КАЗАНСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Ф.Г. АВХАДИЕВ

ОСНОВЫ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ

Учебное пособие

КАЗАНЬ
2025

УДК 517(075.8)
ББК 22.161я73
А22

Печатается по рекомендации учебно-методической комиссии Института математики и механики имени Н.И. Лобачевского Казанского (Приволжского) федерального университета (протокол № 4 от 20 фквраля 2025 г.)

Авхадиев Ф.Г.
А22 Основы геометрической теории функций: учебное пособие / Ф.Г. Авхадиев. – Казань, 2025 – 196 с.

ISBN 978-5-9690-1326-1

В учебном пособии представлены семестровый курс лекций автора, а также задания к практическим занятиям по геометрической теории функций комплексного переменного. Пособие предназначено для студентов мехмата, знакомых с комплексным анализом.

Библиография: 55 названий.

УДК 517(075.8)
ББК 22.161я73

ISBN 978-5-9690-1326-1

Посвящаю моей жене Нине

Предисловие

Геометрическая теория функций комплексного переменного содержит ряд интересных и важных результатов, богата методами и имеет разнообразные приложения в теоретической и математической физике.

В учебном пособии представлен семестровый курс лекций автора. В первых семи главах изложены базовые разделы геометрической теории функций. В главах 8 и 9 описаны некоторые применения теории, а глава 10 посвящена обобщениям конформных отображений. В конце каждой главы даны *задачи и упражнения для самостоятельной работы.*

Книга содержит 25 теорем, снабжённых полными доказательствами. Кроме традиционного материала нами описаны *изопериметрические неравенства*, а также классические и современные *теоремы, связанные с моделями Пуанкаре геометрии Лобачевского.*

Учебное пособие предназначается для студентов старших курсов и аспирантов, изучающих комплексный анализ и его приложения.

Работа поддержана Российским научным фондом, проект № 23-11-00066.

Казанский федеральный университет,
10 февраля 2025 года, Ф.Г. Авхадиев.

Оглавление

Глава 1

Базовые понятия и теоремы

1.1 Аналитические функции

Это учебное пособие предназначено для студентов, уже знакомых с университетским курсом по комплексному анализу. В этой главе мы лишь напомним некоторые факты из этого курса.

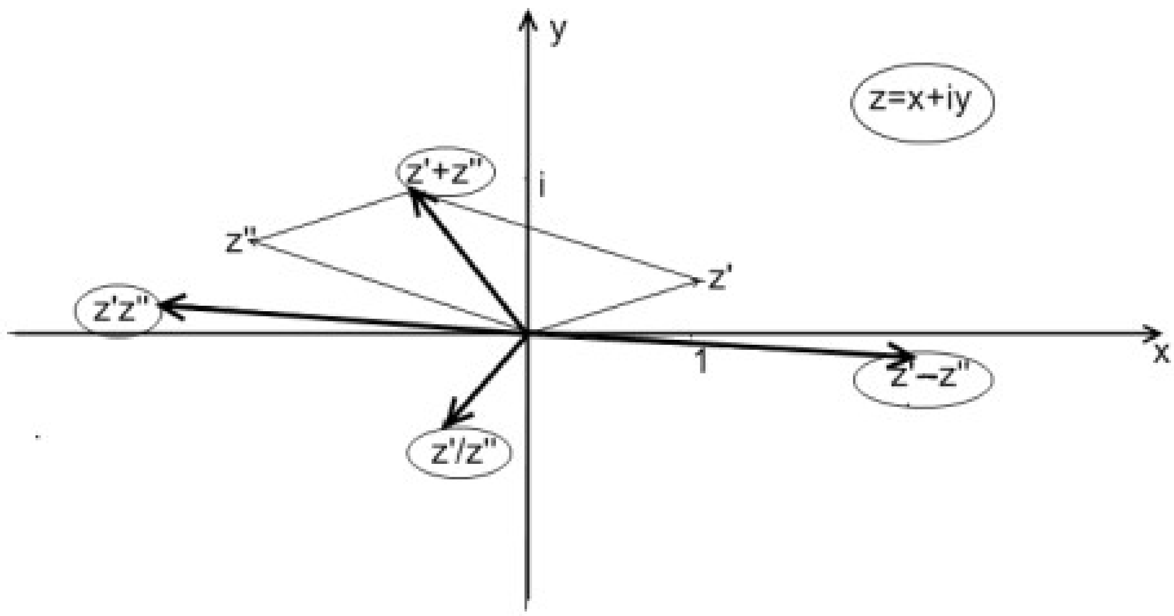

Рис. 1.1: 4 арифметических действия

Комплексные числа $z = x + iy$ отождествляются с точками плоскости, т. е. двумерного евклидова пространства $\mathbb{R}^2$ с координатами x, y. Плоскость комплексного переменного $z = x + iy$ принято обозначать через $\mathbb{C}$. Этим обозначением подчёркивается то обстоятельство, что комплексные числа образуют числовое поле, т. е. для них, следовательно, для точек на плоскости $\mathbb{C}$ определены 4 арифметических действия над числами с привычными свойствами (коммутативность операций сложения и умножения, дистрибутивность умножения относительно сложения и вычитания и др.).

Топологии (определения окрестностей точек и пределов) на плоскости комплексного переменного и двумерного евклидова пространства одинаковы. Поэтому теория функций двух вещественных переменных, в частности, понятия частных производных по переменным x, y, определения криволинейных и двойных интегралов для функций двух вещественных переменных являются составной частью комплексного анализа.

Влияние комплексного анализа в этой части минимально, но существует. Так, например, становится понятно, почему в теории функций одного вещественного переменного полудлину интервала сходимости степенного ряда называют радиусом. Кроме того, иногда формулы вещественного анализа приобретают иной, более изящный вид за счёт использования комплексных переменных. Часто при этом оказываются полезными формальные производные по переменным $z = x + iy$ и

$\overline{z} = x - iy$, определяемые формулами Виртингера

$$\frac{\partial f}{\partial z} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right), \qquad \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

Пусть Ω – область (= открытое связное множество) в $\mathbb{C}$. Рассмотрим отображения $f : \Omega \to \mathbb{C}$, иными словами, комплекснозначные функции $w = f(z)$, заданные в области Ω. По определению, производная функции $f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ в фиксированной точке $z_0 \in \Omega$, задается формулой

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0},$$

если указанный предел существует. Таким образом, определение производной функции по форме совпадает с аналогичным определением производной для функции вещественного переменного. Отметим, что условия Коши-Римана

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

в точке $z_0 = x_0 + iy_0$, вытекающие из существования комплексной производной $f'(z_0)$, равносильны соотношению (проверьте!)

$$\frac{\partial f(z_0)}{\partial \overline{z}} = 0.$$

Существенное отличие комплексного анализа от вещественного начинается с понятия аналитической (голоморфной) функции, область определения которой предполагается **открытым** множеством. И теория аналитических функций составляет основное содержание комплексного анализа.

Аналитические функции можно определить двумя равносильными способами.

Первое определение связано со степенными рядами. Говорят, что функция $f : \Omega \to \mathbb{C}$ является аналитической в точке $z_0 \in \Omega$, если существует круг $\mathbb{D}_\rho(z_0) = \{z : |z - z_0| < \rho\} \subset \Omega$ такой, что f имеет в этом круге производные любого порядка и представима как сумма своего ряда Тейлора по степеням $z - z_0$:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n, \qquad z \in \mathbb{D}_\rho(z_0).$$

Функцию f называют аналитической (голоморфной) в области Ω, если она является аналитической в любой точке этой области.

Можно было бы начать обсуждение аналитической функции как суммы степенного ряда в области его сходимости. Радиус сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ определяется следующей формулой Коши-Адамара

$$R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Если $R > 0$, то степенной ряд сходится в круге $\mathbb{D}_R(z_0) = \{z : |z - z_0| < R\}$, и легко доказать, что сумма ряда

$$s(z) := \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} a_n(z - z_0)^n$$

является аналитической в круге $\mathbb{D}_R(z_0)$, причём

$$a_n = \frac{s^{(n)}(z_0)}{n!}.$$

Второе определение гораздо проще: говорят, что функция $f : \Omega \to \mathbb{C}$ является голоморфной (аналитической) в точке $z_0 \in \Omega$, если в этой точке существует производная $f'(z_0)$. Функцию f называют голоморфной (аналитической) в области Ω, если она является голоморфной (аналитической) в любой точке этой области. Во второй половине двадцатого века термин «голоморфность в точке» стали заменять более удачным термином «$\mathbb{C}$-дифференцируемость в точке», что не меняет сути дела. Понятно, что из первого определения легко следует второе, а обратная импликация оказывается нетривиальной.

Поэтому второе определение, принятое в большинстве учебников по комплексному анализу, отодвигает доказательство *характеристического свойства аналитических функций – разложимости в ряд Тейлора* – вглубь курса комплексного анализа.

Такой подход к изложению комплексного анализа методически оправдан тем, что при доказательстве представимости $\mathbb{C}$-дифференцируемых функций рядом

Тейлора развивается базовая техника теории аналитических функций, основанная на теоремах Коши.

Тем не менее, желательным кратким вариантом ответа на вопрос «Какие функции называются голоморфными или аналитическими?» является первое определение, т. е. представимость функции в виде суммы степенного ряда в любом круге, лежащем в области определения этой функции.

1.2 Интегральная формула Коши

Чтобы получить справедливость первого определения при выполнении второго, нужна следующая ключевая теорема Коши.

Теорема 1.1 *Если f является голоморфной в области Ω в смысле второго определения, то $\int_L f(z)dz = 0$ для любого спрямляемого замкнутого контура L, лежащего в Ω и стягиваемого в точку непрерывными деформациями, не выводящими за пределы области Ω.*

Из теоремы Коши легко выводится интегральная формула Коши, простейшая её формулировка такова.

Теорема 1.2 *Пусть f является голоморфной в области Ω в смысле второго определения, и пусть $\overline{\mathbb{D}}_\rho(z_0) = \{z : |z - z_0| \leq \rho\} \subset \Omega$ и $L_\rho^+(z_0)$ – окружность $\{z : |z - z_0| = \rho\}$, обходимая против часовой стрелки.*

Тогда справедлива формула

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{L_\rho^+(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta, \quad \forall z \in \mathbb{D}_\rho(z_0).$$

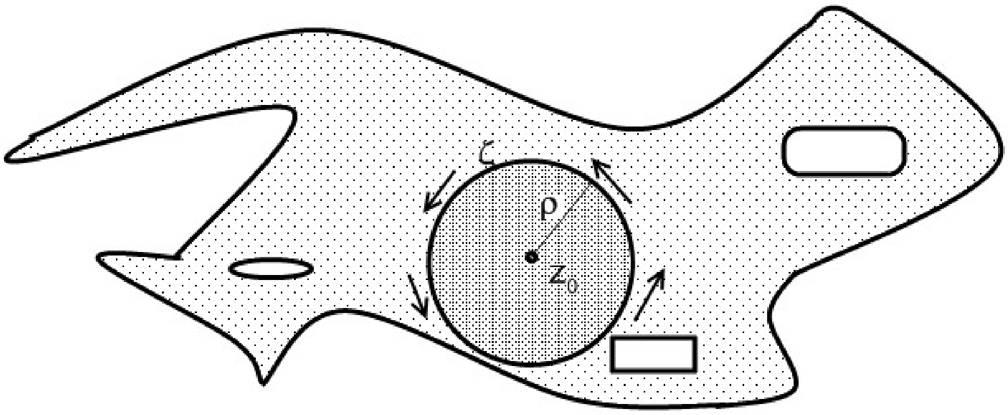

Рис. 1.2: К интегральной формуле Коши

На основании интегральной формулы Коши легко получить справедливость первого определения аналитичности. Действительно, разложим в ряд функцию $1/(\zeta - z)$ по формуле бесконечной геометрической прогрессии со знаменателем $q = (z - z_0)/(\zeta - z_0)$, $|q| < 1$,

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0}\,\frac{1}{1-q} = \frac{1}{\zeta - z_0}\,\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}}$$

и проинтегрируем ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\,(z-z_0)^n = \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$$

почленно вдоль окружности $L_\rho^+(z_0)$. Применяя интегральную формулу Коши, получаем в круге $\{z : |z - z_0| < \rho\}$ представление функции f в виде суммы ряда $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n, \quad z \in \mathbb{D}_\rho(z_0)$, с коэффициентами, определяемыми по формулам Коши

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{L_\rho^+(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\, d\zeta =$$

$$= \frac{1}{2\pi\rho^n}\int_0^{2\pi} f(z_0 + \rho e^{i\theta})e^{-ni\theta}\, d\theta.$$

Одновременно с этим, мы имеем и прежнее, тейлоровское выражение для коэффициентов, т. е.

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}.$$

Более общая интегральная формула Коши получается из простейшей так: круг $\overline{\mathbb{D}}_\rho(z_0)$ заменяем на замкнутую область $\overline{G} \subset \Omega$, ограниченную конечным числом простых, замкнутых, кусочно-гладких кривых, а окружность $L_\rho^+(z_0)$ – положительно ориентированной границей этой области ∂G^+. Таким образом, получаем следующую интегральную формулу Коши:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial G^+} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta.$$

Такая общая интегральная формула играет существенную роль при изучении ряда проблем теории аналитических функций.

Своеобразие комплексного анализа проявляется в использовании многозначных функций и бесконечно удалённой точки. Иногда невозможно обойтись без расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, отождествляемой со сферой Римана с помощью стереографической проекции и превращающей точку $z = \infty$ в обычную точку с точки зрения топологии. При этом «достаточно малая» ε-окрестность точки $z = \infty$ определяется как множество $U_\varepsilon(\infty) = \{z \in \overline{\mathbb{C}} : |z| > 1/\varepsilon\}$ с достаточно малым $\varepsilon > 0$.

1.3 Конформные отображения

В настоящем курсе нашей целью является изучение основ геометрической теории функций комплексного переменного. Подготовительным материалом к геометрической теории служат следующие понятия и факты из стандартного курса комплексного анализа:

1) свойства дробно-линейных отображений, осуществляемых функциями вида

$$w = \frac{az+b}{cz+d} \qquad (ad - bc \neq 0),$$

а также конформные отображения, построенные с привлечением элементарных функций e^z, $\ln z$, $\sin z$, z^α и функции Жуковского $w = (z + 1/z)/2$;

2) принцип аргумента, вытекающий из теоремы Коши о вычетах, и теорема о том, что образом открытого множества при отображении аналитической функци-

ей (не равной тождественно постоянной) является открытое множество. Из этого факта легко следует принцип максимума модуля для аналитических функций;

3) понятия аналитического продолжения и римановой поверхности.

Если функция f является аналитической в области Ω и $f'(z_0) \neq 0$, $z_0 \in \Omega$, то локальное поведение отображения $f : \Omega \to \mathbb{C}$ в точке $z_0 \in \Omega$ определяется первыми двумя слагаемыми её ряда Тейлора, так как

$$f(z) = a_0 + a_1(z - z_0) + O(|z - z_0|^2), \quad a_1 = f'(z_0) \neq 0,$$

т. е. в достаточно малой окрестности точки z_0 функция f ведёт себя как линейное отображение T, определённое формулой $T(z) = a_1 z + (a_0 - a_1 z_0)$, и, в частности, углы с вершиной в точке $z_0 \in \Omega$ отображаются функцией f в углы той же величины.

В этом случае говорят, что отображение $f : \Omega \to \mathbb{C}$ является конформным в точке $z_0 \in \Omega$.

Говорят, что отображение $f : \Omega \to \mathbb{C}$ является конформным и однолистным в области Ω, если оно конформно в каждой точке этой области и является инъективным. Таким образом, в комплексном анализе для отображений открытых множеств слова «однолистное» и «инъективное» являются синонимами.

Базовым результатом геометрической теории функций является следующая теорема Римана о конформных отображениях.

Теорема 1.3 *Пусть* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *– односвязная область с* *границей, содержащей более одной точки в* $\overline{\mathbb{C}}$, $z_0 \in \Omega$ *– фиксированная точка,* $\mathbb{D}$ *– единичный круг* $|w| < 1$. *Тогда существует однолистное конформное отображение* $f : \Omega \to \mathbb{D}$ *области* Ω *на круг* $\mathbb{D}$*, такое, что* $f(z_0) = 0$, $f'(z_0) > 0$ *(т. е.* $f'(z_0)$ *является вещественным положительным числом).*

Иными словами, функция f является аналитической в области $\Omega \subset \mathbb{C}$, и отображение $f : \Omega \to \mathbb{D}$ является биекцией.

