

КАЗАНСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Ф.Г. АВХАДИЕВ

ЛЕКЦИИ ПО СОВРЕМЕННЫМ
ПРОБЛЕМАМ МАТЕМАТИКИ

Учебное пособие



КАЗАНЬ

2025

УДК 517(075.8)

ББК 22.161я73

A22

*Печатается по рекомендации учебно-методической комиссии
Института математики и механики имени Н.И. Лобачевского
Казанского (Приволжского) федерального университета
(протокол № 4 от 20 февраля 2025 г.)*

Авхадиев Ф.Г.

A22 Лекции по современным проблемам математики: учебное пособие / Ф.Г. Авхадиев. —
Казань, 2025. — 132 с.

ISBN 978-5-9690-1325-4

В учебном пособии представлены семестровый курс лекций автора, а также задания к семинарским занятиям по современным проблемам математики. Пособие предназначено для студентов старших курсов мехмата.

Библиография: 65 названий.

УДК 517(075.8)

ББК 22.161я73

ISBN 978-5-9690-1325-4

© Авхадиев Ф.Г., 2025

© Казанский федеральный университет, 2025

Предисловие

Основной целью курса является ознакомление студентов с актуальными математическими проблемами трёх уровней. А именно, на лекциях обсуждаем *знаменитые* математические проблемы мирового уровня и *признанные* в научной литературе проблемы отдельных областей математики, а на семинарских занятиях обсудим интересные математические проблемы, возникающие в *инициативных научных исследованиях*.

Опишем кратко содержание курса по главам.

Глава 1 содержит элементы *современной наукометрии*. В частности, даны сведения о порталах *Web of Science*, *Scopus*, *Mathnet.ru*, *elibrary.ru*. Приведены определения индексов Хирша для авторов и журналов, а также формула для вычисления импакт-фактора научного журнала.

Главы 2 и 3 посвящены знаменитым математическим проблемам, а именно, проблемам Гильберта, а также семи задачам, объявленным институтом Клея проблемами 3-го тысячелетия. В главе 3 кратко описываем также другие списки известных открытых проблем, относящихся к отдельным областям математики.

Глава 4 посвящена *гипотезе Римана* о распределении простых чисел, входящей и в список проблем Гиль-

берта, и в список семи проблем 3-го тысячелетия.

В докладе Гильберта (Париж, 1900 год) *создание неевклидовой геометрии* отмечено как одно из двух наиболее важных достижений математики 19-го века. Открытие новой геометрии Лобачевским является гордостью Казанского федерального университета. Поэтому в главе 5 описываем гиперболическую геометрию и известные гипотезы Бибербаха и Кшижа, связывающие новую геометрию с комплексным анализом.

В главе 6 обсуждаем классическую проблему, решённую нами с применением моделей Пуанкаре геометрии Лобачевского, а также 15 актуальных проблем, связанных с неравенствами Харди–Реллиха. В главе 7 описана *роль математики в цифровой экономике*.

Курс по современным проблемам математики будет сопровождаться *семинарскими занятиями* по освоению базовых элементов современной наукометрии, представлению собственных научных результатов и поискам открытых математических проблем отдельных областей математики.

Работа поддержана Российским научным фондом, проект № 23-11-00066, и Научно-образовательным математическим центром Приволжского федерального округа (соглашение 075-02-2024-1438).

Казанский федеральный университет,
10 февраля 2025 года,
Ф.Г. Авхадиев

Оглавление

1	Кто и как измеряет науку?	7
1.1	Элементы наукометрии	7
1.2	Основные научные порталы	13
1.3	Задания к семинарам	17
2	Проблемы Гильберта	19
2.1	Исторические сведения	19
2.2	Краткие формулировки задач	21
2.3	Задания к семинарам	27
3	Актуальные задачи 3-го тысячелетия	28
3.1	Millennium Prize Problems	28
3.2	Другие списки открытых проблем	30
3.3	Задания к семинарам	37
4	Нули дзета-функции и простые числа	38
4.1	Теорема Эйлера и доклад Римана	39
4.2	Об исследованиях гипотезы Римана	47
4.3	Задания к семинарам	52
5	Две гипотезы комплексного анализа	53
5.1	Геометрия Лобачевского	53
5.2	О гипотезах Бибербаха и Кшижа	64
5.3	Задания к семинарам	69

6	Задачи математической физики	70
6.1	Обобщённые задачи Сен-Венана	71
6.2	Неравенства Харди – Реллиха	81
6.3	Задания к семинарам	114
7	Роль математики в цифровой экономике	116
7.1	Математические задачи экономики	116
7.2	Основные направления	117
7.3	Задания к семинарам	119
8	О семинарах и литературе	120

Глава 1

Кто и как измеряет науку?

1.1 Элементы наукометрии

Наукометрия — дисциплина, изучающая эволюцию науки через многочисленные измерения и статистическую обработку научной информации с учётом количества научных монографий и статей, опубликованных в данный период времени, их цитируемости и т.п.

Наукометрию применяют как необходимую основу для оценки выполнения научных тем и финансирования различных научных единиц, а именно, институтов, лабораторий, команд, отдельных учёных. Этот подход используется в последние годы и в России, хотя и вызывает много споров.

Имеется ряд признанных наукометрических показателей. Из них выделим прежде всего импакт-фактор журнала, индекс Хирша научного журнала и отдельно взятого исследователя.

Укажем основные абсолютные количественные показатели международных научных баз данных:

- 1) общее число публикаций: по теме, автору или

группе авторов, организации, в частности, университетов; 2) число цитирований публикаций по авторам, организациям, журналу и т.д., в сумме и с распределением по годам и публикациям, как общее, по каждой публикации, так и с распределением по годам; 3) число цитирований: в сумме, по каждой публикации и с распределением по годам и публикациям; 4) индекс Хирша (h -индекс); 5) импакт-фактор журнала.

Классификация наукометрических индикаторов позволяют ранжировать журналы по предметным областям и определять в некотором смысле качество научных публикаций страны, организации, авторов в зависимости от полученных с применением этих показателей оценок публикаций.

Понятны и цели применения наукометрических показателей и индексов. Укажем основные из них: оценка существующих направлений развития науки и технологий в национальном и международном масштабах, их динамика, точки роста, выявление новых направлений и т. п.; оценка, т. е. экспертиза предлагаемых учёными проектов; оценка результативности деятельности научных организаций на национальном и международном уровнях; выявления и оценка успешности сотрудничества научных организаций, формирование новых научных коллективов; оценка деятельности конкретных учёных; составление рейтингов; определение объёмов финансирования научных коллективов, организаций, отраслей науки и т. д.

Импакт-фактор научного журнала — широко при-

меняемый показатель качества опубликованных в журналах результатов научных исследований. Предложен создателем Института научной информации США Ю. Гарфилдом в середине 20-го века. Он привязан к научным базам цитирования. Получаемые в результате расчётов численные показатели импакт-факторов журналов (по данным Web of Science) ежегодно публикуются в базе данных Journal Citation Reports (JCR);

Классический импакт-фактор по Гарфилду рассчитывается за 2 года. Например, для конкретного журнала $\mathbb{S}$ импакт-фактор за 2024 год равен числу цитирований в 2024 году статей, опубликованных в 2022—2023 годах в журнале $\mathbb{S}$, делённому на общее число статей журнала, опубликованных в 2022—2023 годах в том же журнале $\mathbb{S}$. Здесь число цитирований — суммарное число цитирований во всех журналах, входящих в Web of Science. Можно записать условную формулу так:

$$IF_{2024}(\mathbb{S}) = \frac{\sum cite_{2024}(inWoS) \text{ of papers } \in \mathbb{S}_{2022,2023}}{N_{2022,2023}(\mathbb{S})}.$$

Таким образом, импакт-фактор журнала в конкретном году рассчитывается по базе Web of Science как частное от деления *числа цитирований* в этом году статей, опубликованных в данном журнале в течение двух предыдущих лет, *на число всех статей*, опубликованных в этом же журнале в течение тех же двух предыдущих лет.

Понятно, что импакт-фактор зависит от базы, т. е. от множества журналов, по которым определяется сум-

марное число цитирований. Каждый портал определяет $IF_{2024}(S)$ по своей базе данных. Кроме того, имеются трёх или пятилетние импакт-факторы, а также уточнённые импакт-факторы, учитывающие цитирования с весом, зависящим от ранга цитирующих журналов.

Отметим, что свои импакт-факторы для журналов определяет и выставляет РИНЦ — Российский индекс научного цитирования.

Естественно, необходимо знать и слабую сторону импакт-фактора: цитирование ещё не означает высокое качество исследования. Но ничего не поделаешь, других простых, формальных критериев нет. Существуют правда и другие индексы, учитывающие взвешенные показатели, дающие, например, возможность отличить арифметику от ботаники.

Scimago journal ranking (SJR) по базе Scopus — это рейтинг журналов, учитывающий: общее количество цитирований; взвешенные показатели цитирований по годам; качественные показатели, а именно, авторитетность ссылок в зависимости от уровня цитирующего журнала, та как вес ссылки в журнале Nature на статью в журнале «А» будет отличаться от веса ссылки на ту же статью в журнале «Вестник N-ского университета».

Наукометрические показатели публикационной деятельности учёного таковы: общее количество публикаций без учёта фактора востребованности и значимости данных публикаций; общее количество цитирований без учёта случайного характера ссылок на одну

статью и временной интервал востребованности (существует «парадокс Лобачевского»); индекс Хирша.

Индекс Хирша предложен сравнительно недавно, а именно, в 2005 году американским физиком Йоргом Хиршем из университета Сан-Диего, Калифорния.

В последнее время h -index стал самой популярной метрикой для оценки эффективности работы учёных на основе цитируемости их статей. Отметим, что учёный имеет индекс h , если h из его N статей цитируются как минимум h раз каждая, в то время как оставшиеся $(N - h)$ статей цитируются не более чем h раз каждая.

Правило расчёта индекса Хирша таково: индекс Хирша — это число статей, цитируемость которых не меньше их порядкового номера в ранжированном по цитированию списке публикаций. Таким образом, алгоритм вычисления индекса Хирша весьма прост: ранжируем все статьи данного автора (организации) в порядке убывания цитируемости и отбираем статьи с начала списка до тех пор, пока не подходим к статье с цитированием, меньшим порядкового номера этой статьи. Число предшествующих статей и есть индекс Хирша.

Достоинства индекса Хирша состоят в том, что он позволяет отсеивать так называемых «случайных» соавторов, будет высоким лишь для тех, у кого достаточно публикаций, и все они, или, по крайней мере, многие из них, достаточно востребованы, т. е. часто цитируются другими исследователями, будет одинаково низким как для автора одной сверхпопулярной статьи, так и для автора множества статей с малым количеством ци-

тирований.

Справедливая критика индекса Хирша такова.

Этот индекс иногда даёт неверную оценку значимости исследователя. Например, короткая карьера учёного приводит к недооценке его работ; значение показателя существенно зависит от области науки. Кроме того, в биологии и медицине h -индекс намного выше, чем в физике, химии или инженерных областях, тем более, чем h -индекс в математике; далее, h -индекс не позволяет учитывать единичные высоко цитируемые статьи автора, если все остальные не являются таковыми. Говоря проще, менеджеры, выделяющие финансы на научное исследование и ориентирующиеся лишь на h -индексы возможных исполнителей, могут отсеять наиболее перспективного разработчика проекта, и лишиться успеха.

В 2018-24 годах в России учитывались ещё следующие наукометрические показатели.

1) Квартиль научного журнала — это категория научных журналов, которую определяют библиометрические показатели, отражающие уровень цитируемости, то есть востребованность журнала научным сообществом. В первую и вторую кварталы входят около половины журналов, имеющих наибольшие библиометрические показатели.

2) Ведущий учёный — исследователь, имеющий за последние 2 года не менее 1 статьи в изданиях первого и второго квартала, индексированных в международных базах данных Web of Science или Scopus, или не менее 1 патента на изобретение.

1.2 Основные научные порталы

Научных порталов много, студенты, изучающие математику, должны быть хорошо знакомы как минимум с четырьмя из них. К этим основным базам научных данных можно отнести научные международные порталы Web of Science, Scopus, российский портал «Научная электронная библиотека России» с адресом elibrary.ru. Кроме того, по адресу Mathnet.ru вы найдёте портал, созданный и поддерживаемый отделением математических наук Российской академии наук (РАН).

База данных Web of Science (сокращенно WoS) принадлежит сегодня компании Clarivate Analytics, является наиболее авторитетным порталом, охватывающим более 18000 научных журналов. В нем вы найдёте метаданные о публикациях, включающие следующие индексы: Science Citation Index Expanded, содержащий архив с 1975 года по настоящее время; Social Sciences Citation Index, содержащий архив с 1975 года по настоящее время; Arts and Humanities Citation Index, содержащий архив с 1975 года по настоящее время; Emerging Sources Citation Index, содержащий архив с 2015 года по настоящее время; Book Citation Index Science and Social Sciences editions, содержащий архив с 2005 года по настоящее время; Conference Proceedings Citation Index Science and Social Sciences editions, содержащий архив с 1990 года по настоящее время. Имеется также ряд дополнительных ресурсов по всем областям науки.

Более молодой портал Scopus создан издательством Elsevier, охватывает более 22000 научных журналов, успешно конкурирует с Web of Science, подключил к себе базы данных ряда компаний, разрабатывающих индексацию. В настоящее время база данных Scopus широко используется при оценках мировых рейтингов университетов несколькими агентствами, определяющими рейтинги университетов. Периодически на сайте Казанского федерального университета размещается интересная информация о том, какое место в этих рейтингах занимает наш университет в целом или по отдельным направлениям науки и образования. Обратите внимание на то, что позиции Казанского федерального университета в рейтингах являются высокими и из года в год улучшаются.

Доступ к ресурсам Web of Science и Scopus является платным и осуществляется по подписке. Казанский федеральный университет был одним из подписчиков, поэтому мы могли зайти на эти порталы через сайт библиотеки Казанского федерального университета, пользуясь подключенными в сеть компьютерами университета. Доступ на российские порталы elibrary.ru и Mathnet.ru является бесплатным. Но часть информации закрыта. А именно, для доступа на полные тексты некоторых статей нужно снова воспользоваться возможностями университета, то есть тем, что Казанский федеральный университет является одним из подписчиков на целый ряд научных журналов. В

настоящее время возрастает роль Российского индекса научного цитирования (сокращенно, РИНЦ). Он создан и поддерживается научной электронной библиотекой России (elibrary.ru), доступ на материалы Российского индекса научного цитирования является открытым. Базы данных Web of Science, Scopus и elibrary.ru весьма обширны, содержат данные по всем естественным и гуманитарным наукам.

Для математиков является весьма полезным и удобным в работе портал Mathnet.ru отделения математических наук РАН. В частности, этот портал позволяет легко найти:

- 1) *любую статью, опубликованную в одном из математических научных журналов России;*
- 2) *подробные сведения об авторах, имеющих публикации в математических журналах России;*
- 3) *сведения о прошедших и запланированных научных конференциях по математике;*
- 4) *видео с онлайн лекциями ряда математиков;*
- 5) *сведения об организациях с наибольшим числом публикаций и с наибольшим числом авторов.*

В настоящее время первые три позиции в списке организаций с наибольшим числом публикаций, охваченных порталом Mathnet.ru, занимают:

- 1) *Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова (24554 публикаций);*
- 2) *Санкт-Петербургский государственный университет (7515 публикаций);*

3) *Институт математики имени С. Л. Соболева* Сибирского отделения Российской академии наук (5950 публикаций).

Имеется ряд других порталов и полезных интернет ресурсов. Упомянем лишь MathSciNet (портал американского математического общества), Google Scholar и Википедию. Информацию о других полезных для нас интернет ресурсах можно найти в Mathnet.ru и на сайте научной библиотеки Казанского федерального университета. Эти и другие возможности мы обсудим на семинарских занятиях.

1.3 Задания к семинарам

1. На портале отделения математических наук Российской академии наук (Mathnet. ru) имеется богатая видеотека с онлайн лекциями ряда ведущих математиков (речь идёт о докладах на русском или английском языках, записанных на научных семинарах или конференциях). Найдите и послушайте несколько лекций или докладов по близкой к вам тематике. И перескажите затем кратко на наших семинарских занятиях.

2. Подведите промежуточный итог своих научных изысканий, посоветуйтесь с научным руководителем. Подготовьте по своим научным занятиям 15-минутный доклад для наших семинаров.

3. Рекомендую зарегистрироваться на научных порталах, что расширит ваши возможности в получении информации. Прежде всего, речь идёт о российских порталах elibrary.ru и Mathnet. ru. Полезен также портал Google Scholar (к каждой статье там даны сведения о близких работах под рубрикой «related papers»).

4. Выберите научный журнал для возможной публикации ваших новых результатов. Первый шаг — беседа с научным руководителем. Второй шаг — посещение сайта выбранного журнала. Все журналы имеют ряд требований к авторам по содержанию статей и по их оформлению.

5. В портале Mathnet. ru вы можете посетить сайты всех значимых математических журналов России. Рекомендую познакомиться с требованиями к авторам

по содержанию статей и по их оформлению следующих научных журналов по математике: *Успехи математических наук*; *Математический сборник*; *Итоги науки и техники. Современная математика и её приложения. Тематические обзоры*.

6. Найдите описание и изучите следующие административные списки РФ значимых научных журналов:

а) список ВАК т. е. Высшей аттестационной комиссии Российской федерации (наличие определённого числа научных статей автора в журналах, входящих в этот список, является необходимым условием при защите диссертаций в РФ на соискание ученой степени кандидата или доктора наук);

б) «Белый список» научных журналов с четырьмя уровнями, создан правительством Российской федерации для замены англо-американских систем ранжирования научных журналов.

Мы обсудим «Список ВАК» и «Белый список» на семинарских занятиях.

7. В домашней библиотеке каждого российского математика должна быть лучшая в мире

Математическая энциклопедия [2] в пяти томах.

Она состоит из множества коротких статей, написанных специалистами. Удивительное свойство этих статей — полнота обзора современного состояния теории при максимальной доступности изложения. Энциклопедию можно приобрести в интернет-магазинах.

Глава 2

Проблемы Гильберта

Имеется замечательная книга [1], сборник статей под редакцией академика П. С. Александрова. Сборник содержит текст известного доклада Гильберта «Математические проблемы» (перевод на русский язык с немецкого оригинала). Вторую часть сборника составляют комментарии, сделанные известными специалистами и содержащие обзор основных результатов, достигнутых в направлении решения проблем Гильберта.

2.1 Исторические сведения

В 1900 году в Париже состоялся II Международный Конгресс математиков. На нём выступил немецкий ученый, профессор Давид Гильберт, который в своём докладе поставил 23 самые главные на тот момент, существенные проблемы, касающиеся геометрии, алгебры, топологии, теории чисел, теории вероятностей и математики в целом. На данный момент решены 16 проблем из 23. Ещё 2 не являются корректными математическими проблемами (одна сформулирована слишком рас-

плавчато, чтобы понять, решена она или нет, другая, далекая от решения, — физическая, а не математическая). Из оставшихся пяти проблем две не решены никак, а три решены только для некоторых случаев.

В своём докладе как важные достижения в математике 19-го столетия Гильберт упоминает теорию континуума Кантора и создание Гауссом, Лобачевским и Больяи неевклидовой геометрии. Если Гильберт делал бы обзор всех достижений математиков 19-го столетия, то он привёл бы ещё несколько десятков примеров. Как мы знаем, современная математика во многом базируется на трудах наших классиков 18-го и 19-го столетий. В дополнение к словам Гильберта я позволю себе напомнить вам лишь несколько ярких достижений второй половины 19-го столетия по решению трудных задач, которые долго, а именно, веками не удавалось решить:

1) доказательство основной теоремы алгебры о существовании корня любого алгебраического уравнения (в работах Гаусса и Лиувилля); 2) трансцендентность чисел e и π (в работах Эрмита и Линдемана); 3) установление основной теоремы теории чисел: *число простых чисел, не превосходящих заданного числа x , эквивалентно $x/\ln x$ при $x \rightarrow \infty$* (в работах Чебышёва, Адамара и Валле де Пуссена).

В книгах Б. Римана [6], Дж. Литлвуда [7] и М. М. Арсланова [8] вы найдёте описание ряда других знаменитых математических проблем.

Преподавание научных дисциплин содержит пересказ удачных образцов и достижений. Это относится

также и к математике. Но любой исследователь сталкивается с такой ситуацией: на подступах к решению новых проблем 9 из 10 гипотез оказываются либо неверными, либо требуют серьёзных поправок. Не случайно знаменитый математик Анри Пуанкаре шутливо отметил, что «Математика — это огромное кладбище гипотез». Рекомендую познакомиться с книгой [3]. Книга включает в себя в переводе на русский язык с французского четыре произведения выдающегося французского математика Анри Пуанкаре (1854–1912): «Наука и гипотеза», «Ценность науки», «Наука и метод» и «Последние мысли», которые посвящены рассмотрению путей познания в математике, механике, физике.

Неудачные гипотезы обычно не обсуждают, и это естественное явление. Но для полноты изложения приведу здесь опровергнутую Вейерштрассом гипотезу Андре-Мари Ампера, знаменитого физика, математика и естествоиспытателя:

«любая непрерывная функция $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ является дифференцируемой на отрезке $[a, b]$, за исключением разве лишь конечного или счётного множества точек этого отрезка».

2.2 Краткие формулировки задач

Приведём список проблем Гильберта и их статус.

Отметим, что по проблемам Гильберта имеется ряд книг и статей, где можно найти подробное изложение проблем с необходимыми определениями и пояснени-

ями. Здесь мы отмечаем проблемы Гильберта весьма кратко и лишь контурно.

1. Континуум-гипотеза.

Существует ли бесконечное кардинальное число строго между кардиналами множеств целых и действительных чисел?

Решена Полом Кёэном в 1963 году, оказалось, что ответ на вопрос зависит от того, какие аксиомы используются в теории множеств.

