поворота $\det T = 1$.

Из уравнения (15.4) восстановим матрицу $\tilde{A}_1$:

$$\tilde{A}_1 = \begin{pmatrix} T^T A T & T^T B \\ B^T T & c \end{pmatrix} = T_1^T A_1 T_1, \quad T_1 = \begin{pmatrix} T & O \\ O & 1 \end{pmatrix}.$$

С учётом равенства $\det T_1 = 1$, получим $\det \tilde{A}_1 = \det A_1 = \Delta$. ▶

Центр кривой второго порядка. Рассмотрим кривые второго порядка, для которых $\delta \neq 0$. Тогда уравнение $AX_0 + B = 0$ имеет единственное решение $X_0 = -A^{-1}B$, точка с координатами X_0 называется центром кривой второго порядка. Центр кривой является центром симметрии фигуры. Уравнение (15.3), полученное после переноса начала системы координат в центр кривой, примет вид

$$\tilde{X}^T A \tilde{X} + \tilde{c} = 0, \quad \tilde{c} = \frac{\Delta}{\delta}.$$

Задание. Пользуясь свойствами инвариантов, объясните равенство $\tilde{c} = \frac{\Delta}{\delta}$.

Далее выполним поворот системы координат, выбрав в качестве матрицы T поворота матрицу V собственных векторов (6.2). В итоге, согласно (6.4), матрица $\tilde{A}$ станет диагональной, уравнение кривой второго порядка примет вид

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0.$$

Данная форма уравнения кривой второго порядка называется канонической. Также отметим, что $\lambda_1 \lambda_2 = \delta$.

Пример 15.1. Найти центр и записать каноническую форму уравнения кривой $9x^2 - 4xy + 6y^2 + 16x - 8y - 2 = 0$.

Вычислим определители матриц A и A_1 :

$$A = \begin{pmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}, \quad \delta = 50, \quad A_1 = \begin{pmatrix} 9 & -2 & 8 \\ -2 & 6 & -4 \\ 8 & -4 & -2 \end{pmatrix}, \quad \Delta = -500.$$

Найдём собственные значения матрицы A : $\lambda_1 = 10$, $\lambda_2 = 5$.

Найдём центр кривой (центр новой системы координат):

$$\begin{pmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.8 \\ 0.4 \end{pmatrix}.$$

Каноническая форма уравнения кривой: $10\tilde{x}^2 + 5\tilde{y}^2 - 10 = 0$.

#

Если $\delta \neq 0$, то у кривой есть единственный центр. Все такие кривые второго порядка называются центральными. Вид кривой зависит от знаков коэффициентов, входящих в каноническую форму её уравнения. Все варианты перечислены в таблице:

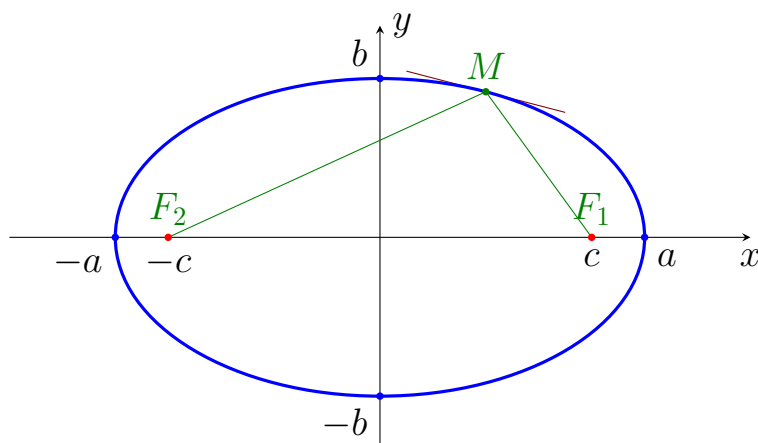
Знаки коэффициентов	Уравнение	Название
$\delta > 0, \quad \lambda_1 \Delta < 0$	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	эллипс
$\delta > 0, \quad \lambda_1 \Delta > 0$	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$	мнимый эллипс
$\delta > 0, \quad \Delta = 0$	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$	две мнимые пересекающиеся прямые
$\delta < 0, \quad \Delta \neq 0$	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm 1$	гипербола
$\delta < 0, \quad \Delta = 0$	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$	две пересекающиеся прямые

Кривой с названием “мнимый эллипс” не соответствует ни одна точка плоскости. Кривой “две мнимые пересекающиеся прямые” соответствует только одна точка $(0, 0)$ плоскости. Кривой “две пересекающиеся прямые” соответствуют прямые, проходящие через начало координат и имеющие уравнения $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0$ и $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0$. Оставшиеся центральные кривые рассмотрим более подробно.

Эллипс. Эллипсом называется геометрическое место точек, удовлетворяющих уравнению, называемому каноническим уравнением эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Уравнение содержит два параметра a и b , называемые полуосями эллипса. При $a > b > 0$ эллипс изображен на рисунке.



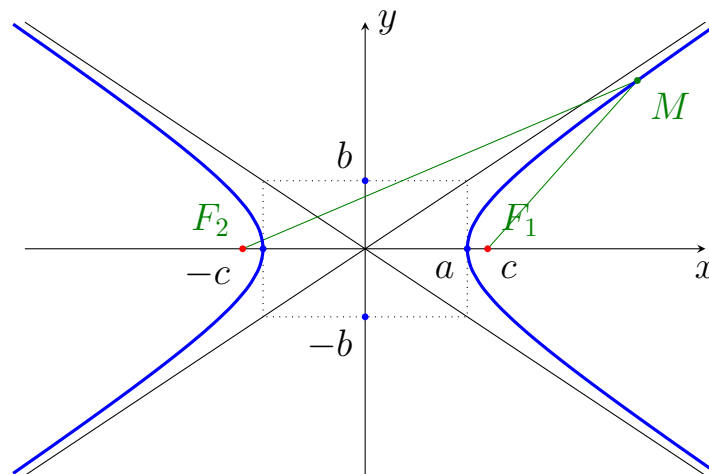
Эллипс пересекается с осью Ox в точках $x = \pm a$ и с осью Oy – в точках $y = \pm b$. Введём также параметр $c = \sqrt{a^2 - b^2}$, точки на оси Ox с координатами $x = \pm c$ называются фокусами F_1 и F_2 эллипса. Свойства эллипса:

- Сумма расстояний от фокусов F_1 и F_2 до любой точки M эллипса является величиной постоянной и равной $F_1M + F_2M = 2a$.
- Если в любой точке M эллипса провести касательную, то углы между ней и отрезками F_1M и F_2M будут равны. Поэтому, в случае, когда поверхность эллипса является зеркальной, свет от источника, находящегося в одном фокусе, отразившись от эллипса, пройдёт через второй фокус. Это свойство называется оптическим свойством эллипса.
- При $a = b$ уравнение эллипса переходит в уравнение окружности. Оба фокуса окружности находятся в её центре.

Гипербола. Гиперболой называется геометрическое место точек, удовлетворяющих уравнению

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

называемому каноническим уравнением гиперболы. Параметры a и b называются действительной и мнимой полуосями гиперболы.



Гипербола состоит из двух бесконечных ветвей, которые пересекаются с осью Ox в точках $x = \pm a$, с осью Oy ветви не пересекаются. Введём

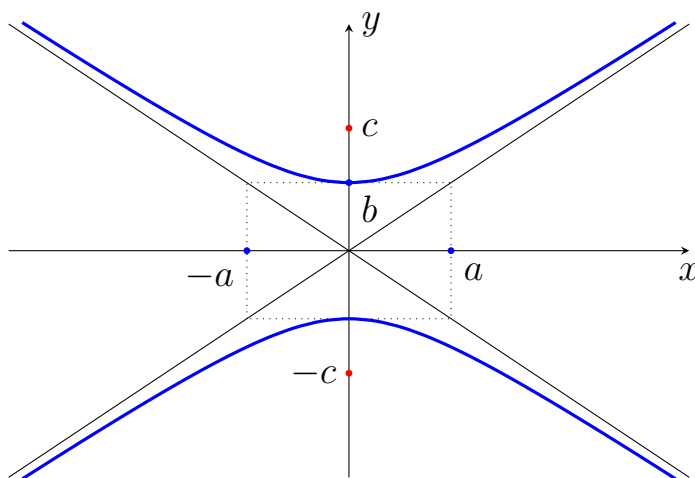
также параметр $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, точки на оси Ox с координатами $x = \pm c$ называются фокусами F_1 и F_2 гиперболы. Свойства гиперболы:

- Разность расстояний от фокусов F_1 и F_2 до любой точки M гиперболы является величиной постоянной и равной $F_1M - F_2M = 2a$ для левой ветви гиперболы и $F_1M - F_2M = -2a$ для правой.
- Если в любой точке M гиперболы провести касательную, то углы между ней и отрезками F_1M и F_2M будут равны. Поэтому, в случае, когда поверхность гиперболы является зеркальной, свет от источника, находящегося в одном фокусе, отразившись от гиперболы, пойдёт по лучу, берущему начало во втором фокусе. Это свойство называется оптическим свойством гиперболы.
- Асимптоты, т.е. прямые, к которым приближаются ветви гиперболы при удалении точки в бесконечность, имеют уравнения $\frac{x}{a} \pm \frac{y}{b} = 0$. Они являются продолжениями диагоналей прямоугольника с центром в начале координат и уравнениями сторон $x = \pm a$, $y = \pm b$.
- При $a = b$ гипербола называется равнобочной. Асимптоты такой гиперболы пересекаются под прямым углом.

Кривая, имеющая уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$$

также является гиперболой, но эта гипербола пересекается с осью Oy в точках $y = \pm b$ и не пересекаются с осью Ox .



Фокусы этой гиперболы располагаются на оси Oy в точках с координатами $y = \pm c$.

Нецентральные кривые. В случае $\delta = 0$ уравнение $AX_0 + B = 0$ либо не имеет решений (центра кривой не существует), либо число решений бесконечно. Поэтому сразу сделаем поворот системы координат, выбрав в качестве матрицы T поворота матрицу V собственных векторов (6.2). Т.к. $\lambda_1 \lambda_2 = \delta = 0$, одно собственное значение равно нулю. Случай равенства нулю обоим собственным значениям не реализуется, это бы означало равенство нулю всей матрицы A и отсутствие в уравнении кривой второго порядка слагаемых второй степени. Примем для определённости, что $\lambda_1 = 0$. Тогда уравнение кривой второго порядка примет вид

$$\lambda_2 y^2 + 2b_1 x + 2b_2 y + c = 0. \quad (15.5)$$

Заметим, что

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 0 & b_1 \\ 0 & \lambda_2 & b_2 \\ b_1 & b_2 & c \end{vmatrix} = -\lambda_2 b_1^2.$$

Рассмотрим два отдельных случая: $\Delta \neq 0$ (что соответствует $b_1 \neq 0$), и случай $\Delta = 0$ ($b_1 = 0$).

Парабола. В первом случае ($\Delta \neq 0$) в уравнении кривой выделим полный квадрат:

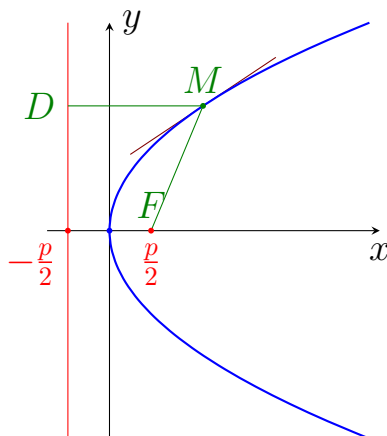
$$\lambda_2 \left(y^2 + 2\frac{b_2}{\lambda_2} y + \frac{b_2^2}{\lambda_2^2} \right) + 2b_1 \left(x + \frac{c}{2b_1} - \frac{b_2^2}{2b_1 \lambda_2} \right) = 0.$$

$$\text{Разделив на } \lambda_2, \text{ получим } \left(y + \frac{b_2}{\lambda_2} \right)^2 = -2\frac{b_1}{\lambda_2} \left(x + \frac{c}{2b_1} - \frac{b_2^2}{2b_1 \lambda_2} \right).$$

Сделаем параллельный перенос по формуле $\tilde{x} = x + \frac{c}{2b_1} - \frac{b_2^2}{2b_1 \lambda_2}$, $\tilde{y} = y + \frac{b_2}{\lambda_2}$. Тогда уравнение кривой примет вид

$$y^2 = 2px, \quad p = -\frac{b_1}{\lambda_2}.$$

Это уравнение описывает кривую, называемую параболой. Число p называется фокальным параметром. В точке на оси x с координатой $\frac{p}{2}$ находится единственный фокус параболы. Прямая $x = -\frac{p}{2}$, параллельная оси Oy , называется директрисой.



Свойства параболы:

- Расстояния от любой точки M параболы до фокуса F и до директрисы равны: $FM = DM$.
- Если в любой точке M параболы провести касательную, то углы между ней и отрезками FM и DM будут одинаковыми. Поэтому, если поверхность параболы является зеркальной, то свет от источника, расположенного в фокусе, отразится от параболы параллельно оси Ox . Это свойство называется оптическим свойством параболы.

Вырожденные нецентральные кривые. И, наконец, рассмотрим последний оставшийся случай, когда $\delta = 0$ и $\Delta = 0$. Тогда, с учётом $b_1 = 0$, уравнение (15.5) примет вид $\lambda_2 y^2 + 2b_2 y + c = 0$.

Выделим полный квадрат: $\lambda_2 \left(y^2 + 2\frac{b_2}{\lambda_2} y + \frac{b_2^2}{\lambda_2^2} \right) + c - \frac{b_2^2}{\lambda_2} = 0$.

Поделив на λ_2 , получим $\left(y + \frac{b_2}{\lambda_2} \right)^2 = \frac{b_2^2}{\lambda_2^2} - \frac{c}{\lambda_2}$.

Сделаем параллельный перенос $\tilde{x} = x$, $\tilde{y} = y + \frac{b_2}{\lambda_2}$. Тогда уравнение кривой примет вид

$$y^2 = d, \quad d = \frac{b_2^2}{\lambda_2^2} - \frac{c}{\lambda_2}.$$

В зависимости от знака постоянной d возможны случаи:

- $d > 0$ – пара параллельных прямых,
- $d = 0$ – пара совпадающих прямых,
- $d < 0$ – пара мнимых параллельных прямых.

Определение вида кривой. Подведём итоги. Вид кривой зависит от знаков инвариантов δ и Δ . Все случаи представлены в таблице.

	Невырожденный случай $\Delta \neq 0$	Вырожденный случай $\Delta = 0$
$\delta > 0$	эллипс (действ. или мнимый)	две пересек. мнимые прямые
$\delta < 0$	гипербола	две пересек. прямые
$\delta = 0$	парабола	две паралл. прямые (действ. или мнимые)

Заметим, что в вырожденном случае все кривые фактически представляют собой две прямые (кривые первого порядка).

§16. Поверхности второго порядка

Определения. Уравнением поверхности второго порядка называется уравнение вида

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2b_1x + 2b_2y + 2b_3z + c = 0.$$

Перепишем его в матричном виде: $X^T A X + 2B^T X + c = 0$, где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Заметим, что последнее уравнение формально совпадает с уравнением (15.1), полученным ранее для кривой второго порядка. Отличие заключается лишь в увеличении размеров матриц A , B и X .

Если ввести матрицы

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & b_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 & c \end{pmatrix}, \quad X_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix},$$

то уравнение поверхности второго порядка примет вид $X_1^T A_1 X_1 = 0$, совпадающий с (15.2).

Следствием схожести уравнений кривых и поверхностей является то, что многие факты и свойства кривых могут быть легко применены и к поверхностям. Так, числа $\delta = \det A$ и $\Delta = \det A_1$ будут инвариантами относительно параллельного переноса и поворота системы координат.

Центральные поверхности. При $\delta \neq 0$ поверхность называется центральной и её центр X_0 является решением уравнения $AX_0 + B = 0$. После переноса начала системы координат в X_0 и поворота с помощью матрицы, совпадающей с матрицей V собственных векторов матрицы A , получим каноническое уравнение центральной поверхности:

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0.$$

Конкретный вид поверхности будет определяться знаками коэффициентов в этом уравнении. Рассмотрим все возможные случаи.

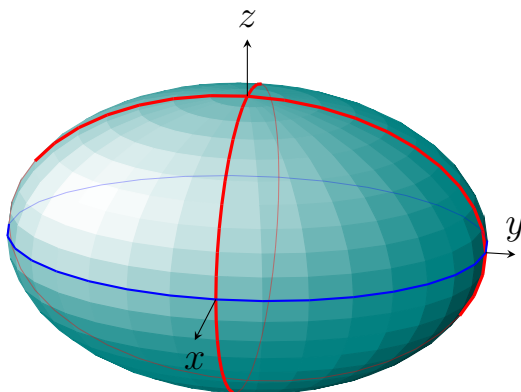
$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$	Δ	Уравнение	Название
$\begin{matrix} + + + \\ - - - \end{matrix}$	$-$	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$	Эллипсоид
$\begin{matrix} + + + \\ - - - \end{matrix}$	$+$	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1$	Мнимый эллипсоид
$\begin{matrix} + + + \\ - - - \end{matrix}$	0	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$	Мнимый конус
$\begin{matrix} + + - \\ - - + \end{matrix}$	$-$	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$	Двуполостный гиперболоид
$\begin{matrix} + + - \\ - - + \end{matrix}$	$+$	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$	Однополостный гиперболоид
$\begin{matrix} + + - \\ - - + \end{matrix}$	0	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$	Конус

Поверхности “мнимый эллипсоид” не соответствует ни одна точка, поверхности “мнимый конус” соответствует только точка, являющаяся началом координат. Остальные поверхности рассмотрим подробнее.

Эллипсоид. Каноническое уравнение этой поверхности

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

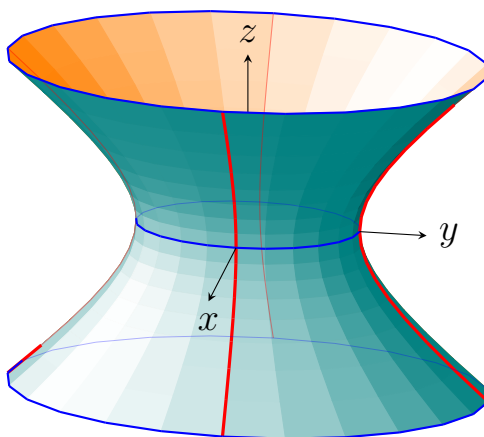
где параметры a, b, c – полуоси эллипсоида. Эту поверхность можно получить из сферы путём растяжения/сжатия по направлениям осей Ox, Oy, Oz так, чтобы точки $x = \pm a, y = \pm b, z = \pm c$ являлись точками пересечения эллипсоида с осями координат. Сечение этой поверхности произвольной плоскостью является эллипсом.



Однополостный гиперболоид. Каноническое уравнение этой поверхности имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

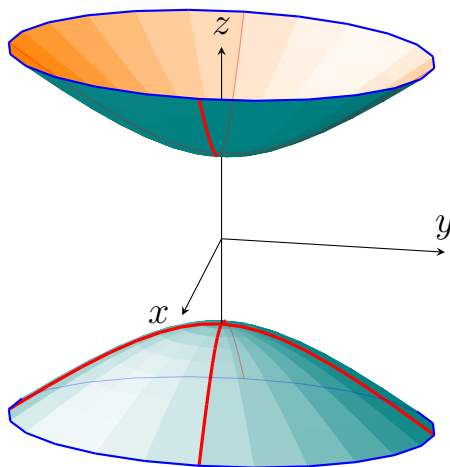
где a, b – полуоси, а c – мнимая полуось. Эту поверхность можно получить вращением гиперболы $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ вокруг оси Oz с последующим растяжением/сжатием вдоль оси Oy . Любое сечение этой поверхности плоскостью, параллельной Oxy , является эллипсом. Сечение плоскостью, проходящей через ось Oz , представляет собой гиперболу.



Двуполостный гиперболоид. Каноническое уравнение этой поверхности имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1,$$

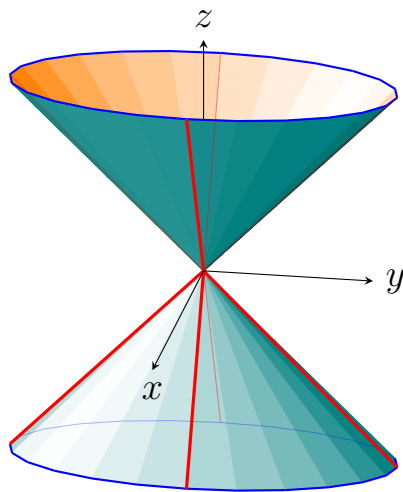
где a, b – мнимые полуоси, а c – полуось. Эту поверхность можно получить вращением гиперболы $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$ вокруг оси Oz с последующим растяжением/сжатием вдоль оси Oy . Любое сечение этой поверхности плоскостью $z = h$, где $|h| > c$, является эллипсом. Сечение плоскостью, проходящей через ось Oz , представляет собой гиперболу.