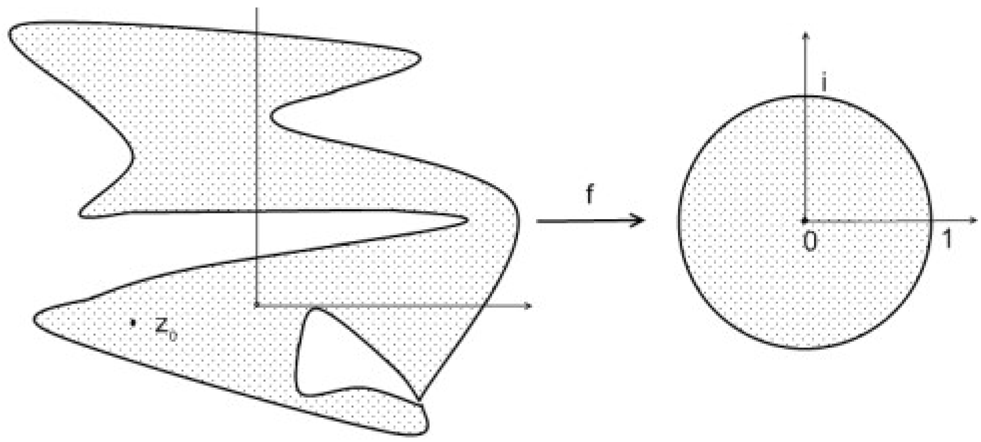

Рис. 1.3: К теореме Римана

Как простое следствие получаем, что любые две односвязные плоские области $\Omega_1 \subset \mathbb{C}$ и $\Omega_2 \subset \mathbb{C}$, отличные от плоскости $\mathbb{C}$, являются конформно эквивалентными, т. е. существует однолистное конформное отображение $f : \Omega_1 \to \Omega_2$, переводящее заданную точку $z_0 \in \Omega_1$ и направление в ней в заданную точку $w_0 \in \Omega_2$ и заданное направление в этой точке.

Существует ряд аналогов этой теоремы для многосвязных областей. В частности, любую двусвязную область Ω можно однолистно и конформно отобразить на кольцо вида $A = \{z \in \mathbb{C} : r(A) < |z| < R(A)\}$, где $0 \le r(A) < R(A) \le \infty$. Величина

$$M(\Omega) := \frac{1}{2\pi} \ln \frac{R(A)}{r(A)}$$

называется модулем двусвязной области Ω. Если $r(A) = 0$ или $R(A) = \infty$, то полагают, что $M(\Omega) = \infty$. Две двусвязные области, имеющие не менее трёх граничных точек в $\overline{\mathbb{C}}$, являются конформно эквивалентными тогда и только тогда, когда они имеют одинаковые модули. Для многосвязных областей с числом граничных компонент $m \in [3, \infty]$ характеристика m также является конформным инвариантом, но совпадение числа граничных компонент, как и в случае двусвязных областей, не гарантирует конформной эквивалентности двух областей.

Эффективное обобщение теоремы Римана связано с отказом от однолистности отображения, с так называемыми накрывающими отображениями, придуманными А. Пуанкаре и описываемыми в следующей теореме.

Теорема 1.4 *Пусть $\mathbb{D}$ – единичный круг $|w| < 1$, Ω – произвольная (неодносвязная) область на плоскости $\mathbb{C}$, имеющая не менее трёх граничных точек в $\overline{\mathbb{C}}$, $z_0 \in \Omega$ – фиксированная точка. Тогда существует единственное конформное отображение $F : \mathbb{D} \to \Omega$*

круга $\mathbb{D}$ на область Ω, обладающее свойствами:

1) F является аналитической функцией в круге $\mathbb{D} = \{w \in \mathbb{C} : |w| < 1\}$, причём $F(\mathbb{D}) = \Omega$ и имеют место нормировки $F(0) = z_0$, $F'(0) > 0$;

2) $F'(w) \neq 0$ для любой точки $w \in \mathbb{D}$, т.е. функция F локально обратима, в частности, в окрестности точки z_0 однозначно определён условием $f_0(z_0) = 0$ основной элемент f_0 обратной функции $f = F^{-1}$;

3) обратная функция $f = F^{-1}$ аналитически продолжима в Ω по любому пути, лежащему в Ω, и все значения, принимаемые её всевозможными аналитическими продолжениями в Ω, лежат в круге $\mathbb{D}$.

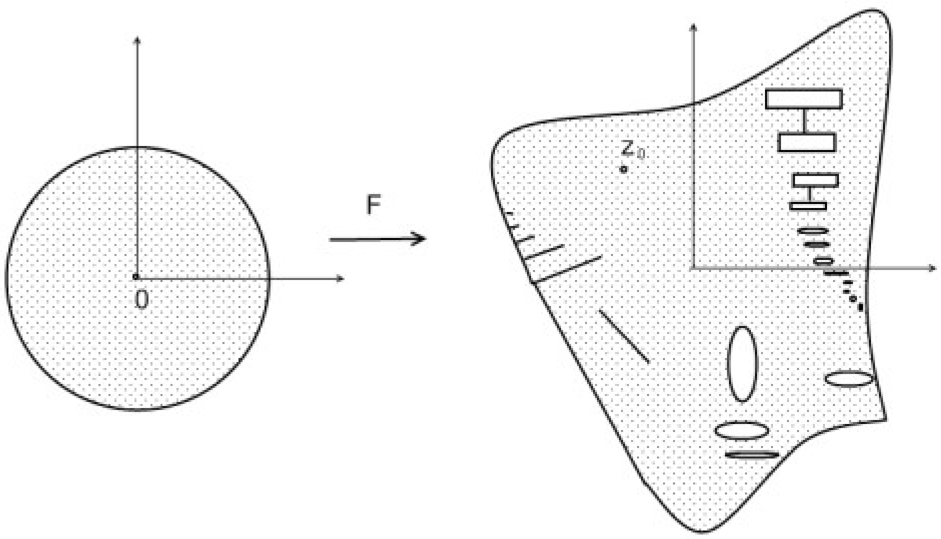

Рис. 1.4: К теореме Пуанкаре

Замечание 1. Области, имеющие не менее трёх граничных точек в $\overline{\mathbb{C}}$, часто называют областями гиперболического типа или гиперболическими областями.

Замечание 2. Теоремы Римана и Пуанкаре распространяются и на области из расширенной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$.

1.4 Граничное соответствие

К фундаментальным теоремам геометрической теории функций комплексного переменного следует также отнести теорему Каратеодори о граничном соответствии при конформных отображениях. Для формулировки этой теоремы во всей её полноте нужна специальная компактификация областей (так называемая теория простых концов). Она построена К. Каратеодори для геометрического описания соответствия границ при однолистных конформных отображениях областей (см. монографию Г. М. Голузина [14]). Здесь мы приведём лишь формулировку теоремы о граничном соответствии в простейшем случае.

Теорема 1.5 *Пусть Ω_1 и Ω_2 – односвязные области, ограниченные замкнутыми жордановыми кривыми. Однолистное конформное отображение $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ однозначно и непрерывно продолжимо на границу области определения и порождает гомеоморфное отображение замыканий областей, в частности, определён гомеоморфизм $f|_{\partial\Omega_1} : \partial\Omega_1 \to \partial\Omega_2$ границ областей.*

Как известно, единственность конформного отображения $f : \mathbb{D} \to \Omega$ гарантируется нормировками Римана: А) для заданных точек $z_0 \in D, \quad w_0 = 0 \in \Omega$ выполняются условия $f(z_0) = 0, \ f'(z_0) = Ref'(z_0) > 0$. Пусть область ограничена замкнутой жордановой кривой. Тогда, в силу теоремы о граничном соответствии римановы нормировки можно заменить одним из следующих нормировок B) или C), также обеспечивающих единственность конформного отображения. А именно, можно потребовать, что B) для двух троек различных граничных точек $z_1, z_2, z_3 \in \partial\mathbb{D}, \qquad w_1, w_2, w_3 \in \partial\Omega$, выбранных с учётом ориентации границ, выполняются равенства $f(z_1) = w_1, \ f(z_2) = w_2, \ f(z_3) = w_3$; либо C) для пары внутренних точек $z_0 \in \mathbb{D}$, $w_0 \in \Omega$ и пары граничных точек $z_1 \in \partial\mathbb{D}$, $w_1 \in \partial\Omega$ выполняются равенства $f(z_0) = w_0, \ \ f(z_1) = w_1$.

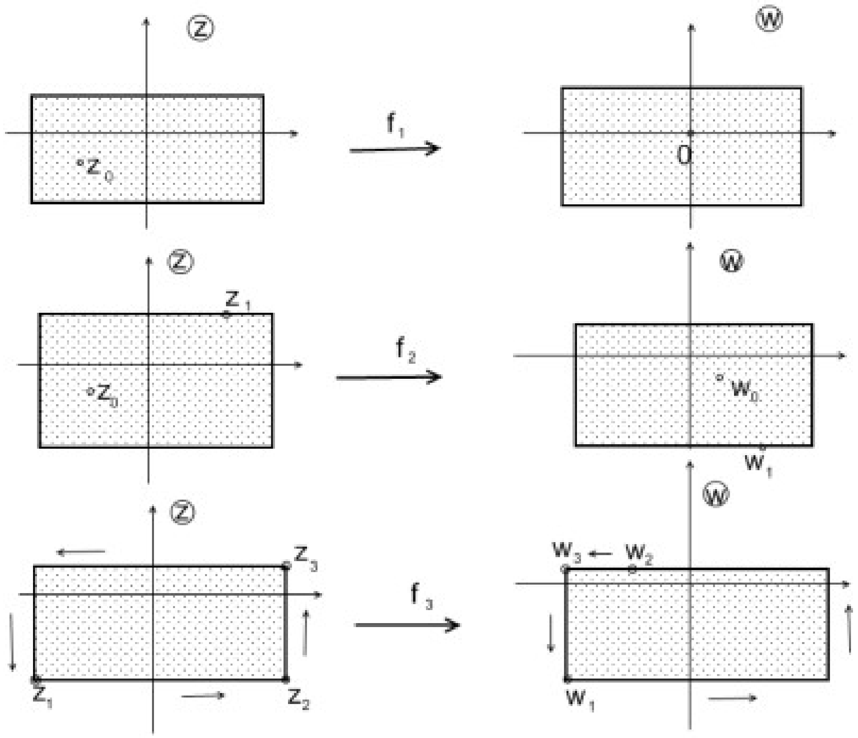

Рис. 1.5: Различные нормировки

В заключение приведём обращение предыдущей теоремы, которое иногда называют принципом соответствия границ. Для простоты будем описывать лишь случай односвязных областей.

Теорема 1.6 *Пусть Ω_1, Ω_2 – односвязные области, ограниченные замкнутыми жордановыми кривыми. Если функция f непрерывна в замыкании Ω_1, голоморфна в Ω_1, $f(\partial\Omega_1) = \partial\Omega_2$ и $f|_{\partial\Omega_1} : \partial\Omega_1 \to \partial\Omega_2$ – гомеоморфизм, то f однолистна в области Ω_1 и конформно отображает её на область Ω_2.*

Эта теорема нетрудно доказывается с применением принципа аргумента. Различные варианты и нетривиальные обобщения этой теоремы можно найти в книгах Ф. Г. Авхадиева [1] и Х. Поммеренке [52].

Для повторения теории аналитических функций рекомендую просмотреть задачник Л. А. Аксентьева [8] и первые 6 глав учебника Е. Титчмарша [23]. Впрочем, имеется ряд других прекрасных учебников и задачников. Проще всего, полистайте книги, по которым вы готовились к сдаче экзамена по комплексному анализу.

Полное и вместе с тем доступное для студентов изложение теорем Римана, Пуанкаре и Каратеодори можно найти в фундаментальной монографии Г. М. Голузина [14].

1.5 Задачи и упражнения

1. Объясните без вычислений: почему радиус сходимости степенного ряда

$$\frac{1}{1+z^2} = 1 - z^2 + z^4 - ... + (-1)^n z^{2n} + ...$$

равен единице?

2. Пусть функция f является аналитической в единичном круге и удовлетворяет условию: $|f(z)| \leq 1$ для любого $z \in \mathbb{D}$. Докажите, что коэффициенты её ряда Тейлора

$$f(z) = a_0 + a_1\, z + a_2\, z^2 + ..., \quad |z| < 1,$$

удовлетворяют неравенству $|a_n| \leq 1$, которое является точным, так как для любого натурального n и $\gamma \in \mathbb{R}$ существует функция f_n, определяемая равенством $f_n(z) = e^{i\gamma} z^n$ и имеющая свойства: $|f_n(z)| \leq 1$ для любого $z \in \mathbb{D}$ и $|a_n| = |f_n^{(n)}(0)|/n! = |e^{i\gamma}| = 1$.

Указание. Воспользуйтесь формулой Коши для коэффициентов.

3. Пусть Ω – плоская область с положительно ориентированной границей $\partial\Omega$, состоящей из кусочно-гладких кривых. Рассмотрим две функции $f = f(z)$ и $g = g(z)$, определенные и непрерывно дифференцируемые в $\overline{\Omega}$ как функции двух вещественных переменных x и y $(x + iy = z \in \overline{\Omega})$. Пользуясь формулой Грина, докажите соотношения

$$\iint_\Omega \left(\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} - \frac{\partial g}{\partial z}\right) dx\,dy = \frac{1}{2i}\int_{\partial\Omega} f\,dz + g\,d\overline{z};$$

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega}\frac{f\,dz}{z-z_0} - \frac{1}{\pi}\iint_\Omega \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\frac{dx\,dy}{z-z_0} \quad (z_0\in\Omega).$$

4. Найдите функцию f с нормировками $f(0)=0$, $f'(0)=1$, конформно отображающую единичный круг на всю плоскость, из которой удалён луч $\{w=u+iv : 1/4 \le u < \infty, v=0\}$. Вспомните другие примеры. Постройте конформные отображения единичного круга на следующие области: полуплоскость, четверть плоскости, внешность отрезка прямой, полоса, полуполоса, внутренности квадрата и правильного треугольника.

5. Для аналитической функции f через $\{f,z\}$ обозначим функцию, называемую производной Шварца или шварцианом и определяемую равенством

$$\{f,z\} = \frac{f'''(z)}{f'(z)} - \frac{3}{2}\left[\frac{f''(z)}{f'(z)}\right]^2.$$

Докажите, что шварциан $\{f,z\}$ инвариантен относительно дробно-линейных преобразований функции f.

Решение. Проверьте приведённые ниже вычисления. Пусть $g(z)=\frac{af(z)+b}{cf(z)+d}$, $ad-bc\neq 0$, требуется доказать, что $\{g,z\}=\{f,z\}$. Непосредственными вычислениями получаем

$$g'(z) = \frac{(ad-bc)f'(z)}{(cf(z)+d)^2},$$

$$g''(z) = (ad-bc)\left[\frac{f''(z)}{(cf(z)+d)^2} - 2c\frac{(f'(z))^2}{(cf(z)+d)^3}\right],$$

$$\frac{g'''(z)}{ad-bc} = \frac{f'''(z)}{(cf(z)+d)^2} - \frac{6cf''(z)f'(z)}{(cf(z)+d)^3} + \frac{6c^2(f'(z))^3}{(cf(z)+d)^4}.$$

Далее, определяем отношения производных:

$$\frac{g'''(z)}{g'(z)} = \frac{f'''(z)}{f'(z)} - 6c\frac{f''(z)}{cf(z)+d} + 6c^2\frac{(f'(z))^2}{(cf(z)+d)^2},$$

$$\frac{g''(z)}{g'(z)} = \frac{f''(z)}{f'(z)} - 2c\frac{f'(z)}{cf(z)+d}.$$

Но тогда

$$\frac{3}{2}\left(\frac{g''(z)}{g'(z)}\right)^2 = \frac{3}{2}\left(\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)^2 - \frac{6cf''(z)}{cf(z)+d} + \frac{6c^2(f'(z))^2}{(cf(z)+d)^2},$$

и легко получаем равенство шварцианов

$$\{g,z\} = \frac{g'''(z)}{g'(z)} - \frac{3}{2}\left(\frac{g''(z)}{g'(z)}\right)^2 = \{f,z\}.$$

Упростите предыдущие вычисления, предварительно доказав следующую формулу для шварциана

$$\{f,z\} = \left(\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)' - \frac{1}{2}\left(\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)^2.$$

Для вычисления шварциана $\{g,z\}$ можно воспользоваться формулой $\{g,z\} = (\ln g'(z))'' - \frac{1}{2}\left((\ln g'(z))'\right)^2$.