2. Логическая непротиворечивость арифметики.

Доказать, что стандартные аксиомы арифметики не могут привести к противоречию.

Решена Куртом Гёделем в 1931 году, оказалось, что с обычными аксиомами теории множеств такое доказательство невозможно.

3. Равносоставленность равновеликих тетраэдров.

Если два тетраэдра имеют одинаковый объём, то всегда ли можно разрезать один из них на конечное число многоугольников и собрать из них второй?

Решена в 1901 году Максом Деном, ответ отрицательный.

4. Прямая как кратчайшее расстояние между двумя точками. Сформулировать аксиомы геометрии на основе данного определения прямой и посмотреть, что из этого следует.

Слишком расплывчатая задача, чтобы можно было рассчитывать на определённое решение, но сделано немало.

5. Группы Ли без опоры на дифференцируемость.

Технический вопрос теории групп преобразований. В одной из интерпретаций её решил Эндрю Глисон в 1950-е годы, в другой – Хидехико Ямабе.

6. Аксиомы физики.

Разработать строгую систему аксиом для математических областей физики, таких как теория вероятностей или механика.

Систему аксиом для теории вероятностей построил Андрей Колмогоров в 1933 году. Но в целом по физике цель не достигнута.

7. Иррациональные и трансцендентные числа.

Доказать, что определённые числа являются иррациональными или трансцендентными.

Предложенные Гильбертом конкретные задачи решены в 1934 году Александром Гельфондом и Теодором Шнайдером.

8. Гипотеза Римана.

Доказать, что все нетривиальные нули римановой дзета-функции лежат на критической линии.

Не доказана до сих пор.

9. Законы взаимности в числовых полях.

Обобщить классический закон квадратичной взаимности (о квадратах по определённому модулю) на более высокие степени.

Частично решена.

10. Условия существования решений диофантовых уравнений.

Найти алгоритм, позволяющий определить, имеет ли данное полиномиальное уравнение со многими

переменными решения в целых числах.

Окончательно невозможность такого алгоритма доказал Юрий Матиясевич в 1970 году.

11. Квадратичные формы с алгебраическими числами в качестве коэффициентов.

Технические вопросы решения диофантовых уравнений со многими переменными.

Решена частично.

12. Теорема Кронекера об абелевых полях.

Технические вопросы обобщения теоремы Кронекера.

Не доказана до сих пор.

13. Решение уравнений седьмой степени при помощи функций специального вида.

Доказать, что общее уравнение седьмой степени не может быть решено с использованием функций двух переменных.

В одной из интерпретаций возможность такого решения доказали Андрей Колмогоров и Владимир Арнольд.

14. Конечность полной системы функций.

Расширить теорему Гильберта об алгебраических инвариантах на все группы преобразований.

Опроверг Масаёси Нагата в 1959 году.

15. Исчислительная геометрия Шуберта.

Герман Шуберт нашел нестрогий метод подсчёта различных геометрических конфигураций. Задача состоит в том, чтобы сделать этот метод строгим.

Полного решения до сих пор нет.

16. Топология кривых и поверхностей.

Сколько связанных компонент может иметь алгебраическая кривая заданной степени? Сколько различных периодических циклов может иметь алгебраическое дифференциальное уравнение заданной степени?

Имеется ограниченное продвижение.

17. Представление определённых форм в виде суммы квадратов.

Если рациональная функция всегда принимает неотрицательные значения, то должна ли она обязательно выражаться в виде суммы квадратов?

Решили Эмиль Артин, Д. Дюбуа и Альбрехт Пфистер. Верно для действительных чисел, неверно в некоторых других числовых системах.

18. Заполнение пространства многогранниками.

Общие вопросы о заполнении пространства конгруэнтными многогранниками.

Имеет отношение к гипотезе Кеплера, ныне доказанной.

19. Аналитичность решений в вариационном исчислении.

Вариационное исчисление отвечает на такие вопросы, как <найти кратчайшую кривую с заданными свойствами. Если подобная задача формулируется при помощи красивых функций, то должно ли решение тоже быть красивым?

Доказали Эннио де Джорджи в 1957 году и Джон Нэш.

20. Граничные задачи.

Разобраться в решениях дифференциальных уравнений физики в определённой области пространства, если заданы свойства решения на ограничивающей эту область поверхности.

В основном решена, вклад внесли многие математики.

21. Существование дифференциальных уравнений с заданной монодромией.

Особый тип комплексного дифференциального уравнения, в котором можно разобраться при помощи данных о его точках сингулярности и группе монодромии. Доказать, что может существовать любая комбинация этих данных.

Ответ да или нет в зависимости от интерпретации.

22. Униформизация с использованием автоморфных функций.

Технический вопрос об упрощении уравнений.

Решил Пауль Кёбе вскоре после 1900 года.

23. Развитие вариационного исчисления.

Гильберт призывал к выдвижению новых идей в области вариационного исчисления.

Многое сделано, но формулировка слишком неопределённая, чтобы задачу можно было считать решённой.

2.3 Задания к семинарам

1. Как указано выше, имеется замечательная, доступная книга [1] по проблемам Гильберта под редакцией П. С. Александрова. Очень интересна вводная часть доклада Гильберта «Математические проблемы». Основную часть доклада Гильберта в этой книге комментируют известные математики, ими дан обзор основных результатов по решению проблем и обсуждаются сопутствующие вопросы.

Прочитайте обзор основных результатов, достигнутых в направлении решения не менее 3-х проблем Гильберта.

2. На запрос «Проблемы Гильберта» интернет выдаёт много источников. Имеются и недавние обзоры. Среди них есть и научно популярные, понятные студентам младших курсов.

Рекомендую посвятить изучению проблем Гильберта хотя бы один из выходных дней. Это полезно и интересно, как минимум, получите представление о спортивной атмосфере в работе математиков.

3. Вспомним определения линейных векторных пространств из функционального анализа, в частности, пространств с заданным скалярным произведением. Известно, что наиболее употребительные гильбертовы пространства являются сепарабельными, и поэтому изоморфны друг другу. Постройте пример несепарабельного гильбертова пространства.

Глава 3

Актуальные задачи 3-го тысячелетия

3.1 Millennium Prize Problems

В 1998 году на средства миллиардера Лэндона Клея (Landon T. Clay) в Кембридже (США) был основан Математический институт его имени (Clay Mathematics Institute) для популяризации математики.

К 24 мая 2000 года эксперты института выбрали семь самых, по их мнению, головоломных проблем. И назначили премии по миллиону долларов США за каждую решённую проблему из этого списка.

Список получил название Millennium Prize Problems (см. [5]). Имеется ряд других источников как на английском, так и на русском языках, где обсуждаются эти знаменитые проблемы математики.

1. Проблема Кука.

Нужно определить: может ли проверка правильности решения какой-либо задачи быть более длительной,

чем получение самого решения. Эта логическая задача важна для специалистов по криптографии - шифрованию данных.

2. Гипотеза Римана.

Существуют так называемые простые числа, например, 2, 3, 5, 7 и т. д., которые делятся только сами на себя. Таких чисел бесконечно много. Риман показал, что можно найти закономерность их распределения, если верна его гипотеза: нетривиальные нули дзета-функции расположены на критической прямой.

3. Гипотеза Берча и Свиннертон-Дайера.

Проблема связана с решением уравнений с тремя неизвестными, возведёнными в степени. Нужно придумать, как их решать, независимо от сложности.

4. Гипотеза Ходжа.

В 20-м веке математики открыли метод исследования формы сложных объектов. Идея в том, чтобы использовать вместо самого объекта простые "кирпичики", которые склеиваются между собой и образуют его подобие. Нужно доказать, что такое допустимо всегда.

5. Уравнения Навье - Стокса.

О них стоит вспомнить в самолёте. Уравнения описывают воздушные потоки, которые удерживают его в воздухе. Сейчас уравнения решают приближённо и локально. Нужно доказать, что в трёхмерном пространстве существует глобальное точное решение уравнений и найти явные формулы.

6. Уравнения Янга - Миллса.

В мире физики есть гипотеза: если элементарная частица обладает массой, то существует и её нижний предел. Но какой - не понятно. Нужно до него добраться. Это, пожалуй, самая сложная задачка. Для её решения необходимо создать «теорию всего» — уравнения, объединяющие все силы и взаимодействия в природе. Тот, кто сумеет, наверняка получит и Нобелевскую премию.

7. Гипотеза Пуанкаре.

Уже доказана Г. Перельманом.

Таким образом, гипотеза Пуанкаре — единственная проблема из этой семёрки, которую удалось решить к настоящему времени.

Каждая из перечисленных проблем имеет богатую историю и заслуживает подробного обсуждения. Убедимся в этом на примере, обсуждая подробнее одну из семи перечисленных проблем.

А именно, в дальнейшем мы рассмотрим подробно проблему 2 из этого списка, т. е. обсудим гипотезу Римана. Но пока поговорим кратко о других списках нерешённых проблем.

3.2 Другие списки открытых проблем

В 20-м веке стали весьма популярны не только 23 проблемы Гильберта, но и сама идея Гильберта о пропа-

ганде важных, интересных и трудных нерешённых математических проблем.

В настоящее время имеется ряд списков нерешённых задач, относящихся к различным разделам математики.

В качестве примера приведу здесь несколько таких списков, взятых мною из Википедии (<https://ru.wikipedia.org/wiki/>) по запросу «Открытые математические проблемы». Более подробную и полную информацию можно найти по указанному адресу.

Открытые проблемы в теории чисел.

Проблема Гольдбаха. Каждое ли чётное число, большее 2, можно представить в виде суммы двух простых чисел?

Проблема Варинга. Функция Харди $G(n)$ — наименьшее k такое, что уравнение $x_1^n + x_2^n + \dots + x_k^n = N$ разрешимо при $N \geq N_0(n)$. Значения этой функции известны только для n равных 2 и 4.

Бесконечно ли множество простых чисел-близнецов?

Гипотеза Эрдёша. Верно ли, что если сумма обратных величин для некоторого множества натуральных чисел расходится, то в этом множестве можно найти сколь угодно длинные арифметические прогрессии?

Числа ван дер Вардена. При каком наименьшем N при любом разбиении множества $\{1, 2, \dots, N\}$ на два подмножества хотя бы одно из них будет содержать арифметическую прогрессию длиной 7?

Существует ли параллелепипед Эйлера (параллелепипед со всеми целочисленными рёбрами и лицевыми диагоналями), главная диагональ которого также имеет целую длину?

Открытые проблемы теории игр.

Отсутствует общая математическая теория игр, проводимых на пространстве функций (поскольку мощность множества действительных функций существенно превышает мощность континуума).

Отсутствует общая математическая теория псевдоигр (конфликтных ситуаций, не являющихся играми).

Отсутствует общая математическая теория некооперативных игр.

Не решена задача построения алгоритмов обучения решению игр, когда элементы платёжной матрицы не постоянны, а представляют собой случайные величины, либо неизвестны (игра вслепую).

Открытые проблемы в исследованиях операций.

Не существует комбинаторного метода решения целочисленных задач линейного программирования с полиномиальной (в отличие от экспоненциальной) оценкой трудоёмкости?

Отсутствует общая теория алгоритмических методов оптимизации, позволяющая обеспечить ускорение сходимости и выбор шага итерации в общем случае многошаговых алгоритмов.

Неизвестны правила определения момента установ-

ления стационарности алгоритма адаптации и обучения.

Неизвестны оценки зависимости точности аппроксимации от числа функций и оценки времени обучения для алгоритмов опознавания.

Неизвестны способы использования априорной информации о распределениях случайных величин для построения адаптивных фильтров.

Неизвестен способ применения адаптивного подхода при ускоренных испытаниях на надёжность.

Отсутствует общая теория сетевого планирования с применением адаптивного подхода при недостаточной априорной информации.

Можно ли произвольную вероятностно-операторную меру реализовать посредством некоторого физического прибора?

Неизвестны методы решения оптимизационных уравнений квантовой теории принятия решений и оценивания.

Каким образом точность оценок зависит от числа наблюдений в квантовой теории оценивания?

Открытые проблемы в уравнениях математической физики.

Отсутствует строгое математическое обоснование метода континуального интегрирования в квантовой теории поля.

Континуальные интегралы удаётся вычислить только для случая гауссовых квадратур. В общем

случае способ вычисления континуальных интегралов неизвестен.

Неизвестно точное решение уравнения Шрёдингера для многоэлектронных атомов.

В квантовой механике при решении задачи о рассеянии двух пучков на одном препятствии сечение рассеяния получается бесконечно большим.

Отсутствует законченная теория, объясняющая происхождение и эволюцию магнитного поля Земли.

Неизвестны точные формулы для силы отталкивания между остатками атомов в ионном кристалле.

Неизвестно доказательство принципа космической цензуры, а также точная формулировка условий, при которых он выполняется.

Отсутствует полная и законченная теория магнитосферы чёрных дыр. Неизвестна точная формула для вычисления числа различных состояний системы, коллапс которой приводит к возникновению чёрной дыры с заданными массой, моментом количества движения и зарядом.

Неизвестно доказательство в общем случае «теоремы об отсутствии волос» у чёрной дыры.

Отсутствует общая теория корректных краевых условий для обобщённых дифференциальных операторов с переменными коэффициентами.

Неизвестно общее доказательство, что ряд теории возмущений для электронов в зоне проводимости металлов сходится.

Неизвестен метод расчёта структурных факторов

для жидких металлов.

Существуют ли дифференциальные уравнения в частных производных, отличные от обычного волнового уравнения, но решения которых удовлетворяют принципу Гюйгенса?

Основная проблема аксиоматической квантовой теории поля. Неизвестна теория, удовлетворяющая всем аксиомам аксиоматической квантовой теории поля и описывающая взаимодействующие поля и нетривиальную матрицу рассеяния.

Необходимые и достаточные условия устойчивости равновесия консервативной системы до сих пор не найдены.

Перечисленные задачи составляют лишь небольшую часть открытых математических проблем, обсуждаемых на научных семинарах и конференциях. Существуют сотни нерешённых задач в алгебре, геометрии, теории функций и функциональном анализе, теории вероятностей, теории алгоритмов, теории чисел, теории графов, теории дифференциальных уравнений, а также в прикладной математике, связанной с цифровой экономикой, гидродинамикой, сопроматом, математическим моделированием и численными методами. Многие из них можно найти в Математической энциклопедии в пяти томах [2], изданной под редакцией академика И. М. Виноградова в 1977—1985 годах. Основу Энциклопедии составляют обзорные статьи, посвящённые важнейшим направлениям математики. Удивительное свойство статей — полнота обзора современного состоя-

ния теории при максимальной доступности изложения, эти статьи в целом доступны студентам-математикам старших курсов, аспирантам и специалистам в смежных областях математики. Как было указано ранее, Энциклопедию можно приобрести в интернет-магазинах.

Если вы будете посещать научные семинары кафедр и поговорите со своими научными руководителями, то несомненно узнаете о других актуальных проблемах математики, не входящих в опубликованные списки. Обратите внимание, как часто в списках математических проблем фигурируют выражения типа «отсутствует общая математическая теория, неизвестна закономерность» и т. п. Поэтому формулировку конкретной задачи или гипотезы можно считать своеобразным достижением в изучении открытой проблемы. С этим замечанием связана следующая рекомендация.

Предположим, что вам удалось решить одну из известных открытых проблем и вы собираетесь опубликовать свои результаты в виде научной статьи. Тогда научная этика требует, что в своей статье вы процитируете автора постановки задачи, если это возможно, или укажете научную школу, которая породила задачу, с помощью ссылки типа «из фольклора семинара МГУ по дифференциальным уравнениям».

Изучение и описание истории вопроса является составной частью научной работы.

3.3 Задания к семинарам

1. Прошу каждого студента подготовить краткое сообщение об одной или нескольких интересных нерешённых математических проблемах, обнаруженных в интернете или в беседах с научным руководителем. Постановка задачи должна быть понятна докладчику.

2. Математическая теория звука была создана в середине 19-го столетия. Эта теория успешно развивается и содержит ряд замечательных результатов.

Цифровые закономерности в музыке изучали многие учёные, среди них Пифагор и его школа, но до сих пор не существует эффективной цифровой теории музыки. Хорошо известно из неофициальных источников, что в 19-м и 20-м веках за создание математической теории музыки брались несколько выдающихся математиков, но потерпели неудачу.

Нам кажется, что в наш век цифровизации и компьютерных технологий проблема создания математической теории музыки должна быть решена.

3. Семь проблем тысячелетия очень важны и, скорее всего, они останутся актуальными длительное время. Но научная жизнь развивается быстро, и в последнее время появились новые важные направления математических исследований.

Что вы знаете о таких математических проблемах, как создание *цифровых двойников* дорогостоящих изделий и *анализе больших данных*?

Глава 4

Нули дзета-функции и простые числа

Дзета-функция Римана определяется рядом Дирихле

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \quad s = \sigma + it, \quad \sigma > 1.$$

Для абсолютной и равномерной сходимости этого ряда достаточно требовать, что $\sigma = \Re s \geq 1 + \delta$, где δ — некоторое положительное число. При $\sigma > 1$ справедливо представление в виде произведения Эйлера

$$\zeta(s) = \prod_p \frac{1}{1 - 1/p^s},$$

где p пробегает все простые числа $2, 3, 5, 7, 11, 13, \dots$.

Тождественность ряда и бесконечного произведения представляет собой одно из основных свойств дзета-функции. Это позволяет получить многочисленные соотношения, связывающие $\zeta(s)$ с важнейшими теоретико-числовыми функциями. Так, при $\sigma > 1$ име-

ет место формула

$$\ln \zeta(s) = s \int_2^\infty \frac{\pi(x)dx}{x(x^s - 1)}$$

где $\pi(x)$ — число простых чисел $\leq x$.

4.1 Теорема Эйлера и доклад Римана

Как функция действительного переменного функция

$$\zeta(\sigma) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\sigma}$$

была введена в 1737 году Л. Эйлером (L. Euler), он же указал и её разложение в произведение.

Затем эта функция рассматривалась П. Дирихле (P. Dirichlet) и, особенно успешно, П. Л. Чебышёвым в связи с изучением закона распределения простых чисел.

Приведем тождество Эйлера с доказательством.

Теорема 4.1 Пусть $\sigma > 1$. Тогда справедливо следующее тождество

$$\zeta(\sigma) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\sigma} = \prod_p \frac{1}{1 - 1/p^\sigma},$$

где p пробегает все простые числа $2, 3, 5, 7, 11, 13, \dots$.

Символом P_k обозначим простое число с порядковым номером $k \in \mathbb{N}$ (например, $P_4 = 7$). По теореме

Евклида множество простых чисел не является ограниченным. Поэтому

$$\lim_{k \rightarrow \infty} P_k = \infty.$$

Обозначим

$$S(\sigma, P_k) = \prod_{p=2}^{P_k} \frac{1}{1 - 1/p^\sigma},$$

где p пробегает все простые числа от 2 до P_k . По определению бесконечного произведения

$$\prod_p \frac{1}{1 - 1/p^\sigma} := \lim_{k \rightarrow \infty} S(\sigma, P_k).$$

Поскольку $p^\sigma > 1$ и поэтому

$$\frac{1}{1 - 1/p^\sigma} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{p^{j\sigma}} = 1 + \frac{1}{p^\sigma} + \frac{1}{p^{2\sigma}} + \frac{1}{p^{3\sigma}} + \dots,$$

то имеем

$$\begin{aligned} \zeta(\sigma) - S(\sigma, P_k) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\sigma} - \prod_{p=2}^{P_k} \frac{1}{1 - 1/p^\sigma} = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\sigma} - \prod_{p=2}^{P_k} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{p^{j\sigma}} = \sum_n^* \frac{1}{n^\sigma}, \end{aligned}$$

где сумма $\sum_n^*$ содержит бесконечно много слагаемых с $n \in \mathbb{N}$. Но при этом эта сумма не содержит тех слагаемых, для которых число n обладает свойством: разло-

жение этого числа n на простые множители содержит лишь простые числа от 2 до P_k . Следовательно, при любом $\sigma > 1$

$$0 < \zeta(\sigma) - S(\sigma, P_k) \leq \sum_{n=P_k+1}^{\infty} \frac{1}{n^{\sigma}} = O\left(\frac{1}{P_k^{\sigma-1}}\right) (P_k \rightarrow \infty).$$

Устремляя $k \in \mathbb{N}$ к бесконечности и применяя теорему о пределе зажатой последовательности, получаем отсюда

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (\zeta(\sigma) - S(\sigma, P_k)) = 0,$$

т. е.

$$\prod_p \frac{1}{1 - 1/p^{\sigma}} := \lim_{k \rightarrow \infty} S(\sigma, P_k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\sigma}},$$

что и требовалось доказать.

Отметим, что использованное нами в доказательстве соотношение

$$\sum_{n=P_k+1}^{\infty} \frac{1}{n^{\sigma}} = O\left(\frac{1}{P_k^{\sigma-1}}\right) \quad (P_k \rightarrow \infty)$$

является простым следствием интегрального признака Коши о сходимости числовых рядов.

Наиболее глубокие свойства функции $\zeta(s)$ были обнаружены позднее, когда её стали рассматривать как функцию комплексного переменного. Первым это сделал в 1876 году Б. Риман (см. В. Riemann [6]). Он, в частности, доказал следующие утверждения.

а) Функция $\zeta(s)$ допускает аналитическое продол-

жение на всю комплексную s -плоскость в виде

$$\begin{aligned} \pi^{-s/2} \Gamma(s/2) \zeta &= \\ &= 1/(s(s-1)) + \int_1^\infty (x^{s/2-1} + x^{(1-s)/2-1}) \theta(x) dx, \end{aligned}$$

где $\Gamma(\omega)$ - гамма-функция,

$$\theta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \exp(-\pi n^2 x).$$

Для продолжения дзета-функции на критическую полосу Риман предварительно доказал следующее новое тождество, а именно, получил представление для дзета-функции в виде несобственного интеграла, зависящего от параметра. Приведём с доказательством лемму Римана.