Конус. Каноническое уравнение этой поверхности

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

Эту поверхность можно получить вращением прямой $\frac{x}{a} - \frac{z}{c} = 0$ вокруг оси Oz с последующим растяжением/сжатием вдоль оси Oy . Любое сечение этой поверхности плоскостью, параллельной Oxy , представляет собой эллипс. Сечение плоскостью, проходящей через ось Oz , представляет собой пару пересекающихся прямых.

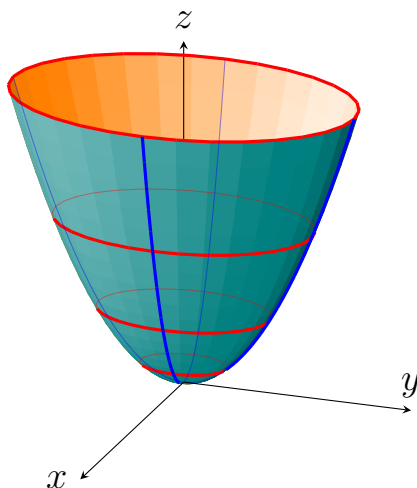


Нецентральные поверхности. При $\delta = 0$ у поверхности либо нет центра, либо имеется бесконечно большое число центров симметрии. Т.к. $\delta = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 0$, одно или два собственных значения матрицы A равны нулю. Рассмотрим все возможные виды таких поверхностей.

Эллиптический параболоид. Данная поверхность – невырожденная ($\Delta \neq 0$), без центра. Каноническое уравнение имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z.$$

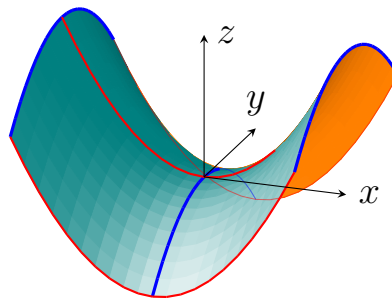
Эту поверхность можно получить вращением параболы $x^2 = 2a^2z$ вокруг оси Oz с последующим растяжением/сжатием вдоль оси Oy . Любое сечение этой поверхности плоскостью $z = h$, где $h > 0$, представляет собой эллипс. Сечение плоскостью, проходящей через ось Oz , представляет собой параболу.



Гиперболический параболоид. Эта поверхность, как и предыдущая, является невырожденной ($\Delta \neq 0$), без центра. Каноническое уравнение имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z.$$

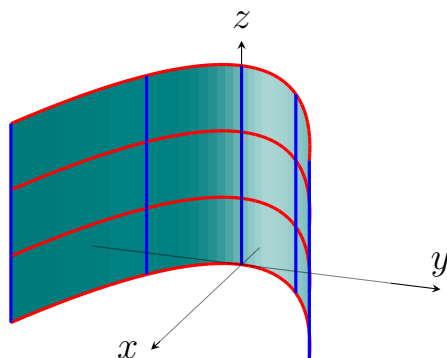
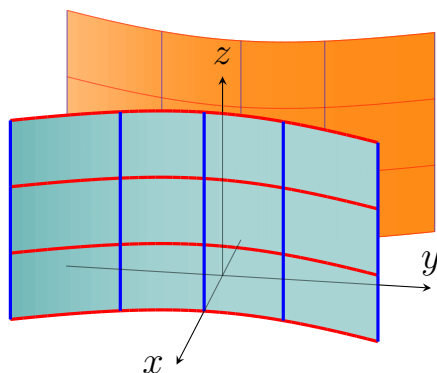
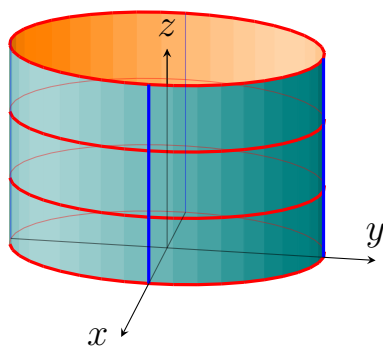
Эту поверхность можно получить плоскопараллельным движением параболы $y^2 = -2b^2z$ при движении её вершины вдоль параболы $x^2 = 2a^2z$. Любое сечение этой поверхности плоскостью $z = h$ представляет собой гиперболу (исключение – плоскость $z = 0$, в этом случае в сечении получится пара пересекающихся прямых). Сечение плоскостью, проходящей через ось Oz , представляет собой параболу (исключение составляют две плоскости, каждая из которых пересекает параболоид по одной из двух упомянутых выше пересекающихся прямых).



Цилиндры. Эти поверхности являются вырожденными ($\Delta = 0$) и имеют уравнения:

- $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ – эллиптический цилиндр,
- $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$ – мнимый эллиптический цилиндр,
- $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ – гиперболический цилиндр,
- $y^2 = 2px$ – параболический цилиндр.

Эти цилиндры можно получить плоскопараллельным движением эллипса/гиперболы/параболы, лежащих в плоскости Oxy , путём плоскопараллельного движения вверх/вниз вдоль оси Oz . Поверхности “мнимый эллиптический цилиндр” не соответствует ни одна точка пространства.



Пары плоскостей. Эти поверхности также являются вырожденными ($\Delta = 0$) и имеют канонические уравнения

- $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$ – пара мнимых пересекающихся плоскостей,
- $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$ – пара пересекающихся плоскостей,
- $\frac{x^2}{a^2} = -1$ – пара мнимых параллельных плоскостей,
- $\frac{x^2}{a^2} = 1$ – пара параллельных плоскостей,
- $\frac{x^2}{a^2} = 0$ – пара совпадающих плоскостей.

Задание. Постройте данные поверхности в пространстве.

Определение вида поверхности. Подведём итоги. Вид поверхности зависит от знаков инвариантов δ и Δ . Все случаи представлены в таблице.

	Невырожденный случай		Вырожденный случай
	$\Delta < 0$	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$
$+, \delta \neq 0$	эллипсоид	мн. элл.	мнимый конус
$-, \delta \neq 0$	двуп. гип.	одноп. гип.	конус
$\delta = 0$	элл. параб.	гип. параб.	$+(2, 3)$ эллип. цил. $+(2, 3)$ мн. элл. цил. $+(2, 2)$ пара мн.пер. плоск. $-(2, 3)$ гиперб. цил. $-(2, 2)$ пара перес. плоск. $(1, 3)$ параб. цил. $(1, 2)$ пара паралл. плоск. $(1, 2)$ пара мн.пар. плоск. $(1, 1)$ пара совп. плоск.

Знак “+” в ячейках таблицы означает, что все λ_i одного знака, знак “−” — если есть λ_i разных знаков, два числа в круглых скобках — ранги матриц: $(\text{rank } A, \text{rank } A_1)$.

Глава 3.

Дифференциальное исчисление (фоп)

Дифференциал – механизм, позволяющий складывать два независимых по своим угловым скоростям входящих потока мощности в один исходящий или раскладывать один входящий поток мощности на два исходящих.

Из ответа студента по экзамене

С этой главы мы начинаем знакомиться с разделом математики, который называется математическим анализом и который объединяет дифференциальное и интегральное исчисления. Данный раздел посвящён дифференциальному исчислению функций одной переменной (фоп). Прежде чем перейти к основным понятиям данного раздела – производной и дифференциалу функции, нам предстоит познакомиться с такими понятиями, как числовая последовательность, функция и предел.

§17. Числовые последовательности

Определения. Числовой последовательностью $\{x_n\} = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ называется бесконечное множество чисел, следующих одно за другим в определённом порядке. Примеры таких последовательностей:

- $\{n\} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ – последовательность натуральных чисел, при-

мер арифметической прогрессии,

- $\{2^{n-1}\} = \{1, 2, 4, 8, \dots\}$ – последовательность степеней двойки, пример геометрической прогрессии,
- $\{1\} = \{1, 1, 1, 1, \dots\}$ – последовательность единиц, пример стационарной последовательности,
- $\{\frac{1}{n}\} = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\}$ – последовательность чисел, обратных натуральным, пример гармонической прогрессии.
- $\{(-1)^{n-1}\} = \{1, -1, 1, -1, \dots\}$ – чередующаяся последовательность.

Задание. Запишите несколько первых членов последовательности $\{\frac{n}{n+1}\}$.

Числовые последовательности можно складывать, вычитать, умножать и делить друг на друга. Эти операции выполняются почленно. Так, если есть последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$, то

$$\{x_n\} + \{y_n\} = \{x_n + y_n\} = \{x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3, \dots\},$$

$$\{x_n\} \cdot \{y_n\} = \{x_n \cdot y_n\} = \{x_1 y_1, x_2 y_2, x_3 y_3, \dots\},$$

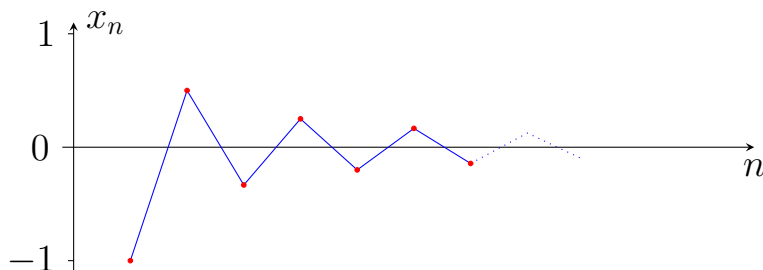
$$\frac{\{x_n\}}{\{y_n\}} = \left\{ \frac{x_n}{y_n} \right\} = \left\{ \frac{x_1}{y_1}, \frac{x_2}{y_2}, \frac{x_3}{y_3}, \dots \right\}.$$

Заметим, что операция деления последовательностей определена только в случае, когда все члены последовательности $\{y_n\}$ отличны от нуля.

Также есть операция умножения последовательности на число:

$$\lambda \{x_n\} = \{\lambda x_n\} = \{\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3, \dots\}.$$

В дальнейшем будет удобно использовать геометрическую интерпретацию числовых последовательностей. На числовой плоскости отметим точки с координатами (n, x_n) и соединим их ломаной линией, продолжающейся вправо до бесконечности. Геометрическая интерпретация последовательности $\{\frac{(-1)^n}{n}\} = \{-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\}$ приведена на рисунке:



Последовательность называется *ограниченной*, если существует такое число M , что все члены последовательности по абсолютной величине не превосходят это число: $|x_n| < M$. Запишем это определение с помощью двух логических операций:

- $\forall$ – квантор всеобщности, читается как “для любого ...”.
- $\exists$ – квантор существования, читается как “существует ...”.

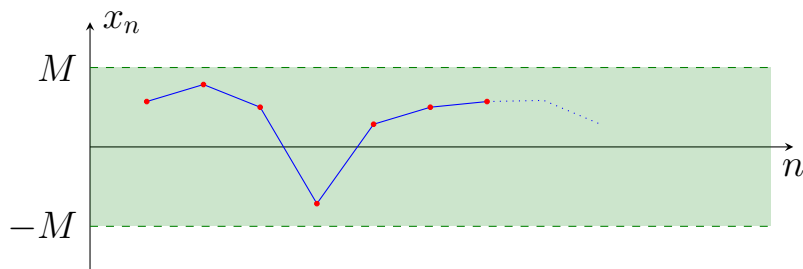
$$\{x_n\} \text{ ограничена} \Leftrightarrow \exists M \quad \forall n: |x_n| < M.$$

В противном случае последовательность называется *неограниченной*:

$$\{x_n\} \text{ неограничена} \Leftrightarrow \forall M \quad \exists n: |x_n| > M.$$

Задание. Исследуйте приведённые выше последовательности на предмет их ограниченности или неограниченности.

Геометрический смысл ограниченной последовательности: ломаная линия, соответствующая последовательности, целиком лежит в горизонтальной полосе $(-M, M)$:



Последовательность называется *бесконечно большой*, если для любого числа M , начиная с какого-то номера N , все члены последовательности по абсолютной величине превосходят это число: $|x_n| > M$.

$$\{x_n\} \text{ бесконечно большая} \Leftrightarrow \forall M \quad \exists N \quad \forall n > N: |x_n| > M.$$

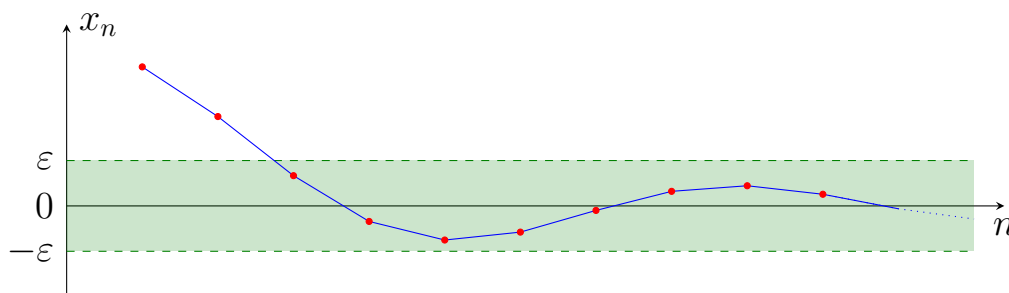
Например, последовательность $\{n\} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ является бесконечно большой. Покажем это. Выберем, какое-нибудь число M . Возьмём $N = M$. Для всех $n > N$ выполнено условие $|x_n| = n > M$, следовательно, последовательность является бесконечно большой.

Все бесконечно большие последовательности являются неограниченными, но не все неограниченные последовательности являются бесконечно большими. Например, последовательность $\{1, 2, 1, 4, 1, 6, 1, 8, \dots\}$ является неограниченной, но не бесконечно большой.

Последовательность называется *бесконечно малой*, если для любого положительного числа ε , начиная с какого-то номера N , все члены последовательности по абсолютной величине меньше этого числа: $|x_n| < \varepsilon$.

$$\{x_n\} \text{ бесконечно малая} \Leftrightarrow \forall \varepsilon \quad \exists N \quad \forall n > N: \quad |x_n| < \varepsilon.$$

Геометрический смысл бесконечно малой последовательности: ломаная линия целиком лежит в горизонтальной полосе $(-\varepsilon, \varepsilon)$, начиная с некоторого значения n :



Заметим, что число ε , определяющее ширину полосы, не задаётся, оно может быть любым малым положительным числом.

Все бесконечно малые последовательности являются ограниченными, но не все ограниченные последовательности являются бесконечно малыми.

Задание. Докажите, что последовательность $\left\{\frac{1}{n}\right\} = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right\}$ является бесконечно малой.

Задание. Приведите пример ограниченной, но не бесконечно малой последовательности.

Отметим некоторые свойства бесконечно больших (б.б.) и бесконечно малых (б.м.) последовательностей.

$$1^\circ. \{x_n\}, \{y_n\} - \text{б.б.} \Rightarrow \{x_n \cdot y_n\} - \text{б.б.}$$

$$2^\circ. \{x_n\}, \{y_n\} - \text{б.м.} \Rightarrow \{x_n \pm y_n\} - \text{б.м.}$$

$$3^\circ. \{x_n\} - \text{б.б.}, \lambda \neq 0 \Rightarrow \{\lambda x_n\} - \text{б.б.}$$

$$4^\circ. \{x_n\} - \text{б.м.} \Rightarrow \{\lambda x_n\} - \text{б.м.}$$

$$5^\circ. \{x_n\} - \text{б.б.}, \{y_n\} - \text{огран.} \Rightarrow \{x_n \pm y_n\} - \text{б.б.}$$

$$6^\circ. \{x_n\} - \text{б.м.}, \{y_n\} - \text{огран.} \Rightarrow \{x_n \cdot y_n\} - \text{б.м.}$$

$$7^\circ. \{x_n\} - \text{б.б.}, x_n \neq 0 \Rightarrow \{1/x_n\} - \text{б.м.}$$

$$8^\circ. \{x_n\} - \text{б.м.}, x_n \neq 0 \Rightarrow \{1/x_n\} - \text{б.б.}$$

Последовательность называется *возрастающей*, если каждый её следующий член больше предыдущего:

$$\{x_n\} \text{ возрастающая} \Leftrightarrow \forall n \quad x_{n+1} > x_n.$$

Задание. Дайте определения *убывающей*, *неубывающей* и *невозрастающей* последовательностей.

Последовательность называется *строго монотонной*, если она возрастающая или убывающая. Последовательность называется *монотонной*, если она неубывающая или невозрастающая.

Предел последовательности. Последовательность $\{x_n\}$ называется *сходящейся к числу a* , если последовательность $\{x_n - a\}$ является бесконечно малой. Есть два способа обозначения сходимости: $\{x_n\} \rightarrow a$ или $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.

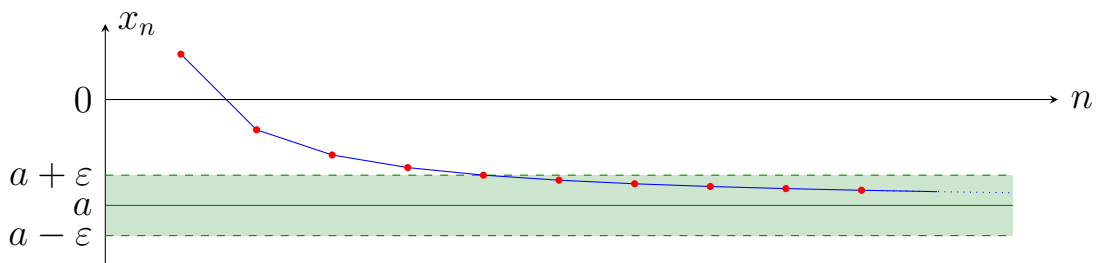
Определение сходимости на языке кванторов:

$$\{x_n\} \rightarrow a \Leftrightarrow \forall \varepsilon \quad \exists N \quad \forall n > N \quad : \quad |x_n - a| < \varepsilon.$$

Если для последовательности $\{x_n\}$ такого числа a не существует, то говорят, что она является расходящейся.

Задание. Пользуясь определением, докажите, что все бесконечно малые последовательности сходятся к числу 0.

Геометрический смысл сходящейся последовательности: для любого числа ε ломаная линия целиком лежит в горизонтальной полосе $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, начиная с некоторого значения n :



Задание. Докажите, что все сходящиеся последовательности ограничены.

Пример 17.1. Показать, что $\left\{\frac{n}{n+1}\right\} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots\right\} \rightarrow 1$.

Рассмотрим последовательность $\{x_n - 1\} = \left\{\frac{n}{n+1} - 1\right\} = \left\{-\frac{1}{n+1}\right\}$.

Т.к. последовательность $\{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \dots\}$ является бесконечно малой, то исходная последовательность сходится к числу 1. #

Последовательность $\{x_n\}$ называется *стремящейся к бесконечности*, если она является бесконечно большой: $\{x_n\} \rightarrow \infty$.

Отметим некоторые свойства сходящихся последовательностей:

$$1^\circ. \{x_n\} \rightarrow a, \{y_n\} \rightarrow b \Rightarrow \{x_n \pm y_n\} \rightarrow a \pm b.$$

$$2^\circ. \{x_n\} \rightarrow a, \{y_n\} \rightarrow b \Rightarrow \{x_n \cdot y_n\} \rightarrow a \cdot b.$$

$$3^\circ. \{x_n\} \rightarrow a, \{y_n\} \rightarrow b \ (y_n \neq 0, b \neq 0) \Rightarrow \left\{\frac{x_n}{y_n}\right\} \rightarrow \frac{a}{b}.$$

$$4^\circ. \{x_n\} \rightarrow \infty, \{y_n\} \rightarrow b \ (b \neq 0) \Rightarrow \{x_n \cdot y_n\} \rightarrow \infty.$$

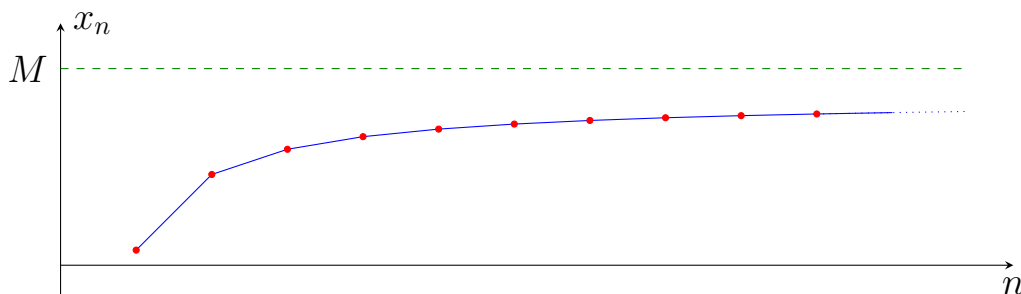
$$5^\circ. \{x_n\} \rightarrow a, \quad \forall n \quad x_n < M \Rightarrow a \leq M.$$

$$6^\circ. \{x_n\} \rightarrow a, \{z_n\} \rightarrow a, \quad \forall n \quad x_n \leq y_n \leq z_n \Rightarrow \{y_n\} \rightarrow a.$$

Последнее свойство говорит о сходимости последовательности, которая “зажата” между двумя другими сходящимися последовательностями, имеющими одинаковый предел (это свойство называется теоремой о двух милиционерах).