6. Докажите, что шварциан $\{f,z\} \equiv 0$ тогда и только тогда, когда f является дробно-линейной функцией, т. е. $f(z)$ имеет вид

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \qquad (ad - bc \neq 0).$$

Указание. Равенство нулю шварциана для дробно-линейной функции получается легко, так как

$$\left\{\frac{az+b}{cz+d},\, z\right\} = \{z,\, z\} \equiv 0.$$

Схема доказательства обратного утверждения такова. Пусть $p(z) = f''(z)/f'(z)$. Как мы убедились выше $\{f, z\} = p'(z) - \frac{1}{2}p^2(z)$. Поэтому решение нелинейного уравнения $\{f, z\} = 0$ третьего порядка сводится к последовательному решению трёх следующих дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\frac{p'}{p^2} = \frac{1}{2}, \quad (\ln f')' = \frac{1}{-z/2 + C_1}, \quad f' = \frac{C_2}{(z - 2C_1)^2},$$

где C_1 и C_2 – постоянные.

7. Пусть f – одно из однолистных конформных отображений единичного круга на область Ω. Докажите, что любое другое однолистное конформное отображение $g : \mathbb{D} \to \Omega$ может быть представлено формулой

$$g(\zeta) = f\left(e^{i\alpha}\frac{\zeta - a}{1 - \overline{a}\zeta}\right), \quad \zeta \in \mathbb{D},$$

где a и α – постоянные, причём $|a| < 1$, а $\alpha \in \mathbb{R}$.

8. Дано, что функция f осуществляет однолистное конформное отображение области Ω_1 на область Ω_2, где

Ω_1 и Ω_2 – ограниченные односвязные области на плоскости $\mathbb{C}$. Куда функция f отображает внешность области Ω_1, т. е. область $\overline{\mathbb{C}} \setminus \Omega_1$? Вопрос взят из задачника Л. А. Аксентьева [8].

Указание. Ответ многозначен. Если f аналитически продолжима на область $\overline{\mathbb{C}} \setminus \Omega_1$, то это одна история, если нет, то совсем другая.

9. Как известно, знаменитая дзета-функция Римана является голоморфной в области $\mathbb{C} \setminus \{1\}$, имеет простой полюс в точке $z = 1$ с вычетом, равным единице, и в полуплоскости $\Pi_1^+ = \{z \in \mathbb{C} : Re\, z > 1\}$ определяется формулой

$$\zeta(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}, \quad z \in \Pi_1^+.$$

Докажите две теоремы Л. Эйлера, а именно, докажите формулу

$$\zeta(2) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

и следующее утверждение.

Теорема 1.7 *В любой точке $z \in \Pi_1^+$ имеет место равенство*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z} = \prod_{p} \frac{1}{1 - 1/p^z},$$

где p пробегает все простые числа $2, 3, 5, 7, 11, 13, \ldots$.

Глава 2

Гиперболическая геометрия

2.1 Модели геометрии Лобачевского

Как известно, формально геометрия Лобачевского строится на тех же аксиомах, что и геометрия Евклида, но с заменой одной из аксиом, а именно, аксиомы о параллельных, на новую: *на плоскости через точку, взятую вне заданной прямой, можно провести не менее двух прямых, не пересекающих заданную.*

Изменение всего лишь одной аксиомы (пятого постулата геометрии Евклида) приводит к совершенно новой планиметрии. В частности, оказывается, что для суммы углов любого треугольника выполняется неравенство $\alpha + \beta + \gamma < 180°$. Появляются новые формулы для всех метрических величин, в частности, новые формулы для вычисления площадей фигур, длин дуг и т. п. Для бесконечно малых фигур (т. е. асимптотически) новые формулы совпадают со старыми, в частности, для треугольников малых размеров $\alpha + \beta + \gamma \approx 180°$.

Практическая значимость геометрии Лобачевского была установлена на моделях. Первая интерпретация принадлежит Е. Бельтрами (1868 год). Им была указана поверхность, на которой реализуется геометрия Лобачевского, если отрезками прямых на этой поверхности считать геодезические линии (вспомним, что так называют линии, соединяющие кратчайшим путем две точки на поверхности). Единообразную интерпретацию трёх геометрий (Евклида, Лобачевского и геометрии на сфере) представил Ф. Клейн (1871 год). По предложению Клейна геометрию Лобачевского называют гиперболической геометрией.

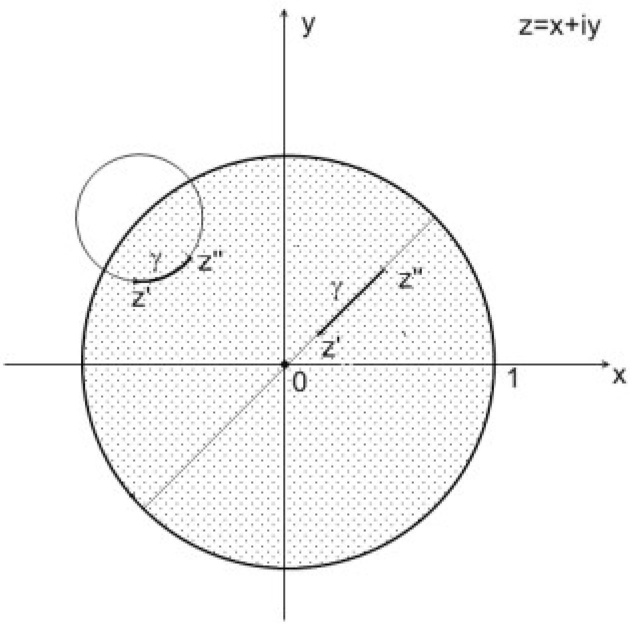

Рис. 2.1: Модель Пуанкаре

В 1882 году А. Пуанкаре предложил новую модель плоскости Лобачевского, тесно связанную с комплексным анализом и группами дробно-линейных отображений. Согласно модели Пуанкаре, плоскостью Лобачевского объявляется единичный круг $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$. Роль точек играют точки, а роль прямых – диаметры круга $\mathbb{D}$ и лежащие в круге $\mathbb{D}$ дуги окружностей вида $|z - z_0| = \rho$ ($|z_0| > 1$), ортогональных к единичной окружности $|z| = 1$. Пуанкаре доказал, что эти дуги являются геодезическими линиями, если дифференциальный элемент длины дуги определять по формуле

$$d\sigma = \frac{|dz|}{1 - |z|^2}.$$

А именно, среди всех линий $\gamma(z_1, z_2)$, лежащих в круге $\mathbb{D}$ и соединяющих заданные точки $z_1,\ z_2$ из круга $\mathbb{D}$, инфимум в равенстве

$$l(z_1, z_2) = \inf_{\gamma(z_1,z_2)} \int\limits_{\gamma} \frac{|dz|}{1 - |z|^2},$$

реализуется на кривой $\gamma(z_1, z_2)$, которая является либо отрезком диаметра, либо дугой окружности, ортогональной к окружности $|z| = 1$.

2.2 Инвариантность метрики Пуанкаре

Теорема 2.1 *Метрика Пуанкаре является конформно инвариантной.*

Доказательство. Пусть T – конформное отображение круга $|\zeta| < 1$ на круг $|z| < 1$. Конформная инвариантность метрики Пуанкаре означает, что должно иметь место тождество

$$\frac{|dz|}{1-|z|^2} = \frac{|d\zeta|}{1-|\zeta|^2}$$

для всех точек z и ζ единичного круга $\mathbb{D}$, таких, что $z = T(\zeta)$. Из общего курса комплексного анализа известно, что любой конформный автоморфизм T единичного круга определяется формулой

$$z = T(\zeta) = e^{i\alpha}\frac{\zeta - a}{1-\overline{a}\zeta} \quad \alpha \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{C}, |a| < 1.$$

Непосредственными вычислениями получаем

$$T'(\zeta) = e^{i\alpha}\frac{1-|a|^2}{(1-\overline{a}\zeta)^2},$$

$$1-|T(\zeta)|^2 = \frac{|1-\overline{a}\zeta|^2 - |\zeta - a|^2}{|1-\overline{a}\zeta|^2} =$$

$$= \frac{1+|a|^2|\zeta|^2 - |\zeta|^2 - |a|^2}{|1-\overline{a}\zeta|^2} = \frac{(1-|a|^2)(1-|\zeta|^2)}{|1-\overline{a}\zeta|^2},$$

и, следовательно,

$$|T'(\zeta)| = \frac{1-|T(\zeta)|^2}{1-|\zeta|^2}.$$

Таким образом, приходим к требуемому соотношению

$$\left|\frac{dz}{d\zeta}\right| = \frac{1-|z|^2}{1-|\zeta|^2},$$

этим и завершается доказательство.

Теорема 2.2 *Гиперболическое расстояние* $\rho_{\mathbb{D}}(z_1, z_2)$ *между точками* z_1, $z_2 \in \mathbb{D}$ *определяется формулой*

$$\rho_{\mathbb{D}}(z_1, z_2) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+t}{1-t}, \quad t = \left| \frac{z_1 - z_2}{1 - \overline{z}_1 \, z_2} \right|.$$

Действительно, преобразование

$$w = T(z) = e^{i\alpha} \frac{z - z_1}{1 - \overline{z}_1 \, z}$$

и конформная инвариантность метрики дают равенство $\rho_{\mathbb{D}}(z_1, z_2) = \rho_{\mathbb{D}}(0, t)$. А величина $\rho_{\mathbb{D}}(0, t)$ легко вычисляется:

$$\rho_{\mathbb{D}}(0, t) = \int_0^t \frac{d\, r}{1 - r^2} = \frac{1}{2} \ln \frac{1+t}{1-t}.$$

Метрику Пуанкаре можно определить в любой односвязной области $\Omega \subset \mathbb{C}$, $\Omega \neq \mathbb{C}$. Для этого рассмотрим однолистное конформное отображение $F : \mathbb{D} \to \Omega$. Через $w = F(z)$ обозначим соответствующую голоморфную функцию со значениями в Ω. Область Ω превратим в плоскость Лобачевского, определив в ней коэффициент метрики Пуанкаре $\lambda_\Omega(w)$ равенством

$$\lambda_\Omega(w)|dw| = \lambda_{\mathbb{D}}(z)|dz| \qquad \forall z \in \mathbb{D}, \ w = F(z) \in \Omega.$$

Имеем

$$\lambda_\Omega(F(z)) \ |F'(z)| = \frac{1}{1 - |z|^2} \qquad \forall z \in \mathbb{D},$$

тогда

$$\lambda_\Omega(w) = \frac{|F'(F^{-1}(w))|^{-1}}{1 - |F^{-1}(w)|^2} \ \forall w \in \Omega.$$

Теми же формулами определяется и метрика Пуанкаре (т. е. гиперболическая метрика) для многосвязной области $\Omega \subset \mathbb{C}$, граница которой содержит не менее трёх точек в $\overline{\mathbb{C}}$. В этом случае $F : \mathbb{D} \to \Omega$ – накрывающее отображение из теоремы Пуанкаре о конформных отображениях. Теперь становится понятен термин «область гиперболического типа» применительно к областям, имеющим не менее трёх граничных точек в расширенной комплексной плоскости.

Таким образом, в каждой области $\Omega \subset \mathbb{C}$, граница которой содержит не менее трёх точек в $\overline{\mathbb{C}}$, мы можем определять геометрические характеристики, связанные либо с геометрией Евклида, либо с геометрией Лобачевского. *Ряд результатов в геометрической теории функций комплексного переменного можно интерпретировать как теоремы сравнения евклидовых и гиперболических характеристик одной и той же области.*

2.3 Принцип гиперболической метрики

Рассмотрим принцип гиперболической метрики, взяв для простоты случай односвязных областей. Пусть Ω_1 и Ω_2 – односвязные области на плоскости, не совпадающие со всей плоскостью $\mathbb{C}$. Через $F : \Omega_1 \to \Omega_2$ обозначим однолистное конформное отображение Ω_1 на Ω_2.

По определению метрики Пуанкаре имеем тождество

$$\lambda_{\Omega_1}(z)|dz| = \lambda_{\Omega_2}(w)|dw|, \quad w = F(z), z \in \Omega_1.$$

Следовательно,

$$|F'(z)| \equiv \frac{\lambda_{\Omega_1}(z)}{\lambda_{\Omega_2}(w)}.$$

Теорема 2.3 (Принцип гиперболической метрики). *Пусть функция f голоморфна в области Ω_1 и удовлетворяет условию $f(\Omega_1) \subset \Omega_2$. Тогда*

$$|f'(z)| \leq \frac{\lambda_{\Omega_1}(z)}{\lambda_{\Omega_2}(f(z))}, \ \ z \in \Omega_1,$$

или, что то же самое,

$$\lambda_{\Omega_2}(w)|dw| \leq \lambda_{\Omega_1}(z)|dz|, \quad z \in \Omega_1, w = f(z).$$

Равенство имеет место тогда и только тогда, когда f – однолистное конформное отображение области Ω_1 на область Ω_2.

Из этой теоремы следует, что при голоморфном отображении одной области в другую неевклидовы длины и неевклидовы площади будут только уменьшаться за исключением случая, когда эта функция осуществляет однолистное конформное отображение области определения функции на область её значений.

Для доказательства нам потребуется хорошо известная

Лемма 2.1 (Лемма Шварца.) *Пусть функция φ голоморфна в круге $|z| < 1$ и удовлетворяет условиям: $\varphi(0) = 0$ и $|\varphi(z)| \leq 1, \quad |z| < 1$. Тогда*

1) $|\varphi(z)| \leq |z|, \quad 0 < |z| < 1,$

2) $|\varphi'(0)| \leq 1.$

Равенство в этих неравенствах имеет место тогда и только тогда, когда $\varphi(z) = e^{i\alpha}z, \alpha$ – вещественное число.

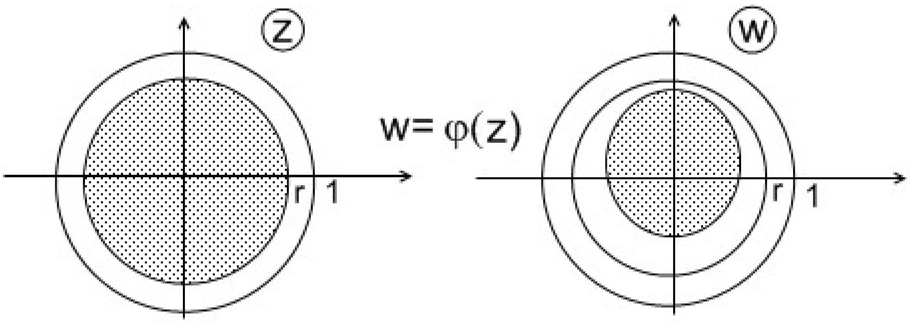

Рис. 2.2: К лемме Шварца

Доказательство принципа гиперболической метрики. Рассмотрим произвольную точку $z_0 \in \Omega_1$ и зафиксируем её, и пусть $w_0 = f(z_0)$. По теореме Римана о конформных отображениях существует однолистное конформное отображение $F : \Omega_1 \to \Omega_2$, удовлетворяющее условию $F(z_0) = w_0$. Рассмотрим также однолистное конформное отображение $g : \mathbb{D} \to \Omega_1$, $g(0) = z_0$.

Введем ещё одну вспомогательную функцию

$$\varphi(\zeta) = g^{-1}(F^{-1}(f(g(\zeta)))), \quad \varphi(0) = 0.$$

По лемме Шварца имеем точную оценку

$$|\varphi'(0)| \leq 1.$$

Поскольку $f(g(\zeta)) = F(g(\varphi(\zeta)))$ и

$$f'(z)g'(z) = F'(g(\varphi(\zeta)))g'(\varphi(\zeta))\varphi'(\zeta),$$

то в точке $\zeta = 0$ получаем равенство

$$f'(z_0)g'(0) = F'(z_0)g'(0)\varphi'(0).$$

Так как $g'(0) \neq 0$, то последнее соотношение вместе с неравенством $|\varphi'(0)| \leq 1$ приводят к требуемой оценке

$$|f'(z_0)| \leq |F'(z_0)| = \frac{\lambda_{\Omega_1}(z_0)}{\lambda_{\Omega_2}(w_0)} = \frac{\lambda_{\Omega_1}(z_0)}{\lambda_{\Omega_2}(f(z_0))}.$$

Если $|f'(z_0)| = |F'(z_0)|$, то по лемме Шварца имеем равенство $\varphi(\zeta) = e^{i\alpha}\zeta$, что равносильно равенству $f(g(\zeta)) \equiv F(g(e^{i\alpha}\zeta))$. Следовательно, в случае равенства имеем: $f(z) = F(\psi(z))$, где $\psi(z) = g(e^{i\alpha}g^{-1}(z))$. Ясно, что ψ – конформный автоморфизм Ω_1. Таким образом, экстремальная функция f осуществляет однолистное конформное отображение Ω_1 на Ω_2. Этим и завершается доказательство.