Лемма 4.1 Пусть $\sigma = \Re s > 1$, где $s = \sigma + it$ — комплексный параметр. Тогда справедливо следующее тождество

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = s \int_1^\infty \frac{[x] - x}{x^{s+1}} dx + \frac{s}{s-1}, \quad (4.1)$$

где $[x]$ — целая часть числа x .

Доказательство. Имеем

$$A_1 := s \int_1^\infty \frac{[x]}{x^{s+1}} dx =$$

$$\begin{aligned}
&= s \sum_{n=1}^{\infty} n \int_n^{n+1} \frac{1}{x^{s+1}} dx = \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{s}{x^{s+1}} dx = \\
&= - \sum_{n=1}^{\infty} n x^{-s} \Big|_n^{n+1} = \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} n \left[\frac{1}{n^s} - \frac{1}{(n+1)^s} \right] = \\
&= 1 \left[\frac{1}{1^s} - \frac{1}{2^s} \right] + 2 \left[\frac{1}{2^s} - \frac{1}{3^s} \right] + 3 \left[\frac{1}{3^s} - \frac{1}{4^s} \right] + \dots = \\
&= 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \dots \equiv \zeta(s).
\end{aligned}$$

С другой стороны,

$$A_1 := s \int_1^{\infty} \frac{x}{x^{s+1}} dx = s \int_1^{\infty} \frac{1}{x^s} dx = \frac{s}{s-1},$$

следовательно,

$$s \int_1^{\infty} \frac{[x] - x}{x^{s+1}} dx + \frac{s}{s-1} = A_1 + A_2 = \zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s},$$

что и требовалось доказать.

Правая часть в тождестве Римана (4.1) определена и представляет собой аналитическую функцию при $\sigma =$

$\Re s > 0$, исключая точку $s = 1$, так как при $\sigma = \Re s > 0$

$$\left| \frac{[x] - x}{x^{s+1}} \right| \leq \frac{1}{x^{\sigma+1}}, \quad \int_1^\infty \frac{1}{x^{\sigma+1}} dx < \infty.$$

Следовательно, лемма Римана с формулой (4.1) позволяет аналитически продолжить дзета-функцию на полосу $0 < \sigma = \Re s < 1$.

Лемма 4.2 Пусть $0 < \sigma = \Re s < 1$, где $s = \sigma + it$ — комплексный параметр. Тогда справедливо следующее тождество

$$\zeta(s) := s \int_0^\infty \frac{[x] - x}{x^{s+1}} dx, \quad (4.2)$$

где $[x]$ — целая часть числа x .

Доказательство. Формула (4.2) является следствием формулы (4.1) с учётом следующего равенства, справедливого при $0 < \sigma = \Re s < 1$:

$$s \int_0^1 \frac{[x] - x}{x^{s+1}} dx = s \int_0^1 \frac{-x}{x^{s+1}} dx = \frac{s}{s-1}.$$

Мы воспользовались тем, что $[x] = 0$ при $0 < x < 1$.

б) Риман также доказал, что $\zeta(s)$ является аналитической функцией для всех значений s , кроме $s = 1$, где она имеет простой полюс с вычетом, равным 1, и удовлетворяет функциональному уравнению

$$\pi^{-s/2} \Gamma(s/2) \zeta(s) = \pi^{-(1-s)/2} \Gamma((1-s)/2) \zeta(1-s).$$

Это уравнение называется функциональным уравне-

нием Римана. Для функции, введённой Б. Риманом для исследования дзета-функции и называемой кси-функцией Римана, это уравнение принимает вид

$$\xi(s) = \xi(1 - s),$$

а если положить

$$\Theta(t) = \xi(1/2 + it),$$

то оно принимает вид

$$\Theta(t) = \Theta(-t).$$

Последняя функция Θ замечательна тем, что она является чётной целой функцией, действительной для действительных t , и её нули на действительной оси соответствуют нулям функции $\zeta(s)$ на прямой $\sigma = 1/2$.

в) Поскольку $\zeta(s) \neq 0$ для $\sigma > 1$, то в полуплоскости $\sigma < 0$ эта функция имеет лишь простые нули в точках $s = -2\nu$, $\nu = 1, 2, \dots$. Эти нули называются тривиальными нулями дзета-функции $\zeta(s)$. Далее $\zeta(s) \neq 0$ для $s = \sigma \in (0, 1)$. Таким образом, все нетривиальные нули дзета-функции $\zeta(s)$ являются комплексными числами, обладают свойством симметрии относительно действительной оси $t = 0$ и относительно вертикали $\sigma = 1/2$ и лежат в полосе $0 \leq \sigma \leq 1$, которая называется критической полосой.

Б. Риман высказал также следующие утверждения.

R 1. Число $N(T)$ нулей функции $\zeta(s)$ в прямоугольнике $0 \leq \sigma \leq 1$, $0 < t < T$, выражается формулой

$$N(T) = \frac{1}{2\pi} T \ln T + \frac{1 + \ln(2\pi)}{2\pi} T + O(\ln T).$$

R 2. Пусть p пробегает нетривиальные нули $\zeta(s)$. Тогда ряд $\sum |p|^{-2}$ сходится, а ряд $\sum |p|^{-1}$ расходится.

R 3. функция $\xi(s)$ представима в виде

$$ae^{bs} \prod_p (1 - s/p) e^{s/p}.$$

R 4. Пусть $\Lambda(n)$ — функция Мангольда и

$$P(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n) / \ln n, \quad P_0(x) = 1/2[P(x+0) + P(x-0)].$$

Тогда при $x \geq 1$

$$P_0(x) = lix - \sum_p lix^p + \int_x^\infty du / ((u^2 - 1) \ln u) - \ln 2,$$

где lix — интегральный логарифм

$$lie^w = \int_{-\infty+iv}^{u+iv} \frac{e^z dz}{z}, \quad w = u + iv$$

R 5. Все нетривиальные нули дзета-функции $\zeta(s)$ лежат на прямой $\sigma = 1/2$.

4.2 Об исследованиях гипотезы Римана

После работы Б. Римана [6] проблема значений и, в частности, нулей дзета-функции приобрела широкую известность и ей посвящено большое число исследований. Утверждения Римана R_2 и R_3 были доказаны Ж. Адамаром (J. Hadamard, 1893), причём оказалось, что в утверждении R_3 имеем: $a = 1/2$, $b = \ln 2 + (1/2) \ln \pi - 1 - C/2$, где C — постоянная Эйлера; утверждения R_1 и R_4 доказаны Х. Мангольдтом (H. Mangoldt, 1894). Последнее утверждение R_5 не доказано и не опровергнуто. Это и есть знаменитая гипотеза Римана о нулях дзета-функции.

Отметим, что в силу лемм 4.1 и 4.2

гипотеза Римана о нулях дзета-функции равносильна следующему утверждению, для понимания которого достаточно знать лишь несобственные интегралы, зависящие от параметра:

все корни уравнения (относительно неизвестной $s = \sigma + it \in \mathbb{C}$)

$$\int_0^\infty \frac{[x] - x}{x^{s+1}} dx = 0$$

имеют вид

$$s = \frac{1}{2} + it, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Известно также, что *гипотеза Римана о нулях дзета-функции равносильна следующему утвержде-*

нию (в терминах теории чисел):

$$\pi(x) = \int_2^x \frac{du}{\ln u} + O(\sqrt{x} \ln x).$$

Приведем дальнейшие полезные сведения.

1) Предшественниками Римана по исследованию функции распределения простых чисел являются Евклид, Эйлер, Гаусс, Чебышёв, Дирихле и другие.

2) В начале 20-го века Д. Гильберт и другие отмечали, что по популярности среди математиков гипотеза Римана занимает 1-е место, а на втором месте несомненно находится великая теорема Ферма.

После Римана многие математики занимались исследованием дзета-функции и гипотезы Римана (см., например, [4]). Список таких математиков велик. Приведём лишь впечатляющий сокращённый список, включающий широко известные фамилии:

Вейерштрасс, Валле де Пуссен, Адамар, Х. Кох, Стилтес, Гильберт, М. Рисс, Пойа, Бэкунд, Харди, Сельберг, Литтлвуд, Рамануджан, Радемахер, Э. Ландау, Титчмарш, Тьюринг, Беллман, Г. Вейль, Виноградов, Карацуба, Одлышко, де Бранж, Атья, Матиясевич.

Главной проблемой в теории дзета-функции является проблема расположения её нетривиальных нулей и вообще значений в области $1/2 \leq \sigma \leq 1$. К числу основных направлений в исследованиях дзета-функции

относятся: определение возможно более широкой области слева от прямой $\sigma = 1$, где $\zeta(s) \neq 0$.

Первый нетривиальный результат о границе нулей дзета-функции был получен Ш. Ж. Валле Пуссенем (Ch. J. La Vallee-Poussin) в 1896; он показал, что существуют такие постоянная $A > 0$, $\alpha \geq 1$, что

$$\zeta(s) \neq 0 \quad \text{при} \quad \sigma \geq 1 - A/(\ln^\alpha(|t| + 2)).$$

Дальнейшие продвижения в этом направлении связаны с развитием методов оценок тригонометрических сумм. Самый мощный метод оценок такого рода принадлежит И. М. Виноградову. Последняя (к 1978 году) граница области, свободной от нулей дзета-функции, получена И. М. Виноградовым в 1958 году. Он доказал, что можно считать $\alpha > 2/3$. В терминах распределения простых чисел ей соответствует формула

$$\pi(x) = \int_2^x \frac{du}{\ln u} + O\left(xe^{-B \ln^{3/5} x}\right).$$

О нулях дзета-функции на прямой $\sigma = 1/2$ можно сказать следующее. По гипотезе Римана, все нетривиальные нули дзета-функции лежат на прямой $\sigma = 1/2$. Тот факт, что на этой прямой дзета-функция имеет бесконечно много нулей, впервые был доказан Г. Харди в 1914 году на основе одной формулы Рамануджана, гениального индийского математика.

Последний результат принадлежит А. Сельбергу (A. Selberg, 1942 год): число $N_0(T)$ нулей $\zeta(s)$, имею-

щих вид $1/2 + it$, удовлетворяет неравенству

$$N_0(T) > AT \ln T, \quad A > 0.$$

Это означает, что число нулей дзета-функции на прямой $\sigma = 1/2$ имеет тот же порядок роста, что и число всех её нетривиальных нулей:

$$N(T) = O(T \ln T).$$

Вообще, расстояние между соседними нулями $\zeta(s)$ оценивается следующей теоремой Литтлвуда (1924 г.): *для любого достаточно большого T функция $\zeta(s)$ имеет такой нуль γ , что*

$$|\gamma - T| < \frac{A}{\ln \ln \ln T}.$$

По-видимому, большинство экспертов предполагают, что гипотеза Римана верна. Но точно известно, что были и есть и скептики, причём выдающиеся математики Литтлвуд и Тьюринг были скептиками. Они считали, что гипотеза Римана скорее всего неверна. Это мнение разделяют и некоторые современные математики.

Как мы уже знаем, институт Клея обещает премию в 1 млн долларов США за доказательство гипотезы Римана. Но если будет дано отрицательное решение, то учёный совет института Клея вправе решить, можно ли считать данный контрпример окончательным решением проблемы, или же проблема может быть перефор-

мулирована в более узкой форме и оставлена открытой. Тогда автору контрпримера может быть выплачена небольшая часть награды.

Что ещё пишут в интернете о ходе исследований гипотезы Римана?

Пишут, что расчёты, проведённые с использованием суперкомпьютеров и для невероятно громадного множества нетривиальных нулей дзета-функции, подтверждают справедливость гипотезы Римана. Она подтверждена примерно для десяти триллионов первых нетривиальных нулей. Понятно, что вычислениями невозможно доказать гипотезу Римана в полной общности, но можно опровергнуть.

Пишут также, что простые числа играют важную роль в работе криптографических алгоритмов, поэтому после доказательства данной гипотезы математиков ожидает значительный прогресс в сфере шифрования и безопасности интернета.

Имеются весёлые и грустные истории, связанные с отношением к гипотезе Римана ряда знаменитых математиков, в особенности, с комментариями Гильберта, Харди, Стилтъяеса, По́йа, де Бранжа. Эти истории можно найти в интернете и научно популярных книгах, посвящённых гипотезе Римана.

Известно, что сохранились рукописи ряда лекций Вейерштрасса, в которых частенько встречается запись: *здесь анекдот*.

Следуя этой доброй традиции, я также прерывал свои лекции математическими анекдотами или крат-

кими историями из жизни знаменитых математиков. Естественно, всё это не включено в учебное пособие.

4.3 Задания к семинарам

1. Вспомните гениальное доказательство теоремы Евклида о том, что множество простых чисел бесконечно (по этому поводу см. книгу Дж. Литлвуда [7]).

2. Найдите и скачайте из интернета современные научно популярные книги по гипотезе Римана о нулях дзета-функции. Ниже в списке литературы я указал лишь одну книгу, а именно, монографию Е. К. Титчмарша [4] на русском языке. Кстати, издана книга Б. Римана [6] на русском языке. На страницах 216–224 этой книги напечатан доклад Римана «О числе простых чисел, не превышающих данной величины», где и выдвинута знаменитая теперь гипотеза.

3. Пополните приведённый выше список тех математиков, которые внесли свой вклад в изучение гипотезы Римана о нулях дзета-функции.

4. Найдите и скачайте из интернета сведения о доказательстве великой теоремы Ферма об уравнении $x^n + y^n = z^n$, где неизвестные x , y и z — натуральные числа, n — заданное натуральное число, $n \geq 3$.

5. Докажите формулу Эйлера

$$\zeta(2) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Глава 5

Две гипотезы комплексного анализа

В этой главе изложены известные факты, их можно найти в учебниках и монографиях по комплексному анализу. Большинство фактов имеются в книгах [11], [24], [39].

5.1 Геометрия Лобачевского

Геометрия Лобачевского основана на тех же посылках, что и привычная нам со школьной скамьи евклидова геометрия, за исключением аксиомы о параллельных.

Евклидова аксиома о параллельных гласит: *через точку, не лежащую на данной прямой, проходит только одна прямая, лежащая с данной прямой в одной плоскости и не пересекающая её.*

Эта аксиома представляется более сложной, чем другие аксиомы евклидовой геометрии, справедливость которых не вызывает сомнений. Поэтому в течение долгих лет, а именно, почти два тысячелетия, существова-

ло мнение о том, что аксиома о параллельных может быть доказана как теорема, т. е. её можно получить как следствие других аксиом.

Среди пытавшихся доказать аксиому о параллельных как теорему были математики разных эпох. Перечислим наиболее известные имена:

- * древнегреческие математики Клавдий Птолемей (II в.), Диадок Прокл (V в.),

- * иракский математик Ибн аль-Хайсам (конец X—начало XI веков), иранские математики Омар Хайям (2-я половина XI — начало XII вв.) и Насир ад-Дин ат-Туси (XIII в.),

- * немецкий математик Христофор Клавийус (1574), итальянские математики Пьетро Антонио Кательди (впервые в 1603 году напечатал работу, целиком посвященную вопросу о параллельных), Джованни Алфонсо Борелли (1658), Джо Витале (1680),

- * английский математик Джон Валлис (1693), итальянский математик Джованни Саккери (1733),

- * немецкий математик Иоганн Генрих Ламберт (1766), французский математик Адриен Мари Лежандр (1800).

Попутно отметим, что Клавдий Птолемей более известен нам как астроном, создатель геоцентрической модели вселенной, а Омара Хайяма мы знаем прежде всего как поэта и философа, знаменитого своими рубаями и мудрыми изречениями.

Лобачевский в работе «О началах геометрии» (1829

год) построил новую геометрию на основе постулата, противоположного постулату Евклида, геометрию столь же содержательную, как и евклидова, и свободную от противоречий.

В геометрии Лобачевского принимается следующая аксиома о параллельных:

через точку, не лежащую на данной прямой, проходят по крайней мере две прямых, лежащих с данной прямой в одной плоскости и не пересекающих её.

Изменение всего лишь одной аксиомы приводит к совершенно новой планиметрии. В частности, оказывается, что для суммы углов любого треугольника выполняется неравенство $\alpha + \beta + \gamma < 180^\circ$. Появляются новые формулы для всех метрических величин, в частности, новые формулы для вычисления площадей фигур, длин дуг и т. п. Для бесконечно малых фигур, точнее, асимптотически, новые формулы совпадают со старыми, в частности, для треугольников малых размеров $\alpha + \beta + \gamma \approx 180^\circ$.

Почти одновременно с Лобачевским и независимо от него к аналогичным выводам пришёл Янош Бойяи, а Карл Фридрих Гаусс пришёл к таким выводам ещё раньше.

Однако труды Бойяи не привлекли внимания, и он вскоре оставил эту тему, а Гаусс вообще воздерживался от публикаций, и о его взглядах можно судить лишь по нескольким письмам и дневниковым записям. Например, в письме 1846 года астроному Г. Х. Шумахеру Гаусс так отзывается о работе Лобачевского:

Это сочинение содержит в себе основания той геометрии, которая должна была бы иметь место и притом составляла бы строго последовательное целое, если бы евклидова геометрия не была бы истинной... Лобачевский называет её «воображаемой геометрией»; Вы знаете, что уже 54 года (с 1792 г.) я разделяю те же взгляды с некоторым развитием их, о котором не хочу здесь упоминать; таким образом, я не нашёл для себя в сочинении Лобачевского ничего фактически нового. Но в развитии предмета автор следовал не по тому пути, по которому шёл я сам; оно выполнено Лобачевским мастерски в истинно геометрическом духе. Я считаю себя обязанным обратить Ваше внимание на это сочинение, которое, наверное, доставит Вам совершенно исключительное наслаждение.

Лобачевский ушёл из жизни в 1856 году. Спустя несколько лет была опубликована переписка Гаусса с отзывами о геометрии Лобачевского. Публикуется и труд Бойяи, комментарии видных геометров.

В 1868 году выходит статья Э. Бельтрами об интерпретациях геометрии Лобачевского как обычной (евклидовой) геометрии на поверхностях с постоянной отрицательной кривизной. Такая поверхность тогда уже была известна — это псевдосфера Миндинга. Бельтрами обнаружил, что локально плоскость Лобачевского изометрична участку псевдосферы.

Окончательное признание новой геометрии состоялось в 1871 году, после появления модели Клейна с

интерпретацией полной плоскости Лобачевского.

Вейерштрасс посвящает геометрии Лобачевского специальный семинар в Берлинском университете в 1870 году. Казанское физико-математическое общество организует издание полного собрания сочинений Н. И. Лобачевского, а в 1893 году столетие Н. И. Лобачевского отмечается в международном масштабе.

Обсудим подробнее модели геометрии Лобачевского, предложенные рядом математиков.

Выделим известные модели плоскости Лобачевского, предложенные Клейном и Пуанкаре.

В 1871 году Клейн предложил первую полноценную модель плоскости Лобачевского. Плоскостью служит внутренность круга, прямой — хорда круга без концов, а точкой — точка внутри круга. Важную роль играют преобразования круга в самого себя, которое переводит хорды в хорды. В этой модели расстояние между точками и угол определяются специальными формулами.

В модели Пуанкаре за плоскость Лобачевского принимается либо единичный круг, либо верхняя полуплоскость. Если за плоскость Лобачевского принята верхняя полуплоскость, то роль прямых выполняют содержащиеся в этой полуплоскости полуокружности с центрами на оси абсцисс и начинающиеся на этой оси вертикальные лучи. Элемент длины в модели Пуанкаре имеет вид: ds/y . Отметим, что метрика Пуанкаре

является конформно инвариантной.

Сам Лобачевский применил свою геометрию к вычислению определённых интегралов. В теории функций комплексного переменного геометрия Лобачевского помогла построить теорию автоморфных функций. Связь с геометрией Лобачевского была здесь отправным пунктом исследований Пуанкаре.

Геометрия Лобачевского находит применение также в теории чисел, в её геометрических методах, объединённых под названием «геометрия чисел».

Альберт Эйнштейн гармонично включил намеченное Лобачевским пространство в теорию относительности. Была установлена тесная связь геометрии Лобачевского со специальной и общей теорией относительности. Имеется ряд применений в решении других задач математической физики.

Кроме вполне конкретных приложений геометрии Лобачевского, нужно отметить ещё один, не менее важный факт. Открытие Н. И. Лобачевским новой геометрии оказало огромное методологическое влияние на развитие ряда разделов современной математики и привело к созданию множества новых «математических миров», имеющих важные приложения.

Отметим также, что единообразную интерпретацию трёх геометрий (Евклида, Лобачевского и геометрии на сфере) представил Ф. Клейн (1871 год). По предложению Клейна геометрию Лобачевского называют гиперболической геометрией.

Обсудим подробнее модель Пуанкаре (1882 г.), свя-

занную с единичным кругом и с группами дробно-линейных конформных отображений. Согласно этой модели Пуанкаре, плоскостью Лобачевского объявляется единичный круг $D = \{z : |z| < 1\}$. Роль точек играют точки, а роль прямых – диаметры круга D и лежащие в круге D дуги окружностей вида $|z - z_0| = \rho$ ($|z_0| > 1$), ортогональных к единичной окружности $|z| = 1$.

Пуанкаре доказал, что эти дуги являются геодезическими линиями, если дифференциальный элемент длины дуги определять по формуле

$$d\sigma = \frac{|dz|}{1 - |z|^2}.$$

А именно, среди всех линий $\gamma(z_1, z_2)$, лежащих в круге D и соединяющих заданные точки z_1, z_2 из круга D , инфимум в равенстве

$$l(z_1, z_2) = \inf_{\gamma(z_1, z_2)} \int_{\gamma(z_1, z_2)} \frac{|dz|}{1 - |z|^2}$$

реализуется на кривой $\gamma(z_1, z_2)$, которая является либо отрезком диаметра, либо дугой окружности, ортогональной к окружности $|z| = 1$.