Теорема 17.1 (Теорема Вейерштрасса). *Всякая ограниченная монотонная последовательность сходится.*

Мы не будем приводить строгого доказательства этой теоремы. Рассмотрим лишь её геометрическую интерпретацию для случая возрастающей последовательности. Ограниченность означает, что вся ломаная расположена ниже горизонтальной прямой $x = M$. Для возрастающей последовательности каждая следующая вершина ломаной будет расположена выше предыдущей, т.е. ближе к горизонтальной прямой.



Заметим, что теорема Вейерштрасса, хотя и гарантирует, что последовательность сходится, но не позволяет определить само число a (можно лишь, по свойству 5° , утверждать, что $a \leq M$).

Последовательность $(1 + 1/n)^n$. Пусть $\{x_n\} = \{(1 + \frac{1}{n})^n\}$. Запишем несколько первых членов последовательности:

$$x_1 = 2, \quad x_2 = \frac{3^2}{2^2} = 2.25, \quad x_3 = \frac{4^3}{3^3} \approx 2.37, \quad x_4 = \frac{5^4}{4^4} \approx 2.44, \quad \dots$$

Покажем вначале, что данная последовательность является возрастающей. За основу возьмём бином Ньютона:

$$(a + b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \dots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + b^n,$$

где $C_n^k = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}$.

Взяв $a = 1$ и $b = 1/n$, получим

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{n}{1!} \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} \cdot \frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \cdot \frac{1}{n^3} + \dots + \frac{1}{n^n}.$$

Следовательно,

$$x_n = 2 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \dots + \frac{1}{n^n}.$$

При увеличении n число слагаемых в данном разложении становится больше. Кроме того, увеличивается значение каждого слагаемого:

$$1 - \frac{1}{n} < 1 - \frac{1}{n+1}, \quad 1 - \frac{2}{n} < 1 - \frac{2}{n+1}, \quad \dots$$

Поэтому $x_{n+1} > x_n$, и данная последовательность является возрастающей.

Далее докажем ограниченность данной последовательности:

$$\begin{aligned} x_n &= 2 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \dots + \frac{1}{n^n} < \\ &< 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} < 2 + 1 = 3. \end{aligned}$$

Значит, $\{x_n\}$ является возрастающей и ограниченной, следовательно, по теореме Вейерштрасса, она является сходящейся. Предел этой последовательности называется числом e :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \approx 2.7182818284590 \dots \quad (17.1)$$

Данное число является иррациональным.

Нахождение пределов последовательностей. Рассмотрим несколько примеров.

Пример 17.2. Найти предел последовательности $\{x_n\} = \left\{\frac{2n^2+n+1}{3n^2-1}\right\}$.

Преобразуем дробь x_n , разделив числитель и знаменатель на n^2 :

$$x_n = \frac{2n^2 + n + 1}{3n^2 - 1} = \frac{2 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}{3 - \frac{1}{n^2}} = \frac{y_n}{z_n}.$$

Последовательность $\{y_n\}$ сходится к числу 2, т.к. $\frac{1}{n}$ и $\frac{1}{n^2}$ являются бесконечно малыми последовательностями (сходятся к нулю). Аналогично, $\{z_n\} \rightarrow 3$. По свойству 3° сходящихся последовательностей, исходная последовательность сходится к $\frac{2}{3}$. #

Пример 17.3. Найти предел последовательности $\{x_n\} = \left\{\frac{2n^2-2n-5}{7n+10}\right\}$.

Разделим числитель и знаменатель дроби x_n на n :

$$x_n = \frac{2n^2 - 2n - 5}{7n + 10} = \frac{2n - 2 - \frac{5}{n}}{7 + \frac{10}{n}} = \frac{y_n}{z_n}.$$

Числитель $\{y_n\}$ является бесконечно большой последовательностью, а знаменатель $\{z_n\}$ сходится к числу 7. Т.к. $\left\{\frac{1}{z_n}\right\} \rightarrow \frac{1}{7} \neq 0$, по свойству 4° сходящихся последовательностей, исходная последовательность также является бесконечно большой. #

Пример 17.4. Найти предел последовательности $\{x_n\} = \{\sqrt{n^2 + n} - n\}$.

Выполним преобразования:

$$\begin{aligned} \sqrt{n^2 + n} - n &= \frac{(\sqrt{n^2 + n} - n)(\sqrt{n^2 + n} + n)}{\sqrt{n^2 + n} + n} = \frac{n^2 + n - n^2}{n(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1)} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1}. \end{aligned}$$

Последовательность, стоящая в знаменателе, сходится к числу 2. Следовательно, $\{x_n\} \rightarrow \frac{1}{2}$. #

§18. Функции одной переменной

Определения. Величина, принимающая одно и то же значение, называется *постоянной*. Если же величина может принимать различные числовые значения, то она называется *переменной*.

Переменная y называется *функцией* от переменной x , если они связаны между собой так, что каждому значению x из области определения соответствует *единственное* значение y . Для записи такой зависимости в дальнейшем будем использовать обозначение $y = f(x)$. Независимая переменная x называется *аргументом* функции, а зависимая переменная y – её *значением*.

Областью определения функции (областью допустимых значений) называется множество всех значений x , для которых функция определена.

График функции – множество точек (x, y) плоскости Oxy , координаты которых связаны данной функциональной зависимостью. Т.к. каждому значению x соответствует единственное значение y , любая вертикальная прямая пересекает график любой функции не более, чем в одной точке.

Функция называется *заданной явно*, если она имеет вид $y = f(x)$, где $f(x)$ – некоторое алгебраическое выражение. Примеры явно заданных функций: $y = x^3 + 7x - 3$, $y = \sqrt{x \sin x + 2}$.

Функция называется *неявной*, если она задана уравнением $F(x, y) = 0$, не разрешённым относительно зависимой переменной y . Примеры неявно заданных функций: $(x + y)^3 - 7y + 3x = 0$, $y = \sqrt{x \sin y + 2}$.

Чтобы перейти от неявно заданной функции к явной, необходимо разрешить уравнение относительно y . Это можно сделать не всегда.

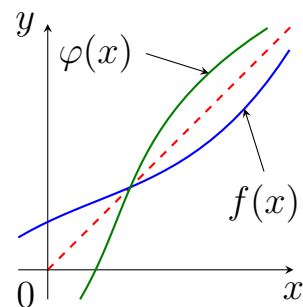
Задание. Покажите, что функции $\frac{y+2}{y-3} - x = 0$ и $y = \frac{3x+2}{x-1}$ представляют разные записи одной и той же функции.

Уравнение $x^2 + y^2 - 4 = 0$ (являющееся уравнением окружности) нельзя назвать неявным уравнением функции. Действительно, любому значению $x \in (-2, 2)$ соответствует два значения y : положительное $y = \sqrt{4 - x^2}$ и отрицательное $y = -\sqrt{4 - x^2}$. Для корректного задания данной функции необходимо уточнить диапазон значений функции. Например, запись $x^2 +$

$+y^2 - 4 = 0$ ($y \geq 0$) является неявным заданием функции, имеющей явное представление $y = \sqrt{4 - x^2}$.

Задание. Найдите область определения данной функции и постройте её график.

Функция $y = \varphi(x)$ называется *обратной*¹ к $y = f(x)$, если $\varphi(f(x)) = x$ и $f(\varphi(x)) = x$. Неявная форма записи функции, обратной к $y = f(x)$, имеет вид $x = f(y)$. График обратной функции $y = \varphi(x)$ получается зеркальным отражением графика исходной функции $y = f(x)$ относительно прямой $y = x$.



Функцию также можно задать *параметрически*: $x = g(t)$, $y = f(t)$. В этой записи присутствует вспомогательная переменная t , которую далее будем называть параметром.

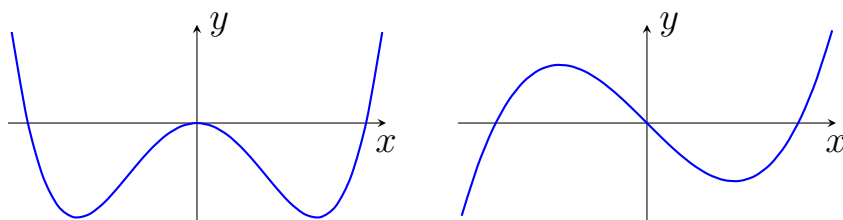
Пример 18.1. Найти явный вид параметрически заданной функции $x = 2 \cos t$, $y = 2 \sin t$ ($t \in [0, \pi]$).

Чтобы избавиться от t , возведем оба выражения в квадрат и сложим:

$$x^2 + y^2 = 4 \cos^2 t + 4 \sin^2 t = 4 \Rightarrow y^2 = 4 - x^2 \Rightarrow y = \pm \sqrt{4 - x^2}.$$

Т.к. при $t \in [0, \pi]$ значения $y = 2 \sin t \geq 0$, то $y = \sqrt{4 - x^2}$. #

Виды функций, преобразования графика функции. Функция $y = f(x)$ называется *чётной*, если $f(-x) = f(x)$. График чётной функции симметричен относительно оси Oy . Функция $y = f(x)$ называется *нечётной*, если $f(-x) = -f(x)$. График нечётной функции симметричен относительно начала координат. На рисунке слева изображен график чётной, а справа – нечётной функции.



¹Обратные функции существуют только для монотонных функций, определение таких функций будет дано позднее.

Функция $y = f(x)$ называется периодической с периодом $T > 0$, если $f(x + nT) = f(x)$, где n – любое целое число. График периодической функции повторяется при сдвиге вправо/влево на значения, кратные периоду.

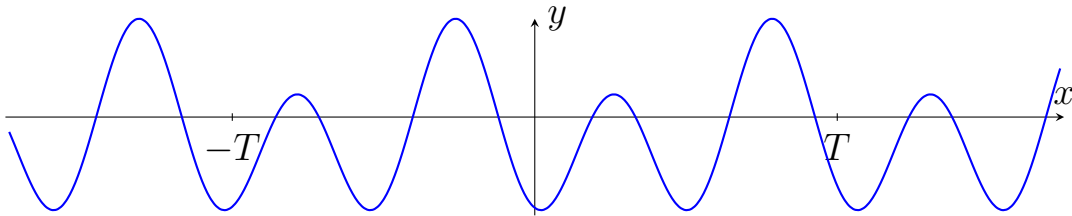


График функции $y = f(x) + b$ расположен выше на b единиц при $b > 0$ (ниже при $b < 0$) относительно графика исходной функции $y = f(x)$.

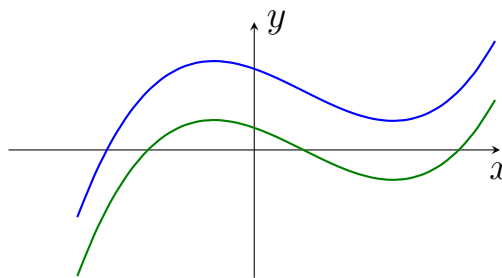


График функции $y = f(x + a)$ расположен левее на a единиц при $a > 0$ (правее при $a < 0$) относительно графика исходной функции $y = f(x)$.

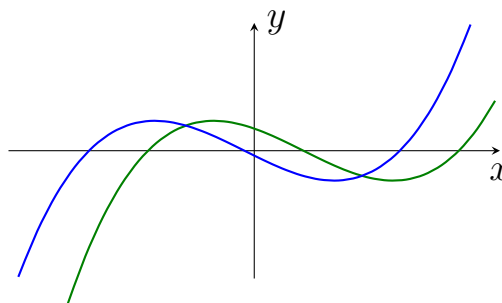


График функции $y = Af(x)$ растянут в A раз в направлении оси y при $A > 1$ (сжат при $0 < A < 1$) относительно графика исходной функции $y = f(x)$.

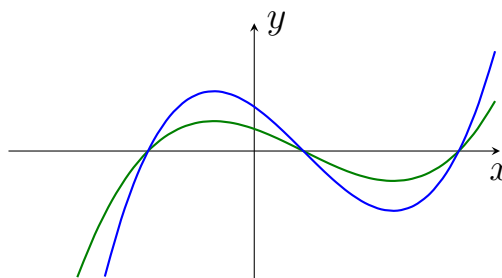


График функции $y = f(kx)$ сжат в k раз в направлении оси x при $k > 1$ (растянут при $0 < k < 1$) относительно графика исходной функции $y = f(x)$.

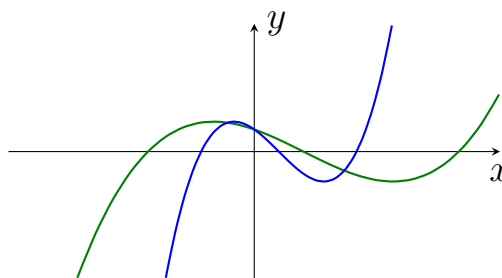


График функции $y = -f(x)$ является симметричным отражением относительно оси x графика исходной функции $y = f(x)$.

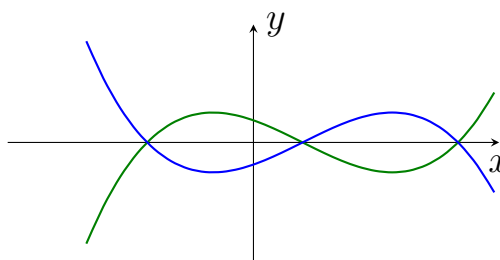
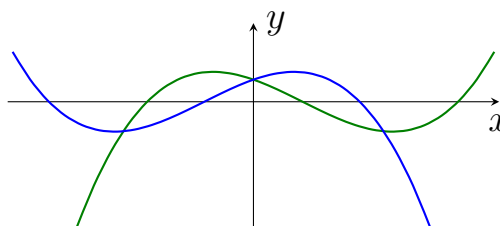
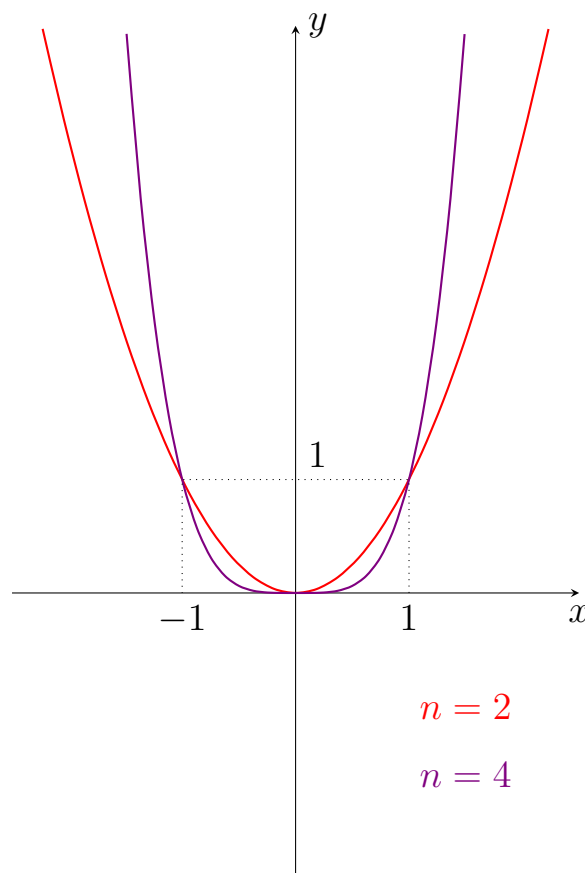
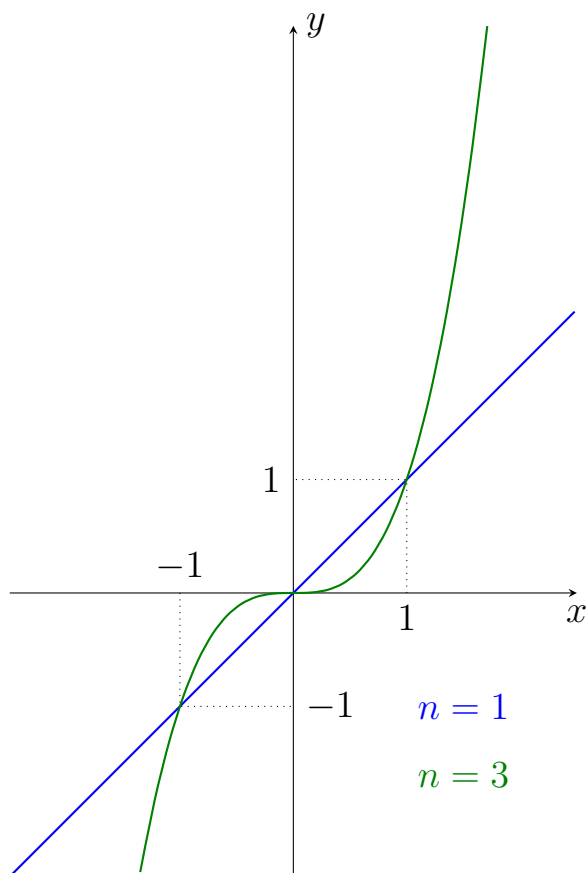
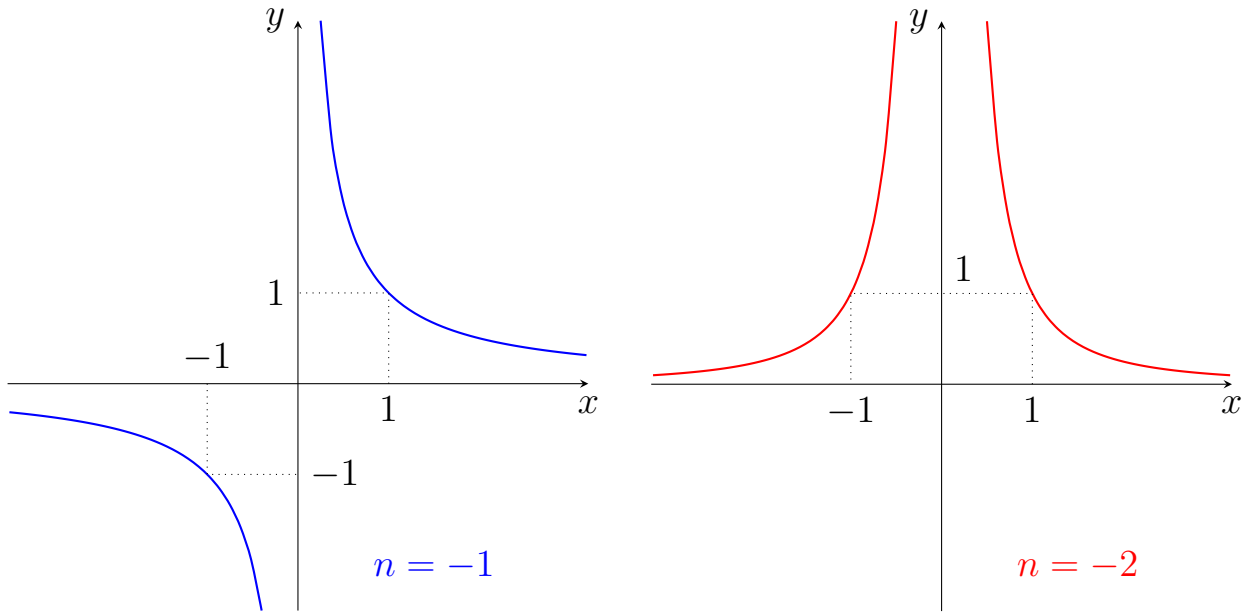


График функции $y = f(-x)$ является симметричным отражением относительно оси y графика исходной функции $y = f(x)$.