Отметим, что эта теорема остаётся справедливой для произвольных гиперболических областей (т. е. для областей Ω_1 и Ω_2 на расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$, имеющих не менее трёх граничных точек) с естественной оговоркой: экстремальным является накрывающее конформное отображение Ω_1 на Ω_2.

Пусть $\lambda_\Omega(z)$ – коэффициент метрики Пуанкаре для области гиперболического типа. Величина

$$\frac{1}{\lambda_\Omega(z)}$$

называется гиперболическим радиусом области Ω в точке z. Если Ω – односвязная область, не содержащая бесконечно удалённой точки, то величина

$$R(z,\Omega) = 1/\lambda_\Omega(z)$$

называется конформным радиусом. Например, для единичного круга $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$ конформный радиус определяется равенством $R(z,\mathbb{D}) = 1 - |z|^2$.

Следует привести общепринятое определение конформного радиуса.

Определение. *Пусть* Ω *– односвязная область на плоскости, не совпадающая со всей плоскостью* $\mathbb{C}$, *и* z_0 *– фиксированная точка этой области. В силу теоремы Римана существует положительное число* R *и однолистное конформное отображение* $f : \Omega \to \mathbb{D}_R = \{z : |z| < R\}$, *нормированное условиями*

$$f(z_0) = 0, \;\; f'(z_0) = 1.$$

Именно это число R *и называется конформным радиусом* Ω *в точке* z_0.

Убедитесь в том, что определенное таким образом положительное число R совпадает с величиной $\lambda_\Omega^{-1}(z_0)$.

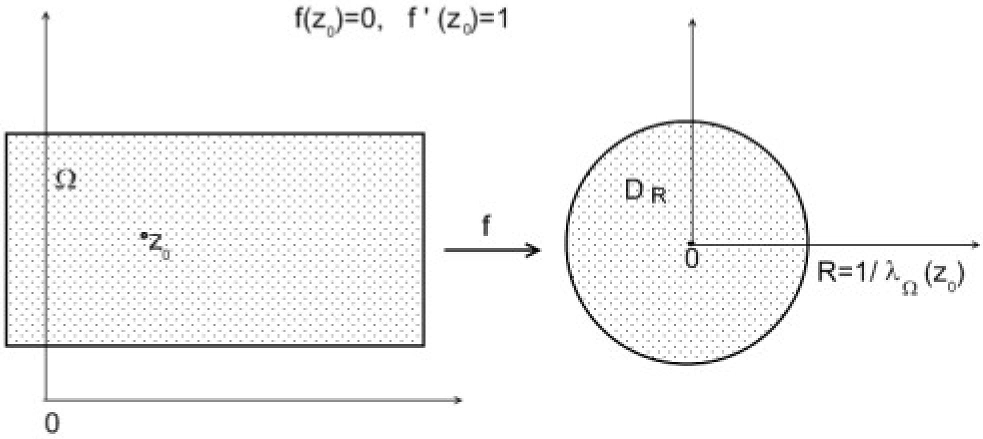

Рис. 2.3: Конформный радиус

2.4 Задачи и упражнения

1. Докажите следующее неравенство Шварца-Пика.

Теорема 2.4 . *Если функция φ является аналитической в единичном круге и $|\varphi(\zeta)| < 1$ в любой точке $\zeta \in \mathbb{D}$, то*

$$|\varphi'(\zeta)| \leq \frac{1 - |\varphi(\zeta)|^2}{1 - |\zeta|^2}, \quad |\zeta| < 1.$$

Равенство имеет место тогда и только тогда, когда функция имеет вид $z = \varphi(\zeta) = e^{i\alpha}(\zeta - a)/(1 - \overline{a}\zeta)$, где $\alpha \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{D}$.

2. Найдите явные формулы для конформного радиуса и сформулируйте принцип гиперболической метрики в случае, когда

а) область $\Pi = \{z = x + iy : y > 0\}$ – верхняя полуплоскость;

b) область $G = \{z = x + iy : -\pi/2 < x < \pi/2\}$ – полоса.

Указание. Для конформных радиусов должны быть получены формулы:

$$R(x + iy, \Pi) = 2y, \qquad R(x + iy, G) = 2\cos x.$$

3. Покажите, что коэффициент метрики Пуанкаре для двусвязной области

$$D' = \{z = x + iy : 0 < |z| < 1\}$$

(т. е. для единичного круга с выколотым центром) определяется формулой

$$\frac{1}{\lambda_{D'}(z)} = 2\,|z|\,\ln\frac{1}{|z|}.$$

4. Докажите следующий принцип монотонности для коэффициента гиперболической метрики: *если* $\Omega' \subset \Omega$, *то* $\lambda_{\Omega'}(z_0) \geq \lambda_{\Omega}(z_0)$ *для любой точки* $z_0 \in \Omega'$.

Указание. Рассмотрите накрывающие конформные отображения $f : \mathbb{D} \to \Omega'$ и $F : \mathbb{D} \to \Omega$, удовлетворяющие условию $f(0) = F(0) = z_0$. Тогда

$$\lambda_{\Omega}(z_0)|F'(0)| = \lambda_{\Omega'}(z_0)|f'(0)| = \lambda_D(0) = 1.$$

Остаётся сравнить модули производных в начале координат с привлечением леммы Шварца к функции $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$, определенной равенством $\varphi(\zeta) := F^{-1}(f(\zeta))$ и условием, что её однозначная ветвь выделена условием $\varphi(0) = 0$.

5. Покажите, что конформный радиус

$$R = R(x,\, y) = R(x + iy, \Omega)$$

как функция двух вещественных переменных x и y удовлетворяет следующему уравнению Лиувилля

$$R\,\Delta R = |\nabla\, R|^2 - 4,$$

где использованы стандартные обозначения для оператора Лапласа и градиента функции:

$$\Delta R = \frac{\partial^2 R}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 R}{\partial y^2}, \qquad \nabla\, R = \left(\frac{\partial R}{\partial x},\ \frac{\partial R}{\partial y}\right),$$

$$|\nabla\, R| = \sqrt{\left(\frac{\partial R}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial y}\right)^2}.$$

6. Покажите, что с использованием формальных производных по переменным $z = x + iy$ и $\overline{z} = x - iy$, определяемых формулами Виртингера, оператор Лапласа выражается формулой

$$\Delta R = 4\,\frac{\partial^2 R}{\partial z\ \partial \overline{z}},$$

а уравнение Лиувилля можно представить в следующем виде

$$R\,\frac{\partial^2 R}{\partial z\ \partial \overline{z}} = \left|\frac{\partial R}{\partial \overline{z}}\right|^2 - 1.$$

Указание. Пусть f – однолистное конформное отображение единичного круга $|\zeta| < 1$ на область Ω. Для вычислений $R_{\overline{z}}$ и $R_{z\overline{z}}$ удобно пользоваться логарифмической производной функции R^2, определяемой равенством $R^2 = \left(1 - \zeta\,\overline{\zeta}\,\right)^2 f'(\zeta)\overline{f'(\zeta)}$.

7. Пусть $R(z, \Omega)$ – конформный радиус области $\Omega \subset \mathbb{C}$ в точке $z = x + iy \in \Omega$. Докажите, что $\Delta R(z, \Omega)$ является гармонической функцией (т. е. $\Delta^2 R(z, \Omega) \equiv 0$) тогда и только тогда, когда область Ω – круг или полуплоскость.

Указание. Пусть f – однолистное конформное отображение единичного круга $|\zeta| < 1$ на область Ω. Справедлива формула

$$\frac{R^3(z, \Omega)}{4}\,\Delta^2 R(z, \Omega) \equiv (1 - |\zeta|^2)^4\,|\{f, \zeta\}|^2\,, \quad z = f(\zeta).$$

Это тождество обосновано в статье Ф. Г. Авхадиева [30].

Ясно, что если $\Delta^2 R(z, \Omega) \equiv 0$, то $\{f, \zeta\} \equiv 0$. Далее можно использовать свойства шварциана.

8. Знаменитая гипотеза Кшижа (J. G. Krzyż): *если функция f является аналитической в единичном круге и удовлетворяет условию $0 < |f(z)| \le 1$ для любого $z \in \mathbb{D}$, то для коэффициентов её ряда Тейлора $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, z^n, \quad |z| < 1$, справедлива точная оценка $|a_n| \le 2/e \quad (n \ge 1)$.* Докажите её при $n = 1$.

Указания. Гипотеза Кшижа доказана при $n = 1$ самим Кшижем, при $n = 2$, $n = 3$, $n = 4$ и $n = 5$ другими математиками. При $n \ge 6$ к настоящему времени нет ни доказательства, ни опровержения, т. е. проблема остаётся открытой. По мнению ряда специалистов, несмотря на простоту формулировки, гипотеза Кшижа намного сложнее и глубже, чем знаменитая гипотеза Бибербаха. Но, как всегда, не исключено, что кто-то найдет простое, оригинальное решение проблемы. Некоторые подробности и ссылки на статьи, посвящённые проблеме Кшижа и родственным вопросам, можно найти в последней главе книги [41].

9. Докажите следующую классическую теорему Пуанкаре.

Теорема 2.5 *Если в единичном круге* $\mathbb{D}$ *дифференциальный элемент длины дуги определять по формуле* $d\sigma = |dz|/(1-|z|^2)$, *то среди всех линий* $\gamma(z_1, z_2)$, *лежащих в круге* $\mathbb{D}$ *и соединяющих заданные точки* $z_1,\ z_2$ *из круга* $\mathbb{D}$, *инфимум в равенстве*

$$l(z_1, z_2) = \inf_{\gamma(z_1,z_2)} \int\limits_{\gamma(z_1,z_2)} \frac{|dz|}{1-|z|^2},$$

реализуется на кривой $\gamma(z_1, z_2)$, *которая является либо отрезком диаметра, либо дугой окружности, ортогональной к окружности* $|z| = 1$.

Глава 3

Геометрические неравенства

3.1 Изопериметрическое неравенство

Среди всех фигур с заданным периметром наибольшую площадь имеет круг. Этот факт был известен ещё в древней Греции, хотя строгие доказательства появились лишь в конце девятнадцатого и в начале двадцатого столетий. Запишем это утверждение на языке фор-

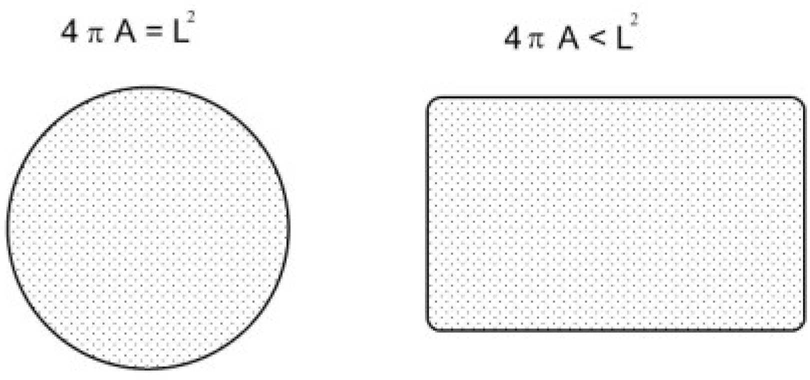

Рис. 3.1: Сравнение площади с длиной границы

мул и приведём одно из известных доказательств.

Теорема 3.1 (Классическое изопериметрическое неравенство.) *Пусть Ω – односвязная область на плоскости со спрямляемой границей длины $L = L(\partial\Omega)$, и пусть $A = A(\Omega)$ – площадь области Ω.*

Тогда $A \leq L^2/(4\pi)$. Равенство достигается тогда и только тогда, когда Ω – круг.

Доказательство (А. Гурвиц). Пусть s – дуговая абсцисса граничной кривой, по условию теоремы $0 \leq s \leq L$. Запишем параметрические уравнения этой кривой в виде $z = x + iy = \varphi(s) + i\psi(s)$ и введем вспомогательную переменную $t = 2\pi s/L, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$. Имеем $z = \varphi(s) + i\psi(s) = x(t) + iy(t), \quad t \in [0, 2\pi]$. Из курса математического анализа известно, что спрямляемость кривой влечёт абсолютную непрерывность функций φ и ψ, т. е. существование почти всюду производных φ', ψ' и справедливость равенств

$$\varphi(s) = C_1 + \int_0^s \varphi'(\tau)d\tau, \qquad \psi(s) = C_2 + \int_0^s \psi'(\tau)d\tau.$$

Поэтому функции $x = \varphi(tL/(2\pi)$ и $y = \psi(tL/(2\pi)$ можно разложить в абсолютно сходящиеся ряды Фурье

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt + b_n \sin nt,$$

$$y(t) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos nt + d_n \sin nt.$$

Законность применяемых ниже операций почленного дифференцирования и интегрирования рядов легко обосновать для приближающих рядов с коэффициентами $r^n a_n$, $r^n b_n$, $r^n c_n$, $r^n d_n$ $(0 < r < 1)$ с последующим предельным переходом при $r \to 1$ после вывода формул для длины и площади.

Вычислим сначала площадь области по известной формуле $\int_{\partial\Omega} x dy = \int_0^{2\pi} x(t)\, y'(t) dt$, где

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt + b_n \sin nt,$$

$$y'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} -c_n n \sin nt + d_n n \cos nt.$$

Поэтому $\int_{\partial\Omega} x dy = \pi \sum\limits_{n=1}^{\infty} n(a_n d_n - b_n c_n)$. Таким образом, площадь области Ω определяется формулой

$$A = A(\Omega) = \pi \sum_{n=1}^{\infty} n(a_n d_n - b_n c_n).$$

Оригинальное место в доказательстве Гурвица – выражение через коэффициенты Фурье длины границы с использованием соотношений $|dz/ds| = 1$, $|dt/ds| = 2\pi/L$:

$$L = \int_0^L \left|\frac{dz}{ds}\right|^2 ds = \int_0^L \left|\frac{dz}{dt}\right|^2 \left|\frac{dt}{ds}\right|^2 ds = \frac{2\pi}{L} \int_0^{2\pi} \left|\frac{dz}{dt}\right|^2 dt.$$

Отсюда с учётом равенства $|dz/dt|^2 = x'^2(t) + y'^2(t)$ получаем

$$\frac{L^2}{2\pi} = \int_0^{2\pi} [x'^2(t) + y'^2(t)]dt.$$

Подставляя ряды и интегрируя, приходим к формуле

$$\frac{L^2}{2\pi} = \pi \sum_{n=1}^{\infty} n^2(a_n^2 + b_n^2 + c_n^2 + d_n^2).$$

Очевидно, доказываемое изопериметрическое неравенство $A \leq L^2/(4\pi)$ равносильно следующему неравенству для рядов

$$2\sum_{n=1}^{\infty} n(a_n d_n - b_n c_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} n^2(a_n^2 + b_n^2 + c_n^2 + d_n^2), \quad (3.1)$$

которое является следствием неравенств: $n \leq n^2$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и

$$2a_n d_n \leq a_n^2 + d_n^2, \quad -2b_n c_n \leq b_n^2 + c_n^2.$$

Рассмотрим случай равенства в неравенстве (3.1). При $n \geq 2$ имеем $n^2 > n$, поэтому равенство в (3.1) возможно лишь при условии

$$a_n = b_n = c_n = d_n = 0$$

для любого $n \geq 2$.

В случае $n = 1$ равенство в (3.1) возможно лишь в том случае, когда $a_1 = d_1, b_1 = -c_1$.

Ясно, что равенство в (3.1), следовательно, равенство $A = L^2/(4\pi)$ реализуется тогда и только тогда, когда граница области Ω имеет параметрическое представление

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos t + b_1 \sin t, \quad y(t) = \frac{c_0}{2} - b_1 \cos t + a_1 \sin t.$$

Следовательно, граница области представляет собой окружность радиуса $R = \sqrt{a_1^2 + b_1^2}$ и с центром в точке $(a_0/2, c_0/2)$, так как

$$z(t) = x(t) + iy(t) = \frac{a_0 + ic_0}{2} + (a_1 - ib_1)(\cos t + i \sin t),$$

поэтому $\left|z(t) - \frac{a_0+ic_0}{2}\right| = |\,a_1 - ib_1|, \quad t \in [0, 2\pi]$, что завершает доказательство теоремы.

В задачах и упражнениях мы обсудим переформулировку изопериметрического неравенства с использованием конформных отображений.

Рассмотрим теперь классические теоремы площадей из теории однолистных функций (см. [14], глава 2).