Теорема 5.1 *Метрика Пуанкаре является конформно инвариантной.*

Доказательство. Пусть T – конформное отображение круга $|\zeta| < 1$ на круг $|z| < 1$. Конформная инвариант-

ность метрики Пуанкаре означает, что должно иметь место тождество

$$\frac{|dz|}{1 - |z|^2} = \frac{|d\zeta|}{1 - |\zeta|^2}$$

для всех точек z и ζ единичного круга, таких, что

$$z = T(\zeta).$$

Из общего курса по комплексному анализу известно, что любой конформный автоморфизм T единичного круга определяется формулой

$$z = T(\zeta) = e^{i\alpha} \frac{\zeta - a}{1 - \bar{a}\zeta} \quad \alpha \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{C}, |a| < 1.$$

Непосредственными вычислениями получаем

$$T'(\zeta) = e^{i\alpha} \frac{1 - |a|^2}{(1 - \bar{a}\zeta)^2}.$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} 1 - |T(\zeta)|^2 &= \frac{|1 - \bar{a}\zeta|^2 - |\zeta - a|^2}{|1 - \bar{a}\zeta|^2} = \\ &= \frac{1 + |a|^2|\zeta|^2 - |\zeta|^2 - |a|^2}{|1 - \bar{a}\zeta|^2} = \\ &= \frac{(1 - |a|^2)(1 - |\zeta|^2)}{|1 - \bar{a}\zeta|^2}, \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$|T'(\zeta)| = \frac{1 - |T(\zeta)|^2}{1 - |\zeta|^2}.$$

Таким образом, приходим к требуемому соотношению

$$\left| \frac{dz}{d\zeta} \right| = \frac{1 - |z|^2}{1 - |\zeta|^2},$$

этим и завершается доказательство.

Теорема 5.2 *Гиперболическое расстояние $\rho_D(z_1, z_2)$ между точками $z_1, z_2 \in D$ определяется формулой*

$$\rho_D(z_1, z_2) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+t}{1-t}, \quad t = \left| \frac{z_1 - z_2}{1 - \bar{z}_1 z_2} \right|.$$

Действительно, преобразование

$$w = T(z) = e^{i\alpha} \frac{z - z_1}{1 - \bar{z}_1 z}$$

и конформная инвариантность метрики дают равенство

$$\rho_D(z_1, z_2) = \rho_D(0, t).$$

А величина $\rho_D(0, t)$ легко вычисляется:

$$\rho_D(0, t) = \int_0^t \frac{dr}{1-r^2} = \frac{1}{2} \ln \frac{1+t}{1-t}.$$

Метрику Пуанкаре можно определить в любой односвязной области $\Omega \subset \mathbb{C}$, $\Omega \neq \mathbb{C}$. Для этого рассмотрим однолистное конформное отображение $F : D \rightarrow \Omega$.

Через $w = F(z)$ обозначим соответствующую голоморфную функцию со значениями в Ω .

Область Ω превратим в плоскость Лобачевского, определив в ней коэффициент метрики Пуанкаре $\lambda_\Omega(w)$ равенством

$$\lambda_\Omega(w)|dw| = \lambda_D(z)|dz| \quad \forall z \in D, \quad w = F(z) \in \Omega.$$

Имеем

$$\lambda_\Omega(F(z)) |F'(z)| = \frac{1}{1 - |z|^2} \quad \forall z \in D,$$

тогда

$$\lambda_\Omega(w) = \frac{|F'(F^{-1}(w))|^{-1}}{1 - |F^{-1}(w)|^2} \quad \forall w \in \Omega.$$

Теми же формулами определяется и метрика Пуанкаре (т. е. гиперболическая метрика) для многосвязной области $\Omega \subset \mathbb{C}$, граница которой содержит не менее трёх точек в $\overline{\mathbb{C}}$. В этом случае $F : D \rightarrow \Omega$ – накрывающее отображение из теоремы Римана-Пуанкаре о конформных отображениях.

Рассмотрим принцип гиперболической метрики.

Пусть Ω_1 и Ω_2 – односвязные области на плоскости, не совпадающие со всей плоскостью $\mathbb{C}$. Через $F : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ обозначим однолистное конформное отображение Ω_1 на Ω_2 . По определению метрики Пуанкаре имеем тождество

$$\lambda_{\Omega_1}(z)|dz| = \lambda_{\Omega_2}(w)|dw|, \quad w = F(z), \quad z \in \Omega_1.$$

Следовательно,

$$|F'(z)| \equiv \frac{\lambda_{\Omega_1}(z)}{\lambda_{\Omega_2}(w)}.$$

Теорема 5.3 (Принцип гиперболической метрики.)
Пусть функция $w = f(z)$ голоморфна в области Ω_1 и удовлетворяет условию $f(\Omega_1) \subset \Omega_2$. Тогда

$$|f'(z)| \leq \frac{\lambda_{\Omega_1}(z)}{\lambda_{\Omega_2}(f(z))}, \quad z \in \Omega_1,$$

или, что то же самое,

$$\lambda_{\Omega_2}(w)|dw| \leq \lambda_{\Omega_1}(z)|dz|, \quad z \in \Omega_1, w = f(z) \in \Omega_2.$$

Равенство имеет место тогда и только тогда, когда f – однолистное конформное отображение области Ω_1 на область Ω_2 .

Из этой теоремы следует, что при голоморфном отображении одной области в другую неевклидовы длины и неевклидовы площади будут только уменьшаться за исключением случая, когда эта функция осуществляет однолистное конформное отображение области определения функции на область её значений.

Пусть $\lambda_{\Omega}(z)$ – коэффициент метрики Пуанкаре для гиперболической области. Величина $R(z, \Omega) = 1/\lambda_{\Omega}(z)$ называется гиперболическим радиусом области Ω в точке z . Если Ω – односвязная область, не содержащая

бесконечно удалённой точки, то величина

$$R(z, \Omega) = 1/\lambda_{\Omega}(z)$$

называется конформным радиусом. Например, для единичного круга $D = \{z : |z| < 1\}$ конформный радиус определяется равенством $R(z, D) = 1 - |z|^2$.

5.2 О гипотезах Бибербаха и Кшижа

Рассмотрим конформные отображения внешности единичного круга $D^- = \{\zeta : |\zeta| > 1\} \subset \overline{\mathbb{C}}, \infty \in D^-$. В формулировке следующей теоремы Гронуолла площадь явно не фигурирует, но неотрицательность площади является основным доводом в доказательстве.

Теорема 5.4 (Внешняя теорема площадей.) *Пусть F – однолистное конформное отображение области D^- , оставляющее на месте бесконечно удалённую точку и имеющее следующее разложение в ряд Лорана*

$$F(\zeta) = \zeta + \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{\zeta^n}, \quad |\zeta| > 1.$$

Тогда имеет место неравенство $\sum_{n=1}^{\infty} n|\alpha_n|^2 \leq 1$, в частности, $|\alpha_1| \leq 1$. Равенство $|\alpha_1| = 1$ верно тогда и только тогда, когда

$$F(\zeta) = \zeta + \alpha_0 + \frac{e^{i\gamma}}{\zeta}, \quad \gamma \in \mathbb{R}.$$

В начале 20 века для стандартизации проблем, возникающих при исследовании однолистных конформных отображений $f : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$, были введены два основных класса однолистных функций. Приведём их определения.

1) Класс $\mathbb{S}$ – класс голоморфных однолистных функций $f(z)$, определённых в $D = \{z : |z| < 1\}$ и имеющих там разложение в ряд Тейлора вида

$$f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n, \quad |z| < 1.$$

Таким образом, требуется выполнение нормировок $f(0) = 0 = f'(0) - 1$, т. е. отличие вышеприведённого ряда для функции класса $\mathbb{S}$ от общего разложения в ряд Тейлора заключается в том, что $a_0 = 0$ и $a_1 = 1$.

Отметим также простой геометрический смысл нормировок двух первых коэффициентов: для любой функции $f \in \mathbb{S}$ область $\Omega = f(D)$ содержит точку $w = 0$ и конформный радиус Ω в этой точке равен 1, тем самым фиксирована одна из гиперболических характеристик области.

2) Класс Σ – класс мероморфных однолистных в области в $D^- = \{\zeta : |\zeta| > 1\}$ функций $F(\zeta)$ с разложением в ряд Лорана

$$F(\zeta) = \zeta + \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{\zeta} + \frac{\alpha_2}{\zeta^2} + \dots = \zeta + \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{\zeta^n}, \quad |\zeta| > 1.$$

Видно, что предписаны следующие дополнительные условия нормировки: $F(\infty) = \infty, F'(\infty) = 1$. В частности, на бесконечности функция $F(\zeta)$ имеет простой полюс, в других точках области D^- функция $F(\zeta)$ является голоморфной.

Отметим, что обозначения этих классов однолистных функций связаны с немецким словом «Schlicht». Словосочетание «однолистная функция» применительно к однолистным конформным отображениям на английском языке передается как «schlicht function» либо «univalent function».

Итак, внешняя теорема площадей (см. выше) утверждает, что для функции $F \in \Sigma$ имеет место следующее неравенство $\sum_{n=1}^{\infty} n|\alpha_n|^2 \leq 1$. Удивительный факт: топологическое условие однолистности отображения порождает метрические следствия – оценки модулей коэффициентов. Аналогично обстоит дело и с функциями класса $\mathbb{S}$. Для них оказываются справедливыми разнообразные оценки.

Теорема 5.5 (Теорема Бибербаха, 1916 год.) *Для любой функции $f \in \mathbb{S}$ с разложением в ряд Тейлора*

$$f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n, \quad |z| < 1,$$

имеет место точная оценка $|a_2| \leq 2$. Равенство $|a_2| = 2$ реализуется тогда и только тогда, когда

$$f(z) \equiv K(z) = \frac{z}{(1 - e^{i\gamma} z)^2}, \quad \gamma \in \mathbb{R}.$$

где $K(z)$ – так называемая функция Кёбе.

Дифференцируя почленно ряд (бесконечную геометрическую прогрессию) в единичном круге, легко получаем разложение в ряд функции Кёбе при $\gamma = 0$:

$$K_0(z) = \frac{z}{(1-z)^2} = z + 2z^2 + 3z^3 + \dots + nz^n + \dots$$

Итак, для этой функции $a_n = n$ при любом $n \geq 2$. С учётом этого факта в 1916 году Л. Бибербах выдвинул следующую гипотезу: $|a_n| = \frac{|f^{(n)}(0)|}{n!} \leq n$ для любой функции $f \in \mathbb{S}$. Очевидно, если эта гипотеза верна, то экстремальной функцией, для которой реализуются равенства в этих оценках, является функция Кёбе.

К. Лёвнер (1923 г.) доказал, что гипотеза Бибербаха верна при $n = 3$, а именно, $|a_3| \leq 3$. После него в течение шести десятилетий гипотезой занимались многие математики, подтверждая её в частных случаях. Точку поставил Луи де Бранж в 1985 году, доказав, что гипотеза Бибербаха верна при любом $n \geq 2$. На самом деле Луи де Бранж в 1985 году доказал более общее утверждение, а именно, он доказал гипотезу Милина, из которой следует гипотеза Бибербаха.

В. Рогозинский в 1943 году выдвинул следующую обобщённую гипотезу Бибербаха:

пусть задана голоморфная функция $f(z) = z + a_2z^2 + \dots$, $|z| < 1$. Если f подчинена некоторой функции $g \in \mathbb{S}$, то $|a_n| \leq n$, $n = 2, 3, \dots$ Обобщённая гипотеза Бибербаха также оказалась верной, так как она следует из более общей гипотезы, высказанной в 1967 году

И. М. Милиным и доказанной в 1985 году Луи де Бранжем с использованием теории Лёвнера.

Для полноты информации сформулируем здесь гипотезу Милина: пусть $f \in \mathbb{S}$, и пусть γ_n — так называемые логарифмические коэффициенты, определённые соотношением

$$\ln \frac{f(z)}{z} = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n z^n, \quad |z| < 1.$$

Тогда для любого натурального числа n справедливы неравенства

$$\sum_{m=1}^n \sum_{k=1}^m \left(k|\gamma_k|^2 - \frac{1}{k} \right) \leq 0.$$

До сих пор не доказана в общем случае следующая знаменитая гипотеза Кшижа (J. G. Krzyż): *если функция $f(z)$ является аналитической в единичном круге и удовлетворяет условию $0 < |f(z)| \leq 1$ для любого $z \in D$, то для коэффициентов её ряда Тейлора $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $|z| < 1$, справедлива точная оценка $|a_n| \leq 2/e$ ($n \geq 1$).*

Гипотеза Кшижа доказана при $n = 1$ самим Кшижем, при $n = 2$, $n = 3$, $n = 4$ и $n = 5$ другими математиками (см. [39]). При $n \geq 6$ проблема остаётся открытой. По мнению ряда известных специалистов, несмотря на простоту формулировки, гипотеза Кшижа намного сложнее и глубже, чем знаменитая проблема Бибербаха. Но, как всегда, не исключено, что кто-то

найдёт простое, оригинальное решение проблемы.

5.3 Задания к семинарам

1. Попробуйте повторить успех Кшижа, т. е. построить доказательство этой гипотезы при $n = 1$.

2. Не решена проблема оценок коэффициентов в классе Σ . В частности, для функций F с разложением вида

$$F(\zeta) = \zeta + \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{\zeta} + \frac{\alpha_2}{\zeta^2} + \dots = \zeta + \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{\zeta^n}, \quad |\zeta| > 1.$$

неизвестен даже точный порядок убывания по n при $n \rightarrow \infty$ величины $A_n := \max_{F \in \Sigma} |\alpha_n|$.

Вы можете легко доказать лишь следующее утверждение: *если $F \in \Sigma$, то $|\alpha_n| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$, оценка точна лишь при $n = 1$. Докажите!*

3. Ряд других открытых проблем геометрической теории функций комплексного переменного вы найдёте в книгах Г. Полия, Г. Сегё [9], А. В. Гудмана [10], Х. Поммеренке [11], в статье Д. Салливана [12] и книге Л. Карлесона и Т. В. Гамелина [13] (см. также работы [38], [39]).

4. Отвлечёмся на другие задачи, связанные с движением на плоскости. Что вы знаете по топологической задаче Эйлера о семи мостах Кёнигсберга и современной проблеме по *управлению транспортными потоками*?

Глава 6

Задачи математической физики

Для решения краевых задач математической физики разработан ряд общих методов. Центральное место среди них занимает вариационный подход. Он основан на интегральных неравенствах, справедливых для всех функций, которые принадлежат подходящему пространству Соболева в заданной области Ω из евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$). Известен ряд классов вариационных неравенств, связанных с именами Стеклова, Пуанкаре, Фридрихса, Соболева, Харди и других.

Главная трудность при исследовании вариационных неравенств состоит в оценках констант, точнее, специальных функционалов области Ω , зависящих также от числовых параметров задачи. Существование конечных констант означает ограниченность норм соответствующих операторов вложения, и это требование приводит к «сортировке» областей Ω , точнее, к описанию «хороших» областей, для которых соответствующая задача математической физики имеет решение.

Отметим, что ряд неравенств математической физики можно найти в следующих книгах: F. Rellich [18] (1969), M. Reed and B. Simon [19] (1979), О. А. Ладыженская [20] (1985), В. Мазья [21] (1985), А. А. Balinsky, W. D. Evans and R. T. Lewis [22] (2015), М. Ruzhansky and D. Suragan [23] (2019), Ф. Г. Авхадиев [24] (2020).

6.1 Обобщённые задачи Сен-Венана

В этом пункте кратко описаны прикладные задачи, подробное изложение можно найти в работах [9], [14], [24].

По образному выражению Г. Г. Харди, золотым веком формул в математике был век 19-й. В 19-м и 20-м веках развитие ряда классических формул привело к интересным задачам, некоторые из них являются актуальными и в настоящее время. В данном пункте кратко описаны история, развитие и нерешённые задачи, связанные с формулами Кулона и Коши для жёсткости кручения упругих балок. Будут изложены также несколько новых утверждений и примеров, относящихся к данному кругу вопросов.

Вычислениям и оценкам жёсткости кручения посвящено много сотен работ. Монографии Б. Сен-Венана, С. П. Тимошенко, Н. Х. Арутюняна и Б. Л. Абрамяна (см. библиографию в статье [14]) содержат обзор экспериментальных основ теории, а также большое число теоретических и прикладных результатов. Ставшая классической книга Г. Поля и Г. Сегё [9] является базовой по изопериметрическим неравенствам для

жёсткости кручения. В статье [14] автором получено положительное решение следующей проблемы, возникшей в работах Коши и Сен-Венана:

найти геометрический параметр, эквивалентный коэффициенту жёсткости кручения упругих балок с односвязными сечениями.

Отметим, что в классических работах вопрос был связан с поиском приближённой формулы, обобщающей формулу Кулона и выражающей коэффициент жёсткости кручения через простые геометрические величины. Обсудим теперь подробнее формулу Кулона и её аналоги.

В 1784 году Ш. Кулон изобрел высокоточные крутильные весы и в связи с этим опубликовал работу, в которой момент кручения упругого стержня с *круглым сечением* Ω определялся произведением

$$M = \theta \mu P.$$

Здесь θ — угол кручения, делённый на длину стержня, μ — модуль сдвига, зависящий лишь от свойств материала стержня. Важный для дальнейшего изложения третий сомножитель P называется жёсткостью кручения и определяется Кулоном в явном виде как $(\pi/2)r^4$, где r — радиус круглого сечения. Эта величина была истолкована как момент инерции I_0 круга радиуса r относительно своего центра.

В дальнейшем формула Кулона использовалась в течении нескольких десятилетий и для расчётов кру-

чения стержней и упругих однородных изотропных балок с поперечным сечением Ω произвольной формы. При этом полагали, что

$$P(\Omega) \approx I_0(\Omega). \quad (6.1)$$

Здесь $I_0(\Omega)$ — полярный момент плоской области Ω , т. е. момент инерции Ω относительно её центра тяжести:

$$I_0(\Omega) = \iint_{\Omega} [(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2] dx dy,$$

где (x_c, y_c) — центр тяжести области Ω .

Такое расширенное толкование формулы (6.1), предложенной Кулоном лишь для круглых сечений, привело к ошибкам. Рядом экспериментаторов было обнаружено, что $P(\Omega) < I_0(\Omega)$ для некруговых сечений и поэтому формула (6.1) требует уточнений. В 1829 году Коши для прямоугольных сечений предложил формулу

$$P \approx 4I_x I_y / I_0, \quad (6.2)$$

где I_x и I_y — моменты инерций относительно главных осей Ω , $I_x + I_y = I_0$.

Очевидно, из формулы (6.2) следует формула (6.1), если Ω — круг.

Но в общем случае $4I_x I_y / I_0 \leq I_0$.

В 1847 году в нескольких статьях Сен-Венан дал полное решение задачи кручения стержня с односвязным сечением Ω . Его классический труд, обобщающий

все имеющиеся результаты, был издан в 1856 году и переведён на русский язык. Теория Сен-Венана, дополненная его учеником Буссинеском, излагается и в современных учебниках по теории упругости. Согласно этой теории

$$P = P(\Omega) = 2 \iint_{\Omega} v(x, y) dx dy, \quad (6.3)$$

где $v = v(x, y)$ является решением краевой задачи

$$\Delta v = -2, \quad x + iy \in \Omega; \quad v = 0, \quad x + iy \in \partial\Omega. \quad (6.4)$$

Пользуясь изобретённым им полуобратным методом, Сен-Венан определил точно $P(\Omega)$ для всех прямоугольников и большого числа областей, ограниченных алгебраическими кривыми. Для круга получается результат Кулона, для прямоугольников формула Коши (6.2) оказывается лишь некоторым приближением точного решения. Но удивительно то, что формула Коши (6.2) оказывается точной для всех эллипсов.

Сен-Венан предложил новую приближённую формулу

$$P(\Omega) \approx \frac{1}{4\pi^2} \frac{S^4(\Omega)}{I_0(\Omega)}, \quad (6.5)$$

где $S(\Omega)$ — площадь области Ω , также точную для всех эллипсов. Он показал численно, что $4\pi^2 P / (S^4 / I_0)$ мало отличается от 1 во всех известных ему случаях.

На основе численного анализа $I_0(\Omega)$ в связи с (6.5) Сен-Венан пришёл к своей знаменитой гипотезе о мак-

симальности $P(\Omega)$ для круга при фиксированном $S(\Omega)$, т. е. к неравенству

$$\frac{P(\Omega)}{S^2(\Omega)} \leq \frac{1}{2\pi}.$$

Естественной является следующая формализация подобных задач (см. [9], [14]).

Задача 1. Для физической величины $k(\Omega)$ найди геометрические величины (функционалы) $\alpha_1 = \alpha_1(\Omega), \dots, \alpha_m = \alpha_m(\Omega)$ и функцию F такие, что

$$k(\Omega) \sim F[\alpha_1(\Omega), \dots, \alpha_m(\Omega)] \quad (6.6)$$

на множестве всех односвязных областей Ω на плоскости.

Под физической величиной $k = k(\Omega)$ подразумевается неотрицательный функционал, определяемый решением некоторой краевой или вариационной проблемы. Эквивалентность (6.6) понимается в обычном смысле: существуют геометрические величины (функционалы) $\alpha_1 = \alpha_1(\Omega), \dots, \alpha_m = \alpha_m(\Omega)$ и абсолютные положительные постоянные c_1, c_2 такие, что для любой односвязной области Ω

$$c_1 F[\alpha_1, \dots, \alpha_m] \leq k(\Omega) \leq c_2 F[\alpha_1, \dots, \alpha_m]. \quad (6.7)$$

В качестве $k(\Omega)$ мы рассматриваем коэффициент жёсткости кручения $P = P(\Omega)$, определяемый хорошо

известными соотношениями:

$$\frac{P(\Omega)}{4} = \sup_{u \in C_0^\infty(\Omega)} \frac{\left(\iint_{\Omega} |u| dx dy \right)^2}{\iint_{\Omega} |\nabla u|^2 dx dy},$$

$$P(\Omega) = 2 \iint_{\Omega} v dx dy, \quad (6.8)$$

где ∇u — градиент функции $u = u(x, y)$, $C_0^\infty(\Omega)$ — множество финитных бесконечно-дифференцируемых в области Ω функций, $v = v(x, y)$ — решение задачи Дирихле для уравнения Пуассона $\Delta v = -2$ с краевым условием $v = 0$.