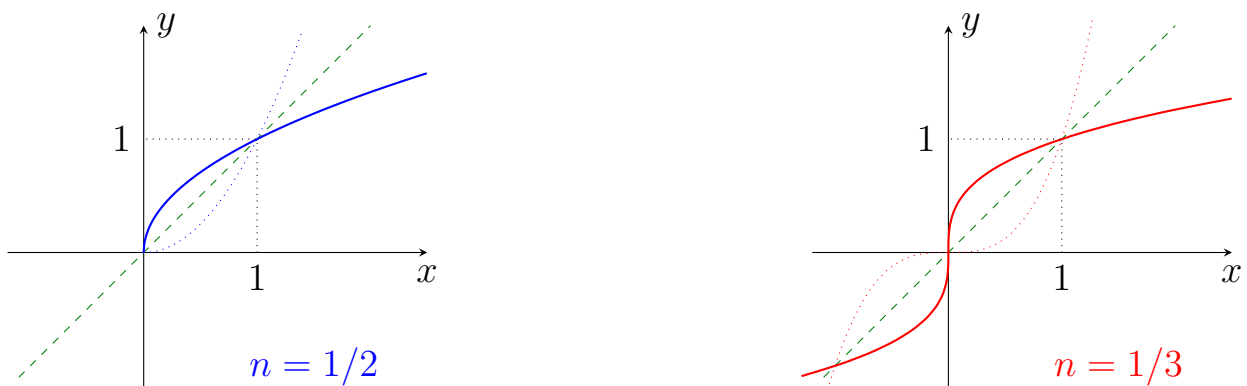
Степенная функция. *Степенной функцией* называется функция вида $y = x^n$. Графики таких функций при $n = 1, 2, 3, 4$, а также $n = -1, -2$ изображены ниже на рисунках. Заметим, что при чётных n данная функция является чётной, а при нечётных n – нечётной.





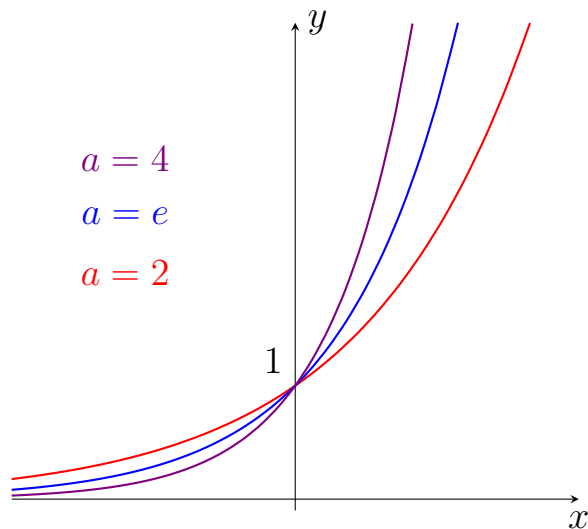
Число n не обязательно должно быть целым. В этих случаях область определения данной функции есть интервал $x \in [0, \infty)$. Исключение составляют радикалы – функции вида $y = \sqrt[n]{x}$. При нечётных n эти функции определены для всех значений x .

Функции $y = \sqrt{x}$ ($n = \frac{1}{2}$) и $y = \sqrt[3]{x}$ ($n = \frac{1}{3}$) являются обратными¹ к уже рассмотренным функциям $y = x^2$ и $y = x^3$. Поэтому, для построения графиков этих радикалов, можно воспользоваться свойством графика обратной функции и отразить графики $y = x^2$ и $y = x^3$ относительно прямой $y = x$. Графики радикалов изображены ниже, пунктиром показаны графики исходных функций $y = x^2$ и $y = x^3$.



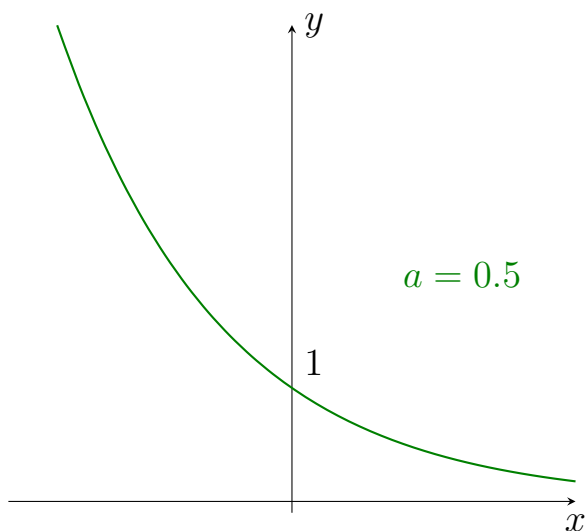
¹Так как $y = x^2$ не является монотонной на всей области определения, для нахождения обратной функции берется интервал $x \in [0, \infty)$, на котором функция является возрастающей.

Показательная функция. *Показательной* называется функция вида $y = a^x$, где $a > 0$. Графики показательных функций при значениях основания $a = 2, e, 4$ приведены на рисунке.

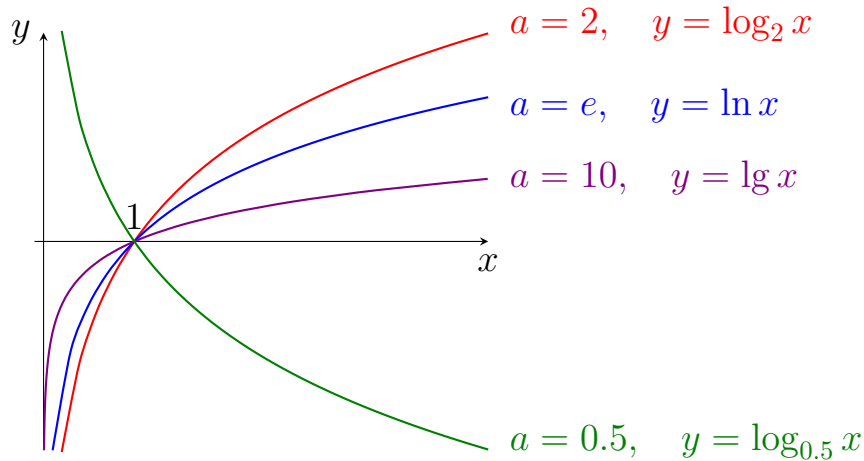


Все графики расположены выше оси Ox , они пересекают ось Oy в точке $y = 1$. Угол между графиком и осью Oy зависит от значения основания a . Как будет показано в дальнейшем, при $a = e$ данный угол равен 45° . Функция $y = e^x$ называется экспоненциальной функцией или просто экспонентой. Графики остальных функций получаются растяжением/сжатием экспоненты в направлении оси Ox : $a^x = e^{kx}$, где $k = \ln a$.

При $a > 1$ показательные функции являются возрастающими функциями, при $a \in (0, 1)$ — убывающими. График функции $y = 0.5^x$ можно получить симметричным отражением графика $y = 2^x$ относительно оси Oy , т.к. $0.5^x = 2^{-x}$.

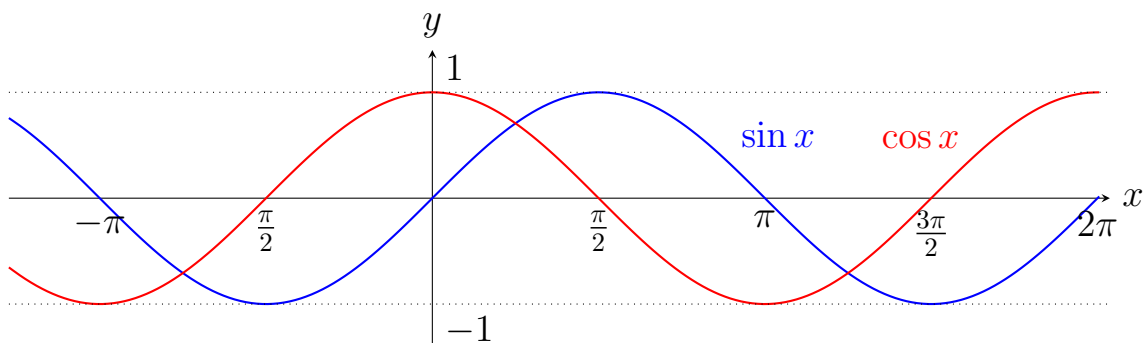


Логарифмическая функция. *Логарифмической* называется функция вида $y = \log_a x$ при $a > 0$. Эта функция является обратной к функции $y = a^x$, и поэтому график логарифмической функции легко получить, воспользовавшись свойством графика обратной функции. На рисунке приведены графики функций $y = \log_2 x$, $y = \ln x$, $y = \lg x$, $y = \log_{0.5} x$.



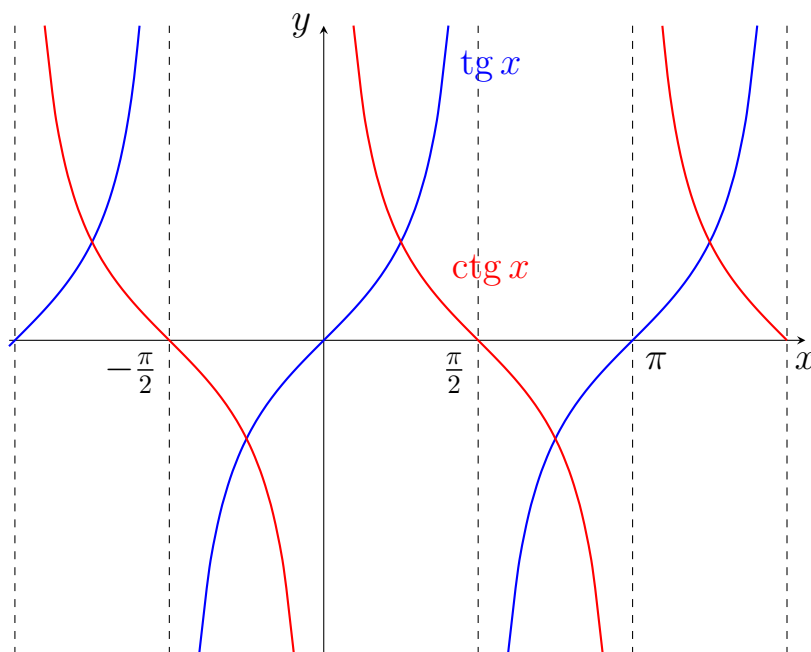
Областью определения логарифмических функций является интервал $(0, +\infty)$. В случае, когда основанием является число e , логарифм называется натуральным: $\log_e x = \ln x$, данная функция обратна экспоненте. График любой логарифмической функции можно получить путём растяжения/сжатия графика натурального логарифма в направлении оси Oy : $\log_a x = A \ln x$, где $A = \frac{1}{\ln a}$.

Тригонометрические функции. *Тригонометрическими* называются функции $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$, $y = \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$. Данные функции являются периодическими. У функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$ период равен $T = 2\pi$, их графики изображены на рисунке.



Функция $\sin x$ является нечётной, функция $\cos x$ – чётной. Отметим, что $\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$, поэтому график косинуса получается сдвигом графика синуса влево на $\frac{\pi}{2}$.

У функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$ период $T = \pi$, ниже представлены их графики.

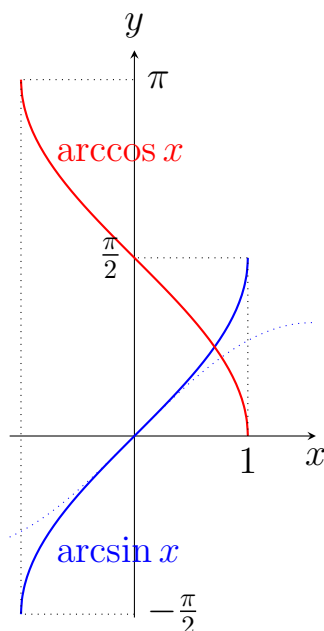


Обе функции являются нечётными, Функция $\operatorname{tg} x$ не определена в точках $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, функция $\operatorname{ctg} x$ – в точках $x = \pi n$.

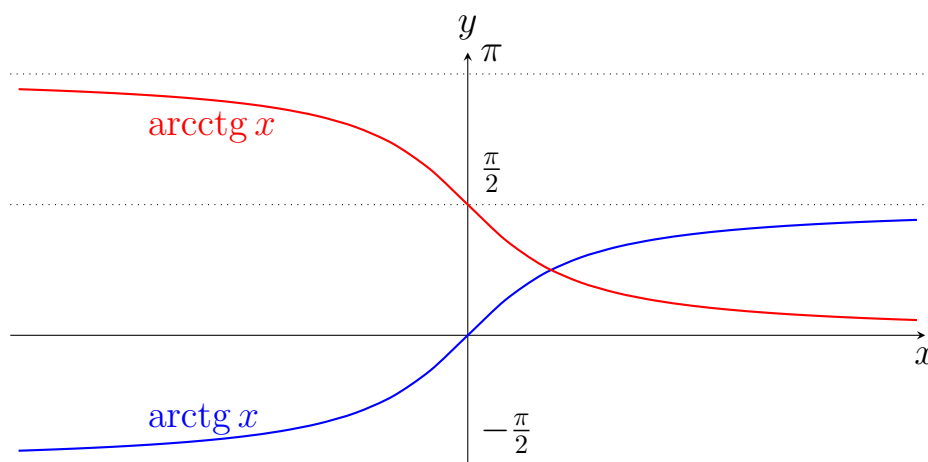
Задание. Пользуясь равенством $\operatorname{ctg} x = -\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$, определите, с помощью каких преобразований можно получить график $y = \operatorname{ctg} x$ по графику функции $y = \operatorname{tg} x$.

Обратные тригонометрические функции. К ним относят функции $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arccotg} x$. По определению, эти функции являются обратными к соответствующим тригонометрическим функциям, этот факт можно использовать при построении их графиков.

Функции $\arcsin x$ и $\arccos x$ определены для $x \in [-1, 1]$. Арксинус является нечётной функцией. Графики функций приведены ниже.



Функции $\operatorname{arctg} x$ и $\operatorname{arcctg} x$ определены на всей числовой прямой, арктангенс является нечётной функцией. Графики этих функций приведены на рисунке.

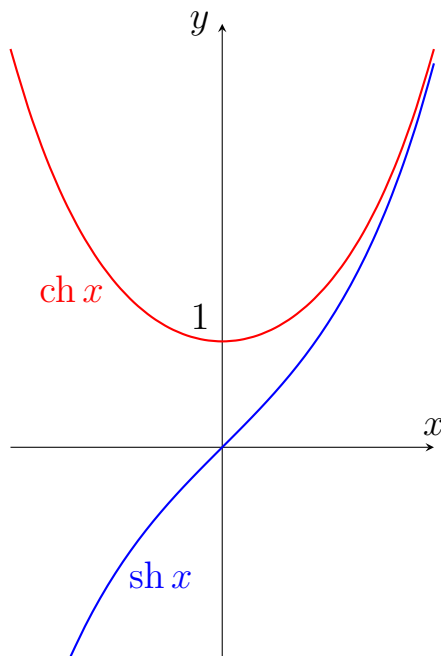


Задание. Пользуясь равенствами $\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$ и $\operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x$, определите преобразования графиков функций $\arcsin x$ и $\operatorname{arctg} x$, переводящие их в графики $\arccos x$ и $\operatorname{arcctg} x$.

Гиперболические функции. К этим функциям относят *гиперболический синус* $y = \operatorname{sh} x$ и *гиперболический косинус* $y = \operatorname{ch} x$, которые определяются через экспоненту:

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Первая функция (как и обычный синус) является нечётной функцией, а вторая (как и обычный косинус) – чётной. Графики этих функций приведены ниже.

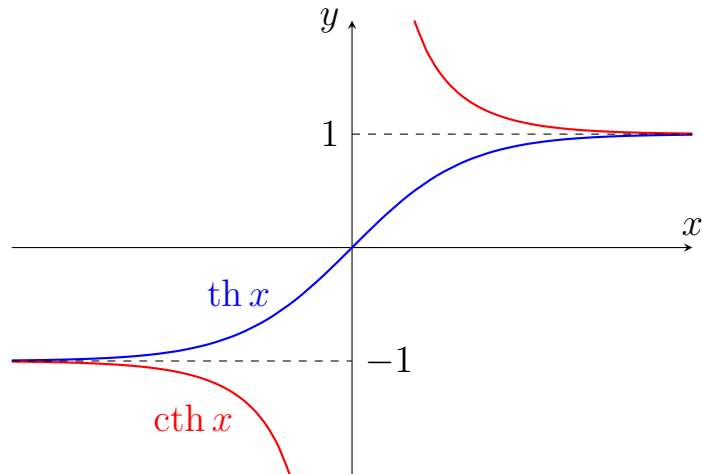


В отличие от тригонометрических функций, гиперболические не являются периодическими. В то же время, гиперболические и тригонометрические функции имеют много сходных свойств. Некоторые формулы тригонометрии и их гиперболические аналоги приведены в таблице:

Тригонометрическая формула	Гиперболический аналог
$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$	$\text{ch}^2 x - \text{sh}^2 x = 1$
$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$	$\text{sh } 2x = 2 \text{sh } x \text{ch } x$
$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$	$\text{ch } 2x = \text{ch}^2 x + \text{sh}^2 x$
$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$	$\text{sh}^2 x = \frac{\text{ch } 2x - 1}{2}$
$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$	$\text{ch}^2 x = \frac{\text{ch } 2x + 1}{2}$

Задание. Докажите формулы, стоящие в правой колонке, пользуясь определением гиперболических функций через экспоненту.

К гиперболическим функциям относят также *гиперболический тангенс* $\text{th } x = \frac{\text{sh } x}{\text{ch } x}$ и *гиперболический котангенс* $\text{cth } x = \frac{\text{ch } x}{\text{sh } x}$. Обе функции являются нечётными, гиперболический котангенс не определён в точке $x = 0$. Ниже построены графики этих функций.

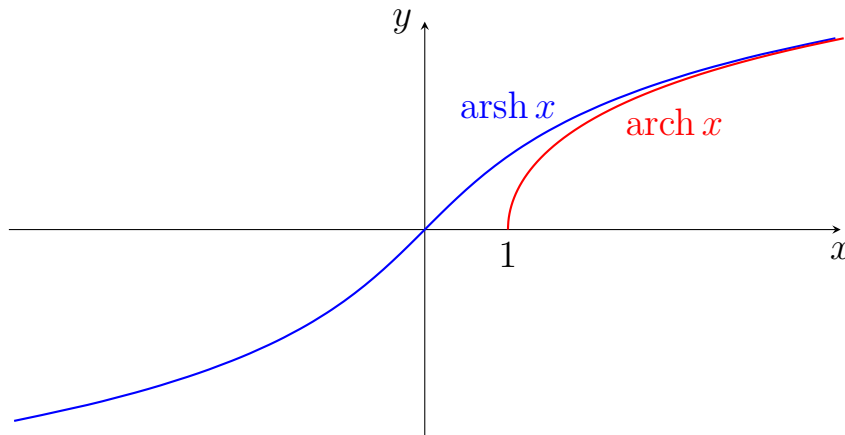


Приведём гиперболические аналоги тригонометрических формул:

Тригонометрическая формула	Гиперболический аналог
$1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$1 - \operatorname{th}^2 x = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$
$\operatorname{ctg}^2 x + 1 = \frac{1}{\sin^2 x}$	$\operatorname{cth}^2 x - 1 = \frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$
$\operatorname{tg} 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$	$\operatorname{th} 2x = \frac{2 \operatorname{th} x}{1 + \operatorname{th}^2 x}$

Задание. Докажите формулы, стоящие в правой колонке.

Обратные гиперболические функции. *Ареасинусом* (обратным гиперболическим синусом) $y = \operatorname{arsh} x$ и *ареакосинусом* (обратным гиперболическим косинусом) $y = \operatorname{arch} x$ называются функции, обратные к гиперболическому синусу и косинусу. Заметим, что $\operatorname{arch} x$ определён для $x \geq 1$. Графики этих функций приведены на рисунке.



Эти функции выражаются через натуральный логарифм:

$$\operatorname{arsh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}), \quad \operatorname{arch} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) \quad (x \geq 1)$$

Выведем первое соотношение. Т.к. $y = \operatorname{arsh} x$, то $x = \operatorname{sh} y = \frac{e^y - e^{-y}}{2}$. Поэтому

$$e^y - e^{-y} = 2x \quad \Rightarrow \quad e^{2y} - 2xe^y - 1 = 0.$$

Обозначим $t = e^y$. Тогда последнее уравнение является квадратным относительно t :

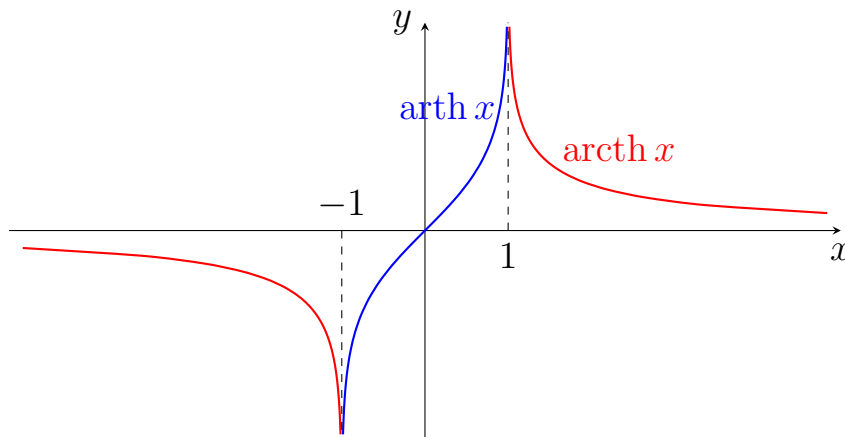
$$t^2 - 2xt - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad t = x \pm \sqrt{x^2 + 1}.$$

Величина t , являясь значением экспоненты, не может быть отрицательной. Поэтому возможно лишь одно значение:

$$e^y = x + \sqrt{x^2 + 1} \quad \Rightarrow \quad y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}).$$

Задание. Докажите аналогичную формулу для $\operatorname{arch} x$. При выводе используйте условие $y \geq 0$.