3.2 Теоремы площадей

Теорема 3.2 (Внутренняя теорема площадей) *Пусть f – функция, голоморфная в единичном круге $\mathbb{D}$, и пусть*

$$f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + ... = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n, \qquad |z| < 1.$$

Предположим, что f – однолистная функция. Тогда площадь $A = A(f(\mathbb{D}))$ образа круга при отображении f удовлетворяет неравенству $A = A(f(\mathbb{D})) \geq \pi$. Равенство реализуется только для случая, когда $f(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$.

Доказательство. Пусть $w = u + iv = f(z), |z| < 1$. Простые вычисления показывают, что якобиан конформного преобразования $f : \mathbb{D} \to f(\mathbb{D})$ равен $|f'(z)|^2$, т. е. дифференциальный элемент площади образа записывается так: $dudv = |f'(z)|^2 dxdy$. Поэтому

$$A = A(f(\mathbb{D})) = \iint_{f(\mathbb{D})} dudv =$$

$$= \iint_{\mathbb{D}} |f'(z)|^2 dxdy = \int\limits_0^{2\pi} d\theta \int\limits_0^1 |f'(re^{i\theta})|^2 r dr.$$

Поскольку $|f'(re^{i\theta})|^2 = f'(re^{i\theta})\overline{f'(re^{i\theta})}$, то

$$|f'(re^{i\theta})|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n r^{n-1} e^{i(n-1)\theta} \sum_{n=1}^{\infty} n \overline{a}_n r^{n-1} e^{-i(n-1)\theta},$$

Остаётся перемножить ряды и проинтегрировать почленно с учётом ортогональности тригонометрической системы $e^{ik\theta}$. Имеем

$$A(f(\mathbb{D})) = 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} n^2 |a_n|^2 \int_0^1 r^{2n-1} dr =$$

$$= 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} n^2 |a_n|^2 \frac{1}{2n} = \pi(1 + 2^2|a_2|^2 + 3^2|a_3|^3 + \ldots).$$

Отсюда немедленно следует, что $A(f(\mathbb{D})) \geq \pi$. Кроме того, очевидно, равенство возможно тогда и только тогда, когда $a_n = 0$ при $n \geq 2$, т. е. для функции $f(z) \equiv z$. Следовательно, $f(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$ – единичный круг. Этим и завершается доказательство.

Замечание. Теорема и её доказательство остаются справедливыми и без предположения однолистности рассматриваемой функции, но для неоднолистной функции под площадью образа круга нужно понимать площадь соответствующей римановой поверхности, для которой верна та же формула

$$A = A(f(\mathbb{D})) = \iint_{\mathbb{D}} |f'(z)|^2 dxdy,$$

которая учитывает площади всех "листов" римановой поверхности в силу локального характера равенства $dudv = |f'(z)|^2 dxdy$.

Рассмотрим теперь конформные отображения области $\mathbb{D}^- = \{\zeta : |\zeta| > 1\} \subset \overline{\mathbb{C}}$, $\infty \in \mathbb{D}^-$. В формулировке следующей теоремы площадь явно не фигурирует, но неотрицательность площади является основным доводом в доказательстве.

Теорема 3.3 (Внешняя теорема площадей Гронуолла.) *Пусть F – однолистное конформное отображение области $\mathbb{D}^-$, имеющее следующее разложение в ряд Лорана*

$$F(\zeta) = \zeta + \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{\zeta^n}, \quad |\zeta| > 1.$$

Тогда имеет место неравенство $\sum_{n=1}^{\infty} n|\alpha_n|^2 \leq 1$, *в частности,* $|\alpha_1| \leq 1$. *Равенство* $|\alpha_1| = 1$ *верно тогда и только тогда, когда* $F(\zeta) = \zeta + \alpha_0 + e^{i\gamma}/\zeta, \quad \gamma \in \mathbb{R}$.

Доказательство. Возьмём фиксированное число $\rho \in (1, \infty)$ и функции, определяемые равенствами

$$u(t) = ReF(\rho e^{it}),\ v(t) = ImF(\rho e^{it}), 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Рассмотрим непустой компакт K_ρ, определяемый соотношениями

$$K_\rho = \overline{\mathbb{C}} \setminus F(\mathbb{D}_\rho^-), \qquad \mathbb{D}_\rho^- = \{\zeta : |\zeta| > \rho\} \subset \overline{\mathbb{C}}.$$

Площадь K_ρ неотрицательна. Вычисляя эту площадь по формулам

$$A(K_\rho) = \frac{1}{2}\int_{\partial K_\rho} udv - vdu =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} [u(t)v'(t) - u'(t)v(t)]dt =$$
$$= \frac{1}{2}Re\int_0^{2\pi} F(\rho e^{it})\overline{F'(\rho e^{it})\rho e^{it}}dt$$

и выражая её через коэффициенты α_n, получаем

$$A(K_\rho) = \pi\left(\rho^2 - \sum_{n=1}^{\infty} n|\alpha_n|^2/\rho^{2n}\right) \geq 0.$$

Переходя к пределу при $\rho \to 1$, приходим к требуемому неравенству. Если $|\alpha_1| = 1$, то $|\alpha_n| = 0$ для любого $n \geq 2$, что даёт второе утверждение теоремы.

Внешняя теорема площадей имеет ряд применений. С ними мы познакомимся при решении задач к этой главе, а также в следующей главе при доказательстве одной теоремы Л. Бибербаха.

3.3 Задачи и упражнения

1. Пусть $w_0 \in \Omega$, где Ω – плоская односвязная область с конечной площадью $A(\Omega)$, $R(w_0, \Omega)$ – конформный радиус этой области в точке w_0. Докажите, что верно неравенство $A(\Omega) \geq \pi\ R^2(w_0, \Omega)$, причём равенство достигается тогда и только тогда, когда Ω – круг с центром в точке w_0.

Указание. Примените теорему 3.2 к функции

$$f(z) = \frac{g(z) - w_0}{R(w_0, \Omega)},$$

где g – однолистное конформное отображение единичного круга на область Ω с римановыми нормировками $g(0) = w_0$, $g'(0) > 0$.

2. Пусть Ω – односвязная область на плоскости со спрямляемой границей, $g : \mathbb{D} \to \Omega$ – однолистное конформное отображение единичного круга на область Ω. Покажите, что для функции $z = g(\zeta)$ $(\zeta = \xi + i\eta \in \mathbb{D})$ справедливо следующее неравенство

$$\iint_{\mathbb{D}} |g'(\zeta)|^2 d\xi\, d\eta \leq \frac{1}{4\pi} \left(\int_0^{2\pi} |g'(e^{i\theta})|\, d\theta \right)^2,$$

равносильное классическому изопериметрическому неравенству, так как

$$A(\Omega) = \iint_{\mathbb{D}} |g'(\zeta)|^2 d\xi\, d\eta, \quad L(\partial\Omega) = \int_0^{2\pi} |g'(e^{i\theta})|\, d\theta.$$

Указание. Утверждение представляет собой простое упражнение, если область ограничена достаточно гладкой кривой и поэтому производная конформного отображения оказывается непрерывно продолжимой на замыкание единичного круга.

В общем случае придется воспользоваться теоремой Ф. Рисса:

Теорема 3.4 (см. [14])*Производная конформного отображения $g : \mathbb{D} \to \Omega$ единичного круга на односвязную область со спрямляемой границей имеет почти всюду на единичной окружности граничные значения $g'(e^{i\theta})$, определяемые как предельные значения по любым некасательным к границе путям, при этом*

$$L(\partial\Omega) = \lim_{r\to 1^-} \int_0^{2\pi} |g'(r\, e^{i\theta})|\, d\theta = \int_0^{2\pi} |g'(e^{i\theta})|\, d\theta.$$

3. Пусть Ω – односвязная область с конечным диаметром $\mathrm{diam}(\Omega)$. Докажите изопериметрическое неравенство Бибербаха

$$A(\Omega) \leq \frac{\pi}{4}\,\mathrm{diam}^2(\Omega),$$

где равенство достигается тогда и только тогда, когда Ω – круг.

Указание. Если не справились с этой задачей, то найдите самое простое доказательство этого утверждения (из нескольких известных) в замечательной книге Дж. Литлвуда [17] под названием «Математическая смесь». Приведём схему Литлвуда.

Без ограничения общности можно считать, что рассматриваемая область является выпуклой, расположена в правой полуплоскости, её проекция на ось абсцисс есть интервал $(0, d)$, где $d = \mathrm{diam}(\Omega)$. В полярных координатах

$$A(\Omega) = \int_{-\pi/2}^{0} dt \int_0^{r(t)} r\,dr + \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{r(\theta)} r\,dr =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} (r^2(\theta - \pi/2) + r^2(\theta))\,d\theta,$$

где $r = r(\theta)$ $(-\pi \le \theta \le \pi/2)$ – уравнение границы области.

Остаётся воспользоваться тем, что выражение

$$r^2(\theta - \pi/2) + r^2(\theta)$$

равно по теореме Пифагора (!) квадрату длины некоторой хорды AB, не превосходящему $\mathrm{diam}^2(\Omega)$ по определению диаметра.

4. Пусть Ω – односвязная область с конечным диаметром, и пусть $w_0 \in \Omega$. Докажите, что верно неравенство

$$R(w_0, \Omega) \le \frac{1}{2}\,\mathrm{diam}(\Omega),$$

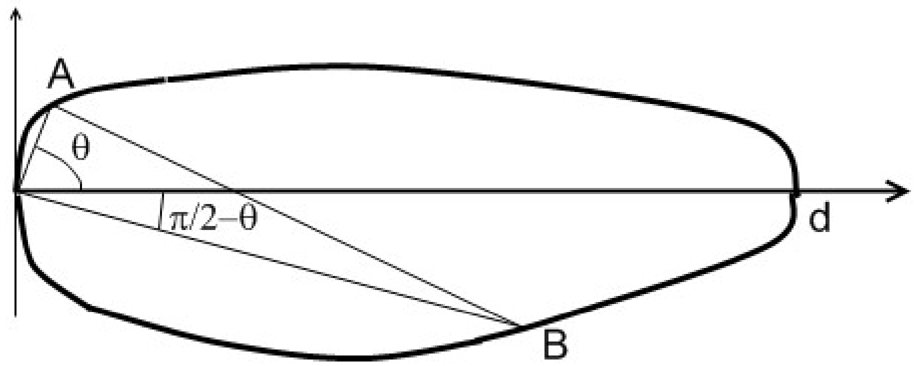

Рис. 3.2: К доказательству Литтлвуда

причём равенство достигается тогда и только тогда, когда Ω – круг с центром в точке w_0.

5. Пусть Ω – односвязная область со спрямляемой границей. Существует ли абсолютная положительная постоянная C такая, что для любой такой области Ω

$$A(\Omega) \leq C \; L(\partial\Omega).$$

Указание. Ответ таков: нет, не существует. «Наказание» обусловлено тем, что не соблюдены размерности сравниваемых величин (квадратные метры не сравнимы с метрами!).

Для обоснования отрицательного ответа постройте последовательность односвязных областей Ω_n со спрямляемыми границами и таких, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{A(\Omega_n)}{L(\partial\Omega_n)} = \infty.$$

6. Пусть Ω – односвязная область со спрямляемой границей. Существует ли абсолютная положительная постоянная C такая, что $A(\Omega) \geq C\ L^2(\partial\Omega)$ для любой такой области Ω?

Указание. Ответ: нет, не существует.

Чтобы убедиться в этом постройте последовательность односвязных областей Ω_n со спрямляемыми границами и таких, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{A(\Omega_n)}{L^2(\partial\Omega_n)} = 0.$$

Нетрудно видеть, что таким свойством обладает последовательность прямоугольников со сторонами длины n и $1/n$. Этот пример показывает, что простое соблюдение размерности не гарантирует существования изопериметрического неравенства.

Рассуждения на эту тему с полезными контрпримерами можно найти в книге Г. Полиа и Г. Сегё [20].

Отметим также, что тематика, связанная с изопериметрическими неравенствами геометрии и математической физики, интенсивно развивается, см., например, книгу К. Бэндл [42], статьи [5], [32], [33] и [37].

7. Докажите новую формулу для площади (см. [1], формула (4.44)): $A(\Omega) = \frac{1}{2}\iint_\Omega |\nabla R(x+iy,\Omega)|^2\ dx\,dy.$

Указание. Воспользуйтесь уравнением Лиувилля для конформного радиуса и формулой Грина

$$\iint_\Omega (u\,\Delta v + (\nabla u,\, \nabla v))\ dx\,dy = \int_{\partial\Omega} u\,\frac{\partial v}{\partial n}\,ds$$

для $u = v = R$.

8. Пусть $\Omega \subset \mathbb{C}$ и G — односвязные области, $\Omega \neq \mathbb{C}$, $\overline{G} \subset \Omega$ и её граница ∂G является кусочно гладкой кривой. Докажите следующий частный случай изопериметрического неравенства Е. Шмидта:

$$\iint_G \frac{dxdy}{R^2(z,\Omega)} \leqslant \frac{1}{2}\int_{\partial G} \frac{|dz|}{R(z,\Omega)} \quad (z = x + iy).$$

Указание. В силу конформной инвариантности метрики Пуанкаре можно считать, что Ω — полуплоскость $x > 0$ с конформным радиусом $R(z,\Omega) \equiv 2\,x$. Тогда требуемое неравенство легко получить, взяв за основу формулу Грина

$$\iint_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \int_{\partial G} Pdx + Qdy$$

для функций $P(x,y) \equiv 0$, $Q(x,y) \equiv -1/(4x)$.

9. Попробуйте доказать следующую теорему.

Теорема 3.5 (Гиперболическое изопериметрическое неравенство Е. Шмидта). *Пусть $\Omega \subset \mathbb{C}$ и G — односвязные области, $\Omega \neq \mathbb{C}$, $\overline{G} \subset \Omega$ и её граница ∂G является кусочно гладкой кривой. Тогда справедливо гиперболическое изопериметрическое неравенство*

$$4\pi \iint_G \frac{dxdy}{R^2(z,\Omega)} + 4\left(\int_G \frac{dxdy}{R^2(z,\Omega)}\right)^2 \leqslant \left(\int_{\partial G} \frac{|dz|}{R(z,\Omega)}\right)^2,$$

где равенство имеет место тогда и только тогда, когда G — гиперболический круг.

Глава 4

Вокруг теорем Бибербаха и Кёбе

4.1 Классы $\mathbb{S}$ и $\boldsymbol{\Sigma}$

В начале 20-го века для стандартизации проблем, возникающих при исследовании однолистных конформных отображений $f : \Omega \to \overline{\mathbb{C}}$, были введены два основных класса однолистных функций. Приведём их определения.

1) Класс $\mathbb{S}$ – класс голоморфных однолистных функций $f(z)$, определенных в $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$ и имеющих там разложение в ряд Тейлора вида

$$f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + ... = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n, \quad |z| < 1.$$

Таким образом, требуется выполнение нормировок $f(0) = 0 = f'(0) - 1$, т. е. отличие вышеприведенного ряда для функции класса $\mathbb{S}$ от общего разложения в ряд Тейлора заключается в том, что $a_0 = 0$ и $a_1 = 1$.

Отметим также простой геометрический смысл нормировок двух первых коэффициентов: *для любой функции* $f \in \mathbb{S}$ *область* $\Omega = f(\mathbb{D})$ *содержит точку* $w = 0$ *и конформный радиус* Ω *в этой точке равен* 1, *тем самым фиксирована одна из гиперболических характеристик области.*

Нормировка $f'(0) = 1$ для функций класса $\mathbb{S}$ позволяет также фиксировать ветвь аргумента производной $\mathrm{Arg} f'(z)$ условием $\mathrm{Arg} f'(0) = 0$.

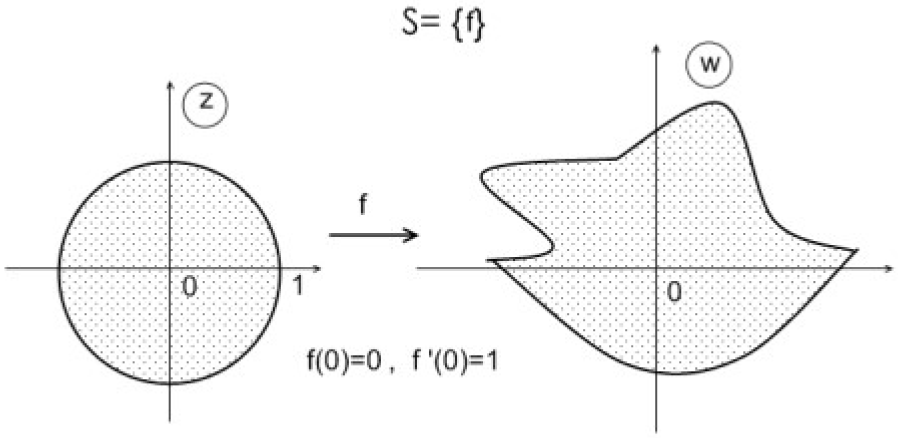

Рис. 4.1: Голоморфные функции $f \in \mathbb{S}$

2) Класс $\mathbf{\Sigma}$ – класс мероморфных однолистных в области в $\mathbb{D}^- = \{\zeta : \ |\zeta| > 1\}$ функций $F(\zeta)$ с разложением в ряд Лорана

$$F(\zeta) = \zeta + \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{\zeta} + \frac{\alpha_2}{\zeta^2} + \ldots = \zeta + \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{\zeta^n}, \quad |\zeta| > 1.$$

Видно, что предписаны следующие дополнительные условия нормировки: $F(\infty) = \infty, F'(\infty) = 1$. В частности, на бесконечности функция $F(\zeta)$ имеет простой полюс, в других точках области $\mathbb{D}^-$ функция $F(\zeta)$ является голоморфной.