Известно большое число результатов, непосредственно связанных с задачей 1 для коэффициента жёсткости кручения.

1) Классические приближенные формулы, полученные Кулоном (1784 г.), Коши (1829 г.) и Сен-Венаном (1847 г.) соответственно, имеют вид

$$P \approx I_0, \quad P \approx 4I_x I_y / I_0, \quad P \approx S^4 / (4\pi^2 I_0), \quad (6.9)$$

где I_0 — полярный момент инерции области Ω , I_x и I_y — её моменты инерций относительно главных осей, S — площадь Ω .

Общую теорию кручения, включающую формулу (6.8), разработал Сен-Венан. Согласно этой теории и физическим экспериментам, *формула Кулона $P = I_0$ точна для круга, но не решает задачу 1 даже в классе*

прямоугольников.

Известные приближенные формулы дают решение задачи 1 для жёсткости кручения в практически важных, но в *узкоспециальных классах областей* (речь идет о поперечных сечениях уголков, швеллеров, тавровых балок, тонких профилей и т.п.).

Изопериметрические неравенства Сен-Венана, Е. Николаи, К. Бэндла, Л. Пейна и других математиков для $P(\Omega)$ сохраняют черту классического изопериметрического неравенства: они дают лишь *односторонние оценки*. Исключение составляют выпуклые области: *формула Сен-Венана и некоторые другие формулы решают задачу для выпуклых областей, но не решают её в классе односвязных областей*.

3) До наших работ был не решён для $P(\Omega)$ следующий, более слабый, вариант задачи 1.

Задача 2. *Отличается от задачи 1 только тем, что некоторые из $\alpha_j(\Omega)$ могут быть физическими величинами, более простыми, чем $k(\Omega)$.*

К решению задачи 2 для $k(\Omega) = P(\Omega)$ привел бы положительный ответ на следующую *гипотезу Поля и Сегё* [9], с.39, пункт 21:

$$\mu_0 = \inf_{\Omega} [P(\Omega)\lambda_1(\Omega)/S(\Omega)] > 0? \quad (6.10)$$

Здесь $\lambda_1(\Omega)$ — первое собственное значение задачи Дирихле для уравнения Лапласа, $S(\Omega)$ — площадь Ω .

Далее мы изложим кратко результаты по решению задач 1 и 2.

Мы даём новую интерпретацию формулы Кулона $P(\Omega) \approx I_0(\Omega)$, заменяя полярный момент инерции $I_0(\Omega)$ моментом инерции Ω относительно границы.

Пусть Ω — односвязная область на плоскости $\mathbf{C}$ комплексного переменного $z = x + iy$, $dist(z, \partial\Omega)$ — расстояние от точки z до границы $\partial\Omega$ области Ω , $R(z, \Omega)$ — конформный радиус Ω в точке $z \in \Omega$. Определим две величины

$$I(\partial\Omega) = \iint_{\Omega} dist^2(z, \partial\Omega) dx dy, \quad (6.11)$$

$$I_c(\Omega) = \iint_{\Omega} R^2(z, \Omega) dx dy, \quad (6.12)$$

которые можно назвать, соответственно, *моментом инерции области Ω относительно $\partial\Omega$* и *конформным моментом инерции области Ω* . Справедлива

Теорема 6.1 (Ф. Г. Авхадиев [14]). *Для односвязных областей $\Omega \subset \mathbf{C}$*

$$P(\Omega) \sim I(\partial\Omega) \sim I_c(\Omega), \quad (6.13)$$

а именно, имеет место цепочка неравенств

$$I(\partial\Omega) \leq I_c(\Omega) \leq P(\Omega) \leq 4I_c(\Omega) \leq 64I(\partial\Omega). \quad (6.14)$$

Теорема 6.1 охватывает и предельный случай, т. е. справедливо

Следствие 6.1.1 $P(\Omega) = \infty$ *тогда и только тогда, когда $I(\partial\Omega) = \infty$.*

Ответ на вопрос Поля и Сегё (6.10) оказывается отрицательным.

Следствие 6.1.2 *Для односвязных областей Ω*

$$\mu_0 = \inf[P(\Omega)\lambda_1(\Omega)/S(\Omega)] = 0.$$

Эквивалентность $I(\partial\Omega) \sim I_c(\Omega)$ в (6.13) и крайние неравенства в (6.14) являются простыми следствиями известных поточечных неравенств из теории конформных отображений

$$\text{dist}(z, \partial\Omega) \leq R(z, \Omega) \leq 4 \text{dist}(z, \partial\Omega), \quad z \in \Omega.$$

Напротив, соотношения $P(\Omega) \sim I_c(\Omega)$ и $P(\Omega) \sim I(\partial\Omega)$ имеют лишь интегральный характер. Действительно, $P(\Omega) = \iint v \, dx \, dy$, где v — решение краевой задачи: $\Delta v = -2$ в области и $v = 0$ вдоль границы. Но в поточечных неравенствах вида

$$c_1 \leq \frac{v(x, y)}{\text{dist}^2(z, \partial\Omega)} \leq c_2, \quad z \in \Omega, \quad (6.15)$$

неверна, по меньшей мере, правая оценка: $c_2 = \infty$ из простого сравнения порядков нулей этих функций на границе Ω . Доказательство верхних оценок в (6.14) основано на некоторых конформно инвариантных неравенствах, имеющих и другие применения.

Доказательства этих результатов достаточно сложны, их можно найти в книге [24]. Обсудим теперь подробнее неравенства (6.15). Правое неравенство в (6.15) с постоянной $c_2 < +\infty$ невозможно, в чем можно

убедиться, например, рассмотрев простейшую область $|\zeta| < 1$. Левое неравенство оказывается верным. Покажем это. Пусть Ω — конечносвязная область с достаточно гладкой границей, v — решение краевой задачи: $\Delta v = -2$ в Ω и $v = 0$ на $\partial\Omega$. Согласно уравнению Лиувилля конформный радиус $R = R(z, \Omega)$ является решением аналогичной краевой задачи: $R\Delta R = |\nabla R|^2 - 4$ в Ω и $R = 0$ на $\partial\Omega$. Простые вычисления показывают, что $\Delta(v - R^2/4) = -|\nabla R|^2 \leq 0$, поэтому из классического принципа максимума следует поточечное неравенство $v(z) \geq R^2(z, \Omega)/4$, $\forall z \in \Omega$. Заметим, что из этого неравенства в силу определения (6.8) вытекает оценка $P(\Omega) \geq I_c(\Omega)/2$.

На основании указанных выше результатов можно предложить новые приближённые формулы

$$P(\Omega) \approx 3 \iint_{\Omega} \text{dist}^2(z, \partial\Omega) dx dy,$$

$$P(\Omega) \approx \frac{3}{2} \iint_{\Omega} R^2(z, \Omega) dx dy.$$

которые, в частности, точны для любого круга. Здесь в правой части формул стоят моменты инерции области, определённые выше формулами (6.11) и (6.12).

Отметим в заключение, что в недавней статье Ф. Г. Авхадиева и А. Р. Касимова [53] можно найти современные подходы и интересные открытые проблемы по изопериметрическим проблемам в задачах подземной гидродинамики.

6.2 Неравенства Харди – Реллиха

В этом пункте мы опишем 15 открытых проблем по неравенствам типа Харди и Реллиха. Эти нерешённые задачи опубликованы нами в обзорной статье [16] и связаны с недавними статьями следующих авторов: В. Мазья, S. Fillippas, A. Tertikas, R. Osserman, A. Ancona, В. М. Миклюков, Н. Brezis, M. Marcus, Y. Pinchover, E. B. Davies, А. Лаптев, J. L. Fernández, J. M. Rodríguez, P. Caldirolì, R. Musina, A. A. Balinsky, W. D. Evans, R. T. Lewis, Ф. Г. Авхадиев, К.-J. Wirths, Р. Г. Насибуллин, И. К. Шафигуллин и др. Попутно мы приводим необходимые для понимания примеры и определения, описываем нелинейные связи между числовыми характеристиками областей евклидова пространства размерности $n \geq 2$.

Актуальность тематики обусловлена тем, что неравенства типа Харди и Реллиха имеют многочисленные применения, в частности, они связаны с принципом неопределённости Гейзенберга и спектральной теорией неограниченных операторов (см. [17] — [23]).

Следующая теорема Харди (сравните с формулировками в книге [17]) является базовой в теории неравенств типа Харди–Реллиха в областях $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ размерности $n \geq 2$.

Теорема 6.2 (см. книгу Г. Г. Харди, Дж. Е. Литтльвуд и Г. Поля [17]). 1) Пусть $1 \leq p < \infty$, $1 < s < \infty$, и пусть $g : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ — абсолютно непрерывная неубы-

вающая функция, такая, что

$$g(0) = 0, \quad g'/t^{s/p-1} \in L^p(0, \infty).$$

Тогда

$$\int_0^\infty \frac{|g'(t)|^p}{t^{s-p}} dt \geq \frac{(s-1)^p}{p^p} \int_0^\infty \frac{|g(t)|^p}{t^s} dt. \quad (6.16)$$

Для $p > 1$ и функции $g \not\equiv 0$ это неравенство является строгим, следовательно, не существует экстремальной функции, но в то же время константа $((s-1)/p)^p$ является точной.

Если $p = 1$, то имеем следующее тождество

$$\int_0^\infty \frac{g(t)}{t^s} dt = \frac{1}{s-1} \int_0^\infty \frac{g'(t)}{t^{s-1}} dt,$$

которое имеет место для всех допустимых функций.

2) Предположим, что $1 \leq p < \infty$, $-\infty < \sigma < 1$, и, далее, $g : (0, \infty] \rightarrow \mathbb{R}$ — абсолютно непрерывная невозрастающая функция, такая, что $g(+\infty) = 0$ и $g'/\tau^{\sigma/p-1} \in L^p(0, \infty)$. Тогда

$$\int_0^\infty \frac{|g'(\tau)|^p}{\tau^{\sigma-p}} d\tau \geq \frac{|\sigma-1|^p}{p^p} \int_0^\infty \frac{|g(\tau)|^p}{\tau^\sigma} d\tau. \quad (6.17)$$

Для $p > 1$ и функции $g \not\equiv 0$ это неравенство является строгим, следовательно, не существует экстремальной функции, но в то же время константа

$$(|\sigma-1|/p)^p$$

является точной.

В книге [17] эта теорема представлена в трёх местах случаями:

$$(a) \ p = s = 2;$$

$$(b) \ p = s > 1;$$

$$(c) \ 1 \leq p < \infty, 1 < s < \infty, -\infty < \sigma < 1.$$

Отметим, что неравенство (6.17) может быть получено из неравенства (6.16) с использованием замены переменной $\tau = 1/t$ и параметра $\sigma = 2 - s$.

Нетрудно показать, что монотонность функции g в теореме Харди не является существенным ограничением, А именно, можно показать, что неравенства (6.16) и (6.17) равносильны следующему неравенству:

для любого $p \in [1, \infty)$ и любого $s \in \mathbb{R}$ и для любой функции $g \in C_0^1((0, \infty))$ справедливо вариационное неравенство

$$\int_0^\infty \frac{|g'(t)|^p}{t^{s-p}} dt \geq \frac{|s-1|^p}{p^p} \int_0^\infty \frac{|g(t)|^p}{t^s} dt \quad (6.18)$$

с точной константой $(|s-1|/p)^p$.

Предположим, что $n \geq 2$. Полагая $s = s^* - n + 1$ и пользуясь сферическими координатами

$$x = r\omega \in \mathbb{R}^n \ (r = |x| > 0,$$

$$\omega \in S := \{y \in \mathbb{R}^n : |y| = 1\}),$$

формулой $dx = r^{n-1} dr d\omega$, а также неравенством $|\nabla u(x)| \geq |\partial u(x)/\partial r|$, можно доказать, что неравенство (6.18) эквивалентно следующему неравенству:

для любого $p \in [1, \infty)$, любого $s^* \in \mathbb{R}$ и для любой функции $u \in C_0^1(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ имеет место неравенство

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\nabla u(x)|^p}{|x|^{s^*-p}} dx \geq \frac{|s^* - n|^p}{p^p} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x)|^p}{|x|^{s^*}} dx \quad (6.19)$$

с точной константой $(|s^* - n|/p)^p$.

Здесь

$$|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2},$$

$\nabla u(x)$ — евклидов градиент функции $u : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$,
и

$$|\nabla u(x)|^2 = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial u(x)}{\partial x_j} \right)^2, \quad dx = dx_1 dx_2 \cdots dx_n.$$

Приведём доказательство эквивалентности неравенств (6.18) и (6.19). Очевидно, если $u \in C_0^1(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ и $\omega \in S$ фиксирована, то неравенство (6.18) влечёт

$$\int_0^\infty \left| \frac{\partial u(r\omega)}{\partial r} \right|^p \frac{dr}{r^{s-p}} \geq \frac{|s-1|^p}{p^p} \int_0^\infty \frac{|u(r\omega)|^p}{r^s} dr,$$

что эквивалентно неравенству

$$\int_0^\infty \left| \frac{\partial u(r\omega)}{\partial r} \right|^p \frac{r^{n-1} dr}{|x|^{s^*-p}} \geq \frac{|s^* - n|^p}{p^p} \int_0^\infty \frac{|u(r\omega)|^p}{|x|^{s^*}} r^{n-1} dr,$$

где $|x| = r$ и $s^* = s + n - 1$. Умножив последнее неравенство на $d\omega$ и проинтегрировав по единичной сфере

S , мы получаем неравенство

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left| \frac{\partial u(r\omega)}{\partial r} \right|^p \frac{dx}{|x|^{s^*-p}} \geq \frac{|s^* - n|^p}{p^p} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(r\omega)|^p}{|x|^{s^*}} dx,$$

что влечёт (6.19). С другой стороны, применяя (6.19) к радиальным функциям вида $u(x) \equiv u(|x|) =: g(|x|)$, мы непосредственно получаем (6.18) с параметром $s = s^* - n + 1$ и переменной интегрирования $t = r = |x|$.

Нетрудно также показать, что неравенство (6.18) эквивалентно следующему неравенству в полупространстве $\mathbb{H}_n^+ = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 > 0\}$:

для любого $p \in [1, \infty)$, любого $s \in \mathbb{R}$ и для любой функции $u \in C_0^1(\mathbb{H}_n^+)$

$$\int_{\mathbb{H}_n^+} \frac{|\nabla u(x)|^p}{x_1^{s-p}} dx \geq \frac{|s-1|^p}{p^p} \int_{\mathbb{H}_n^+} \frac{|u(x)|^p}{x_1^s} dx \quad (6.20)$$

с точной константой $(|s-1|/p)^p$.

Фактически эквивалентные одномерным неравенства Харди (6.18)–(6.20) широко известны. Нетривиальная ситуация возникает тогда, когда рассматривают обобщения неравенств Харди (6.19) и (6.20) на случай многомерных областей произвольного вида.

Пусть Ω — область евклидова пространства $\mathbb{R}^n$. Речь пойдёт о неравенствах, справедливых для всех финитных функций $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ и имеющих вид: для любой функции $u \in C_0^1(\Omega)$

$$\int_{\Omega} \frac{|\nabla u(x)|^p}{\rho^{s-p}(x, \partial\Omega)} dx \geq c_p(s, \Omega) \int_{\Omega} \frac{|u(x)|^p}{\rho^s(x, \partial\Omega)} dx,$$

где $\rho(x, \partial\Omega) := \text{dist}(x, \partial\Omega)$.

Считаем, что константа $c_p(s, \Omega)$ является точной, т. е. максимальной из возможных на этом месте. Этим условием константа корректно определена теоретически, но фактически она известна лишь для некоторых областей. В частности, в неравенстве (6.19) или (6.20) величина $|x|$ или x_1 равны расстоянию $\text{dist}(x, \partial\Omega)$ для $\Omega = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ или $\Omega = \mathbb{H}_n^+$. Известны и соответствующие константы:

1) $(|s^* - n|/p)^p$ в (6.19)

и

2) $(|s - 1|/p)^p$ в (6.20).

Возникает фундаментальная проблема: описать «хорошие» области, для которых $c_p(s, \Omega) > 0$ и оценить их в зависимости от величин $p \in [1, \infty)$, $s \in \mathbb{R}$ и геометрических характеристик области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

Неравенства в двумерных областях

Через области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ константы $c_p(s, \Omega)$ зависят от размерности n . Случай $n = 2$ заслуживает отдельного рассмотрения в силу ряда причин. Поэтому рассмотрим сначала интегральные неравенства в областях на плоскости. Поскольку на плоскости имеется комплексная структура, вместо $\mathbb{R}^2$ мы будем пользоваться обозначением $\mathbb{C}$. Рассмотрим области $\Omega \subset \mathbb{C}$, $\Omega \neq \mathbb{C}$, будем пользоваться комплексной переменной $z = x + iy$. Нам потребуется функция расстояния

$$\rho(z, \partial\Omega) := \inf_{w \in \mathbb{C} \setminus \Omega} |z - w|, \quad z \in \Omega.$$

Для функций $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ будем пользоваться обозначениями: $u = u(z)$ и градиент

$$\nabla u(z) = \frac{\partial u(z)}{\partial x} + i \frac{\partial u(z)}{\partial y}, \quad z = x + iy \in \Omega.$$

Рассмотрим следующее неравенство типа Харди: для любой функции $u \in C_0^1(\Omega)$

$$\iint_{\Omega} \frac{|\nabla u(z)|^p dx dy}{\rho^{s-p}(z, \partial\Omega)} \geq c_p(s, \Omega) \iint_{\Omega} \frac{|u(z)|^p dx dy}{\rho^s(z, \partial\Omega)}, \quad (6.21)$$

где $p \in [1, \infty)$, $s \in \mathbb{R}$ — фиксированные числа, константа $c_p(s, \Omega) \in [0, \infty)$ является точной, т. е. она определена как максимальная из допустимых на этом месте постоянных.

Отметим, что точная константа $c_p(s, \Omega)$ в неравен-

стве (6.21) является безразмерной величиной, инвариантной при линейных конформных преобразованиях области $\Omega \subset \mathbb{C}$, т. е.

$$c_p(s, \Omega) = c_p(s, a\Omega + b) \quad (a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, b \in \mathbb{C}).$$

Имеется следующий трудный вопрос: можно ли описать геометрически все те области, для которых $c_p(s, \Omega) > 0$? Для любого $p \in [1, \infty)$ явный ответ на этот вопрос известен в следующих трёх случаях (см. ниже теоремы 6.8, 6.3 и 6.4):

1) если $s > 1$, то $c_p(s, \Omega) > 0$ для любой выпуклой области $\Omega \subset \mathbb{C}$, $\Omega \neq \mathbb{C}$;

2) если $s > 2$, то $c_p(s, \Omega) > 0$ для любой области $\Omega \subset \mathbb{C}$, $\Omega \neq \mathbb{C}$;

3) константа $c_p(2, \Omega) > 0$ тогда и только тогда, когда граница области $\Omega \subset \mathbb{C}$, $\Omega \neq \mathbb{C}$, является равномерно совершенным множеством.

Если $c_p(s, \Omega) > 0$, то мы имеем естественную проблему по оценкам снизу и сверху этой константы.

Поскольку существование экстремальной функции неизвестно, то мы имеем своеобразную ситуацию для точных констант. Например, для того, чтобы доказать равенство $c_2(2, \Omega) = 1/4$ для вполне определённой области $\Omega \subset \mathbb{C}$, $\Omega \neq \mathbb{C}$, нам приходится доказывать, что верны неравенство $c_2(2, \Omega) \geq 1/4$, а также противоположное неравенство $c_2(2, \Omega) \leq 1/4$.

Хорошо известен следующий замечательный результат, доказанный независимо друг от друга несколь-

кими математиками: константа $c_2(2, \Omega) = 1/4$ для любой выпуклой области $\Omega \subset \mathbb{C}$, $\Omega \neq \mathbb{C}$ (см. [25]—[32]). В частности, эта константа равна $1/4$ для любого круга. Естественно предположить, что константа Харди $c_2(2, \Omega) \leq 1/4$ для невыпуклых областей.

Проблема 1 (Е. В. Davies [25]). *Докажите, что $c_2(2, \Omega) \leq 1/4$ для любой области $\Omega \subset \mathbb{C}$, $\Omega \neq \mathbb{C}$.*

Е. Б. Дэвис доказал, что $c_2(2, \Omega) \leq 1/4$ для области $\Omega \subset \mathbb{C}$, имеющей хотя бы одну граничную точку $z_0 \in \partial\Omega$, «регулярную» в определённом смысле. Например, существует такая окрестность $U(z_0)$ этой точки, что пересечение $U(y_0) \cap (\partial\Omega)$ является гладкой дугой. Имеется и некоторое ослабление условия «регулярности» Дэвиса, но до сих пор нет доказательства неравенства $c_2(2, \Omega) \leq 1/4$ для произвольной области. Проблема 1 не решена даже в случае односвязных плоских областей $\Omega \subset \mathbb{C}$, конформно эквивалентных единичному кругу. В настоящее время можно утверждать лишь, что $c_2(2, \Omega) \leq 1$ для любой области $\Omega \subset \mathbb{C}$, $\Omega \neq \mathbb{C}$. Это утверждение является следствием конформно инвариантных интегральных неравенств и известной формулы Элстродта-Паттерсона-Салливана (см. [12], [24], с. 102).