Аналогично аресинусу и ареакосинусу вводятся функции *ареатангенс* $y = \operatorname{arth} x$ и *ареакотангенс* $y = \operatorname{arch} x$. На рисунке приведены их графики.



Данные функции также выражаются через логарифм:

$$\operatorname{arth} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} \quad (|x| < 1), \quad \operatorname{arch} x = \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1} \quad (|x| > 1).$$

Докажем первую формулу. Из $y = \operatorname{arth} x$ следует $x = \operatorname{th} y = \frac{\operatorname{sh} y}{\operatorname{ch} y} = \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}}$.

$$x = \frac{e^{2y} - 1}{e^{2y} + 1} \quad \Rightarrow \quad e^{2y} - 1 = xe^{2y} + x \quad \Rightarrow \quad e^{2y} = \frac{1+x}{1-x} \quad \Rightarrow$$

$$2y = \ln \frac{1+x}{1-x} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}.$$

Задание. Докажите аналогичную формулу для $\operatorname{arch} x$.

Классификация функций. Элементарные функции. *Многочленом* $y = P(x)$ называется функция вида

$$y = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + a_1 x + a_0.$$

Здесь m – степень многочлена, максимальная степень переменной x . Заметим, что $a_m \neq 0$, иначе первого слагаемого в сумме не будет и степень многочлена будет менее m .

Дробно-рациональной функцией $y = R(x)$ называется функция, представляющая собой дробь, в которой числитель и знаменатель можно представить многочленами:

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, \quad \begin{aligned} P(x) &= a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + a_1 x + a_0, \\ Q(x) &= b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0. \end{aligned}$$

Пример дробно-рациональной функции: $y = \frac{x^2+7x}{x^4+1}$.

Иррациональной называется функция, в которой могут присутствовать радикалы – корни различных степеней как от x , так и от многочленов $P(x)$. Пример иррациональной функции: $y = \frac{x^2+7\sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x^2+1}}$.

Алгебраической называется функция, которая может быть задана с помощью уравнения $P(x, y) = 0$, где $P(x, y)$ – многочлен от переменных x и y . Многочлены, дробно-рациональные и иррациональные функции являются частными случаями алгебраических функций. Например, иррациональная функция $y = x + \sqrt{1-x^2}$ является алгебраической, т.к. она может быть представлена в виде $(y-x)^2 + x^2 - 1 = 0$.

Трансцендентной называется функция, не являющаяся алгебраической. Примерами таких функций являются показательная, логарифмическая, тригонометрические функции и обратные к ним. Пример трансцендентной функции: $y = \frac{e^x+7\ln x}{\sin x^2+1}$.

Основными элементарными функциями называются следующие функции: степенная x^n , показательная a^x , логарифмическая $\log_a x$, тригонометрические и обратные к ним.

Элементарной называется функция, которую можно получить из основных элементарных функций с помощью конечного числа следующих алгебраических операций:

- сложение $f(x) + g(x)$,
- вычитание $f(x) - g(x)$,
- умножение $f(x)g(x)$,
- деление $\frac{f(x)}{g(x)}$,
- возведение в степень $f(x)^{g(x)}$,
- композиция $f(g(x))$.

Заметим, что гиперболические функции и обратные к ним относятся к элементарным, т.к. они могут быть получены через экспоненциальную функцию и натуральный логарифм. Все элементарные функции можно задать в явном виде с помощью формул, содержащих конечный набор символов. Функции, полученные композицией двух и большего числа других функций, в дальнейшем будем называть сложными.

§19. Предел функции

Определение предела функции. Пусть a – произвольная точка на вещественной прямой и $\delta > 0$.

Множество $U_\delta(a)$ всех точек, удалённых от a менее, чем на δ , называется δ -окрестностью точки a , т.е. $U_\delta(a) = (a - \delta, a + \delta)$.

Если из $U_\delta(a)$ выбросить саму точку a , то полученное множество $\dot{U}_\delta(a)$ называют *проколотой δ -окрестностью*, т.е. $\dot{U}_\delta(a) = (a - \delta, a) \cup (a, a + \delta)$.

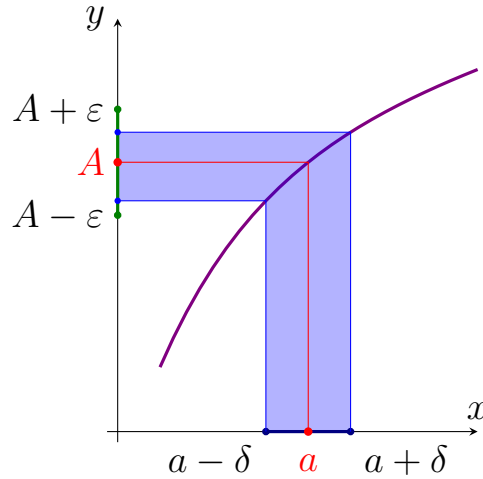
Число A называется *пределом*¹ функции $f(x)$ в точке $x = a$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такая проколотая δ -окрестность $\dot{U}_\delta(a)$, что для любого $x \in \dot{U}_\delta(a)$ выполнено условие $|f(x) - A| < \varepsilon$. В этом случае пишут

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \quad \text{или} \quad f(x) \rightarrow A \text{ при } x \rightarrow a.$$

С использованием кванторов это записывается так:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta \quad \forall x \in \dot{U}_\delta(a) \quad : \quad |f(x) - A| < \varepsilon.$$

¹Точнее говоря, пределом по Коши, поскольку есть и другие определения этого понятия, например, по Гейне.



Если такого числа A не существует, то говорят, что в точке $x = a$ функция $f(x)$ не имеет предела.

Пример 19.1. Пользуясь определением, доказать, что $\lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4$.

Положим $x = 2 + \alpha$. Тогда $f(x) = x^2 = (2 + \alpha)^2 = 4 + 4\alpha + \alpha^2$. Возьмём произвольное число $\varepsilon > 0$ и покажем, что при подходящем $\delta > 0$ для всех x из δ -окрестности точки 2 выполнено неравенство $|f(x) - 4| < \varepsilon$, тем самым будет доказано, что $\lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4$.

Выберем в качестве δ число $\min(1, \varepsilon/5)$. Т.к. x лежит в δ -окрестности точки 2, то $|\alpha| < \delta$. Тогда

$$|f(x) - 4| = |4\alpha + \alpha^2| = |4 + \alpha| \cdot |\alpha| < 5 \cdot \frac{\varepsilon}{5} = \varepsilon.$$

Здесь мы использовали неравенства $|\alpha| < 1$ и $|\alpha| < \varepsilon/5$. #

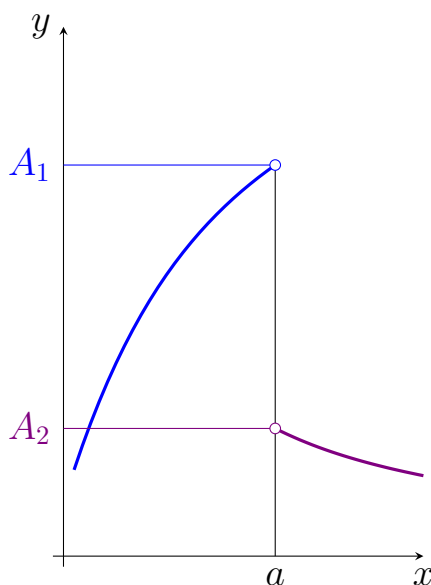
Заметим, что предел функции не зависит от того, какое значение принимает функция $f(x)$ в точке $x = a$, т.е. от числа $f(a)$. Это значение даже не обязано существовать. Например, значение функции $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ не существует в точке $x = 1$, но её предел в этой точке существует и равен двум.

Число A_1 называется *левосторонним пределом* функции $f(x)$ в точке $x = a$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует интервал $(a - \delta, a)$ (левая δ -окрестность) такой, что для любого $x \in (a - \delta, a)$ выполнено условие $|f(x) - A_1| < \varepsilon$. В этом случае пишут

$$\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = A_1.$$

Аналогично вводится понятие *правостороннего предела*, при этом рассматривается интервал $(a, a + \delta)$ (правая δ -окрестность). Правосторонний предел A_2 функции $f(x)$ в точке a обозначается

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = A_2.$$



Заметим, что существование обычного предела функции в точке равносильно тому, что в этой точке существуют и лево-, и правосторонний пределы, причём они равны друг другу.

Задание. Рассмотрите функцию

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

Докажите, что в точке $x = 0$ её левосторонний предел равен -1 , правосторонний равен 1 , а обычный предел не существует.

Число A называется *пределом* функции $f(x)$ в бесконечно удалённой точке, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует число M такое, что для любых x , по модулю превосходящих M , выполнено условие $|f(x) - A| < \varepsilon$. В этом случае пишут

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \quad \text{или} \quad f(x) \rightarrow A \text{ при } x \rightarrow \infty.$$

Запись предела функции с использованием кванторов:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists M \quad \forall x \in (-\infty, -M) \cup (M, \infty) \quad : \quad |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Естественным образом определяются и односторонние пределы на бесконечности, они обозначаются как $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ и $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

Задание. Запишите определение односторонних пределов с использованием кванторов.

Функция $f(x)$ называется *бесконечно большой* в точке a , если для любого числа $M > 0$ существует некоторая проколота δ -окрестность $\dot{U}_\delta(a)$ такая, что для любого $x \in \dot{U}_\delta(a)$ выполнено условие $|f(x)| > M$. В этом случае пишут

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty \quad \text{или} \quad f(x) \rightarrow \infty \text{ при } x \rightarrow a.$$

Запись с использованием кванторов:

$$\forall M > 0 \quad \exists \delta \quad \forall x \in \dot{U}_\delta(a) \quad : \quad |f(x)| > M.$$

Задание. Докажите справедливость следующих равенств:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0.$$

Функция $f(x)$ называется *бесконечно малой* в точке a , если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует некоторая проколота δ -окрестность $\dot{U}_\delta(a)$ такая, что для любого $x \in \dot{U}_\delta(a)$ выполнено условие $|f(x)| < \varepsilon$. В этом случае пишут

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 \quad \text{или} \quad f(x) \rightarrow 0 \text{ при } x \rightarrow a.$$

Запись с использованием кванторов:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta \quad \forall x \in \dot{U}_\delta(a) \quad : \quad |f(x)| < \varepsilon.$$

Задание. В каких точках функция $f(x) = \operatorname{tg} x$ является бесконечно большой и в каких точках она является бесконечно малой?

Свойства пределов функций. Пусть у функций $f(x)$ и $g(x)$ существуют пределы в точке $x = a$:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A, \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = B.$$

Отметим некоторые свойства предела функции:

$$1^\circ. \lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = A \pm B,$$

$$2^\circ. \lim_{x \rightarrow a} (\lambda f(x)) = \lambda A,$$

$$3^\circ. \lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = AB,$$

$$4^\circ. \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B} \quad (B \neq 0).$$

$$5^\circ. \text{ (теорема о двух милиционерах) } f(x) \leq g(x) \leq h(x),$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = A \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} g(x) = A.$$

Неопределённости. Заметим, что если функция $f(x)$ является бесконечно малой, то функция $\frac{1}{f(x)}$ будет бесконечно большой, и наоборот:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = \infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = 0.$$

Данные соотношения можно формально записать как

$$\left\{ \frac{1}{0} \right\} = \infty, \quad \left\{ \frac{1}{\infty} \right\} = 0.$$

Фигурные скобки здесь обозначают, что данные равенства достигаются только в пределе (делить на ноль нельзя).

Конструкции $\left\{ \frac{0}{0} \right\}$, $\left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\}$, $\{0 \cdot \infty\}$, $\{\infty - \infty\}$, $\{1^\infty\}$, $\{0^0\}$, $\{\infty^0\}$ называются *неопределённостями*. Для данных конструкций невозможно сразу определить, существуют данные пределы или нет, а также определить их значения в случае их существования. При вычислении разных пределов с такими неопределённостями могут получаться различные значения. Методы и приёмы, позволяющие вычислить данные пределы, называются методами раскрытия неопределённостей. Отметим некоторые из них:

- Для раскрытия неопределённости $\left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\}$ дробно-рациональной функции используется приём деления на наивысшую степень числителя и знаменателя дроби.

- Для раскрытия неопределённости $\left\{\frac{0}{0}\right\}$ используется приём разложения на множители и сокращения одинаковых множителей, стоящих в числителе и знаменателе дроби.¹
- Для раскрытия неопределённости $\{0 \cdot \infty\}$ или $\{\infty - \infty\}$ используется алгебраическое преобразование исходного выражения с целью перехода к неопределённости типа $\left\{\frac{0}{0}\right\}$ или $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$.
- Для раскрытия степенной неопределённости $\{1^\infty\}$, $\{0^0\}$ или $\{\infty^0\}$ используется переход к логарифмической форме $f(x)^{g(x)} = e^{\ln f(x) \cdot g(x)}$, после чего рассматривается предел от показателя экспоненты $\ln f(x) \cdot g(x)$. Данный предел также сводят к неопределённости типа $\left\{\frac{0}{0}\right\}$ или $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$. В некоторых случаях неопределённость $\{1^\infty\}$ можно раскрыть, сведя её ко второму замечательному пределу, который будет рассмотрен чуть позднее.

Пример 19.2. Найти предел $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1}$.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1} = \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}}{1 - \frac{1}{x^2}} = \frac{1 - 0 + 0}{1 - 0} = 1. \quad \#$$

Пример 19.3. Найти предел $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1}$.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1} = \left\{\frac{0}{0}\right\} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-2}{x+1} = -\frac{1}{2}. \quad \#$$

Пример 19.4. Найти предел $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{3}{x-1} - \frac{1}{x^2-1}\right)$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{3}{x-1} - \frac{1}{x^2-1}\right) &= \{\infty - \infty\} = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{3(x+1)}{x^2-1} - \frac{1}{x^2-1}\right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x+2}{x^2-1} = \left\{\frac{5}{0}\right\} = \infty. \quad \# \end{aligned}$$

¹Неопределённости $\left\{\frac{0}{0}\right\}$ и $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$ можно раскрыть и с помощью правила Лопиталя, которое будет рассмотрено позднее.

Непрерывность функции. Функция $f(x)$ называется *непрерывной* в точке a , если она определена в этой точке и $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$. Функция *непрерывна на отрезке/интервале*, если она непрерывна в каждой точке этого отрезка/интервала. График непрерывной функции на отрезке представляет собой сплошную линию, не имеющую разрывов для всех значений аргумента из данного отрезка.

Из очевидного равенства $a = \lim_{x \rightarrow a} x$ следует, что для непрерывной функции можно менять местами знаки функции и предела:

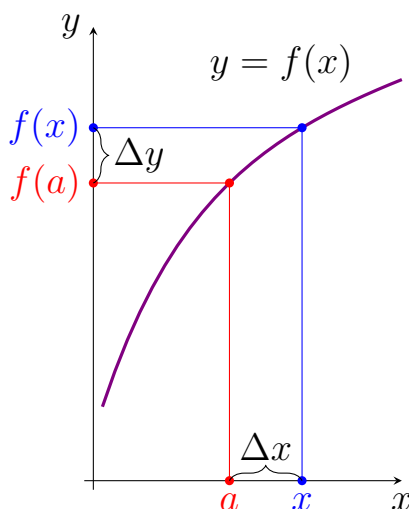
$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)] = f[\lim_{x \rightarrow a} (x)]$$

Теорема 19.1 (непрерывность элементарных функций). *Любая элементарная функция является непрерывной на своей области определения.*

Данную теорему оставим без доказательства.

Приращение функции и второе определение непрерывности.

Рассмотрим фиксированную точку a и некоторую функцию $y = f(x)$, определённую в некоторой окрестности этой точки. *Приращением аргумента Δx в точке a* называется разность $x - a$. *Приращением функции Δy в точке a* называется разность $f(x) - f(a)$. Геометрическая интерпретация данных приращений приведена на рисунке.



Используя введённые выше определения, можно дать другое определение непрерывности. Функция будет непрерывной в точке a , если предел

приращения функции равен нулю при стремлении к нулю приращения аргумента:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0. \quad (19.1)$$

Точки разрыва. Точка a называется *точкой разрыва* функции $f(x)$, если в этой точке функция не является непрерывной.

Если a – точка разрыва и в ней существуют лево- и правосторонние пределы, то такая точка называется *точкой разрыва первого рода*. Все остальные точки разрыва функции называются *точками разрыва второго рода*.

Так, у функций $y = \operatorname{sgn} x$, $y = e^{-\frac{1}{x^2}}$, $y = x \sin \frac{1}{x}$ точка $x = 0$ является точкой разрыва первого рода. У функций $y = \frac{1}{x}$, $y = e^{-\frac{1}{x}}$, $y = \sin \frac{1}{x}$ точка $x = 0$ будет точкой разрыва второго рода.

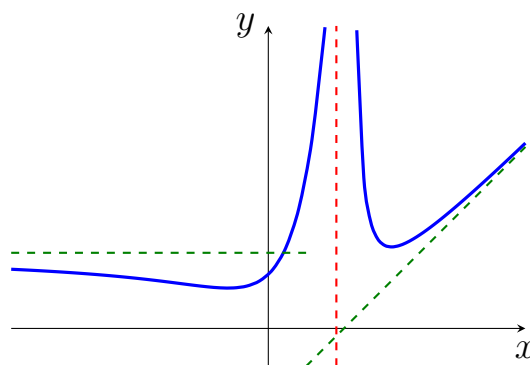
Задание. Обоснуйте данные выше утверждения, рассмотрев при необходимости односторонние пределы функций в точке $x = 0$.

Асимптоты. *Асимптота* к графику функции – прямая, обладающая тем свойством, что расстояние от точки кривой до этой прямой стремится к нулю при удалении точки в бесконечность.

Функция $f(x)$ имеет *вертикальную* асимптоту с уравнением $x = a$, если выполняется хотя бы одно из условий

$$\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \infty.$$

На рисунке вертикальная асимптота изображена в виде красной штриховой прямой.



Функция $f(x)$ имеет *наклонную* асимптоту с уравнением $y = kx + b$, если при $x \rightarrow +\infty$ или при $x \rightarrow -\infty$ существуют оба предела:

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - kx).$$

На рисунке выше представлена ситуация, когда функция имеет две разные наклонные асимптоты. К одной асимптоте функция стремится при $x \rightarrow +\infty$, к другой – при $x \rightarrow -\infty$. Данные прямые изображены зелёными штриховыми линиями. В случае, когда $k = 0$, наклонная асимптота называется *горизонтальной*.

Задание. Исследуйте на наличие асимптот функции $y = \frac{1}{x}$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{arctg} x$.

Пример 19.5. Найти асимптоты у функции $y = \frac{x^3}{x^2 - 4x + 3}$.

Определим вертикальные асимптоты. Значение функции может неограниченно возрасти при конечном значении аргумента в точках, в которых знаменатель обращается в нуль.

$$x^2 - 4x + 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 1, \quad x = 3.$$

Числитель при этих значениях принимает ненулевые значения, поэтому $f(x) \rightarrow \infty$ и прямые $x = 1$ и $x = 3$ будут вертикальными асимптотами.

Для нахождения наклонной асимптоты найдём пределы

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2 - 4x + 3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2}} = 1,$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{x^2 - 4x + 3} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 - 3x}{x^2 - 4x + 3} = 4.$$

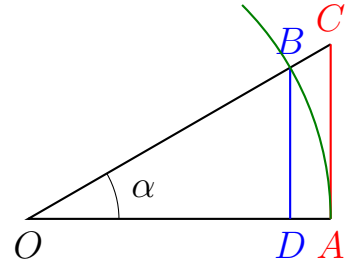
Оба предела существуют, поэтому $y = x + 4$ – наклонная асимптота. #

Первый замечательный предел. *Первым замечательным пределом* называется соотношение

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Докажем его.

Проведём окружность с центром в точке O и единичным радиусом и рассмотрим угол AOC величины α . Длины отрезков $OA = 1$, $OB = 1$. Из рассмотрения прямоугольного треугольника OBD с известными острым углом и гипотенузой найдём катеты $OD = \cos \alpha$, $BD = \sin \alpha$. Из прямоугольного треугольника OCA с известными острым углом и прилежащим катетом найдём противолежащий катет $CA = \operatorname{tg} \alpha$.