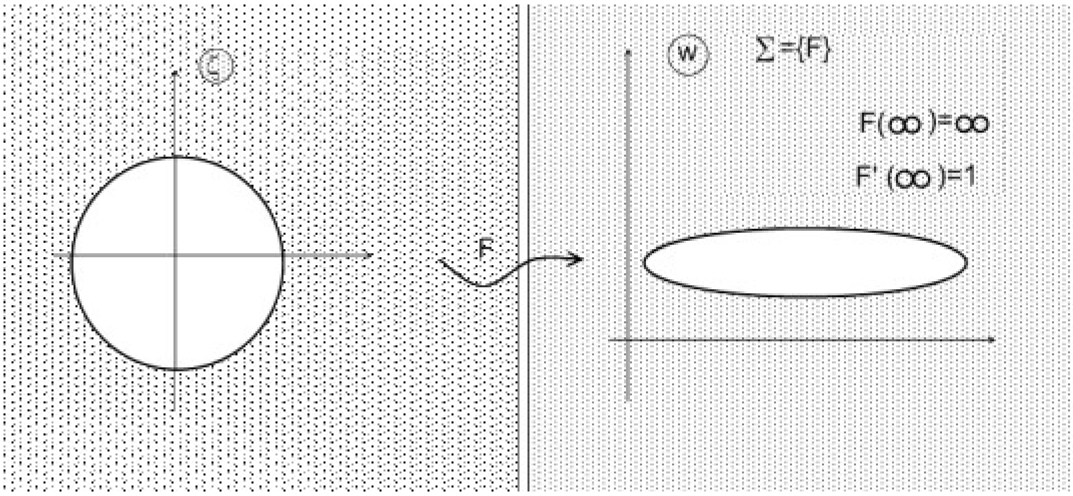

Рис. 4.2: Мероморфные функции $F \in \mathbf{\Sigma}$

Отметим, что обозначения этих классов однолистных функций связаны с немецким словом «Schlicht». Словосочетание «однолистная функция» применительно к однолистным конформным отображениям на английском языке передается как «schlicht function» либо «univalent function».

Внешняя теорема площадей (см. предыдущую главу) утверждает, что для функции $F \in \mathbf{\Sigma}$ имеет место следующее неравенство $\sum_{n=1}^{\infty} n|\alpha_n|^2 \leq 1$, в частности,

$$|\alpha_1| \leq 1; \qquad |\alpha_1| = 1 \Leftrightarrow F_\alpha(\zeta) = \zeta + e^{i\alpha}/\zeta, \alpha \in \mathbb{R}.$$

Удивительный факт: топологическое условие однолистности отображения порождает метрические следствия, а именно, оценки модулей коэффициентов. Аналогично обстоит дело и с функциями класса $\mathbb{S}$. Для них оказываются справедливыми разнообразные оценки.

4.2 Гипотеза Бибербаха

Теорема 4.1 (Теорема Бибербаха, 1916 год.) *Для любой функции $f \in \mathbb{S}$ с разложением в ряд Тейлора*

$$f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + ... = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n, \quad |z| < 1,$$

имеет место точная оценка $|a_2| \leq 2$. Равенство $|a_2| = 2$ реализуется тогда и только тогда, когда

$$f(z) \equiv K(z) = \frac{z}{(1 - e^{i\gamma} z)^2}, \quad \gamma \in \mathbb{R}.$$

где $K(z)$ – так называемая функция Кёбе.

Доказательство. Пусть $f \in \mathbb{S}$. Для этой фиксированной функции определим функцию g равенством

$$g(z) = \sqrt{f(z^2)} = \sqrt{z^2 + a_2 z^4 + a_3 z^6 + ...} =$$

$$= z\sqrt{1 + a_2 z^2 + a_3 z^4 + a_4 z^6 + ... + a_n z^{2n-2} + ...},$$

где ветвь корня фиксируется условием: $\sqrt{1} = +1$. Имеем

$$f \in \mathbb{S} \Leftrightarrow g \in \mathbb{S}.$$

Условия нормировки для $g(z)$ верны по построению, а однолистность отображения g легко проверяется геометрически.

Пользуясь тем, что $(1+w)^\alpha = 1+\alpha w+o(w)$, $w \to 0$, при $\alpha = \frac{1}{2}$ легко получить первые слагаемые в разложении $g(z)$:

$$g(z) = z(1 + a_2 z^2 + ...)^{1/2} =$$

$$= z(1 + a_2 z^2 + o(z^2))^{1/2} = z + \frac{a_2}{2} z^3 + ...$$

С использованием дробно-линейных замен $\zeta = 1/z$, $w = 1/g$, которые сохраняют однолистность, введем в рассмотрение функцию

$$F(\zeta) = \frac{1}{g(1/\zeta)} = \frac{1}{g(z)} = \frac{1}{z}\left(\frac{1}{1 + (a_2/2)z^2 + ...}\right).$$

Имеем следующее разложение в окрестности бесконечно удалённой точки $\zeta = \infty$:

$$F(\zeta) = \frac{1}{z}\left(1 - \frac{a_2}{2}z^2 + o(z^2)\right) =$$

$$= \frac{1}{z} - \frac{a_2}{2}z + o(z) = \zeta - \frac{a_2}{2\,\zeta} + o\left(\frac{1}{\zeta}\right), \qquad \zeta \to \infty.$$

Для однолистной функции F выполнены условия $F(\infty) = \infty, F'(\infty) = 1$, следовательно, $F \in \mathbf{\Sigma}$. По второму утверждению внешней теоремы площадей имеем:

$|\alpha_1| \leq 1$, но для нашей функции $\alpha_1 = -a_2/2$, поэтому

$$|\alpha_1| = \frac{|a_2|}{2} \leq 1 \Leftrightarrow |a_2| \leq 2.$$

В случае равенства $|a_2| = 2$ будем иметь

$$|a_2| = 2 \Leftrightarrow |\alpha_1| = 1 \Leftrightarrow F_\alpha(\zeta) = \zeta + \frac{e^{i\alpha}}{\zeta} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow g_\alpha(z) = \frac{1}{F_\alpha(1/z)} \Leftrightarrow g_\alpha^2(\sqrt{z}) = f_\alpha(z).$$

Непосредственные вычисления показывают, что

$$g_\alpha(z) = \frac{1}{1/z + e^{i\alpha} z} = \frac{z}{1 + e^{i\alpha} z^2},$$

следовательно,

$$f_\alpha(z) = \left(\frac{\sqrt{z}}{1 + e^{i\alpha} z}\right)^2 = \frac{z}{(1 + e^{i\alpha} z)^2}.$$

Таким образом, экстремальная функция f_α совпадает в точности с функцией Кёбе. Приведённый в формулировке теоремы вид $z/(1 - e^{i\gamma} z)^2$ этой функции можно получить заменой констант $\alpha = \gamma + \pi$, так как тогда $e^{i\alpha} = e^{i\pi} e^{i\gamma} = -e^{i\gamma}$. Теорема доказана.

Отметим, что экстремальная в теореме функция – функция Кёбе – однолистно отображает единичный круг на всю плоскость, из которой удалён прямолинейный луч (см. задачу 4 из п. 1.5)

$$L_\gamma = \left\{ z = -re^{-i\gamma} : \frac{1}{4} \le r < \infty \right\}.$$

В этом легко убедиться, представляя функцию Кёбе как суперпозицию функции Жуковского и дробно-линейного отображения:

$$K(z) = \frac{z}{(1 - e^{i\gamma} z)^2} = \frac{1}{e^{2i\gamma} z + \frac{1}{z} - 2e^{i\gamma}}.$$

Дифференцируя почленно ряд (бесконечную геометрическую прогрессию) $\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \ldots$, легко получаем разложение в ряд функции Кёбе при $\gamma = 0$:

$$K_0(z) = \frac{z}{(1-z)^2} = z + 2z^2 + 3z^3 + \ldots + nz^n + \ldots .$$

Итак, для этой функции $a_n = n$ при любом $n \ge 2$. С учётом этого факта в 1916 году Л. Бибербах выдвинул следующую гипотезу:

$$|a_n| = \frac{|f^{(n)}(0)|}{n!} \le n$$

для любой функции $f \in \mathbb{S}$. Очевидно, если эта гипотеза верна, то экстремальной функцией, для которой реализуются равенства в этих оценках, является функция Кёбе.

4.3 Теорема Кёбе об одной четвёртой

В этой теореме экстремальной является та же функция Кёбе.

Теорема 4.2 (Теорема П. Кёбе об одной четвёртой.) *Пусть* $f \in \mathbb{S}$, *тогда расстояние* $d(f) = \mathrm{dist}(0, \partial \mathrm{f}(\mathbb{D}))$ *от начала координат* $w = 0$ *до границы области* $f(\mathbb{D})$ *не меньше, чем* $1/4$. *Равенство* $d(f) = 1/4$ *реализуется тогда и только тогда, когда*

$$f(z) \equiv K(z) = \frac{z}{(1 - e^{i\gamma} z)^2}.$$

Доказательство. Пусть $f \in \mathbb{S}$, и пусть эта функция не принимает в единичном круге значения c. Следовательно, $1 - f(z)/c \neq 0$ для любой точки $z \in \mathbb{D}$, и поэтому функция g, определённая равенством

$$g(z) = \frac{f(z)}{1 - f(z)/c},$$

является аналитической и однолистной в единичном круге и принадлежит классу $\mathbb{S}$. Ее разложение вблизи начала координат легко выписывается:

$$g(z) = z + (a_2 + 1/c)z^2 + O(z^3).$$

По теореме Бибербаха имеем точные оценки $|a_2| \leq 2$, $|a_2 + 1/c| \leq 2$, следовательно,

$$|c| \geq \frac{1}{|a_2 + 1/c| + |a_2|} \geq \frac{1}{4},$$

что и требовалось доказать.

Очевидно, экстремальной является функция Кёбе, и только она. Этим и завершается доказательство теоремы.

4.4 Подклассы однолистных функций

К. Лёвнер (1923 г.) доказал, что гипотеза Бибербаха верна при $n = 3$, а именно, $|a_3| \leq 3$. После него в течение шести десятилетий гипотезой занимались многие математики, подтверждая её в частных случаях. Точку поставил Луи де Бранж в 1985 году, доказав, что гипотеза Бибербаха верна при любом $n \geq 2$.

Аналоги гипотезы Бибербаха доказывали и в подклассах $\mathbb{S}$, определяемых некоторыми геометрическими свойствами. Большое число интересных подклассов $\mathbb{S}$ и результатов по оценкам коэффициентов в этих подклассах можно найти в монографии А. В. Гудмана [46]. Мы приведём здесь лишь два наиболее известных подкласса $\mathbb{S}$.

1) Класс звёздообразных функций $\mathbb{S}^* \subset \mathbb{S}$:

условие $f \in \mathbb{S}^*$ означает по определению, что $f \in \mathbb{S}$ и область $f(\mathbb{D}) = \Omega$ является звёздообразной относительно начала координат, т. е. для любой точки $w \in f(\mathbb{D})$ отрезок прямой $[0, w]$ лежит в области $f(\mathbb{D})$.

Необходимым и достаточным условием принадлежности $f \in \mathbb{S}^*$ является голоморфность функции в единичном круге, нормировки $f(0) = f'(0) - 1 = 0$ и выполнение неравенства

$$\operatorname{Re}\frac{zf'(z)}{f(z)} > 0 \qquad (\forall z \in \mathbb{D}).$$

Здесь, как и всюду в подобных ситуациях, мы считаем, что рассматриваемые функции продолжены по непрерывности на устранимую особую точку. В данном случае подразумевается, что $zf'(z)/f(z) = 1$ в точке $z = 0$, так как

$$\lim_{z\to 0}\frac{zf'(z)}{f(z)} = f'(0)\lim_{z\to 0}\frac{z}{f(z)} = 1.$$

2) Класс выпуклых функций $\mathbb{S}^0 \subset \mathbb{S}$:

условие $f \in \mathbb{S}^0$ означает по определению, что $f \in \mathbb{S}$ и область $f(\mathbb{D}) = \Omega$ является выпуклой, т. е. для любых двух точек $w_1 \in f(\mathbb{D})$ и $w_2 \in f(\mathbb{D})$ отрезок прямой $[w_1, w_2]$ лежит в области $f(\mathbb{D})$.

Необходимым и достаточным условием принадлежности $f \in \mathbb{S}^0$ является голоморфность функции в единичном круге, нормировки $f(0) = f'(0) - 1 = 0$ и выполнение неравенства

$$\operatorname{Re}\left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) > 0 \ (\forall z \in \mathbb{D}).$$

Очевидно, что выпуклая область звёздообразна относительно любой своей точки. Поэтому $\mathbb{S}^0 \subset \mathbb{S}^*$. Обсудим геометрический смысл критериев звёздообразности и выпуклости.

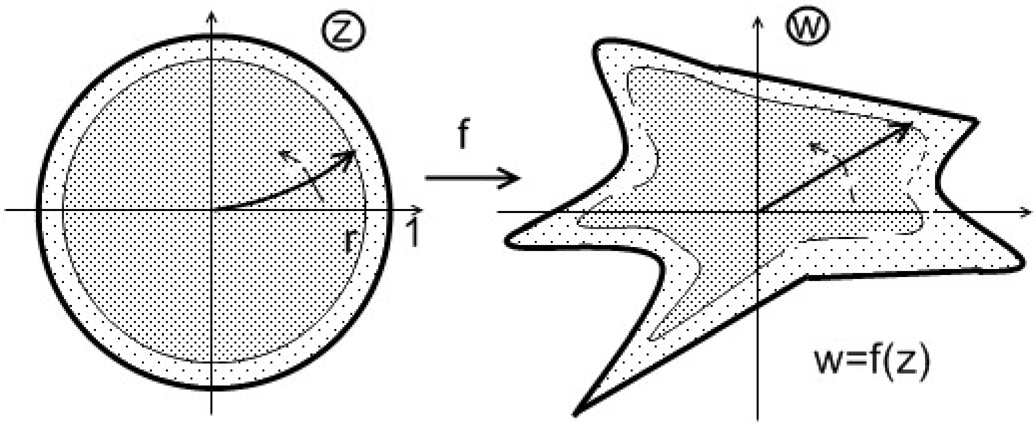

Рис. 4.3: Отображение на звездообразную область

Условие звёздообразности основано на тождестве

$$\frac{d\,\mathrm{Arg} f(re^{i\theta})}{d\,\theta} = \mathrm{Re}\frac{zf'(z)}{f(z)} > 0 \qquad (\forall z = re^{i\theta} \in \mathbb{D})$$

и геометрически означает, что с ростом $\theta \in [0, 2\pi]$ пульсирующий отрезок $[0, f(re^{i\theta})]$ монотонно вращается против часовой стрелки.