Проблема 1 связана со следующей задачей.

Проблема 2. *Опишите геометрически семейство невыпуклых областей $\Omega \subset \mathbb{C}$, $\Omega \neq \mathbb{C}$, таких, что $c_2(2, \Omega) = 1/4$.*

В настоящее время имеются примеры невыпуклых областей, для которых $c_2(2, \Omega) = 1/4$. Укажем два из

них. Рассмотрим круговые сектора

$$\Omega_\beta = \{re^{i\theta} \in \mathbb{C} : 0 < r < 1, 0 < \theta < \beta\}.$$

В [25] Дэвис доказал, что константа $c_2(2, \Omega_\beta) = 1/4$ тогда и только тогда, когда $\beta \leq \beta^* \approx 4.856$. Если же $\beta \in (\beta^*, 2\pi]$, то $c_2(2, \Omega_\beta) < 1/4$.

В [25] указано, что критическое значение β^* определено приближённо с использованием числовых расчётов. Существует формула для точного значения этой величины, а именно (см. [32]):

$$\beta^* = 3\pi - 4 \arctan \frac{\Gamma^4(1/4)}{8\pi^2}.$$

В [33] нами доказано, что $c_2(2, A_{rR}) = 1/4$ для концентрических колец $A_{rR} = \{z \in \mathbb{C} : r < |z| < R\}$ тогда и только тогда, когда $R/r \leq c^* \approx 36.6$, где критическое значение $c^* \approx 36.6$ определено как корень некоторого уравнения для гипергеометрических функций Гаусса. Если $R/r \in (c^*, \infty)$, то $c_2(2, A_{rR}) < 1/4$.

Кроме того, в статье [32] мы описали геометрически одно специальное семейство $\Theta_{1/4}(2)$ невыпуклых областей $\Omega \subset \mathbb{C}$, $\Omega \neq \mathbb{C}$, для которых $c_2(2, \Omega) = 1/4$.

Проблема 3. *Нужно найти точный промежуток $[A^*, A^{**}]$ изменения констант $c_2(2, \Omega)$ для односвязных областей $\Omega \subset \mathbb{C}$, $\Omega \neq \mathbb{C}$. Является ли верным следующее утверждение: для любого $\beta \in (A^*, A^{**})$ существует такая односвязная область $\Omega \subset \mathbb{C}$, что $c_2(2, \Omega) = \beta$.*

В [34] А. Анкона доказал, что $s_2(2, \Omega) \geq 1/16$ для любой односвязной области $\Omega \subset \mathbb{C}$, $\Omega \neq \mathbb{C}$. Следовательно, можно утверждать, что $A^* \geq 1/16$. Если гипотеза Дэвиса верна, то $A^{**} = 1/4$. Пока мы можем утверждать лишь, что $A^{**} \leq 1$. Итак, к настоящему времени можно утверждать лишь, что $[A^*, A^{**}] \subset [1/16, 1]$.

В дальнейшем для обсуждения проблем 4 — 7 нам потребуются известные определения областей $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$ с равномерно совершенными границами и определения числовых характеристик $M(\Omega)$ и $M_0(\Omega)$.

Пусть $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$ — область, граница которой содержит по край мере две точки. Здесь $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ — расширенная комплексная плоскость (сфера Римана). Пусть $\Omega_2 \subset \overline{\mathbb{C}}$ — некоторая двусвязная область, конформно эквивалентная концентрическому кольцу $A(\Omega_2) = \{z \in \mathbb{C} : r < |z| < R\}$. Тогда конформный модуль этой области Ω_2 определён равенством

$$M(\Omega_2) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{R}{r} \in (0, \infty]$$

с соглашением: $M(\Omega_2) = \infty$ в тех случаях, когда $r = 0$ или $R = \infty$.

Начнём с определения конформного максимального модуля $M(\Omega)$.

Определение 6.1 Пусть $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$ — область, граница которой содержит не менее двух точек. Конформный максимальный модуль $M(\Omega)$ определяется следующим образом.

1) Если Ω — односвязная область, то $M(\Omega) = 0$.

2) Если Ω — двусвязная область, то $M(\Omega)$ — конформный модуль этой области.

3) Если Ω — многосвязная область, то

$$M(\Omega) := \sup_{\Omega_2} M(\Omega_2),$$

где супремум берётся по множеству всех двусвязных областей Ω_2 , таких, что $\Omega_2 \subset \Omega$ и область Ω_2 разделяет границу области Ω .

Ясно, что конформный максимальный модуль $M(\Omega)$ является конформно инвариантной величиной.

Для определения евклидова максимального модуля $M_0(\Omega)$ нам потребуется множество $\mathbb{Ann}(\Omega)$ концентрических колец

$$A = A(z_0; r, R) := \{z \in \mathbb{C} : r < |z - z_0| < R\},$$

со следующими свойствами: 1) $0 < r < R < \infty$, $A(z_0; r, R) \subset \Omega$; 2) центры $z_0 \in (\partial\Omega) \setminus \{\infty\}$; 3) каждое кольцо $A(z_0; r, R)$ разделяет границу области Ω .

Определение 6.2 Пусть $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$ — область, граница которой содержит не менее двух точек, и пусть $\mathbb{Ann}(\Omega)$ — указанное выше множество колец.

1) Если $\mathbb{Ann}(\Omega) = \emptyset$, то полагаем $M_0(\Omega) = 0$.

2) Если $\mathbb{Ann}(\Omega)$ — непустое множество, то полагаем

$$M_0(\Omega) := \sup_{A \in \mathbb{Ann}(\Omega)} \frac{1}{2\pi} \ln \frac{R}{r}, \quad (A = A(z_0; r, R)).$$

Ясно, что величина $M_0(\Omega)$ определена характеристиками евклидовой геометрии, но она не является, вообще говоря, конформно инвариантной. Очевидно, что

$$0 \leq M_0(\Omega) \leq M(\Omega).$$

Кроме того, Л. Карлесон и Т. В. Гамелин [13] отмечают такое свойство максимальных модулей $M(\Omega)$ и $M_0(\Omega)$:

$$M_0(\Omega) < \infty \iff M(\Omega) < \infty. \quad (6.22)$$

Следуя Х. Поммеренке [35] (см. также Л. Карлесон и Т. В. Гамелин [13], Т. Сугава [36]), в случае $M_0(\Omega) < \infty$ говорят, что граница области Ω является равномерно совершенным множеством. В силу (6.22) можно заменить условие $M_0(\Omega) < \infty$ ограничением $M(\Omega) < \infty$. Известны простые неравенства, из которых следует свойство (6.22).

Предложение 6.1 (F. G. Avkhadiev, K.-J. Wirths [39], Ф. Г. Авхадиев [40]). Пусть $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$ — область, граница которой содержит не менее двух точек. Если $\Omega \subset \mathbb{C}$, то

$$M_0(\Omega) \leq M(\Omega) \leq M_0(\Omega) + \frac{1}{2}. \quad (6.23)$$

Если $\infty \in \Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$, то

$$M_0(\Omega) \leq M(\Omega) \leq 2M_0(\Omega) + 1. \quad (6.24)$$

Неравенство $M(\Omega) \leq M_0(\Omega) + 1/2$ в (6.23) доказано в книге [39], неравенство $M(\Omega) \leq 2M_0(\Omega) + 1$ в (6.24)

получено в статье [40].

Отметим, что $M_0(\mathbb{D}') = M(\mathbb{D}') = \infty$ для единичного круга с выколотым центром $\mathbb{D}' := \{z : 0 < |z| < 1\}$.

Ясно также, что $M(\Omega) = 0$ тогда и только тогда, когда Ω — односвязная область, конформно эквивалентная единичному кругу. Следующий пример показывает, что существуют многосвязные области $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$, для которых $M_0(\Omega) = 0$.

Пример 1. Пусть $\mathbb{K}$ — классическое канторово множество, лежащее на отрезке $[0, 1]$, и пусть $\Omega_0 := \{x + iy \in \mathbb{C} : |x| < \infty, |y| < 1\}$. Рассмотрим следующую область

$$\Omega(\mathbb{K}) = \Omega_0 \setminus \{x + iy \in \mathbb{C} : x \in \mathbb{K}, |y| \leq 3/4\}.$$

Имеем, что $M_0(\Omega(\mathbb{K})) = 0$, так как $\text{Ann}(\Omega(\mathbb{K})) = \emptyset$.

В статье [41] нами доказана

Теорема 6.3 (F. G. Avkhadiev [41]). Пусть Ω — открытое собственное подмножество $\mathbb{C}$. Предположим, что $1 \leq p < \infty$ и $2 < s < \infty$. Тогда для любой вещественнозначной функции $u \in C_0^1(\Omega)$

$$\iint_{\Omega} \frac{|\nabla u|^p dx dy}{\rho^{s-p}(z, \partial\Omega)} \geq \left(\frac{s-2}{p}\right)^p \iint_{\Omega} \frac{|u|^p dx dy}{\rho^s(z, \partial\Omega)}. \quad (6.25)$$

Существуют области Ω' , для которых имеет место равенство $c_p(s, \Omega') = ((s-2)/p)^p$.

В дополнение к этой теореме в статье [42] нами доказано следующее утверждение:

если $M_0(\Omega') = \infty$, то $c_p(s, \Omega') = ((s - 2)/p)^p$ для всех допустимых значений параметров, а именно, для любых $p \in [1, \infty)$ и $s \in (2, \infty)$.

Проблема 4. Предположим, что $1 \leq p < \infty$ и $2 < s < \infty$. Найдите описание в геометрических терминах все экстремальные области в теореме 6.3.

Верно ли следующее утверждение: в неравенстве (6.25) постоянная $c_p(s, \Omega) = ((s - 2)/p)^p$ тогда и только тогда, когда граница области Ω не является равномерно совершенным множеством, т. е. евклидов максимальный модуль $M_0(\Omega) = \infty$.

Поскольку условие $M_0(\Omega) = \infty$ влечёт равенство $c_p(s, \Omega) = ((s - 2)/p)^p$, то необходимо доказать, что условие $M_0(\Omega) < \infty$ влечёт строгое неравенство $c_p(s, \Omega) > ((s - 2)/p)^p$.

Для предельного случая, когда $s = 2$, справедливо следующее утверждение.

Теорема 6.4 (J. L. Fernández [43], F. G. Avkhadiev [41]). Пусть $1 \leq p < \infty$. Если $\Omega \subset \mathbb{C}$ — область, такая, что $\Omega \neq \mathbb{C}$, то константа $c_p(2, \Omega) > 0$ тогда и только тогда, когда Ω — равномерно совершенное множество.

Для $p = 2$ теорема 6.4 фактически доказана в статье Фернандеса [43] (с учётом полученного позже свойства (6.22)). Для $p \in [1, \infty) \setminus \{2\}$ теорема 6.4 доказана в статье [41]. В дополнение к этому, в статье [41] нами доказаны следующие оценки

$$c_p(2, \Omega) \geq \frac{c_1^p(2, \Omega)}{p^p} \quad (\forall p > 1),$$

$$c_1(2, \Omega) \geq \frac{1}{2(\pi M_0(\Omega) + \gamma_0)^2} \quad \left(\gamma_0 = \frac{\Gamma^4(1/4)}{4\pi^2} \approx 4.38 \right).$$

Попутно отметим, что остаётся открытым вопрос о возможных улучшениях указанных нижних оценок для величины $c_1(2, \Omega)$.

Далее нам потребуется неравенство типа Реллиха: для любой функции $u \in C_0^2(\Omega)$

$$\iint_{\Omega} \frac{|\Delta u(z)|^2 dx dy}{\rho^{s-4}(z, \partial\Omega)} \geq C_2(s, \Omega) \iint_{\Omega} \frac{|u(z)|^2 dx dy}{\rho^s(z, \partial\Omega)}, \quad (6.26)$$

где $s \in \mathbb{R}$ — фиксированное число, считаем, что константа $C_2(s, \Omega) \in [0, \infty)$ является точной, т. е. она определена как максимальная из постоянных, возможных на этом месте.

В [18] Ф. Реллих доказал, что $C_2(4, \mathbb{C} \setminus \{0\}) = 0$. Имеется ряд обобщений этого результата Реллиха для неравенства (6.26) в области $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Для этой области финальный результат установили П. Калдироли и Р. Мусина, а именно, ими доказана следующая замечательная теорема.

Теорема 6.5 (Р. Caldirolì, Р. Musina [44]). Для любого $s \in \mathbb{R}$ имеем

$$C_2(s, \mathbb{C} \setminus \{0\}) = \min_{k \in \mathbb{N} \cup \{0\}} |k^2 - (s/2 - 1)^2|.$$

Следовательно, константа $C_2(2m, \mathbb{C} \setminus \{0\}) = 0$ для любого $m \in \mathbb{Z}$. В дополнение к этому, очевидно, что $M(\mathbb{C} \setminus \{0\}) = M_0(\mathbb{C} \setminus \{0\}) = \infty$.

Нами доказана

Теорема 6.6 (F. G. Avkhadiev [45]). Пусть $\Omega \subset \mathbb{C}$ — область, такая, что $\Omega \neq \mathbb{C}$. Тогда

$$C_2(2, \Omega) > 0 \iff M_0(\Omega) < \infty \iff C_2(4, \Omega) > 0.$$

В дополнение к этому в статье [46] мы доказали следующее утверждение: *если $m \in \mathbb{Z}$, то*

$$M_0(\Omega) = \infty \implies C_2(2m, \Omega) = 0$$

для областей $\Omega \subset \mathbb{C}$, $\Omega \neq \mathbb{C}$.

Сравнивая это утверждение, теорему 6.5 и теорему 6.6, мы естественно приходим к следующей проблеме.

Проблема 5. *Докажите или опровергните следующее утверждение: для любого значения $m \in \mathbb{Z} \setminus \{1, 2\}$*

$$M_0(\Omega) < \infty \iff C_2(2m, \Omega) > 0$$

на множестве всех областей $\Omega \subset \mathbb{C}$, $\Omega \neq \mathbb{C}$.

Теперь, пользуясь гиперболическим радиусом вместо расстояния до границы области, мы рассматриваем новую версию неравенства (6.21).

Пусть $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$ является областью гиперболического типа, т. е. граница этой области содержит не менее трёх точек (см. Л. В. Альфорс [47]). В такой области гиперболический радиус определён равенством

$$R(z, \Omega) := 1/\lambda(z, \Omega), \quad z \in \Omega,$$

где $\lambda(z, \Omega)$ — коэффициент метрики Пуанкаре с гаус-

совой кривизной $\kappa = -4$. Если $\infty \in \Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$, то $R(\infty, \Omega) = \rho(\infty, \partial\Omega) = \infty$. Более точно, существуют конечные пределы

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{R(z, \Omega)}{|z|^2} = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{R(z, \Omega)}{\rho^2(z, \partial\Omega)} > 0.$$

Хорошо известно, что $R(z, \Omega) \geq \rho(z, \partial\Omega)$ в любой точке $z \in \Omega$. Если $\infty \in \Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$, то $\inf_{z \in \Omega} \rho(z, \partial\Omega)/R(z, \Omega) = 0$. С другой стороны, согласно теореме Бирдона-Поммеренке [48]

$$\alpha(\Omega) := \inf_{z \in \Omega} \rho(z, \partial\Omega)/R(z, \Omega) > 0 \iff M_0(\Omega) < \infty$$

для любой области $\Omega \subset \mathbb{C}$ гиперболического типа.

В работах [35] – [39] можно найти другие связи между евклидовой характеристикой $M_0(\Omega)$ и конформными характеристиками области Ω . В частности, доказано, что для любой области $\Omega \subset \mathbb{C}$ гиперболического типа

$$\sup_{z \in \Omega} |\nabla R(z, \Omega)| < \infty \iff M_0(\Omega) < \infty,$$

и

$$|M_0(\Omega') - M_0(\Omega'')| \leq \frac{1}{2}$$

для конформно эквивалентных областей $\Omega' \subset \mathbb{C}$ и $\Omega'' \subset \mathbb{C}$ гиперболического типа.

Пусть $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$ — область гиперболического типа. Рассмотрим следующее конформно инвариантное нера-

венство: для любой функции $u \in C_0^1(\Omega)$

$$\iint_{\Omega} \frac{|\nabla u(z)|^p dx dy}{R^{2-p}(z, \Omega)} \geq c_p^*(2, \Omega) \iint_{\Omega} \frac{|u(z)|^p dx dy}{R^2(z, \Omega)}, \quad (6.27)$$

где $p \in [1, \infty)$ — фиксированное число, константа $c_p^*(2, \Omega) \in [0, \infty)$ точна, т. е. она определена как максимально возможная на этом месте.

Проблема 6 (см. J. L. Fernández, J. M. Rodríguez [49]). *В терминах геометрии Евклида опишите множество всех областей $\Omega \subset \mathbb{C}$ гиперболического типа, таких, что $c_2^*(2, \Omega) > 0$.*

В статье [43] Фернандес доказал, что условие $M(\Omega) < \infty$ гарантирует положительность константы $c_2^*(2, \Omega)$. В [49] Фернандес и Родригес доказали две теоремы, из которых следует существование некоторого семейства областей гиперболического типа, для которых $M(\Omega) = \infty$, $c_2^*(2, \Omega) > 0$, а также существование некоторого семейства областей гиперболического типа, для которых $M(\Omega) = \infty$, $c_2^*(2, \Omega) = 0$.

Для случая $p \in [1, \infty) \setminus \{2\}$ свойства констант $c_p^*(2, \Omega)$ и некоторых их обобщений изучены в статьях [40] и [50]. Ясно, что для $p \in [1, \infty) \setminus \{2\}$ можно указать естественное обобщение проблемы 6.

Теперь мы привлечём внимание читателя к одной оптимистичной проблеме.

Если $s > 2$, то константа $c_p(s, \Omega) \geq ((s-2)/p)^p > 0$ для любой области $\Omega \subset \mathbb{C}$, $\Omega \neq \mathbb{C}$ (см. теорему 6.3). В случае $s = 2$ по теореме 6.4 константа $c_p(2, \Omega) > 0$

тогда и только тогда, когда граница области Ω является равномерно совершенным множеством. В дополнение к этому нами доказано следующее утверждение об одном универсальном неравенстве.

Теорема 6.7 (Ф. Г. Авхадиев [40]). *Пусть $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$ — область гиперболического типа. Тогда*

$$\iint_{\Omega} \frac{|\nabla u(z)|}{\rho(z, \partial\Omega)} dx dy \geq 2 \iint_{\Omega} \frac{|u(z)|}{R^2(z, \Omega)} dx dy \quad \forall u \in C_0^1(\Omega).$$

Проблема 7. *Пользуясь радиусом $R(z, \Omega)$ и расстоянием $\rho(z, \partial\Omega)$ конструируйте новые интегральные неравенства, которые являются универсальными в том смысле, что они справедливы с некоторой положительной постоянной в любой области $\Omega \subset \mathbb{C}$ гиперболического типа.*

Неравенства в областях размерности $n \geq 2$

Далее мы рассматриваем интегральные неравенства в областях $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ при фиксированном $n \geq 2$.

Нам потребуются функция расстояния

$$\rho(x, \partial\Omega) := \inf_{y \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega} |x - y|, \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \Omega,$$

и следующее неравенство типа Харди: для любой функции $u \in C_0^1(\Omega)$

$$\int_{\Omega} \frac{|\nabla u(x)|^p}{\rho^{s-p}(x, \partial\Omega)} dx \geq c_p(s, \Omega) \int_{\Omega} \frac{|u(x)|^p}{\rho^s(x, \partial\Omega)} dx, \quad (6.28)$$

где $dx = dx_1 dx_2 \dots dx_n$, $p \in [1, \infty)$ и $s \in \mathbb{R}$ — фиксированные числа, константа $c_p(s, \Omega) \in [0, \infty)$ является точной, т. е. максимальной из возможных в неравенстве (6.28).

Неравенство (6.28) является инвариантной по отношению к линейным конформным и антиконформным преобразованиям области Ω . В частности, константа $c_p(s, \Omega)$ является безразмерной величиной, удовлетворяющей равенству

$$c_p(s, \Omega) = c_p(s, k\Omega + x_0) \quad (6.29)$$

для любого $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ и любой точки $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

Начнём с теоремы для выпуклых областей.

Теорема 6.8 (см. Т. Matskewich, Р. Е. Sobolevskii [26], М. Marcus, V. J. Mitzel, Y. Pinchover [27],

Ғ.Ғ. Avkhadiev [41], Ф.Г. Авхадиев, И.К. Шафигуллин [51]). Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — выпуклая область, такая, что $\Omega \neq \mathbb{R}^n$. Предположим, что $n \geq 2$, $1 \leq p < \infty$, $1 < s < \infty$. Тогда для любой вещественнозначной функции $u \in C_0^1(\Omega)$

$$\int_{\Omega} \frac{|\nabla u(x)|^p}{\rho^{s-p}(x, \partial\Omega)} dx \geq \frac{(s-1)^p}{p^p} \int_{\Omega} \frac{|u(x)|^p}{\rho^s(x, \partial\Omega)} dx. \quad (6.30)$$

Константа $((s-1)/p)^p$ точна, а именно, $c_p(s, \Omega) = ((s-1)/p)^p$ для любой выпуклой области $\Omega \neq \mathbb{R}^n$ при любом $n \geq 2$ и для всех допустимых значений параметров $p \in [1, \infty)$ и $s \in (1, \infty)$.

Теорема 6.8 доказана доказана в ряде работ в той или иной общности (для случая $p = s > 1$ см. Т. Matskewich, Р. Е. Sobolevskii [26], М. Marcus, V. J. Mizel, Y. Pinchover [27], А. А. Balinsky, W. D. Evans, R. T. Lewis [22], и для общего случая, когда $p \in [1, \infty)$ и $s \in (1, \infty)$, см. Ф. Г. Авхадиев [41], Ф. Г. Авхадиев и И. К. Шафигуллин [51]).