Рассмотрим площади двух треугольников OBD и OCA и сектора OBA :

$$\begin{aligned} S_{\triangle OBD} &< S_{OBA} < S_{\triangle OCA} \\ \frac{1}{2} \cdot OD \cdot BD &< \frac{\alpha}{2\pi} \cdot \pi < \frac{1}{2} \cdot OA \cdot CA \\ \cos \alpha \cdot \sin \alpha &< \alpha < 1 \cdot \operatorname{tg} \alpha \\ \cos \alpha &< \frac{\alpha}{\sin \alpha} < \frac{1}{\cos \alpha} \end{aligned}$$

Заменяем α на x и перевернем выражения:

$$\frac{1}{\cos x} > \frac{\sin x}{x} > \cos x.$$

Из очевидных пределов $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$ и $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} = 1$, по теореме о двух милиционерах, следует искомый предел.

Отметим некоторые следствия из первого замечательного предела:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

Задание. Докажите первые три следствия. Для второго следствия используйте замену $\arcsin x = t$.

◀ Докажем последнее следствие.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{4 \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{1}{2} \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 = \frac{1}{2}. \quad \blacktriangleright$$

Заметим, что из первого замечательного предела и его следствий вытекает, что функции $\sin x$, $\operatorname{tg} x$, $\arcsin x$, $\operatorname{arctg} x$ пересекают ось Ox в точке $x = 0$ под углом 45° .

Второй замечательный предел. Вторым замечательным пределом называется соотношение

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e. \quad (19.2)$$

Оно является обобщением формулы (17.1) для вещественных значений. Отметим несколько следствий из него:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

◀ Первое следствие легко получается из (19.2) заменой $\frac{1}{x} = t$.

Докажем второе следствие.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln(1+x) = \lim_{x \rightarrow 0} \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln e = 1.$$

Для доказательства третьего следствия сделаем замену $e^x - 1 = t$, откуда $x = \ln(t+1)$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\ln(t+1)} = \frac{1}{\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+t)}{t}} = 1. \quad \blacktriangleright$$

Заметим, что из второго следствия вытекает, что график натурального логарифма пересекает ось Ox под углом 45° . Из третьего следствия следует аналогичное свойство для графика экспоненты и оси Oy .

Пример 19.6. Найти предел $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x+3}\right)^{2x+7}$.

Преобразуем основание степени: $\frac{x+1}{x+3} = \frac{(x+3)-2}{x+3} = 1 + \frac{-2}{x+3}$. Делаем замену $\frac{x+3}{-2} = t$. Заметим, что при $x \rightarrow \infty$ выполняется $t \rightarrow \infty$. Перейдём к вычислению предела:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x+3}\right)^{2x+7} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-2}{x+3}\right)^{4\frac{x+3}{-2}+1} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{-4t+1} = \\ &= \left(\lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t\right)^{-4} \cdot \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^1 = e^{-4} \cdot 1 = e^{-4}. \end{aligned} \quad \#$$

§20. Производная функции

Определения. Производной y' функции $y = f(x)$ в точке x называется предел отношения приращения функции Δy к приращению аргумента Δx при $\Delta x \rightarrow 0$:

$$y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \quad (20.1)$$

Операция нахождения производной функции называется дифференцированием. Функция называется дифференцируемой в точке, если у неё существует производная в этой точке.¹ Функция называется дифференцируемой на отрезке/интервале, если она дифференцируема в каждой точке этого отрезка/интервала.

Пример 20.1. Пользуясь определением, найти производную постоянной функции $y = C$.

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{C - C}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{0}{\Delta x} = 0. \quad \#$$

Пример 20.2. Пользуясь определением, найти производную функции $y = x^2$.

$$\begin{aligned} y' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 - x^2}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x + \Delta x) = 2x. \quad \# \end{aligned}$$

Теорема 20.1 (Необходимое условие дифференцируемости). Если функция дифференцируема в точке, то она непрерывна в этой же точке.

¹Строго говоря, дифференцируемость означает существование дифференциала у функции. Понятие дифференциала будет дано позднее. Также будет доказано, что для функции одной переменной существование дифференциала эквивалентно существованию производной функции.

◀ Докажем, что при существовании производной выполняется второе определение непрерывности (19.1):

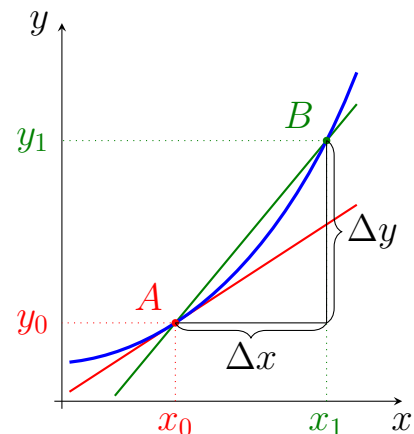
$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \Delta x \right) = y' \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x = 0. \quad \blacktriangleright$$

Заметим, что обратное утверждение неверно. Например, функция $y = \sqrt[3]{x}$ является непрерывной, но не дифференцируемой в точке $x = 0$.

Геометрический смысл производной.

Рассмотрим график функции $y = f(x)$. Отметим две точки на этом графике: $A(x_0, f(x_0))$ и $B(x_1, f(x_1))$. Проведём прямую через эти точки, её уравнение будет иметь вид

$$y - y_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0).$$



Такая прямая, проходящая через две точки, принадлежащие графику функции, называется секущей. Её угловым коэффициентом $k = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$. Устремим точку B к точке A , т.е. $\Delta x \rightarrow 0$. В пределе секущая перейдёт в прямую, которая называется касательной к графику функции в точке A . Её угловым коэффициентом

$$k = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0).$$

Геометрический смысл производной: производная функции в точке равна угловому коэффициенту $k = \operatorname{tg} \alpha$ касательной к графику функции, проведённой в этой же точке. Если предел (20.1) равен бесконечности, то касательной к графику функции является вертикальная прямая.

Уравнение касательной, проведённой в точке x_0 к графику функции $y = f(x)$, имеет вид

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$

Физический смысл производной. Пусть $x(t)$ — координата положения тела в момент времени t . Тогда производная $x'(t)$ — мгновенная скорость этого тела в тот же момент времени. Если $y(t)$ — значение некоторой

физической величины (например, температуры тела, количества вещества) в момент времени t , то $y'(t)$ называется скоростью изменения данной физической величины.

Правила дифференцирования. Пусть $u(x)$ и $v(x)$ – две дифференцируемые функции и, согласно (20.1),

$$u' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}, \quad v' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}.$$

Производные суммы $u + v$, разности $u - v$, произведения uv и частного $\frac{u}{v}$ данных функций находятся по формулам:

$$1^\circ. (u + v)' = u' + v',$$

$$2^\circ. (u - v)' = u' - v',$$

$$3^\circ. (uv)' = u'v + uv',$$

$$4^\circ. \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

◀ Докажем формулу 1° . По формуле (20.1)

$$(u + v)' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{((u + \Delta u) + (v + \Delta v)) - (u + v)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u + \Delta v}{\Delta x} = u' + v'.$$

Формула 2° доказывается аналогично. Рассмотрим формулу 3° :

$$\begin{aligned} (uv)' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(u + \Delta u)(v + \Delta v) - uv}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta uv + u\Delta v + \Delta u\Delta v}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta u}{\Delta x}v + u\frac{\Delta v}{\Delta x} + \frac{\Delta u}{\Delta x}\Delta v \right) = u'v + uv' + u' \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta v. \end{aligned}$$

Т.к. функция v дифференцируема, по теореме 20.1 она непрерывна. Следовательно, по второму определению непрерывности, $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta v = 0$.

Докажем формулу 4° .

$$\begin{aligned} \left(\frac{u}{v}\right)' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \frac{u}{v}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(u + \Delta u)v - u(v + \Delta v)}{\Delta x(v + \Delta v)v} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u \cdot v - u\Delta v}{\Delta x(v + \Delta v)v} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{\Delta u}{\Delta x}v - u\frac{\Delta v}{\Delta x}}{(v + \Delta v)v} = \frac{u'v - uv'}{v^2}. \end{aligned}$$

Задание. Пусть λ – постоянная, u – функция. Докажите формулы

$$(\lambda u)' = \lambda \cdot u', \quad \left(\frac{u}{\lambda}\right)' = \frac{u'}{\lambda}, \quad \left(\frac{\lambda}{u}\right)' = -\lambda \frac{u'}{u^2}.$$

►

Производная сложной функции. Пусть $y = f(u)$ и $u = g(x)$ – дифференцируемые функции. Композиция $y(x) = f(g(x))$ называется сложной функцией. Её производная

$$y' = f'(u) \cdot g'(x). \quad (20.2)$$

◀ Если $u = g(x)$ – дифференцируема, то Δu стремится к нулю при $\Delta x \rightarrow 0$. Поэтому

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = f'(u) \cdot g'(x). \quad \blacktriangleright$$

Производная обратной функции. Пусть $x = \varphi(y)$ – функция, обратная к $y = f(x)$. Тогда

$$f'(x) = \frac{1}{\varphi'(y)} = \frac{1}{\varphi'(f(x))}. \quad (20.3)$$

◀ Если $y = f(x)$ – дифференцируема, то Δy стремится к нулю при $\Delta x \rightarrow 0$. Поэтому

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\Delta x}{\Delta y}} = \frac{1}{\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta y}} = \frac{1}{\varphi'(y)}. \quad \blacktriangleright$$

Производные логарифмической и показательной функций. Найдём производную от натурального логарифма:

$$\begin{aligned} (\ln x)' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\ln(x + \Delta x) - \ln(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\frac{\Delta x}{x} \cdot x} = \left\{ t = \frac{\Delta x}{x} \right\} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + t)}{t \cdot x} = \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались следствием из второго замечательного предела $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + t)}{t} = 1$.

Производная от логарифма с произвольным основанием находится переходом к натуральному логарифму:

$$(\log_a x)' = \left(\frac{1}{\ln a} \cdot \ln x \right)' = \frac{1}{x \ln a}.$$

Для нахождения производной от экспоненциальной функции воспользуемся формулой (20.3) производной от обратной функции. Если $y = e^x$, то $x = \ln y$ и

$$(e^x)' = \frac{1}{(\ln y)'} = \frac{1}{\frac{1}{y}} = y = e^x.$$

Для нахождения производной от показательной функции поступим аналогично ($y = a^x \Rightarrow x = \log_a y$):

$$(a^x)' = \frac{1}{(\log_a y)'} = \frac{1}{\frac{1}{y \ln a}} = y \ln a = a^x \ln a.$$

Производная степенной функции. Рассмотрим вначале случай натурального n . Согласно биному Ньютона

$$(x + \Delta x)^n = x^n + nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}\Delta x^2 + \dots + \Delta x^n.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} (x^n)' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^n - x^n}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}\Delta x^2 + \dots + \Delta x^n}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}\Delta x + \dots + \Delta x^{n-1} \right) = nx^{n-1}. \end{aligned}$$

В случае, когда n не является натуральным числом, сделаем переход к экспоненциальной функции по формуле $x = e^{\ln x}$ и воспользуемся формулой производной (20.2) сложной функции:

$$(x^n)' = (e^{n \ln x})' = e^{n \ln x} \cdot (n \ln x)' = x^n \cdot \frac{n}{x} = nx^{n-1}.$$

Производные тригонометрических функций и обратных к ним. Для нахождения производных от синуса и косинуса воспользуемся формулами разности синусов и косинусов:

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}, \quad \cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \sin \frac{\alpha + \beta}{2}.$$

Применив (20.1) для функции $y = \sin x$, получим

$$\begin{aligned} (\sin x)' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos \frac{2x + \Delta x}{2}}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right) \right) = \cos x. \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались первым замечательным пределом для $t = \frac{\Delta x}{2}$.

Задание. Аналогичным способом докажите, что $(\cos x)' = -\sin x$.

Для нахождения производной от $\operatorname{tg} x$ используем формулу производного частного:

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Задание. Аналогичным способом докажите, что $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$.

Для нахождения производных от обратных тригонометрических функций воспользуемся формулой (20.3). Если $y = \arcsin x$, то $x = \sin y$ и

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Для $y = \operatorname{arctg} x$ ($x = \operatorname{tg} y$), аналогичным образом

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{(\operatorname{tg} y)'} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}} = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Задание. Используя равенства $\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$ и $\operatorname{arccotg} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x$, получите формулы производных для $\arccos x$ и $\operatorname{arccotg} x$.

Производные гиперболических функций и обратных к ним.

Прежде всего заметим, что по формуле производной сложной функции, $(e^{-x})' = e^{-x} \cdot (-x)' = -e^{-x}$. Поэтому

$$(\operatorname{sh} x)' = \frac{(e^x - e^{-x})'}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch} x,$$

$$(\operatorname{ch} x)' = \frac{(e^x + e^{-x})'}{2} = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \operatorname{sh} x.$$

Задание. Используя формулу производной от частного, докажите формулы $(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$ и $(\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$.

Найдём производные от обратных гиперболических функций. Если $y = \operatorname{arsh} x$, то $x = \operatorname{sh} y$. Поэтому

$$(\operatorname{arsh} x)' = \frac{1}{(\operatorname{sh} y)'} = \frac{1}{\operatorname{ch} y} = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}},$$

Аналогично, для оставшихся функций:

$$(\operatorname{arch} x)' = \frac{1}{(\operatorname{ch} y)'} = \frac{1}{\operatorname{sh} y} = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 y - 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}},$$

$$(\operatorname{arth} x)' = \frac{1}{(\operatorname{th} y)'} = \frac{1}{\frac{1}{\operatorname{ch}^2 y}} = \frac{1}{1 - \operatorname{th}^2 y} = \frac{1}{1 - x^2},$$

$$(\operatorname{arcth} x)' = \frac{1}{(\operatorname{cth} y)'} = \frac{1}{-\frac{1}{\operatorname{sh}^2 y}} = -\frac{1}{\operatorname{cth}^2 y - 1} = -\frac{1}{x^2 - 1}.$$

Таблица производных элементарных функций. Соберём все полученные выше формулы в одну таблицу:

1. $(C)' = 0$	5. $(\sin x)' = \cos x$	13. $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$
2. $(x^n)' = nx^{n-1}$	6. $(\cos x)' = -\sin x$	14. $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$
2.1. $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$	7. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	15. $(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$
2.2. $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	8. $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	16. $(\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$
3. $(e^x)' = e^x$	9. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	17. $(\operatorname{arsh} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
3.1. $(a^x)' = a^x \ln a$	10. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	18. $(\operatorname{arch} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
4. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$	11. $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$	19. $(\operatorname{arth} x)' = \frac{1}{1-x^2}$
4.1. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$	12. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$	20. $(\operatorname{arcth} x)' = -\frac{1}{x^2-1}$

Пример 20.3. Найти производные функций

$$f_1(x) = e^{\operatorname{arctg} x}, \quad f_2(x) = \operatorname{arctg} e^x, \quad f_3(x) = \sqrt{x + \cos^2(xe^{2x})}.$$

$$f_1'(x) = e^{\operatorname{arctg} x} \cdot (\operatorname{arctg} x)' = \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{1 + x^2}.$$

$$f_2'(x) = \frac{1}{1 + (e^x)^2} \cdot (e^x)' = \frac{e^x}{1 + e^{2x}}.$$

$$\begin{aligned}
f'_3(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x + \cos^2(xe^{2x})}} \cdot (x + \cos^2(xe^{2x}))' = \frac{1 + (\cos^2(xe^{2x}))'}{2\sqrt{x + \cos^2(xe^{2x})}} = \\
&= \frac{1 + 2\cos(xe^{2x}) \cdot (\cos(xe^{2x}))'}{2\sqrt{x + \cos^2(xe^{2x})}} = \frac{1 - 2\cos(xe^{2x})\sin(xe^{2x})(xe^{2x})'}{2\sqrt{x + \cos^2(xe^{2x})}} = \\
&= \frac{1 - \sin(2xe^{2x})(e^{2x} + x \cdot 2e^{2x})}{2\sqrt{x + \cos^2(xe^{2x})}} = \frac{1 - (1 + 2x)e^{2x}\sin(2xe^{2x})}{2\sqrt{x + \cos^2(xe^{2x})}}. \quad \#
\end{aligned}$$

§21. Методы нахождения производных. Дифференциалы

Производная неявно заданной функции. Дана неявно заданная функция $F(x, y) = 0$. Продифференцируем данное равенство, используя все полученные ранее правила дифференцирования, в том числе правило дифференцирования сложной функции. В результате получим уравнение, включающее в себя не только x и y , но и y' : $\Phi(x, y, y') = 0$. Выразив из последнего равенства y' , найдём искомую производную.

Пример 21.1. Найти производную функции $x^4 + y^4 - x^2y^2 = a^4$.

$$\begin{aligned}
(x^4 + y^4 - x^2y^2)' &= (a^4)' \Rightarrow (x^4)' + (y^4)' - (x^2y^2)' = 0 \Rightarrow \\
4x^3 + 4y^3y' - [(x^2)'y^2 + x^2(y^2)'] &= 0 \Rightarrow \\
4x^3 + 4y^3y' - 2xy^2 - x^22yy' &= 0 \Rightarrow y' = \frac{x(y^2 - 2x^2)}{y(2y^2 - x^2)}. \quad \#
\end{aligned}$$

Производная параметрически заданной функции. Дана параметрически заданная функция $x = g(t)$, $y = f(t)$. Её производная

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{\Delta y}{\Delta t}}{\frac{\Delta x}{\Delta t}} = \frac{\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t}}{\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}} = \frac{f'(t)}{g'(t)}. \quad (21.1)$$

Пример 21.2. Найти производную функции $x = a \cos t$, $y = b \sin t$.

$$y' = \frac{(b \sin t)'}{(a \cos t)'} = -\frac{b \cos t}{a \sin t} = -\frac{b}{a} \operatorname{ctg} t. \quad \#$$

Логарифмическая производная. Пусть дана явно заданная функция $y = f(x)$. Взяв логарифм от обеих частей этого равенства, получим неявное уравнение $\ln y = \ln f(x)$. Далее, взяв производную, получим $\frac{y'}{y} = [\ln f(x)]'$ или

$$y = f(x) \Rightarrow y' = y [\ln f(x)]'.$$

Данная формула называется *логарифмической производной*. Она используется, если функция является произведением нескольких функций или имеет вид $y = u^v$.

Пример 21.3. Найти производную функции $y = \frac{e^x \sqrt[4]{x}(x^2 + 2)}{(x + 5)^3}$.

Данная функция является произведением четырёх функций, поэтому применим формулу логарифмической производной:

$$\begin{aligned} y' &= y \left[\ln \frac{e^x \sqrt[4]{x}(x^2 + 2)}{(x + 5)^3} \right]' = y \left[x + \frac{1}{4} \ln(x) + \ln(x^2 + 2) - 3 \ln(x + 5) \right]' = \\ &= \frac{e^x \sqrt[4]{x}(x^2 + 2)}{(x + 5)^3} \left[1 + \frac{1}{4x} + \frac{2x}{x^2 + 2} - \frac{3}{(x + 5)} \right]. \end{aligned}$$

Пример 21.4. Найти производную функции $y = (\sin x)^{\ln x}$.

Данная функция имеет вид $y = u^v$. Применим формулу логарифмической производной, получим

$$\begin{aligned} y' &= y [\ln x \cdot \ln(\sin x)]' = y \left[\frac{1}{x} \cdot \ln(\sin x) + \ln x \cdot \frac{\cos x}{\sin x} \right] = \\ &= (\sin x)^{\ln x} \left[\frac{\ln(\sin x)}{x} + \ln x \cdot \operatorname{ctg} x \right]. \end{aligned}$$

Производные высших порядков. Производной $y''(x)$ второго порядка функции $y(x)$ называется производная от её производной: $y''(x) = [y'(x)]'$. Аналогично вводятся производные третьего и более высоких порядков. Для обозначения таких производных используются или римские цифры, или порядок производной пишется в скобках (скобки нужны, чтобы отличать производную от операции возведения в степень). Так, y^V – производная пятого порядка, $y^{(7)}$ – производная седьмого порядка.

Задание. Найдите $(x^5)''$, $(e^{2x})^{IV}$, $(\sin x)^{(10)}$.

Пример 21.5. Найти y'' неявной функции $x^4 + y^4 = 2a^4$.

Вначале найдём первую производную:

$$4x^3 + 4y^3y' = 0 \quad \Rightarrow \quad y' = -\frac{x^3}{y^3}.$$

Далее найдём y'' , взяв производную от полученной дроби:

$$y'' = -\frac{3x^2y^3 - x^3 \cdot 3y^2y'}{y^6} = -3\frac{x^2y^6 + x^6y^2}{y^6 \cdot y^3} = -3\frac{x^2(x^4 + y^4)}{y^7} = -6\frac{x^2a^4}{y^7}.$$

Пример 21.6. Найти y'' параметрической функции $x = a \cos t$, $y = b \sin t$.