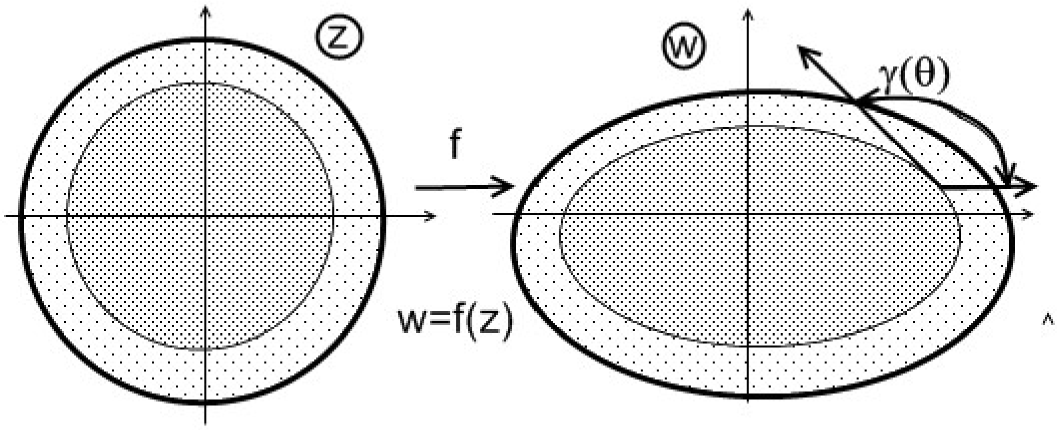

Рис. 4.4: Отображение на выпуклую область

Условие выпуклости основано на тождестве

$$\frac{d\ \left(\pi/2+\theta+\mathrm{Arg}f'(re^{i\theta})\right)}{d\,\theta}=\mathrm{Re}\left(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right)>0$$

для всех $z=re^{i\theta}\in\mathbb{D}$ и геометрически означает, что при любом фиксированном $r=|z|\in(0,1)$ с ростом θ касательная к кривой $L_r=\{f(re^{i\theta})\ :\ \ \theta\in[0,2\pi]\}$ монотонно вращается против часовой стрелки, т. е. угол касательной к L_r, определяемый формулой

$$\gamma(\theta)=\frac{\pi}{2}+\theta+\mathrm{Arg}f'(re^{i\theta}),$$

является монотонно возрастающей функцией угла θ.

В дальнейшем, а именно, в главе 6 мы познакомимся с теорией подчинённых функций, позволяющей легко доказать неравенства: $|a_n|\le n$ в классе однолистных звёздообразных функций, и $|a_n|\le 1$ в классе однолистных выпуклых функций. В этой главе ограничимся доказательством важного частного случая.

Теорема 4.3 *Пусть функция f с разложением*

$$f(z)=z+a_2z^2+...$$

голоморфна при $|z|<1$, и $f\in\mathbb{S}^0$, тогда $|a_2|\le 1$.

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную функцию P, определенную равенством

$$P(z)=1+z\frac{f''(z)}{f'(z)},\quad |z|<1.$$

В окрестности точки $z = 0$ имеем:

$$P(z) = 1 + z\frac{2a_2 + 6a_3z + ...}{1 + 2a_2z + 3a_3z^2 + ...} = 1 + 2a_2z + o(z).$$

Функция $\varphi = (P-1)/(P+1)$ определяет отображение полуплоскости $\operatorname{Re} P > 0$ на круг $|\varphi| < 1$. Поэтому функция φ, определенная равенством

$$\varphi(z) = \frac{P(z) - 1}{P(z) + 1},$$

обладает свойствами:

$$\varphi(z) = \frac{1 + 2a_2z - 1 + o(z)}{1 + 2a_2z + 1 + o(z)} = a_2z + o(z), \quad z \to 0,$$

и $|\varphi(z)| < 1$ при $|z| < 1$. К функции φ применяем второе утверждение леммы Шварца. Это приводит к нужной оценке $|\varphi'(0)| = |a_2| \leq 1$. Случай равенства возможен лишь тогда, когда $|\varphi'(0)| = 1 \Leftrightarrow \varphi(z) = e^{i\alpha}z$. Таким образом, равенство $|a_2| = 1$ возможно тогда и только тогда, когда $f(z) = z/(1 + e^{i\alpha}z)$. Очевидно, полученная экстремальная функция определяет дробно-линейное отображение единичного круга на некоторую полуплоскость, граница которой находится на расстоянии $1/2$ от начала координат.

Кроме $\mathbb{S}^0$ и $\mathbb{S}^*$ исследован ряд других интересных семейств однолистных функций. Много замечательных результатов в этом направлении опубликованы Д. В. Прохоровым, В. В. Старковым и их учениками, их работы можно найти на портале Mathnet.ru.

4.5 Задачи и упражнения

1. Покажите, что функция $w = f(z)$ принадлежит классу выпуклых однолистных функций $\mathbb{S}^o$ тогда и только тогда, когда функция $w = zf'(z)$ принадлежит классу $\mathbb{S}^*$ звёздообразных однолистных функций.

2. Рассматривая конформный радиус как функцию, заданную в односвязной области Ω, оцените сверху модуль его градиента.

Решение. Через $w = f(z)$ обозначим функцию, осуществляющую однолистное конформное отображение единичного круга $\mathbb{D}$ на область Ω. Тогда, как известно, в любой точке $w \in \Omega$ имеет место равенство $R(w, \Omega) = (1 - |z|^2)|f'(z)|, \; w = f(z) \in \Omega$. Градиент является двумерным вектором, поэтому можем считать его комплексным числом и найти по формуле

$$\nabla R(w, \Omega) = \frac{\partial R(w, \Omega)}{\partial u} + i \, \frac{\partial R(w, \Omega)}{\partial v} = 2\frac{\partial R(w, \Omega)}{\partial \overline{w}}.$$

В силу условий Коши-Римана и определения производной будем иметь

$$\frac{\partial w}{\partial \overline{z}} = 0, \quad \frac{\partial \overline{w}}{\partial \overline{z}} = \overline{f'(z)},$$

поэтому

$$\frac{\partial R}{\partial \overline{z}} = \frac{\partial R}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial \overline{z}} + \frac{\partial R}{\partial \overline{w}}\frac{\partial \overline{w}}{\partial \overline{z}} = \frac{\partial R}{\partial \overline{w}}\,\overline{f'(z)}.$$

Отсюда выводим

$$\nabla R(w,\Omega) = \frac{2}{\overline{f'(z)}} \frac{\partial R}{\partial \overline{z}}.$$

Пользуясь представлением

$$R(w,\Omega) = (1-|z|^2)|f'(z)| =$$

$$= (1-z\overline{z})\sqrt{f'(z)}\sqrt{\overline{f'(z)}},$$

непосредственно находим

$$\frac{\partial R(w,\Omega)}{\partial \overline{z}} = -z|f'(z)| + (1-|z|^2)\sqrt{f'(z)}\ \frac{1}{2}\,\frac{\overline{f''(z)}}{\sqrt{\overline{f'(z)}}} =$$

$$= |f'(z)|\left(\frac{1-|z|^2}{2}\ \frac{\overline{f''(z)}}{\overline{f'(z)}} - z\right),$$

и, окончательно,

$$|\nabla R(w,\Omega)| = \left|\frac{f''(z)}{f'(z)}(1-|z|^2) - 2\overline{z}\right|.$$

Правую часть можно оценить сверху. Для этого при произвольном, но фиксированном $z \in D$ рассмотрим преобразование Кёбе

$$g(\zeta) = \frac{f(\frac{\zeta+z}{1+\overline{z}\zeta}) - f(z)}{(1-|z|^2)f'(z)} =$$

$$= \zeta + a_2(g)\zeta^2 + a_3(g)\zeta^3 + ...,\ |\zeta| < 1.$$

Поскольку $g(\zeta) \in S$, то по теореме Бибербаха имеет место точная оценка

$$|a_2(g)| = |g''(0)|/2 \le 2.$$

Но, с другой стороны, простые вычисления показывают, что

$$2a_2(g) = g''(0) = \frac{f''(z)}{f'(z)}(1 - |z|^2) - 2\overline{z},$$

следовательно,

$$|\nabla R(w, \Omega)| = \left|\frac{f''(z)}{f'(z)}(1 - |z|^2) - 2\overline{z}\right| = |g''(0)| \le 4.$$

3. Изучите описание ряда интересных свойств градиента конформного радиуса в работах [38] и [41].

4. Опишите для предыдущей задачи все экстремальные односвязные области Ω, т. е. области, которые содержат хотя бы одну точку $w \in \Omega$ со свойством

$$|\nabla R(w, \Omega)| = 4.$$

5. Пусть f голоморфна при $|z| < 1$. Докажите (см. [4]), что $f \in \mathbb{S}^0$ тогда и только тогда, когда

$$\int_0^{2\pi} \left|\mathrm{Re}\left(1 + \frac{re^{i\theta} f''(re^{i\theta})}{f'(re^{i\theta})}\right)\right| d\theta = 2\pi \qquad (\forall r \in [0,\ 1)).$$

6. Докажите аналог теоремы Кёбе об одной четвёртой для выпуклых функций:

Теорема 4.4 (Карел Лёвнер, см. [52]) *Если $f \in \mathbb{S}^0$, то расстояние $d(f) = \mathrm{dist}(0, \partial f(D))$ от начала координат $w = 0$ до границы области $\Omega = f(D)$ не меньше, чем $1/2$. Равенство $d(f) = 1/2$ реализуется лишь для отображений единичного круга на полуплоскость, т. е. для функций вида $f(z) = z/(1 - e^{i\gamma} z)$.*

7. Пусть Ω – односвязная область, конформно эквивалентная кругу и не содержащая бесконечно удалённой точки. Через $\mathrm{dist}(w, \partial\Omega)$ обозначим расстояние от точки w до границы области Ω. Докажите неравенства

$$\mathrm{dist}(w, \partial\Omega) \le R(w, \Omega) \le 4\,\mathrm{dist}(w, \partial\Omega), \quad w \in \Omega.$$

Указание. Левое неравенство является следствием леммы Шварца, а правое неравенство эквивалентно теореме Кёбе об одной четвёртой. Но для доказательства нужны предварительные построения. Начните с сравнения конформных радиусов области Ω в точке w и вписанного в эту область круга с центром в этой точке w и с радиусом, равным $\mathrm{dist}(w, \partial\Omega)$.

8. Пусть Ω – выпуклая плоская область, конформно эквивалентная кругу. Докажите, что в этом случае

$$\mathrm{dist}(w, \partial\Omega) \le R(w, \Omega) \le 2\,\mathrm{dist}(w, \partial\Omega), \quad w \in \Omega.$$

9. Через $A(\Omega, \Pi)$ обозначим множество локально голоморфных или мероморфных аналитических функций $F : \Omega \to \Pi$, вообще говоря многозначных, определённых в области $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$ и таких, что всевозможные значения $F(z)$ лежат в области $\Pi \subset \overline{\mathbb{C}}$. Для производных функций $F \in A(\Omega, \Pi)$ рассмотрим неравенство

$$\frac{1}{n!}\left|F^{(n)}(z)\right| \le C_n(\Omega, \Pi)\frac{R(F(z), \Pi)}{R^n(z, \Omega)},$$

где $C_n(\Omega, \Pi)$ – наименьшая постоянная, возможная на этом месте, т. е. постоянная, определяемая равенством

$$C_n(\Omega, \Pi) = \sup_{z\in\Omega} \sup_{F\in A(\Omega,\Pi)} \frac{R^n(z, \Omega)\,|F^{(n)}(z)|}{n!\,R(F(z), \Pi)}.$$

Очевидно, что $C_1(\Omega, \Pi) = 1$ в силу неравенства Шварца–Пика. Попробуйте самостоятельно разобраться в доказательстве следующей теоремы.

Теорема 4.5 (Ф. Г. Авхадиев и К.-Й. Виртс [41]). *Для произвольных областей $\Omega \subset \mathbb{C}$ и $\Pi \subset \mathbb{C}$ гиперболического типа*

$$C_2(\Omega, \Pi) = \frac{\sup_{z\in\Omega}|\nabla R(z, \Omega)| + \sup_{w\in\Pi}|\nabla R(w, \Pi)|}{2}.$$

Условие $\gamma(\Omega) := \sup_{z\in\Omega}|\nabla R(z, \Omega)| < \infty$ имеет интересную геометрическую интерпретацию. Как показал Х. Поммеренке [53], условие $\gamma(\Omega) < \infty$ выполнено тогда и только тогда, когда граница области $\Omega \subset \mathbb{C}$ является равномерно совершенным множеством (см. также книгу [41] и главу 9 настоящего учебного пособия). Следовательно, равномерное совершенство границ обеих областей $\Omega \subset \mathbb{C}$ и $\Pi \subset \mathbb{C}$ является необходимым и достаточным условием существования постоянной $C_2(\Omega, \Pi) < \infty$.

Глава 5

Параметрический метод

5.1 Базовое уравнение Лёвнера

Пусть $\kappa : [0, +\infty) \to \mathbb{C}$ – комплекснозначная кусочно-непрерыв-ная функция, $|\kappa(t)| \equiv 1$. Рассмотрим дифференциальное уравнение, предложенное К. Лёвнером:

$$\frac{dw}{dt} = -w\frac{1+\kappa w}{1-\kappa w}, \qquad (\kappa = \kappa(t)). \tag{5.1}$$

Для этого уравнения решается задача Коши с условием

$$w(0) = z, \tag{5.2}$$

где z – фиксированное комплексное число, $|z| < 1$.

Как решение задачи (5.1) и (5.2) возникает функция $w = f(z,t)$, которую можно рассматривать как функцию двух переменных t и z, причём t – вещественная переменная, $0 \le t < \infty$, z – комплексная переменная, $z \in \mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$.

Из курса дифференциальных уравнений известно, что существование решения задачи Коши для уравнения первого порядка с начальным условием можно доказать методом последовательных приближений Пикара. Этот метод применим и для комплекснозначных функций. Полагаем, что нулевое приближение $w_0 = z$ – константа (по отношению к переменной $t \in [0, \infty)$), а первое приближение определяется формулой

$$w_1 = z \ \exp\left(-\int\limits_0^t \frac{1+\kappa(\tau)z}{1-\kappa(\tau)z}d\tau\right).$$

По индукции, формула для n-ого приближения имеет вид

$$w_n = z \exp\left(-\int\limits_0^t \frac{1+\kappa(\tau)w_{n-1}}{1-\kappa(\tau)w_{n-1}}d\tau\right).$$

Если последовательность сходится, то предельная функция $w = \lim\limits_{n\to\infty} w_n$ удовлетворяет интегральному уравнению, эквивалентному рассматриваемой задаче Коши. Поэтому нам достаточно показать сходимость метода Пикара.

Теорема 5.1 (Теорема Лёвнера). *Задача Коши (5.1), (5.2) имеет единственное решение, причём*

$$e^t f(z,t) = z + a_2(t)z^2 + a_3(t)z^3 + ...$$

при $|z| < 1$ *и* $f(\,\cdot\,, t) : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ *– однолистное конформное отображение, т. е.* $f(z,t)$ *как функция переменной* $z \in \mathbb{D}$ *при любом фиксированном* $t \in [0, \infty)$ *является голоморфной, однолистной и* $e^t f(\,\cdot\,, t) \in \mathbb{S}$.

Кроме того, существует предельная функция $f \in \mathbb{S}$, *определяемая формулой* $\lim\limits_{t\to\infty} e^t f(z,t) = f(z)$.