Отметим, что выпуклая область автоматически удовлетворяет условию следующей теоремы.

Теорема 6.9 (Ф. Г. Авхадиев, И. К. Шафигуллин [51]). Предположим, что $n \geq 2$, $1 \leq p < \infty$, $1 < s < \infty$, и $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — область, обладающая свойством: существуют граничная точка y_0 и два n -мерных шара $B^+ \subset \Omega$ и $B^- \subset \mathbb{R}^n \setminus \Omega$, таких, что $y_0 \in (\partial B^+) \cap (\partial B^-) \cap (\partial\Omega)$. Тогда $c_p(s, \Omega) \leq ((s-1)/p)^p$.

Ограничение $1 < s < \infty$ в теореме 6.8 является есте-

ственной: если $-\infty < s \leq 1$, то $c_p(s, B) = 0$ для любого n -мерного шара $B \subset \mathbb{R}^n$. В силу формулы (6.29) достаточно рассмотреть случай единичного шара.

Предложение 6.2 (F. Avkhadiev [16]). Предположим, что $n \geq 2$, $1 \leq p < \infty$, но $-\infty < s \leq 1$.

Тогда константа $c_p(s, B) = 0$ для единичного шара $B = \{x = r\omega \in \mathbb{R}^n : 0 \leq r < 1\}$.

Проблема 8 (см. И. К. Шафигуллин [52]). *Предположим, что $n \geq 3$, $p \in [1, \infty)$. Докажите, что константа $c_p(2, \Omega) \leq (n - 2)^p / p^p$ для любой области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\Omega \neq \mathbb{R}^n$.*

Размерность n играет существенную роль в случае невыпуклых областей. В частности, константа

$$c_2(2, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}) = (n - 2)^2 / 4 > 1/4$$

для $n \geq 4$. Таким образом, в случае $n \geq 4$ существует "экзотическая" область Ω , для которой $c_2(2, \Omega) > 1/4$.

В [52] И. К. Шафигуллин исследовал проблему 8. В частности, он доказал оценки вида

$$c_2(2, \Omega) \leq c n^2 \quad (c = \text{const} > 0)$$

для произвольных областей $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\Omega \neq \mathbb{R}^n$.

Если $n \geq 2$, то $c_2(2, \Omega) = 1/4$ для любой выпуклой области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\Omega \neq \mathbb{R}^n$ и для некоторых невыпуклых областей. Поэтому можно сформулировать следующее обобщение проблемы 2.

Проблема 9. *Предположим, что $n \geq 3$. Опишите геометрически семейство невыпуклых областей*

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\Omega \neq \mathbb{R}^n$, таких, что $c_2(2, \Omega) = 1/4$.

Отметим, что в статье [32] нами описано геометрически одно семейство $\Theta_{1/4}(n)$ невыпуклых областей $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\Omega \neq \mathbb{R}^n$, для которых $c_2(2, \Omega) = 1/4$.

В следующей теореме мы представим одно простое подсемейство $\Theta_{1/4}(3)$, построенное в [32] с использованием внутреннего радиуса

$$\rho(\Omega) := \sup_{x \in \Omega} \rho(x, \partial\Omega)$$

и следующего определения одного подсемейства областей $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

Определение 6.3 Пусть $n \geq 2$ и $\lambda \in (0, \infty)$. Говорят, что область $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\Omega \neq \mathbb{R}^n$, является λ -близкой к выпуклой, если для любой граничной точки $y \in (\partial\Omega) \setminus \{\infty\}$ существует точка x_y такая, что

$$|y - x_y| = \lambda \text{ и } B_y = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_y| < \lambda\} \subset \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}.$$

Замечание 6.1. Предположим, что $n \geq 2$ и $\lambda \in (0, \infty)$. Если $\Omega' \subset \mathbb{R}^n$ — область, λ -близкая к выпуклой, то область $\Omega := \Omega' \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ также является λ -близкой к выпуклой.

Теорема 6.10 (Ф. Г. Авхадиев [32]). Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ — область с конечным внутренним радиусом $\rho(\Omega)$. Если эта область Ω является λ -близкой к выпуклой с радиусом $\lambda = \lambda(\Omega)$, таким, что

$$\lambda(\Omega) \geq \rho(\Omega),$$

то $c_2(2, \Omega) = 1/4$.

Пример 2. Рассмотрим две области

$$\Omega_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < \infty, 0 < y < 1/x\} \subset \mathbb{R}^2,$$

$$\Omega_3 = \Omega_2 \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^3.$$

Ясно, что область Ω_2 является λ -близкой к выпуклой с радиусом $\lambda = \min R(x)$, где $R(x)$ — радиус кривизны гиперболы в точке $(x, 1/x)$. Имеем

$$R(x) = \frac{(1 + y'^2(x))^{3/2}}{|y''(x)|} = \frac{1}{2} \left(x^2 + \frac{1}{x^2} \right)^{3/2} \geq R(1) = \sqrt{2},$$

где $y = y(x) = 1/x$, $0 < x < \infty$. Поэтому Ω_2 и Ω_3 являются λ -близкими к выпуклым с радиусом $\lambda = \lambda(\Omega_2) = \lambda(\Omega_3) = \sqrt{2}$.

С другой стороны, ясно, что

$$\rho(\Omega_2) := \sup_{(x,y) \in \Omega_2} \rho((x, y), \partial\Omega_2) \leq 1.$$

Следовательно, $\rho(\Omega_3) = \rho(\Omega_2) \leq 1$ (в действительности, $\rho(\Omega_2) = \rho(\Omega_3) = 2 - \sqrt{2}$). Очевидно, $\lambda(\Omega_3) > \rho(\Omega_3)$. Таким образом, константа Харди $c_2(2, \Omega_3) = 1/4$ в силу теоремы 6.10.

Для областей $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ размерности $n \geq 2$ в [32] доказана общая версия теоремы 6.10, связанная с условием $\lambda(\Omega) \geq \rho(\Omega)/\Lambda_n$, где Λ_n — постоянная, определённая как корень некоторого уравнения для гипергеометрических функций. В частности, $\Lambda_2 \approx 2.49$, $\Lambda_3 = 1$,

$\Lambda_4 \approx 0.61$, и $1/(n-2) < \Lambda_n < 1$ для $n > 3$.

Далее нам потребуется определение (см., например, [41]) евклидова максимального модуля $M_0(\Omega)$ для пространственных областей $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, имеющих не менее двух граничных точек. Пусть $\text{Ann}(\Omega)$ — множество областей вида

$$A = A(x_0; r, R) := \{x \in \mathbb{R}^n : r < |x - x_0| < R\},$$

обладающих следующими свойствами: $0 < r < R < \infty$, $A(x_0; r, R) \subset \Omega$; $x_0 \in (\partial\Omega) \setminus \{\infty\}$.

Определение 6.4 Пусть $n \geq 3$, и пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — область, граница которой содержит не менее двух точек.

1) Если $\text{Ann}(\Omega) = \emptyset$, то полагаем $M_0(\Omega) = 0$.

2) Если $\text{Ann}(\Omega)$ — непустое множество, то полагаем

$$M_0(\Omega) := \sup_{A \in \text{Ann}(\Omega)} \frac{1}{2\pi} \ln \frac{R}{r}, \quad (A = A(x_0; r, R)).$$

Следующее утверждение представляет собой нетрудное геометрическое упражнение. Предположим, что $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — область, λ -близкая к выпуклой с радиусом $\lambda = \lambda(\Omega) \in (0, \infty)$. Если внутренний радиус $\rho(\Omega) < \infty$, то

$$e^{2\pi M_0(\Omega)} \leq 1 + \frac{\rho(\Omega)}{\lambda(\Omega)}.$$

Справедливо следующее обобщение теоремы 6.3.

Теорема 6.11 (F. G. Avkhadiev [41] и Ф. Г. Авхадиев [42]). Пусть Ω — открытое собственное подмножество $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, $1 \leq p < \infty$, $n < s < \infty$. Тогда для любой вещественнозначной функции $u \in C_0^1(\Omega)$

$$\int_{\Omega} \frac{|\nabla u(x)|^p}{\rho^{s-p}(x, \partial\Omega)} dx \geq \left(\frac{s-n}{p} \right)^p \int_{\Omega} \frac{|u(x)|^p}{\rho^s(x, \partial\Omega)} dx.$$

Существуют области Ω' , для которых константа $((s-n)/p)^p$ является точной, в частности, если $M_0(\Omega') = \infty$, то $c_p(s, \Omega') = ((s-n)/p)^p$.

Проблема 10. Предположим, что $n \geq 3$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — область, граница которой содержит не менее двух точек, $1 \leq p < \infty$, $n < s < \infty$. Верно ли следующее утверждение: условие $M_0(\Omega) < \infty$ влечёт строгое неравенство $c_p(s, \Omega) > ((s-n)/p)^p$.

Достаточно доказать, что условие $M_0(\Omega) < \infty$ влечёт строгое неравенство $c_1(s, \Omega) > s - n$.

Замечание 6.2. Пусть $n \geq 2$, $1 \leq p < \infty$, но $-\infty < s \leq n$. Тогда существуют области $\Omega' \subset \mathbb{R}^n$ и $\Omega'' \subset \mathbb{R}^n$, такие, что $c_p(s, \Omega') > 0$ и $c_p(s, \Omega'') = 0$.

Замечание 6.3. Если $s > n$ и $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — область, такая, что $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$ есть компакт, то $M_0(\Omega) = \infty$. Поэтому $c_p(s, \Omega') = ((s-n)/p)^p$ в силу теоремы 6.11.

Справедлива

Теорема 6.12 (F. G. Avkhadiev, R. V. Makarov [54]). Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — область, для которой $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$ является непустым выпуклым компактом. Предположим,

что $n \geq 2$, $1 \leq p < \infty$, $-\infty < s < n$. Тогда

$$c_p(s, \Omega) \geq c_{psn} := \min_{k=1,2,\dots,n} \frac{|s - k|^p}{p^p},$$

следовательно, для любой вещественнозначной функции $u \in C_0^1(\Omega)$

$$\int_{\Omega} \frac{|\nabla u(x)|^p}{\rho^{s-p}(x, \partial\Omega)} dx \geq c_{psn} \int_{\Omega} \frac{|u(x)|^p}{\rho^s(x, \partial\Omega)} dx.$$

Существуют допустимые области $\Omega' \subset \mathbb{R}^n$, для которых константа c_{psn} является точной.

Полезно сравнить теорему 6.12 и случай $-\infty < \sigma < 1$ теоремы Харди 6.2 с граничным условием $g(+\infty) = 0$. Учитывая формулы (6.19) и (6.20), предложение 6.2 и теорему 6.12, приходим к следующей проблеме.

Проблема 11. *Предположим, что $n \geq 2$, $1 \leq p < \infty$, но $-\infty < s \leq 1$. Докажите, что $c_p(s, \Omega) = 0$ для любой ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.*

Отсутствие экстремальных функций в ряде неравенств типа Харди и Реллиха даёт возможность их усилить с использованием положительных дополнительных слагаемых. В этом направлении накоплено большое число исследований, выполненных рядом авторов (В. Мазъя, Н. Brezis, М. Marcus и другие математики, см., например, работы [21]-[24], [28]-[31], [55], [56]).

Мы описываем несколько примеров о неравенствах с дополнительными слагаемыми. Прежде всего, рассмотрим классическое неравенство Пуанкаре-

Фридрихса: для любой функции $u \in C_0^1(\Omega)$

$$\int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx \geq \lambda_1(\Omega) \int_{\Omega} |u(x)|^2 dx, \quad (6.31)$$

где $\lambda_1(\Omega)$ — первое собственное значение задачи Дирихле для уравнения Лапласа. Доказано следующее утверждение.

Теорема 6.13 (Н. Brezis, М. Marcus [28]). *Если $n \geq 2$ и $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная выпуклая область, то для любой функции $u \in C_0^1(\Omega)$*

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \geq \frac{1}{4} \int_{\Omega} \frac{|u|^2 dx}{\rho^2(x, \partial\Omega)} + \lambda \int_{\Omega} |u|^2 dx. \quad (6.32)$$

где $\lambda = (1/4) / (\text{diam}(\Omega))^2$.

В статье [28] сформулирован вопрос: можно ли взять $\lambda = c_n / (\text{vol}(\Omega))^{2/n}$ в неравенстве (6.32) с некоторой положительной постоянной c_n ? В статье [29], М. Хофман-Остенхоф, М. Хофман-Остенхоф и А. Лаптев доказали, что ответ на поставленный вопрос положителен и $c_n \geq (n/4)\omega_n^{2/n}$, где $\omega_n = 2\pi^{n/2}/(n\Gamma(n/2))$ — объём единичного шара в $\mathbb{R}^n$. Но точное значение c_n пока неизвестно. Ясно, что выбор λ в неравенстве (6.32) связан с оценкой Пуанкаре $\lambda_1(\Omega) \geq \pi^2 / (\text{diam} \Omega)^2$ и изопериметрическим неравенством Рэля-Фабера-Крана

$$\lambda_1(\Omega) \geq \omega_n^{2/n} j_{n/2-1}^2 / (\text{vol}(\Omega))^{2/n},$$

где j_ν — первый нуль функции Бесселя J_ν порядка ν .

Обобщения и усиления неравенства (6.32) получены в статьях С. Филиппаса, В. Мазьи и А. Тертикаса [30], Ф. Г. Авхадиева и К.-Й. Виртса [31], Ф. Г. Авхадиева и А. Лаптева [37].

В частности, в [31] доказано, что в выпуклой области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ неравенство (6.32) с некоторым $\lambda > 0$ имеет место тогда и только тогда, когда внутренний радиус $\rho(\Omega) := \sup_{x \in \Omega} \rho(x, \partial\Omega) < \infty$, причём имеет место оптимальная оценка: $\lambda \geq \lambda_0^2 / \rho^2(\Omega)$, где $\lambda_0 \approx 0.940$ — первый положительный корень уравнения Лямба $J_0(t) + 2tJ'_0(t) = 0$ для функции Бесселя порядка нуль.

Имеется ряд открытых проблем, связанных с неравенствами типа Харди и Реллиха с дополнительными слагаемыми. Мы укажем лишь одну задачу, сформулированную явно в виде гипотезы в статье [55].

Проблема 12. (F. G. Avkhadiev, K.-J. Wirths [55]). *Докажите, что среди всех n -мерных областей с заданным внутренним радиусом $\rho(\Omega) := \sup_{x \in \Omega} \rho(x, \partial\Omega)$ максимум наилучшей константы λ в (6.32) (константы Брезиса-Маркуса) достигается для B_n , где B_n — n -мерный шар радиуса $\rho(\Omega)$.*

Далее мы рассмотрим естественное параметрическое обобщение неравенства (6.28) в областях $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\Omega \neq \mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$): для любой функции $u \in C_0^1(\Omega)$

$$\left(\int_{\Omega} \frac{|\nabla u(x)|^p dx}{\rho^\alpha(x, \partial\Omega)} \right)^{1/p} \geq c_{pq} \left(\int_{\Omega} \frac{|u(x)|^q dx}{\rho^s(x, \partial\Omega)} \right)^{1/q}, \quad (6.33)$$

где $c_{pq} = c_{pq}(s, \alpha, \Omega)$, параметры $p \in [1, \infty)$, $q \in [1, \infty)$,

$\alpha \in \mathbb{R}$ и $s \in \mathbb{R}$ являются фиксированными числами, константа $c_{pq} = c_{pq}(s, \alpha, \Omega) \in [0, \infty)$ предполагается точной, т. е. наибольшей из возможных.

Имеется несколько нетривиальных результатов о неравенстве вида (6.33) в нестандартном случае, когда $s \in [1, \infty)$, но $\alpha \neq s - p$ (см., например, [41] и [57]).

Проблема 13. *Предположим, что $n \geq 2$ и параметры $p \in [1, \infty)$, $q \in [1, \infty)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $s \in \mathbb{R}$ являются фиксированными числами. В терминах евклидовой геометрии требуется описать нетривиальное семейство областей $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\Omega \neq \mathbb{R}^n$, таких, что $c_{pq}(s, \alpha, \Omega) > 0$.*

Ясно, что теорема 6.4 даёт решение этой проблемы в частном случае, когда $n = s = 2$, $p = q \in [1, \infty)$, $\alpha = 2 - p$. Далее мы рассмотрим одну проблему, связанную с проблемой 13 и классическим неравенством Пуанкаре-Фридрихса (6.31). Заметим, что $c_{22}(0, 0, \Omega) = \lambda_1(\Omega)$, где $\lambda_1(\Omega)$ — первое собственное значение задачи Дирихле для уравнения Лапласа.

Проблема 14. *В терминах евклидовой геометрии требуется описать все области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, для которых $\rho(\Omega) := \sup_{x \in \Omega} \rho(x, \partial\Omega) < \infty \implies \lambda_1(\Omega) > 0$.*

По импликациям $\rho(\Omega) < \infty \implies \lambda_1(\Omega) > 0$ имеется ряд интересных результатов (см., например, Р. Оссерман [58]), но проблема 14 является открытой даже для размерности $n = 2$. Уместно отметить, что проблема 14 является одной из многих интересных и трудных проблем, связанных с собственными значениями задач Дирихле и Неймана для лапласиана (см.,

например, недавнюю статью: V. Gol'dshtein, R. Hurri-Syrjänen, V. Pchelintsev, A. Ukhlov [59]).

Пусть $m \geq 2$ является фиксированным натуральным числом. Для гладких функций $u \in C^m(\Omega)$ рассмотрим полигармонические операторы, определённые равенствами

$$\Delta^{m/2}u := \begin{cases} \Delta^j u, & \text{если } m = 2j \text{ — чётное число,} \\ \nabla \Delta^j u, & \text{если } m = 2j + 1 \text{ — нечётное число,} \end{cases}$$

с формальным соглашением $\Delta^{1/2}u := \nabla u$. Таким образом, функция $\Delta^{m/2}u$ корректно определена для любого натурального числа m (см. книгу: F. Gazzola, H. Ch. Grunau, G. Sweers [60], посвященную полигармоническим краевым задачам).

Рассмотрим следующее обобщение неравенств Харди-Реллиха: для любой функции $u \in C_0^m(\Omega)$

$$\int_{\Omega} \frac{|\Delta^{m/2}u(x)|^2}{\rho^{s-2m}(x, \partial\Omega)} dx \geq A_2^{(m)}(s, \Omega) \int_{\Omega} \frac{|u(x)|^2}{\rho^s(x, \partial\Omega)} dx, \quad (6.34)$$

где константа $A_2^{(m)}(s, \Omega) \in [0, \infty)$ выбрана как максимальная.

Для вещественнозначной функции $u \in C_0^m(\Omega)$ имеется полезное обобщённое тождество Ладыженской (см. [20], гл. 2, (6.26) для $m=2$ и [60], гл. 2, (2.12) для общего случая):

$$\int_{\Omega} \left| \Delta^{m/2}u(x) \right|^2 dx =$$

$$= \int_{\Omega} \sum_{k_1=1}^n \sum_{k_2=1}^n \cdots \sum_{k_m=1}^n \left(\frac{\partial^m u(x)}{\partial x_{k_1} \partial x_{k_2} \cdots \partial x_{k_m}} \right)^2 dx. \quad (6.35)$$

Если $s = 2m$, то в левая часть формулы (6.34) имеет вид $\int_{\Omega} \left| \Delta^{m/2} u(x) \right|^2 dx$ и мы можем воспользоваться формулой (6.35). Этот факт был успешно использован в ряде работ при исследовании неравенства (6.34) для случая $s = 2m$ (см., например, работы [61]-[64]). В статье [61] М. П. Оуен доказал, что $A_2^{(m)}(2m, \Omega) \geq ((2m - 1)!!)^2 / 4^m$ для любой выпуклой области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\Omega \neq \mathbb{R}^n$, и что эта оценка является оптимальной, так как она точна для полупространства $x_1 > 0$. Для любой выпуклой области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\Omega \neq \mathbb{R}^n$, в статьях [45] и [63] нами доказано противоположное неравенство $A_2^{(m)}(2m, \Omega) \leq ((2m - 1)!!)^2 / 4^m$. Следовательно, имеем следующее утверждение.

Теорема 6.14 (М. Р. Owen [61], Ф. Г. Авхадиев [45], Ф. Г. Авхадиев [63]). *Предположим, что $n \geq 2$, $m \geq 2$. Тогда для любой выпуклой области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\Omega \neq \mathbb{R}^n$*

$$A_2^{(m)}(2m, \Omega) = \frac{((2m - 1)!!)^2}{4^m}.$$

Мы здесь исключили случай $m = 1$, он был рассмотрен ранее, так как $A_2^{(1)}(2, \Omega) \equiv c_2(2, \Omega) = 1/4$.

Для невыпуклых областей справедлива

Теорема 6.15 (Ф. Г. Авхадиев [64]). *Предположим, что $m \geq 2$, $\Omega \subset \mathbb{C}$ — область, причём $\Omega \neq \mathbb{C}$. То-*

$$\text{гда } A_2^{(m)}(2m, \Omega) \geq ((m-1)!)^2 c_2(2, \Omega),$$

$$A_2^{(m)}(2m, \Omega) > 0 \iff M_0(\Omega) < \infty.$$

В случае $s \neq 2m$ остается нерешённой

Проблема 15. *Предположим, что $n \geq 2$, $m \geq 2$, $s \in \mathbb{R}$, $s \neq 2m$. В терминах евклидовой геометрии требуется описать нетривиальные семейства областей $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, для которых $A_2^{(m)}(s, \Omega) > 0$.*

Отметим также статью В. М. Миклюкова и М. Вуоринена [65] как перспективную работу по неравенствам типа Харди на римановых многообразиях.