Из примера 21.2 имеем $y' = -\frac{b}{a} \operatorname{ctg} t$. Приняв данную функцию как функцию параметра t , найдём вторую производную:

$$y'' = \frac{\left(-\frac{b}{a} \operatorname{ctg} t\right)'}{(a \cos t)'} = \frac{b}{a^2} \cdot \frac{1}{\sin^3 t}.$$

Понятие дифференциала. Функция $y = f(x)$ называется *дифференцируемой* в точке x , если существует такое число $P(x)$, что приращение Δy в этой точке может быть представлено в виде

$$\Delta y = P(x) \cdot \Delta x + \varepsilon(\Delta x), \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\varepsilon(\Delta x)}{\Delta x} = 0, \quad (21.2)$$

Дифференциалом функции $dy = P \cdot \Delta x$ называется первое слагаемое в сумме (21.2). Дифференциал dy является линейной частью приращения Δy функции. Заметим, что второе слагаемое $\varepsilon(\Delta x)$ суммы является нелинейной частью приращения функции.

Кроме дифференциала функции определяется также *дифференциал dx аргумента*, он принимается равным приращению аргумента: $dx = \Delta x$.

Рассмотрим пример. Для функции $y = x^3$ найдём приращение Δy :

$$\Delta y = (x + \Delta x)^3 - x^3 = 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3.$$

Первое слагаемое в этой сумме является дифференциалом, т.к. оно линейно (содержит Δx в первой степени). Остальные слагаемые относятся к нелинейной части и они содержат Δx в больших степенях.

Теорема 21.1 (Необходимое и достаточное условие дифференцируемости функции). *Функция $y = f(x)$ дифференцируема $\Leftrightarrow$ у функции $y = f(x)$ существует производная. При этом дифференциал $dy = f'(x)dx$.*

◀ $\Rightarrow$ Пусть функция дифференцируема, тогда $\Delta y = P\Delta x + \varepsilon(\Delta x)$. Найдём производную $f'(x)$, используя определение:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P\Delta x + \varepsilon(\Delta x)}{\Delta x} = P + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\varepsilon(\Delta x)}{\Delta x} = P.$$

Следовательно, производная существует и равна P .

$\Leftarrow$ Пусть у функции существует производная $f'(x)$. Рассмотрим функцию $\varepsilon(\Delta x) = \Delta y - f'(x)\Delta x$. Найдём предел

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\varepsilon(\Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x) \right) = f'(x) - f'(x) = 0.$$

Поэтому приращение может быть представлено в виде

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \varepsilon(\Delta x), \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\varepsilon(\Delta x)}{\Delta x} = 0,$$

что означает дифференцируемость функции. ▶

Подведём итог. Дифференциал dy функции связан с её производной соотношением

$$dy = f'(x) dx. \quad (21.3)$$

До сих пор производная y' рассматривалась как единая конструкция. Теперь же, из соотношения

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

следует, что производную можно рассматривать как отношение двух дифференциалов: дифференциала функции к дифференциалу аргумента.

Геометрический смысл дифференциала. Рассмотрим график дифференцируемой функции $y(x)$. Из точки A с абсциссой x_0 , лежащей на графике функции, проведём касательную. Пусть аргумент получил приращение dx . При этом функция получила приращение Δy , а касательная — приращение $\operatorname{tg} \varphi \cdot dx = y'dx = dy$.

Т.о., дифференциал функции $y(x)$ в точке x_0 равен приращению ординаты касательной к графику этой функции в данной точке.

Свойства дифференциала. Приведём основные свойства дифференциала функции:

$$1^\circ. d(C) = 0,$$

$$2^\circ. d(u \pm v) = du \pm dv,$$

$$3^\circ. d(u + C) = du,$$

$$4^\circ. d(Cu) = Cdu,$$

$$5^\circ. d(uv) = vdu + u dv,$$

$$6^\circ. d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - u dv}{v^2}.$$

◀ Все они элементарно доказываются с помощью соотношения (21.3) и свойств производной. Докажем, например, свойство 5° :

$$d(uv) = (uv)'dx = (u'v + uv')dx = v(u'dx) + u(v'dx) = vdu + u dv. \quad \blacktriangleright$$

Задание. Докажите остальные свойства.

Дифференциалы высших порядков. Дифференциал $dy = y'(x)dx$ зависит как от x , так и от dx . Принято считать, что если x является независимой переменной, то dx от неё не зависит, т.е. он ведёт себя как постоянная величина. Поэтому $(dx)' = 0$ и $d(dx) = 0$.

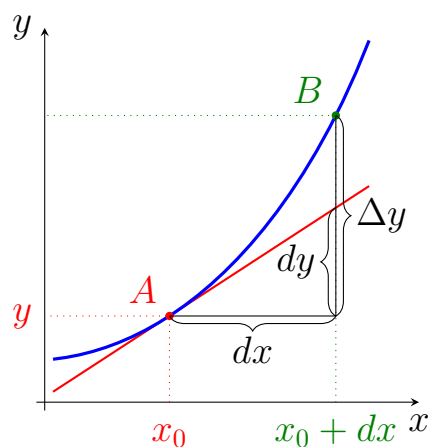
Величина $d(dy)$ называется *дифференциалом второго порядка* функции, для неё используется обозначение d^2y . Найдём связь дифференциала второго порядка со второй производной:

$$d^2y = d(dy) = d(y'(x) dx) = d(y'(x))dx = y''(x) \cdot (dx)^2.$$

Скобки в последнем множителе в этой записи обычно опускают, т.е. выражение dx^2 понимается как $(dx)^2$, а не как $d(x^2)$.

Аналогично вводится понятие дифференциала третьего порядка $d^3y = d(d^2y) = y'''(dx)^3$, а также дифференциала порядка n . Для него справедлива формула

$$d^n y = y^{(n)} \cdot dx^n, \quad y^{(n)} = \frac{d^n y}{dx^n}.$$



Приближённое вычисление малых приращений. Для малых приращений $\Delta y \approx dy$, поэтому, для приближённых вычислений значений функций, можно использовать формулу

$$y(x + \Delta x) \approx y(x) + y'(x)\Delta x.$$

Пример 21.7. Вычислить приближённое значение $\sqrt[3]{1.1}$.

Пусть $y(x) = \sqrt[3]{x}$, $x = 1$, $\Delta x = 0.1$. Тогда

$$\sqrt[3]{1.1} = y(1 + 0.1) \approx y(1) + y'(1) \cdot 0.1.$$

Производная $y'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \Rightarrow y'(1) = \frac{1}{3}$ и

$$\sqrt[3]{1.1} \approx 1 + \frac{1}{3} \cdot 0.1 = \frac{31}{30} \approx 1.03333 \dots$$

Точное значение $\sqrt[3]{1.1} = 1.03228 \dots$, погрешность приближённого вычисления составила $\varepsilon = 0.00105$. Для вычисления значения функции с меньшей погрешностью следует использовать значения производных более высоких порядков. Формула, позволяющая это сделать, будет получена позднее.

§22. Теоремы о производных

Понятие точки экстремума. Точка x_0 называется точкой *локального минимума*, если для всех x из некоторой проколотой δ -окрестности этой точки выполнено $f(x) > f(x_0)$. Точка x_0 называется точкой *локального максимума*, если для всех x из некоторой проколотой δ -окрестности этой точки выполнено $f(x) < f(x_0)$.

Точки максимума и минимума называются точками экстремума.

Лемма Ферма и теорема Ролля. Точка x_0 называется *стационарной точкой* функции $f(x)$, если $f'(x_0) = 0$.

Теорема 22.1 (Лемма Ферма). Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в окрестности точки x_0 . Если x_0 – точка экстремума, то x_0 – стационарная точка.

◀ Докажем для точки минимума, т.е. в предположении, что при любом x выполняется $f(x) > f(x_0)$.

Рассмотрим значения $x > x_0$. В этой области дробь $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0$, откуда следует, что $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$.

Для значений $x < x_0$ выполняется $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < 0$. Поэтому производная $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$.

Оба неравенства справедливы только при $f'(x_0) = 0$. ▶

Теорема 22.2 (Теорема Вейерштрасса о компакте). Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то она ограничена, и существуют такие числа $c_1, c_2 \in [a, b]$, что $f(c_1) \leq f(x) \leq f(c_2)$.

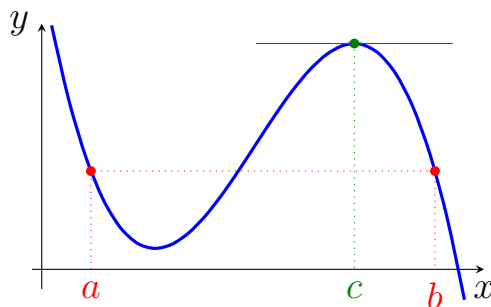
Данную теорему примем без доказательства.

Теорема 22.3 (Теорема Ролля). Пусть функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, дифференцируема на (a, b) и на концах отрезка принимает одинаковые значения: $f(a) = f(b)$. Тогда существует такая точка $c \in (a, b)$, что $f'(c) = 0$.

◀ Первый возможный вариант – когда функция является постоянной, т.е. $f(x) = f(a)$. В этом случае $f'(x) = 0$ во всех точках $x \in (a, b)$.

Рассмотрим другой вариант – когда есть точка, в которой $f(x) > f(a)$ (вариант с $f(x) < f(a)$ рассматривается аналогично). По теореме Вейерштрасса найдется такая точка $c \in (a, b)$, что $f(c) \geq f(x)$ для всех $x \in [a, b]$, т.е. точка c является точкой максимума. По лемме Ферма $f'(c) = 0$. ▶

Геометрический смысл теоремы Ролля: при выполнении условий теоремы существует хотя бы одна горизонтальная прямая, касающаяся графика функции.



Заметим, что теорема Ролля не позволяет определить положение стационарной точки, она утверждает только, что такая точка существует.

Теоремы Лагранжа и Коши. Рассмотрим ещё две важные теоремы дифференциального исчисления.

Теорема 22.4 (Теорема Лагранжа). Пусть функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, дифференцируема на (a, b) . Тогда существует такая точка $c \in (a, b)$, что $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$.

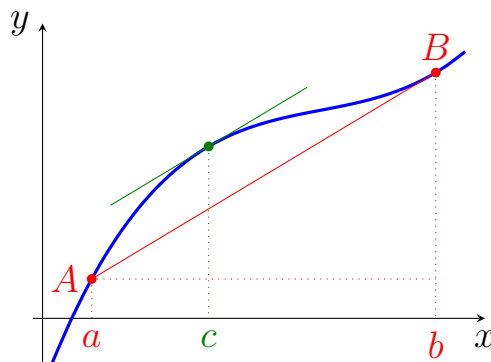
◀ Рассмотрим новую функцию $F(x) = f(x) - kx$, где параметр k подберём так, чтобы эта функция принимала в точках a и b одинаковые значения.

$$F(a) = F(b) \Rightarrow f(a) - ka = f(b) - kb \Rightarrow k = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Функция $F(x)$ является непрерывной на $[a, b]$ вследствие непрерывности функций $f(x)$ и kx . Кроме того, она будет также дифференцируемой на (a, b) , причём $F'(x) = f'(x) - k$. Значит, для функции $F(x)$ выполняются все условия теоремы Ролля, и существует такая точка $c \in (a, b)$, что

$$F'(c) = 0 \Rightarrow f'(c) - k = 0 \Rightarrow k = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c). \quad \blacktriangleright$$

Рассмотрим геометрический смысл теоремы Лагранжа. Отметим на графике функции точки $A(a, f(a))$ и $B(b, f(b))$ и проведём через них секущую. При выполнении условий теоремы существует хотя бы одна касательная, параллельная данной секущей.



Теорема 22.5 (Теорема Коши). Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на $[a, b]$ и дифференцируемы на (a, b) . Кроме того, $g'(x) \neq 0$ на (a, b) . Тогда существует такая точка $c \in (a, b)$, что $\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$.

◀ Заметим вначале, что $g(a) \neq g(b)$. Действительно, при $g(a) = g(b)$ выполняются условия теоремы Ролля, по которой есть точка c , в которой $g'(c) = 0$. Но это запрещено условием теоремы.

Рассмотрим новую функцию $F(x) = f(x) - kg(x)$, где параметр k подберём так, чтобы эта функция принимала в точках a и b одинаковые значения:

$$F(a) = F(b) \Rightarrow f(a) - kg(a) = f(b) - kg(b) \Rightarrow k = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Ранее мы доказали, что знаменатель полученной дроби при выполнении условий теоремы не равен нулю, поэтому параметр k подобрать можно всегда. Функция $F(x)$ является непрерывной на $[a, b]$ вследствие непрерывности функций $f(x)$ и $kg(x)$. Кроме того, она также будет дифференцируемой на (a, b) , причём $F'(x) = f'(x) - kg'(x)$. Значит, для функции $F(x)$ выполняются все условия теоремы Ролля, и существует такая точка $c \in (a, b)$, что

$$F'(c) = 0 \Rightarrow f'(c) - kg'(c) = 0 \Rightarrow k = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}. \quad \blacktriangleright$$

Правило Лопиталя. Для раскрытия неопределённостей типа $\left\{\frac{0}{0}\right\}$ или $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$ удобно пользоваться следующей теоремой.

Теорема 22.6 (Правило Лопиталя). Пусть $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в окрестности точки a , пределы $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ и $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ либо одновременно равны нулю, либо равны ∞ , а также существует предел $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Тогда

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

◀ Докажем для случая $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$. По теореме Коши

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}, \quad c \in (a, x).$$

Т.к. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(c)}{g'(c)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, то и $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. ►

Пример 22.1. Найти пределы: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 1}{\sin 2x}$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{10}}{e^x}$, $\lim_{x \rightarrow 0} (x \ln x)$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 1}{\sin 2x} = \left\{ \frac{0}{0} \right\} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2^x - 1)'}{(\sin 2x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x \ln 2}{2 \cos 2x} = \frac{\ln 2}{2}.$$

В следующем пределе применим правило Лопиталя несколько раз:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{10}}{e^x} = \left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{10x^9}{e^x} = \left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\} = \dots = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{10!}{e^x} = 0.$$

В последнем пределе вначале сведём выражение к неопределённости $\left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\}$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x \ln x) = \{0 \cdot \infty\} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{\left(-\frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x \rightarrow 0} (-x) = 0. \#$$

Формула Тейлора. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема $n + 1$ раз в некоторой окрестности точки a . Тогда для любого x из этой окрестности справедлива формула Тейлора

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \Delta x^k + r(x), \quad r(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \Delta x^{n+1}, \quad (22.1)$$

где $\Delta x = x - a$, $c \in (a, x)$. Слагаемое $r(x)$ называется остаточным членом в форме Лагранжа.

Формула Тейлора (22.1) при $a = 0$ называется формулой Маклорена:

$$f(x) = f(0) + \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + r(x), \quad r(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} x^{n+1}. \quad (22.2)$$

◀ Докажем формулу (22.1). Введём функцию

$$r(x) = f(x) - f(a) - \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k.$$

Вычислив производные этой функции, заметим, что

$$r(a) = 0, \quad r'(a) = 0, \quad \dots, \quad r^{(n)}(a) = 0, \quad r^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x).$$

Пусть $g(x) = (x - a)^{n+1}$. Тогда

$$g(a) = 0, \quad g'(a) = 0, \quad \dots, \quad g^{(n)}(a) = 0, \quad g^{(n+1)}(x) = (n+1)!$$

Пусть b – точка из окрестности точки a . Применим к паре функций $r(x)$ и $g(x)$ на отрезке $[a, b]$ теорему Коши. Согласно этой теореме, существует такая точка $c_1 \in (a, b)$, что

$$\frac{r(b)}{g(b)} = \frac{r(b) - r(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{r'(c_1)}{g'(c_1)}.$$

Далее применим теорему Коши к паре функций $r'(x)$ и $g'(x)$ на отрезке $[a, c_1]$. Существует такая точка $c_2 \in (a, c_1)$, что

$$\frac{r'(c_1)}{g'(c_1)} = \frac{r'(c_1) - r'(a)}{g'(c_1) - g'(a)} = \frac{r''(c_2)}{g''(c_2)}.$$

Продолжим применение теоремы Коши вплоть до функций $r^{(n)}(x)$ и $g^{(n)}(x)$, для которых существует такая точка $c \in (a, c_n)$, что

$$\frac{r^{(n)}(c_n)}{g^{(n)}(c_n)} = \frac{r^{(n+1)}(c)}{g^{(n+1)}(c)}.$$

Т.о., имеем цепочку равенств

$$\frac{r(b)}{g(b)} = \frac{r'(c_1)}{g'(c_1)} = \dots = \frac{r^{(n)}(c_n)}{g^{(n)}(c_n)} = \frac{r^{(n+1)}(c)}{g^{(n+1)}(c)} = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!},$$

где $c \in (a, b)$. Используя исходные определения функции $g(x)$, получим

$$r(b) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (b - a)^{n+1},$$

т.е. эта функция имеет вид остаточного члена в форме Лагранжа. Заменяя b на x , получим формулу Тейлора. ►

Формулы Маклорена для некоторых функций. Получим формулу Маклорена для функции $f(x) = e^x$. Заметим, что производная любого порядка совпадает с самой функцией. В точке $x = 0$ имеем $f(0) = f'(0) = f''(0) = \dots = 1$. По формуле (22.2)

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + r(x), \quad r(x) = \frac{x^{n+1}e^c}{(n+1)!}.$$

Далее рассмотрим функцию $f(x) = \sin x$. Заметим, что

$$f'(x) = \cos x, \quad f''(x) = -\sin x, \quad f'''(x) = -\cos x, \quad f^{(4)}(x) = f(x).$$

В точке $x = 0$ сама функция и все её чётные производные равны нулю, а нечётные чередуют знак: $f'(0) = 1$, $f'''(0) = -1$, $f^{(5)}(0) = 1$, ...

По формуле (22.2)

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + r(x).$$

Конкретный вид остаточного члена в этой формуле зависит от n . Так, для коэффициентов вида $n = 4k - 1$ (для которых $(n + 1)$ -я производная совпадает с $\sin x$) остаточный член $r(x) = \frac{x^{4k} \sin c}{(4k)!}$.

Задание. Докажите формулы

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + r(x),$$

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots + r(x),$$

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots + r(x).$$

Заметим, что формулы Маклорена для функций $\operatorname{sh} x$ и $\operatorname{ch} x$ похожи на формулы для $\sin x$ и $\cos x$. Этим можно объяснить схожесть свойств гиперболических и тригонометрических функций.¹

Пример 22.2. Найти число e с точностью до 5 знаков после запятой.

Запишем формулу Маклорена для e^x при $x = 1$:

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} + r, \quad r = \frac{e^c}{(n+1)!}, \quad c \in (0, 1).$$

Как было показано ранее при исследовании сходимости последовательности $(1 + \frac{1}{n})^n$, число $e < 3$, поэтому $r < \frac{3}{(n+1)!}$. Для достижения точности в 5 знаков после запятой остаточный член должен быть меньше 10^{-5} :

$$\frac{3}{(n+1)!} < 10^{-5} \quad \Rightarrow \quad (n+1)! > 3 \cdot 10^5 \quad \Rightarrow \quad n \geq 8.$$

¹На самом деле причина схожести гиперболических и тригонометрических функций становится понятной после изучения темы “комплексные числа”, об этом будет сказано позднее.

Поэтому ограничимся случаем $n = 8$:

$$e \approx 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{8!} = \frac{109601}{40320} \approx 2.7182788. \quad \#$$

Задание. Вычислить приближённое значение $\sqrt[3]{1.1}$ по формуле Тейлора, учтя слагаемые вплоть до y''' :

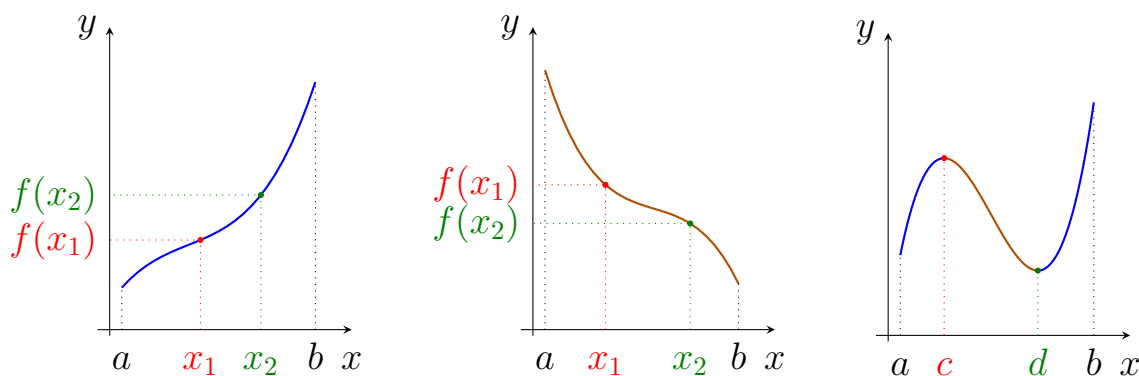
$$y(x + \Delta x) \approx y(x) + y'(x)\Delta x + \frac{y''(x)}{2!}(\Delta x)^2 + \frac{y'''(x)}{3!}(\Delta x)^3.$$

§23. Исследование функции

Монотонность функции. Функция $f(x)$ называется *возрастающей* на (a, b) , если для любых $x_1, x_2 \in (a, b)$ из условия $x_2 > x_1$ следует $f(x_2) > f(x_1)$. Функция $f(x)$ называется *убывающей* на (a, b) , если из $x_2 > x_1$ следует $f(x_2) < f(x_1)$.