Результаты по геометрической теории функций и математической физике я регулярно докладывал на научных семинарах. Благодарен многим специалистам, прежде всего, математикам старшего поколения А. А. Гончару, П. Л. Ульянову, В. Я. Гутлянскому, Ю. Г. Решетняку, Ю. Ю. Трохимчуку, В. М. Миклюкову и Ch. Pommerenke за поддержку моей тематики.

6.3 Задания к семинарам

1. Константы в неравенствах (6.14) не являются, по-видимому, точными. Для круга $P(\Omega) = 3I(\partial\Omega)$. Имеем: $\lim_{n \rightarrow \infty} P(\Omega_n)/I(\partial\Omega_n) = 4$, где $\Omega_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1, 0 < y < 1/n\}$. Понятно, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \Omega_n = \emptyset$, т. е. в пределе область (открытое связное множество) «исчезает», но предел замыканий $\lim_{n \rightarrow \infty} \overline{\Omega}_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, y = 0\}$ — «игла».

2. В статье [14] указано, что автору неизвестны опровергающие примеры к следующей гипотезе: для любой области $\Omega \subset \mathbf{C}$ и любой функции $u \in C_0^\infty(\Omega)$ справедливы неравенства

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda} \iint_{\Omega} \frac{u^2 dx dy}{r^2(z, \Omega)} &\leq \iint_{\Omega} |\nabla u|^2 dx dy \leq \\ &\leq \lambda \iint_{\Omega} r^2(z, \Omega) |\Delta u|^2 dx dy, \end{aligned}$$

где λ — некоторая положительная постоянная, $r(z, \Omega)$ — внутренний радиус в смысле Г. Сегё.

Отметим, что в любой области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ гиперболического типа справедливы поточечные неравенства $\text{dist}(z, \partial\Omega) \leq R(z, \Omega) \leq r(z, \Omega)$, $z \in \Omega$.

3. Докажите, что равномерное совершенство границы области $\Omega \subset \mathbf{C}$ является конформно инвариантным свойством.

4. Докажите асимптотическую формулу

$$\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} = \frac{1}{(n+1)^{1/2}} \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} + O(1/n) \right) \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Глава 7

Роль математики в цифровой экономике

7.1 Математические задачи экономики

В последние годы как в России, так и во всём мире происходит возрастание роли математики и математических проблем в экономике. Это явление связано с тем, что математика является основой информационных технологий, а информационные и телекоммуникационные технологии глубоко проникли во все сферы деятельности человека.

Благодаря интернету и телевидению все знают о развитии новых технологий в финансовой и налоговой сфере, а также в промышленности, сельском хозяйстве, медицине, образовании, управлении работой транспорта, хранении и продаже товаров и услуг.

Вместе с зарождением цифровой экономики возникла необходимость развития ряда методов математики для решения новых задач, в частности, для обработки гигантских объёмов информации.

Исторически возникновение цифровой экономики связано с развитием компьютерных технологий, интернета и с роботизацией промышленности. Говорят о четвёртой промышленной революции, подразумевая переход на автоматизированное цифровое производство, управляемое интеллектуальными системами в режиме реального времени. Типичные свойства — использование роботов и электронный документооборот.

Цели и методы развития цифровой экономики в России отражены во многих документах, выработанных и опубликованных Правительством Российской Федерации. Частью цифровой экономики являются развитие ряда структур для быстрой обработки больших объёмов информации, а также создание и внедрение «умных» машин и механизмов.

7.2 Основные направления

Из большого числа математических проблем в цифровой экономике укажем лишь три направления.

Первое направление состоит в создании *цифровых двойников* дорогостоящих изделий, таких как космические аппараты, морские корабли, самолёты, атомные реакторы и т. п. Математическое моделирование таких объектов уже давно используется и для замены дорогостоящих экспериментов, и для усовершенствования конструкции изделий в процессе их изготовления. В результате цифровые двойники физических объектов позволяют сэкономить огромные материальные и фи-

нансовые ресурсы, а также сократить сроки изготовления дорогостоящих объектов.

К этому направлению примыкает математическое моделирование на этапе проектирования объекта или изделия. Большие стройки мостов, плотин, высотных зданий всегда начинались с создания математических моделей. С появлением компьютерных технологий произошёл качественный скачок в моделировании, появились новые ветви: бионический дизайн, многопараметрическая оптимизация и др.

Второе направление — *управление транспортными потоками*. Это направление уходит своими корнями в топологическую задачу Леонарда Эйлера о семи мостах Кёнигсберга. Понятно, что в настоящее время транспортные потоки многократно выросли и привели к непростым математическим проблемам.

Третье направление — *анализ больших данных*, появляющихся в связи с цифровизацией книг в библиотеках и экспонатов в музеях, в связи со снимками камер наблюдения, с метеорологическими измерениями, потоками сообщений из социальных сетей, данными об абонентах сотовой связи и т. д. При анализе больших данных традиционные методы математической статистики и линейного программирования оказываются недостаточными. Нужны новые подходы, основанные на богатом арсенале математических алгоритмов, а также нейронные сети и машинное обучение.

7.3 Задания к семинарам

1. По тематике этой главы имеется ряд публикаций в научных журналах, Прочитайте статью:

Клименко О.А. *Математические основы цифровой экономики*. Информационные и математические технологии в науке и управлении. 2018. №2 (10). С. 121-127.

2. К цифровой экономике относится ряд структур, связанных с обслуживанием людей. В качестве примеров можно указать интернет-магазины, многофункциональные центры (МФЦ) и портал Госуслуги РФ. Что ещё вы можете добавить к этому списку?

3. Напомню, что выдающийся российский математик Л.В. Канторович — лауреат нобелевской премии по экономике. Рекомендую познакомиться с его научными достижениями, материалы можно найти в интернете.

4. По понятным причинам конкретные современные разработки в цифровой экономике не публикуются в открытой печати и интернете. По традиционным математическим моделям и методам в экономике имеются много публикаций, а именно, научных статей и монографий, научно популярных книг и хороших учебников. Загляните в учебник для студентов МГУ:

Замков О.О., Толстопятенко А.В., Черемных Ю.Н. *Математические методы в экономике*. — Учебник, 2-е издание, М.: МГУ им. М.В. Ломоносова, Издательство «Дело и Сервис», 1999. — 368 с.

Глава 8

О семинарах и литературе

Как было объявлено в предисловии, мы посвящаем часть лекций и семинаров интересным проблемам, связанным с собственными научными исследованиями слушателей и преподавателя этой дисциплины.

Мои научные интересы отражены в главе 6 по неравенствам математической физики.

На семинарских занятиях предполагаются

1) 15-минутные доклады студентов по темам их будущих выпускных работ.

Желательно подготовить и представить файлы своих докладов, и основное время посвятить описанию целей и задач, достигнутых результатов, предстоящей работы по преодолению тех или иных трудностей.

Кроме того, предполагаются

2) краткие сообщения студентов о своих посещениях рекомендованных научных порталов и

3) краткие сообщения студентов об интересных нерешённых математических проблемах, обнаружен-

ных в интернете или в беседах с научными руководителями.

Вопросы к зачёту.

1. Российские сетевые ресурсы по математике. Что нового для себя Вы узнали из порталов Mathnet.ru и elibrary.ru?

2. Мировые сетевые ресурсы Scopus и Web of Science. Как определяется импакт-фактор научного журнала?

3. Алгебраические и трансцендентные числа. Теоремы Эрмита и Линдемана. Открытые проблемы по этой тематике.

4. Великая теорема Ферма.

5. Формулировка гипотезы Римана о нулях дзета-функции как задачи о нулях интеграла, зависящего от параметра.

6. Формулировка гипотезы Римана о нулях дзета-функции как задачи о распределении простых чисел.

7. Теорема Эйлера о связи дзета-функции с бесконечным произведением.

8. Вывод формулы, выражающей дзета -функцию через интеграл, зависящий от параметра.

9. Проблемы Гильберта.

10. Семь проблем 3-его тысячелетия. Кем они объявлены и кто такой Г. Перельман?

11. Вокруг гипотезы Бибербаха и гипотеза Кшижа.

12. Модели Пуанкаре плоскости Лобачевского.

13. Жёсткость кручения области: модель Сен-Венана, история вопроса и изопериметрические нера-

венства.

14. Какие современные проблемы математики интересуют ваших одноклассников (примеры на основе докладов на семинарских занятиях по нашему курсу).

15. Несколько открытых современных проблем математики, о которых вы узнали в ходе самостоятельной работы.

16. Что означает термин «Цифровая экономика»?

Современные проблемы математики являются динамической темой. Каждый активно работающий математик следит за новинками, участвуя с докладами в научных семинарах и конференциях, а также посещая научные порталы и сайты научных журналов.

Приведу минимальный перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины:

Scopus (<http://scopus.com>), Web of Science (<http://web of science.com>), Научная электронная библиотека РФ (www.elibrary.ru), Общероссийский математический портал (<http://math-net.ru>).

В портале Mathnet. ru вы можете посетить сайты всех значимых математических журналов России. Напомню ещё раз: рекомендую познакомиться с требованиями к авторам по содержанию статей и по их оформлению нескольких научных журналов, как минимум, трёх следующих.

1) Журнал *Успехи математических наук* публикует обзорные статьи по наиболее актуальным разделам математики, краткие сообщения и информацию о

математической жизни в стране и за рубежом. Предназначается для научных работников, преподавателей, аспирантов и студентов старших курсов.

2) Журнал *Математический сборник*. Первый выпуск журнала вышел в свет в октябре 1866 г. Публикует оригинальные научные исследования, полученные в области математического анализа, обыкновенных дифференциальных уравнений, дифференциальных уравнений в частных производных, математической физики, геометрии и топологии, алгебры и теории чисел, функционального анализа. Предназначается для научных работников, преподавателей, аспирантов и студентов старших курсов.

3) Журнал *Итоги науки и техники. Современная математика и её приложения. Тематические обзоры* публикует исследовательские и обзорные статьи по всем разделам современной математики, а также по прикладным аспектам математики и её приложениям. Предназначается для научных работников, преподавателей, аспирантов и студентов старших курсов.

Литература

- [1] *Проблемы Гильберта*. Под ред. П. С. Александрова. Сборник. М.: Наука, 1969. 240 с.
- [2] *Математическая энциклопедия* в пяти томах. Главный редактор — И. М. Виноградов. М.: Советская энциклопедия. Издана в 1977—1985 годах.
- [3] А. Пуанкаре. *О науке*. Под ред. Л. С. Понтрягина. 2-е изд., стер. М.: Наука. 1990. 736 с.
- [4] Е. К. Титчмарш. *Теория дзета-функции Римана*. М.: Изд-во иностранной литературы. 1953, 408 с.
- [5] *The Millennium Prize Problems*. A co-publication of the AMS and Clay Math. Inst. Edited by: J. Carlson, A. Jaffe, A. Wiles, 2006, 165 p.
- [6] Б. Риман. *Сочинения*. Москва-Ленинград: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1948, 544 с.
- [7] Дж. Литлвуд. *Математическая смесь*. Москва: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит. 1990, 140 стр.

- [8] М. М. Арсланов. *Знаменитые математические проблемы*. Учебно методическое пособие. Казань: Казанский федеральный университет, 2012. 25 с.
- [9] Г. Полия, Г. Сегё. *Изопериметрические неравенства в математической физике*. Москва: Физматгиз, 1962, 336 с.
- [10] A. W. Goodman. *Univalent functions*. Tampa, FL: Mariner Publ. Comp. 1983.
- [11] Ch. Pommerenke. *Boundary Behaviour of Conformal Maps*. Springer-Verlag, Berlin- N Y. 1992, 382 p.
- [12] D. Sullivan. *Related aspects of positivity in Riemannian geometry*. J. Diff. Geom., **25**, 327-351 (1987).
- [13] L. Carleson, T. W. Gamelin. *Complex dynamics*. Springer: New-York, 1993. 192 p.
- [14] Ф. Г. Авхадиев. *Решение обобщенной задачи Сен-Венана*. Матем. сборник, **189** (12), 3–12 (1998) .
- [15] Ф. Г. Авхадиев. *Конформные отображения и краевые задачи*. Казань: Изд-во Казанского университета. Изд. второе, перераб. и доп. 2019, 412 с.
- [16] F. Avkhadiev. *Selected results and open problems on Hardy – Rellich and Poincaré – Friedrichs inequalities*. Anal. Math. Phys., V. 11, 134. 1–20 (2021).
- [17] Г. Г. Харди, Дж. Е. Литтльвуд и Г. Полия. *Неравенства*. Москва: ИЛ, 1948, 456 с.

- [18] F. Rellich. *Perturbation theory of eigenvalue problems*. Gordon and Breach, New York - London - Paris, 1969, 127 p.
- [19] M. Reed, B. Simon. *Methods of mathematical physics. Scattering theory*. Acad. Press, S. Diego, 1979, 463 p.
- [20] O. A. Ladyzhenskaya. *The Boundary Value Problems of Mathematical Physics*. Springer-Verlag, New York etc. 1985, 322 p.
- [21] V. G. Maz'ya. *Sobolev Spaces*. Springer-Verlag, Berlin, 1985, 488 p.
- [22] A. A. Balinsky, W. D. Evans, R. T. Lewis. *The Analysis and Geometry of Hardy's Inequality*. Universitext, Springer: N Y - London, 2015, 263 p.
- [23] M. Ruzhansky, D. Suragan. *Hardy Inequalities on Homogeneous Groups*. Progress in Mathematics, 327. Birkhäuser, 2019, 571 p.
- [24] Ф. Г. Авхадиев. *Конформно инвариантные неравенства*. Казань: Изд-во Казанского университета. 2020, 260 с.
- [25] E. B. Davies. *The Hardy constant*. Quart. J. Math. Oxford Ser. (2), **46** (2), 417-431 (1995).
- [26] T. Matskewich, P. E. Sobolevskii. *The best possible constant in a generalized Hardy's inequality for convex domains in R^n* . Nonlinear Anal. **28**, 1601–1610 (1997).

- [27] M. Marcus, V. J. Mizel, Y. Pinchover. *On the best constant for Hardy's inequality in $\mathbb{R}^n$* . Trans. Amer. Math. Soc. **350**, 3237–3250 (1998).
- [28] H. Brezis, M. Marcus. *Hardy's inequalities revisited. Dedicated to Ennio De Giorgi*. Ann. Scuola Sup. Pisa Cl. Sci. **25** (4), 217–237 (1997, 1998).
- [29] M. Hoffmann-Ostenhof, T. Hoffmann-Ostenhof, A. Laptev. *A geometrical version of Hardy's inequality*. J. Func. Anal. **189**, 539–548 (2002).
- [30] S. Filippas, V. Maz'ya, A. Tertikas. *On a question of Brezis and Marcus*. Calc. Var. Partial Differential Equations **25** (4), 491–501 (2005).
- [31] F. G. Avkhadiev, K.-J. Wirths. *Unified Poincaré and Hardy inequalities with sharp constants for convex domains*. Z. Angew. Math. Mech. (ZAMM), **87** (8-9), 632-642 (2007).
- [32] Ф. Г. Авхадиев. *Геометрическое описание областей, для которых константа Харди равна $1/4$* . Известия РАН. Сер. матем. **78** (5), 3–26 (2014).
- [33] F. G. Avkhadiev. *Sharp Hardy constants for annuli*. J. Math. Anal. Appl. **466** (1), 936–951 (2018).
- [34] A. Ancona. *On strong barriers and an inequality of Hardy for domains in $\mathbb{R}^n$* . J. London Math. Soc (2), **34** (2), 274-290 (1986).

- [35] Ch. Pommerenke. *Uniformly perfect sets and the Poincaré metric*. Arch. Math. **32**, 192–199 (1979).
- [36] T. Sugawa. *Various domain constants related to uniform perfectness*. Complex Var. Theory Appl. **36**, 311–345 (1998).
- [37] F.G. Avkhadiev and A. Laptev. *Hardy Inequalities for Nonconvex Domains*. Int. Math. Series «Around Research of Vladimir Maz'ya, I». Function Spaces, **11**, Springer, 1–12 (2010).
- [38] F.G. Avkhadiev, Ch. Pommerenke, K.-J. Wirths. *Sharp inequalities for the coefficients of concave schlicht functions*. Comment. Math. Helv., 2006, **81**, 801–807.
- [39] F.G. Avkhadiev, K.-J. Wirths. *Schwarz-Pick Type Inequalities*. Birkhäuser Verlag: Basel - Boston - Berlin (2009) 156 p.
- [40] Ф. Г. Авхадиев. *Интегральные неравенства в областях гиперболического типа и их применения*. Матем. сборник, **206** (12), 3–28 (2015).
- [41] F.G. Avkhadiev. *Hardy type inequalities in higher dimensions with explicit estimate of constants*. Lobachevskii J. Math. **21**, 3–31 (2006).
- [42] Ф. Г. Авхадиев. *Об экстремальных областях для интегральных неравенств в евклидовом пространстве*. Изв. вузов. Матем., № 6, 80–84 (2019).

- [43] J. L. Fernández. *Domains with Strong Barrier*. Revista Mat. Iberoamericana, **5**, 47–65 (1989).
- [44] P. Caldirolì, R. Musina. *Rellich inequalities with weights*. Calc. Var. **45**, 147–164 (2012).
- [45] F. G. Avkhadiyev. *Hardy – Rellich inequalities in domains of the Euclidean space*. J. Math. Anal. Appl., **442** (2), 469–484 (2016).
- [46] Ф. Г. Авхадиев. *О неравенствах Реллиха в евклидовом пространстве*. Изв. вузов. Матем., № 8, 83–87 (2018).
- [47] L. V. Ahlfors. *Conformal invariants, Topics in Geometric Function Theory*. McGraw – Hill: New-York (1973) 160 p.
- [48] A. E. Beardon, Ch. Pommerenke. *The Poincaré metric of plane domains*. J. London Math. Soc. (2), **18**, 475–483 (1978).
- [49] J. L. Fernández, J. M. Rodríguez. *The exponent of convergence of Riemann surfaces, bass Riemann surfaces*. Ann. Acad. Sci. Fenn. Series A. I. Mathematica. **15**, 165–182 (1990).
- [50] Ф. Г. Авхадиев, Р. Г. Насибуллин, И. К. Шафигуллин. *Конформные инварианты плоских областей гиперболического типа*. Уфимск. матем. журн. **11** (2), 3–18 (2019).

- [51] Ф. Г. Авхадиев, И. К. Шафигуллин. *Точные оценки констант Харди для областей со специальными граничными свойствами*. Известия вузов. Матем. № 2, 69–73 (2014).
- [52] И. К. Шафигуллин. *Нижняя оценка константы Харди для произвольной области в $\mathbb{R}^n$* . Уфимск. матем. журн., 9:2, 104–111 (2017).
- [53] F. G. Avkhadiev, A. R. Kacimov. *The Saint-Venant type isoperimetric inequalities for assessing saturated water storage in lacunary shallow perched aquifers*. ZAMM-Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik, Vol. 103, Is. 1, 1-22 (2022).
- [54] F. G. Avkhadiev, R. V. Makarov. *Hardy Type Inequalities on Domains with Convex Complement and Uncertainty Principle of Heisenberg*. Lobachevskii J. Math. **40** (9), 1250–1259 (2019).
- [55] F. G. Avkhadiev, K.-J. Wirths. *On the best constants for the Brezis – Marcus inequalities in balls*. J. Math. Anal. Appl. **396**, 473–480 (2012).
- [56] F. G. Avkhadiev. *Brezis – Marcus Problem and its Generalizations*. Journal of Mathematical Sciences (United States). **252** (3), 291–301 (2021).
- [57] Ф. Г. Авхадиев, Р. Г. Насибуллин. *Неравенства типа Харди в произвольных областях с конечным внутренним радиусом*. Сиб. матем. журн., 55:2, 239–250 (2014).

- [58] R. Osserman. *A note on Hayman's theorem on the bass note of a drum*. Comment. Math. Helv. **52**, 545–555 (1977).
- [59] V. Gol'dshtein, R. Hurri-Syrjänen, V. Pchelintsev, A. Ukhlov. *Space quasiconformal composition operators with applications to Neumann eigenvalues*. Analysis and Mathematical Physics. **10** (4), Paper No. 78, 20 pp. (2020).
- [60] F. Gazzola, H. Ch. Grunau, G. Sweers. *Polyharmonic boundary value problems*. Springer: Berlin-Heidelberg, **1991** Lect. Notes Math. (2010) 423 p.
- [61] M. P. Owen. *The Hardy – Rellich inequality for polyharmonic operators*. Proc. Royal Soc. Edinburgh. **129** A. 825–839 (1999).
- [62] M. G. Barbatis. *Improved Rellich inequalities for the polyharmonic operator*. Indiana University Math. J. **55** (4), 1401 - 1422 (2006).
- [63] Ф. Г. Авхадиев. *Обобщенная проблема Дэвиса для полигармонических операторов*. Сиб. матем. журн. **58** (6), 1205–1217 (2017).
- [64] Ф. Г. Авхадиев *Неравенства Реллиха для полигармонических операторов в областях на плоскости*. Матем. сборник, **209** (3), 4–33 (2018).
- [65] V. M. Miklyukov, M. R. Vuorinen *Hardy's inequality for $W_0^{1,p}$ - functions on Riemannian manifolds*. Proc. Amer. Math. Soc. **127** (9), 2145–2154 (1999).

Учебное издание

Авхадиев Фарит Габидинович

**ЛЕКЦИИ ПО СОВРЕМЕННЫМ
ПРОБЛЕМАМ МАТЕМАТИКИ**

Учебное пособие

Компьютерная вёрстка

Ф.Г. Авхадиева

Дизайн обложки

З.Р. Ахтямовой

Подписано в печать 05.03.2025.

Бумага офсетная. Печать цифровая.

Формат 60х84 1/16. Гарнитура «Book Antiqua».

Усл. печ. л. 7,13. Уч.-изд. л. 5,60.

Тираж 50 экз. Заказ 61

Отпечатано в ИП Селивананова А.Г.

г. Казань, ул. Некрасова, 38