Задание. Дайте аналогичные определения неубывающей и невозрастающей функции на (a, b) .

Возрастающие и убывающие функции называют *строго монотонными*, невозрастающие и неубывающие функции называют *монотонными*. Интервалом (a, b) монотонности называется интервал, на котором функция является монотонной.



Слева изображена возрастающая на (a, b) функция, в центре – убывающая на (a, b) , справа – немонотонная на (a, b) функция. В то же время, у последней функции можно выделить три интервала монотонности (a, c) , (c, d) и (d, b) .

Теорема 23.1 (Теорема о монотонности). Пусть функция $f(x)$ дифференцируема на (a, b) . Если на этом интервале производная положительна ($f'(x) > 0$), то функция является возрастающей; если производная отрицательна ($f'(x) < 0$), то функция является убывающей.

◀ Рассмотрим вариант $f'(x) > 0$. Возьмём два значения x_1 и x_2 из промежутка (a, b) , и пусть $x_2 > x_1$. По теореме Лагранжа

$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1) \cdot f'(c) > 0.$$

Следовательно, при $x_2 > x_1$ выполняется $f(x_2) > f(x_1)$. Согласно определению, $f(x)$ – возрастающая функция. ▶

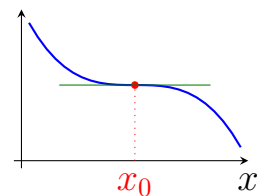
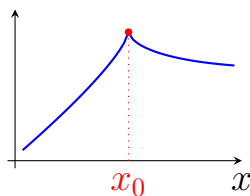
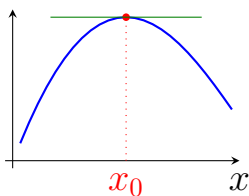
Заметим, что обратное утверждение неверно, т.е. нельзя утверждать, что у возрастающей функции производная во всех точках положительна. Производная у таких функций в некоторых точках может равняться нулю. Например, функция x^3 является возрастающей, но в точке $x = 0$ у неё производная равна нулю.

Необходимое и достаточные условия экстремума. Определение точки экстремума функции было дано ранее в §22. Точка x_0 называется *критической точкой* функции $f(x)$, если $f'(x_0) = 0$ или $f'(x_0)$ не существует.

Теорема 23.2 (Необходимое условие экстремума). Точка экстремума является критической точкой.

◀ Пусть x_0 – точка экстремума. Если $f'(x_0)$ не существует, то x_0 – критическая точка по определению. Если же $f'(x_0)$ существует, то, по лемме Ферма 22.1, производная $f'(x_0) = 0$. Следовательно, и в этом случае x_0 будет критической точкой. ▶

Заметим, что обратное утверждение неверно, т.е. нельзя утверждать, что критическая точка будет точкой экстремума.



На всех трёх рисунках точка x_0 является критической. На левом и правом рисунках точка x_0 – стационарная, но на правом рисунке x_0 не является точкой экстремума. На среднем рисунке в точке x_0 производная не существует, эта точка является точкой максимума.

Задание. Рассмотрите точку $x = 0$ функции $\sqrt[3]{x}$. Является ли эта точка точкой экстремума/стационарной/критической?

Теорема 23.3 (Достаточное условие экстремума I). Пусть $f(x)$ дифференцируема в проколотой δ -окрестности точки x_0 , и $f'(x)$ меняет знак при переходе через точку x_0 . Тогда x_0 – точка экстремума. В этой точке будет

- минимум, если $f'(x) < 0$ при $x < x_0$ и $f'(x) > 0$ при $x > x_0$,
- максимум, если $f'(x) > 0$ при $x < x_0$ и $f'(x) < 0$ при $x > x_0$.

◀ Рассмотрим первый случай. Если $f'(x) < 0$ при $x < x_0$, то на интервале $(x_0 - \delta, x_0)$ функция убывает. Значит, наименьшее значение достигается при наибольшем аргументе, т.е. в точке x_0 . Если $f'(x) > 0$ при $x > x_0$, то на интервале $(x_0, x_0 + \delta)$ функция возрастает, и наименьшее значение достигается при наименьшем аргументе, т.е. опять в точке x_0 . Поэтому на интервале $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ наименьшее значение функция принимает в точке x_0 . Эта точка – точка минимума по определению. ▶

Теорема 23.4 (Достаточное условие экстремума II). Пусть $f(x)$ дважды дифференцируема в стационарной точке x_0 и $f''(x) \neq 0$. Тогда x_0 – точка экстремума. В этой точке будет

- минимум, если $f''(x_0) > 0$,
- максимум, если $f''(x_0) < 0$.

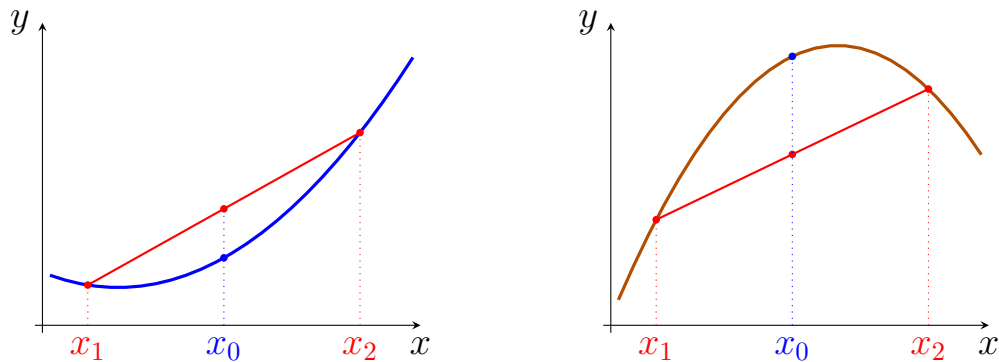
◀ Докажем для случая, когда в стационарной точке $f''(x_0) > 0$. По определению производной,

$$f''(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{x - x_0} > 0.$$

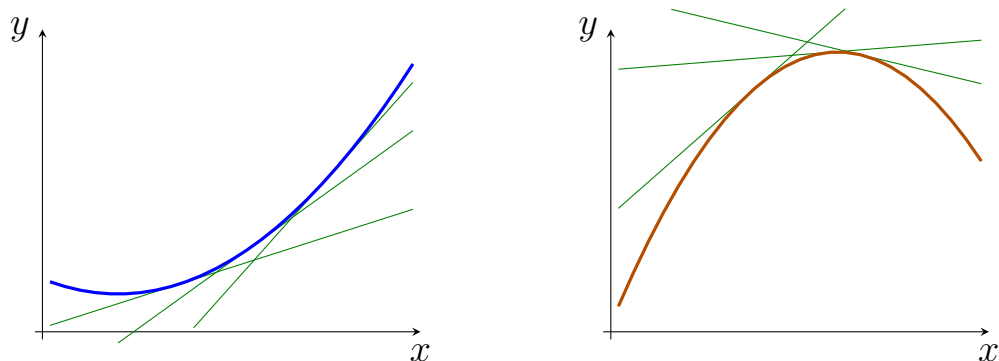
Т.к. $f'(x)$ дифференцируема, то она является и непрерывной в некоторой окрестности точки x_0 . Значит, дробь $\frac{f'(x)}{x - x_0}$ положительна не только в точке

x_0 , но и в некоторой δ -окрестности этой точки. Из условия $x < x_0$ будет следовать $f'(x) < 0$, а из $x > x_0$ будет следовать $f'(x) > 0$. Из достаточного условия экстремума I следует, что x_0 – точка минимума. ►

Выпуклость функции. Функция $f(x)$ называется *выпуклой вниз* (или просто *выпуклой*) на $[a, b]$, если для всех $x_1, x_2 \in [a, b]$ выполняется условие $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$. Функция $f(x)$ называется *выпуклой вверх* (вогнутой), если выполняется $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) > \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$.



Для функции, выпуклой вниз (вверх), это означает, что середина отрезка, соединяющего две любые точки графика функции, лежит выше (ниже) графика функции. Заметим, что данным свойством обладает весь отрезок, а не только его середина. Поэтому для функции, выпуклой вниз (вверх), график функции расположен ниже (выше) отрезка, соединяющего любые две точки графика функции.



Другим критерием выпуклости функции является расположение касательной, проведённой к графику функции: для функции, выпуклой вниз (вверх), касательная располагается ниже (выше) графика функции.

Теорема 23.5 (Достаточное условие выпуклости). Пусть $f(x)$ дифференцируема на отрезке $[a, b]$ и дважды дифференцируема на (a, b) . Если для всех $x \in (a, b)$ выполнено $f''(x) > 0$, то $f(x)$ выпукла вниз. Если же $f''(x) < 0$, то $f(x)$ выпукла вверх.

◀ Возьмём две точки x_1 и x_2 . Пусть $x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}$, $h = \frac{x_2 - x_1}{2}$, тогда $x_1 = x_0 - h$, $x_2 = x_0 + h$.

Запишем формулу Тейлора (22.1) для $n = 1$ и точек x_1 и x_2 :

$$f(x_1) = f(x_0) - f'(x_0)h + f''(c_1)\frac{h^2}{2}, \quad c_1 \in (x_1, x_0),$$

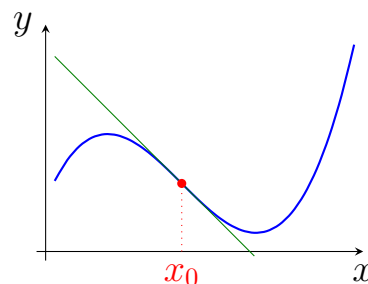
$$f(x_2) = f(x_0) + f'(x_0)h + f''(c_2)\frac{h^2}{2}, \quad c_2 \in (x_0, x_2).$$

Сложив эти два равенства, получим

$$f(x_1) + f(x_2) = 2f(x_0) + \left(f''(c_1) + f''(c_2)\right)\frac{h^2}{2}.$$

Если $f''(x) > 0$, то $f(x_1) + f(x_2) > 2f(x_0)$, что, по определению, соответствует выпуклой вниз функции. Случай $f''(x) < 0$ рассматривается аналогично. ▶

Точка x_0 называется *точкой перегиба* функции $f(x)$, если график $f(x)$ “перегибается” через касательную, т.е. для $x < x_0$ лежит с одной стороны от касательной, а для $x > x_0$ — с другой.



Имеют место следующие теоремы:

Теорема 23.6 (Необходимое условие точки перегиба). В точке перегиба вторая производная равна нулю или не существует.

Теорема 23.7 (Достаточное условие точки перегиба). Если $f(x)$ дважды дифференцируема в проколотой окрестности точки x_0 , и $f''(x)$ меняет знак при переходе через эту точку, то x_0 является точка перегиба.

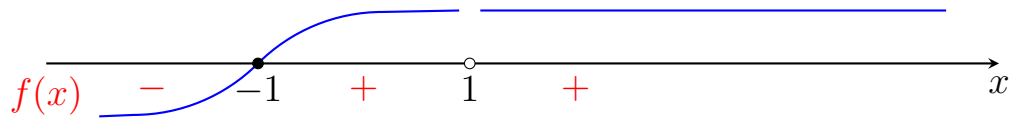
Построение графика функции. Для исследования функции и построения её графика будем придерживаться следующего плана:

1. Нахождение области определения функции.
2. Определение вида функции (чётная, нечёт., период., общ. вида).
3. Нахождение нулей функции и интервалов знакопостоянства (по $f(x)$).

4. Определение критических точек и интервалов монотонности (по $f'(x)$).
5. Определение точек перегиба и интервалов выпуклости (по $f''(x)$).
6. Нахождение асимптот.
7. Вычисление значений функции в контрольных точках. К таким точкам относят нули, экстремумы и точки перегиба.

Пример 23.1. Исследовать функцию и построить её график: $y = \frac{(x+1)^3}{(x-1)^2}$.

1. Область определения функции: $x \neq 1$.
2. Т.к. $f(-x) \neq f(x)$ и $f(-x) \neq -f(x)$, то $f(x)$ – общего вида.
3. Функция обращается в нуль в точке $x = -1$. Интервалы знакопостоянства отметим на числовой прямой:



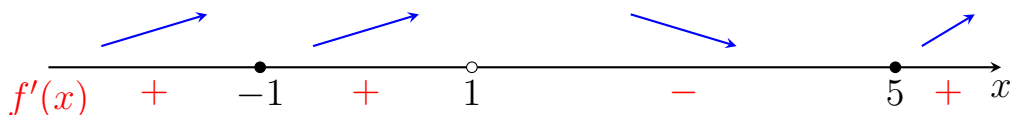
На числовой прямой отмечена также точка $x = 1$, в которой знаменатель функции обращается в нуль. Т.к. выражение $(x - 1)$ имеет чётную степень, знак функции при переходе через эту точку не меняется.

4. Для вычисления $f'(x)$ используем формулу логарифмической производной.

$$[\ln f(x)]' = (3 \ln(x+1) - 2 \ln(x-1))' = \frac{3}{x+1} - \frac{2}{x-1} = \frac{x-5}{(x+1)(x-1)}.$$

$$f'(x) = f(x)[\ln f(x)]' = \frac{(x+1)^3}{(x-1)^2} \cdot \frac{x-5}{(x+1)(x-1)} = \frac{(x+1)^2(x-5)}{(x-1)^3}.$$

Отметим нули числителя и знаменателя на числовой прямой и по знаку производной определим интервалы возрастания/убывания:



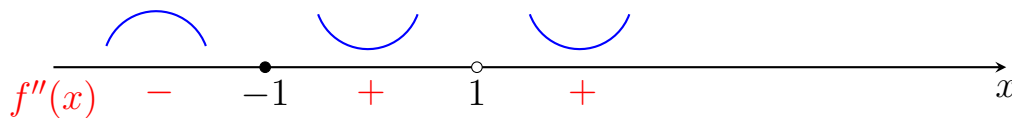
5. Для вычисления $f''(x)$ опять используем формулу логарифмической производной.

$$\left(\ln \frac{(x+1)^2(x-5)}{(x-1)^3} \right)' = \frac{2}{x+1} + \frac{1}{x-5} - \frac{3}{x-1} =$$

$$= \frac{24}{(x+1)(x-5)(x-1)}.$$

$$f''(x) = \frac{(x+1)^2(x-5)}{(x-1)^3} \cdot \frac{24}{(x+1)(x-5)(x-1)} = \frac{24(x+1)}{(x-1)^4}.$$

Отметим нули числителя и знаменателя на числовой прямой и по знаку второй производной определим интервалы выпуклости:



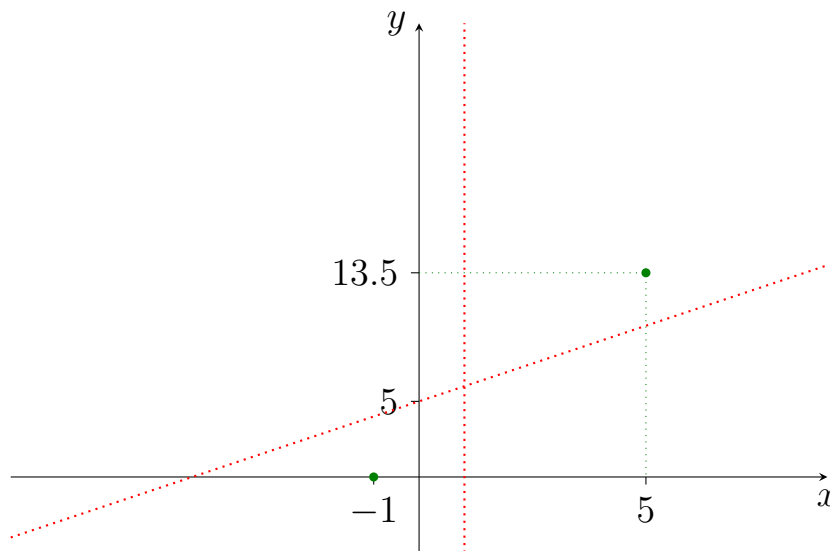
6. Вертикальной асимптотой будет прямая $x = 1$, т.к. в этой точке знаменатель обращается в нуль при конечном значении числителя. Для нахождения уравнения наклонной асимптоты вычислим пределы:

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+1)^3}{x(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(1 + \frac{1}{x})^3}{(1 - \frac{1}{x})^2} = 1,$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{(x+1)^3}{(x-1)^2} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 + 2x + 1}{(x-1)^2} = 5.$$

Значит, уравнением наклонной асимптоты будет $y = x + 5$.

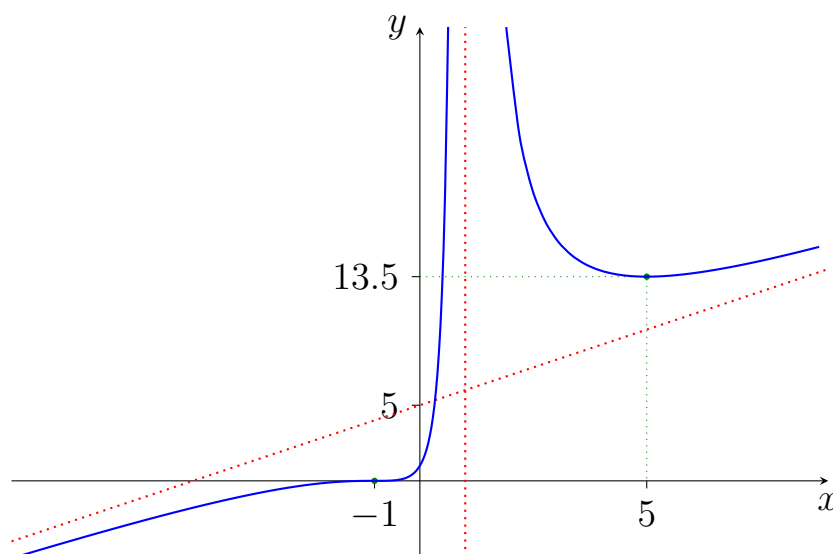
7. Отметим на плоскости две контрольные точки: $x = 1$, $y = 0$ и $x = 5$, $y = 13.5$. Далее построим графики асимптот:



Рисуем график функции с учётом того, что:

- при $x \in (-\infty, -1)$ функция возрастает и выпукла вверх, при $x \rightarrow -\infty$ функция стремится к наклонной асимптоте,
- при $x \in (-1, 1)$ функция возрастает и выпукла вниз, при $x \rightarrow 1$ функция уходит на $+\infty$,

- при $x \in (1, 5)$ функция убывает и выпукла вниз, при $x \rightarrow 1$ уходит на $+\infty$,
- при $x > 5$ функция возрастает и выпукла вниз, при $x \rightarrow +\infty$ стремится к наклонной асимптоте.



Задание. Исследуйте функцию и постройте её график: $y = \ln \frac{x^3}{x-6}$.

Дополнительная литература

1. Шипачев В.С. Высшая математика: учеб. для вузов – М.: Высшая школа, 1998 – 479 с.
2. Баврин И.И. Краткий курс высшей математики для химико-биологических и медицинских специальностей – М.: Физматлит, 2003 – 328 с.
3. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Линейная алгебра: учеб. для вузов – М.: Наука. Физматлит, 1999 – 296 с.
4. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. – М.: Наука, 1968 – 431 с.
5. Морозова В.Д. Введение в анализ: учеб. для вузов (Сер. Математика в техн. ун-те, вып. I) – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 1996 – 408 с.
6. Иванова Е.Е. Дифференциальное исчисление функций одного переменного: учеб. для вузов (Сер. Математика в техн. ун-те, вып. II) – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 1998 – 408 с.
7. Канатников А.Н., Крищенко А.П. Аналитическая геометрия: учеб. для вузов (Сер. Математика в техн. ун-те, вып. III) – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2002 – 388 с.
8. Канатников А.Н., Крищенко А.П. Линейная алгебра: учеб. для вузов (Сер. Математика в техн. ун-те, вып. IV) – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2002 – 336 с.