Доказательство. Легко показать, что последовательность w_n ограничена. Имеем

$$w_n = z \exp\left(-\int\limits_0^t P(\tau, w_{n-1})d\tau\right),$$

где функция

$$P(\tau, w) = \frac{1+\kappa w}{1-\kappa w}$$

будет иметь положительную вещественную часть, если $|w| < 1$. Покажем по индукции, что $|w_n| < 1$. Имеем $|w_0| = |z| < 1$. Предположим, что $|w_k| < 1$ для $k = \overline{0, n-1}$ и докажем, что утверждение верно для w_n. Функция $p = (1+\zeta)/(1-\zeta)$ определяет отображение круга $|\zeta| < 1$ на правую полуплоскость $\operatorname{Re} p > 0$. Полагая $\kappa w_{n-1} = \zeta$, с учётом соотношений $|\kappa| = 1, |w_{n-1}| \leq |z|$, получаем $\operatorname{Re} P(\tau, w_{n-1}) > 0$. Следовательно,

$$|w_n| = |z| \exp\left(-\int\limits_0^t \operatorname{Re} P(\tau, w_{n-1})d\tau\right) \leq |z| \quad (\forall n \in \mathbb{N}).$$

Чтобы доказать сходимость, заметим, что

$$\frac{dw_n}{dt} = -z \exp\left(-\int\limits_0^t P(\tau, w_{n-1})d\tau\right) P(t, w_{n-1}) =$$

$$= -w_n P(t, w_{n-1})$$

и оценим

$$\frac{|d(w_n - w_{n-1})|}{dt} = \left|\frac{dw_n}{dt} - \frac{dw_{n-1}}{dt}\right| =$$

$$= |w_n P(t, w_{n-1}) - w_{n-1} P(t, w_{n-2})| \leq$$

$$\leq |w_n - w_{n-1}||P(t, w_{n-1})| + |w_{n-1}||P(t, w_{n-1}) - P(t, w_{n-2})|.$$

Применяя соотношения

$$P(t, w_{n-1}) - P(t, w_{n-2}) = \frac{1 + \kappa w_{n-1}}{1 - \kappa w_{n-1}} - \frac{1 + \kappa w_{n-2}}{1 - \kappa w_{n-2}} =$$

$$= \frac{2\kappa(w_{n-1} - w_{n-2})}{(1 - \kappa w_{n-1})(1 - \kappa w_{n-2})},$$

$$|\kappa w_k| < |z| \ \ \Rightarrow |P(t, w_k)| \leq \frac{1 + |z|}{1 - |z|}$$

и

$$|P(t, w_{n-1}) - P(t, w_{n-2})| \leq \frac{2|w_{n-1} - w_{n-2}|}{(1 - |z|)^2}$$

к производным, получим

$$\left|\frac{d(w_n - w_{n-1})}{dt}\right| \leq A(z)|w_n - w_{n-1}| + B(z)|w_{n-1} - w_{n-2}|.$$

Здесь

$$A(z) = \frac{1 + |z|}{1 - |z|}, \qquad B(z) = \frac{2|z|}{(1 - |z|)^2}$$

– константы по отношению к переменной t, так как в задаче Коши значение z фиксировано. Поэтому получаем следующее дифференциальное неравенство

$$\frac{d|w_n - w_{n-1}|}{dt} - A|w_n - w_{n-1}| \leq B|w_{n-1} - w_{n-2}|.$$

Считаем, что $t \in [0, t_0]$, умножаем дифференциальное неравенство на e^{-At} и интегрируем. Будем иметь

$$\left(\frac{dy}{dt} - Ay\right)\ e^{-At} = (e^{-At}y)' = Be^{-At}|w_{n-1} - w_{n-2}|.$$

Простые выкладки дают

$$|w_n - w_{n-1}| \leq e^{At_0}B\int\limits_0^t |w_{n-1}(\tau) - w_{n-2}(\tau)|d\tau.$$

Таким образом, имеем

$$|w_1 - w_0| = |z|\left|\exp\left(-\int\limits_0^t P(\tau, z)d\tau\right) - 1\right| \leq Ct.$$

Применяя последовательно эти оценки, получаем

$$|w_2 - w_1| \leq \text{const}\ t^2, ...,$$

$$|w_n - w_{n-1}| \leq C(z)\frac{(e^{At_0}Bt)^{n-1}}{(n-1)!} \to 0, \qquad n \to \infty$$

равномерно по $t \in [0, t_0]$. Указанная в выносной формуле сходимость к нулю следует из свойств экспоненциальной функции. Действительно, так как

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!},$$

то $x^n/n!$ стремится к нулю при $n \to \infty$ в силу хорошо известного необходимого условия сходимости любого ряда. Таким образом, сходимость метода последовательных приближений и, следовательно, существование решения задачи Коши (5.1) и (5.2) доказаны. Стандартно доказывается и единственность решения.

Однолистность функции $w = f(z, t)$ доказывается от противного.

Предположим, что $z_1 \neq z_2, |z_1| < 1, |z_2| < 1$, но существует положительное число t_1 такое, что

$$f(z_1, t_1) = f(z_2, t_1).$$

Но тогда по теореме единственности $f(z_1, t) = f(z_2, t), \quad 0 \leq t < \infty$. При $t = 0$ имеем: $f(z_1, 0) = z_1 = z_2 = f(z_2, 0)$. Итак, $z_1 = z_2$, т. е. получили противоречие.

Проверим теперь нормировку. Для этого уравнение Лёвнера для $w = f(z, t)$ перепишем так:

$$\frac{d(\ln f + t)}{dt} = -\frac{2\kappa f}{1 - \kappa f},$$

отсюда имеем

$$\ln \frac{f(z,t)}{f(z,0)} + t = -\int\limits_0^t \frac{2\kappa(\tau) f(z,\tau) d\tau}{1-\kappa(\tau) f(z,\tau)}.$$

Проинтегрируем с учётом условия $f(z,0) = z$, тогда

$$\frac{f(z,t)}{z} = e^{-t} \exp\left(-\int\limits_0^t \frac{2\kappa f}{1-\kappa f} d\tau\right) =$$

$$= e^{-t}(1 + c_2(t)z + c_3(t)z^2 + ...).$$

Отсюда непосредственно следует требуемое разложение в окрестности начала координат:

$$f(z,t) = e^{-t}(z + c_2(t)z^2 + c_3(t)z^3 + ...).$$

И наконец, голоморфность предельной функции и её однолистность легко следуют из общих теорем комплексного анализа. Таким образом, существует предельная функция

$$\lim_{t\to\infty} e^t f(z,t) = f(z) = z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + ... \in \mathbb{S}.$$

Выбирая всевозможные допустимые функции $\kappa(t)$ в дифференциальном уравнении Лёвнера, мы получаем множество $\mathbb{S}' \subset \mathbb{S}$, состоящее из таких предельных однолистных функций.

5.2 Оценки коэффициентов

Теорема 5.2 (К. Лёвнер.) *Множество $\mathbb{S}'$ всюду плотно в $\mathbb{S}$ в топологии равномерной сходимости внутри единичного круга, т. е. $\forall f \in \mathbb{S}$ $\exists f_n \in \mathbb{S}'$ такие, что $f(z) = \lim_{n\to\infty} f_n(z)$ равномерно внутри единичного круга $\mathbb{D}$.*

Как следствие получается, что оценки коэффициентов в классе $\mathbb{S}$, например, оценки $|a_n| \leq n$ и некоторые другие, достаточно доказать для $f \in \mathbb{S}'$. Поэтому вернемся к решению задачи Коши (5.1), (5.2), т. е. к функции $w = f(z,t)$, и к предельной функции $f \in \mathbb{S}' \subset \mathbb{S}$, определяемой соотношением

$$f(z) = \lim_{t\to\infty} e^t f(z,t) = z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + ..., |z| < 1.$$

Ясно, что тейлоровские коэффициенты $w = f(z,t)$ можно выразить через $\kappa(t)$ и после предельного перехода найти формулы для коэффициентов $c_2, c_3, ..., c_n, ...$ предельной функции. Для этого будем в дальнейшем рассматривать $w = f(z,t)$ как функцию комплексной переменной z при фиксированном $t \in [0,\ t_0]$, $t_0 < \infty$, и образуем функцию

$$g_{t_0}(z,\ t) = f\left(f^{-1}(z,\ t),\ t_0)\right) = e^{t-t_0}\left(z + c_2(t,t_0)z^2 + ...\right),$$

которая удовлетворяет тождеству $g_{t_0}(f(z,t),\ t) = f(z,\ t_0)$ и, следовательно, второму дифференциальному уравнению Лёвнера

$$\frac{\partial g_{t_0}}{\partial t} = z\,\frac{\partial g_{t_0}}{\partial z}\,\frac{1+\kappa(t)\,z}{1-\kappa(t)\,z}, \qquad z \in \mathbb{D},\ t \in [0,\, t_0].$$

Подставляя в это уравнение разложение в ряд функции $g_{t_0}(z,\, t)$ и сравнивая при $n \geq 2$ коэффициенты в правой и левой частях получаемого равенства, приходим к формуле

$$\frac{d\,c_n(t,\, t_0)}{dt} = (n-1)\,c_n(t,\, t_0) + 2\sum_{j=1}^{n-1} j\,c_j(t,\, t_0)\,\kappa^{n-j}(t).$$

Интегрируем это линейное уравнение имея в виду, что $g_{t_0}(z,\, t_0) = z$, и поэтому $c_n(t_0,\, t_0) = 0$ при $n \geq 2$. Получаем

$$c_n(t,\, t_0) =$$

$$= -2\,e^{(n-1)t} \int_0^{t_0} e^{-(n-1)\tau} \sum_{j=1}^{n-1} j\,c_j(\tau,\, t_0)\,\kappa^{n-j}(\tau)\ d\tau.$$

На основании этой формулы тейлоровские коэффициенты функции $g_{t_0}(z,\, t)$ определяются последовательными вычислениями, а для коэффициентов предельной функции имеем

$$c_n = \lim_{t_0 \to \infty} c_n(0,\, t_0).$$

Несложные выкладки приводят к следующим формулам для второго и третьего коэффициентов. Справедлива

Теорема 5.3 (К. Лёвнер.) *Имеют место формулы*

$$c_2 = -2\int_0^\infty e^{-\tau}\kappa(\tau)d\tau$$

и

$$c_3 = -2\int_0^\infty e^{-2\tau}\kappa^2(\tau)d\tau + 4\left(\int_0^\infty e^{-\tau}\kappa(\tau)d\tau\right)^2.$$

Первая из этих формул позволяет легко получить уже знакомую нам оценку Бибербаха для второго коэффициента. Действительно, имеем

$$|c_2| \le 2\int_0^\infty e^{-\tau}|\kappa(\tau)|d\tau = 2\int_0^\infty e^{-\tau}d\tau = 2(-e^{-\tau}|_0^\infty) = 2.$$

В дальнейшем нам понадобится ещё один результат Лёвнера.

Теорема 5.4 (К. Лёвнер.) *В классе* $\mathbb{S}$ *имеем точную оценку* $|c_3 - c_2^2| \le 1$.

Доказательство. Непосредственные вычисления дают

$$|c_3 - c_2^2| = \left|-2\int\limits_0^\infty e^{-2\tau}\kappa^2(\tau)d\tau\right| \le$$

$$\le 2\int\limits_0^\infty e^{-2\tau}d\tau = \int\limits_0^\infty e^{-\tau}d\tau = 1.$$

С другой стороны, для функции Кёбе имеем: $a_2 = 2$, $a_3 = 3$. Поэтому $a_3 - a_2^2 = 3 - 4 = -1$, следовательно, полученная оценка точна и функция Кёбе является экстремальной.

5.3 Уравнение Лёвнера-Куфарева

Развитием и применениями теории Лёвнера занимались П. П. Куфарев, Г. М. Голузин, И. Е. Базилевич, Х. Поммеренке, И. А. Александров, В. Я. Гутлянский, В. В. Горяйнов, Д. В. Прохоров, В. Хейман и другие математики. Современные исследования по этому направлению и новые приложения описаны в обзорной статье В. В. Горяйнова [15] и в статье М. В. Павлова, Д. В. Прохорова, А. Ю. Васильева и А. М. Захарова [19], посвящённой связи уравнений Лёвнерв с проблемами теоретической физики.

Ниже в упрощённой формулировке приведём лишь одно утверждение, восходящее к П. П. Куфареву и Х. Поммеренке, тесно связанное со вторым уравнением Лёвнера и позволяющее получать достаточные условия однолистности аналитических функций (см. [4], [52]).

Предположим, что в круге $\mathbb{D}$ заданы аналитические функции f_0, f_1, $f(.,\, t)$, причём $f(z,\, t)$ непрерывно дифференцируема по параметру t при $0 \leq t < \infty$ и $f(0,\, t) = 0$, $f'(0,\, t) \neq 0$, а $f_0(z)$ и $f_1(z)$ вложены в однопараметрическое семейство $f(z,\, t)$ следующим образом: для любого $z \in \mathbb{D}$

$$f(z,\, 0) = f_0(z), \quad f(z,\, t) = a_1(t)\, f_1(z) + O(1),\ t \to \infty,$$

где $a_1(t)$ – положительная дифференцируемая функция со свойством $\lim_{t\to\infty} a_1(t) = \infty$.

Через $h(z,\, t)$ обозначим функцию, определенную равенством

$$\frac{\partial f(z,\, t)}{\partial t} = z\, h(z,t)\, \frac{\partial f(z,\, t)}{\partial z}, \quad z \in \mathbb{D},\, 0 \le t < \infty.$$

Теорема 5.5 (см. [4] и [52]).*Если*

$$\mathrm{Re}\, h(z,t) > 0, \qquad z \in \mathbb{D}, \quad 0 \le t < \infty,$$

то функции все $f(.,\, t)$ однолистны в круге $\mathbb{D}$, в частности, однолистными являются и функции f_0, f_1.

5.4 Задачи и упражнения

1. Подтвердите результат Крауса — Нехари:

Теорема 5.6 (см., например, [14]). *Пусть функция f является аналитической и однолистной в единичном круге $\mathbb{D}$, тогда для всех $z \in \mathbb{D}$ шварциан этой функции удовлетворяет неравенству*

$$|\{f,\, z\}| \le \frac{6}{(1 - |z|^2)^2},$$

причём постоянная 6 является точной.

Эта теорема доказана В. Краусом в 1932 году, но стала широко известной после статьи З. Нехари 1949 года, где он переоткрыл этот результат и доказал достаточные условия однолистности в терминах шварциана (см. ниже задачу 6).

Указание. При произвольном, но фиксированном $z \in \mathbb{D}$ рассмотрим преобразование Кёбе

$$g(\zeta) = \frac{f(\frac{\zeta+z}{1+\bar{z}\zeta}) - f(z)}{(1-|z|^2)f'(z)} = \zeta + a_2(g)\zeta^2 + a_3(g)\zeta^3 + ..., |\zeta| < 1.$$

Поскольку $g \in \mathbb{S}$, то по теореме 5.4 К. Лёвнера имеет место точная оценка $|a_3(g) - a_2^2(g)| \le 1$. Непосредственными вычислениями показываем, что

$$6\left(a_3(g) - a_2^2(g)\right) = \{f,\, z\}\,(1-|z|^2)^2.$$

2. *Пусть* $F \in \mathbf{\Sigma}$, *тогда*

$$|\{F,\, \zeta\}| \le \frac{6}{(|\,\zeta|^2-1)^2}, \qquad |\zeta| > 1.$$

Указание. Найдётся такая постоянная c, что функция $F(1/z) - c \neq 0$ для любого $z \in \mathbb{D}$. Тогда для f, определённой равенством $f(z) = 1/(F(1/z) - c)$, справедливо неравенство Нехари, равносильное доказываемому. Вычисления достаточно проводить для функции, определяемой равенством $g(1/\zeta) = F(\zeta)$, так как в силу инвариантности шварциана относительно дробно-линейных преобразований имеет место равенство $\{g,\, z\} = \{f,\, z\}$.

3. Пусть $f_0 \in \mathbb{S}^*$. Покажите, что однопараметрическое семейство функций $f(z,t) = e^t f_0(z)$ удовлетворяет всем условиям теоремы 5.5 (см. [4]).

4. Докажите теорему Й. Беккера (см. [4] и [52]).

Теорема 5.7 . *Если функция* $f(z) = z + a_2 z^2 + \ldots$ *является аналитической в единичном круге* $\mathbb{D}$ *и удовлетворяет неравенству*

$$\left| z\,\frac{f''(z)}{f'(z)} \right| \le \frac{1}{1-|z|^2}, \quad |z| < 1,$$

то f *однолистна в* $\mathbb{D}$.

Указание. Рассмотрите однопараметрическое семейство $f(z,t) = f(e^{-t}z) + (e^t - e^{-t})\,z\,f'(e^{-t}z)$.

5. Заменой переменных получите следующее утверждение как следствие теоремы Й. Беккера 5.7.

Теорема 5.8 . *Если функция* f *является аналитической в полуплоскости* $\Pi = \{z = x + iy : y > 0\}$ *и удовлетворяет неравенству*

$$\left| \frac{f''(z)}{f'(z)} \right| \le \frac{1}{2\,y}, \quad y > 0,$$

то f *однолистна в* Π.

6. Докажите следующую теорему З. Нехари.

Теорема 5.9 (см., например, [4] и [52]). *Если функция* f *является аналитической в единичном круге* $\mathbb{D}$ *и удовлетворяет неравенству*

$$|\{f,\, z\}| \le \frac{2}{(1-|z|^2)^2}, \quad |z| < 1,$$

то f *однолистна в* $\mathbb{D}$.

Указание. Убедитесь, что функцию f можно представить в виде $f(z) = g_1(z)/g_2(z)$, где $g_1(z)$ и $g_2(z)$ – линейно независимые решения линейного дифференциального уравнения второго порядка

$$g'' + \frac{\{f,\, z\}}{2}\, g = 0.$$

Рассмотрите однопараметрическое семейство функций вида

$$f(z,t) = \frac{g_1(e^{-t}z) + (e^t - e^{-t})\, z\, g_1'(e^{-t}z)}{g_2(e^{-t}z) + (e^t - e^{-t})\, z\, g_2'(e^{-t}z)}.$$

7. Получите неравенство, доказанное одновременно и независимо друг от друга Р. Кюнау и Ф. Г. Авхадиевым (см., например, [1]).

Теорема 5.10 . *Пусть $f \in \mathbb{S}^0$, тогда*

$$|\{f,\, z\}| \le \frac{2}{(1-|z|^2)^2}, \;\; z \in \mathbb{D},$$

причём постоянная 2 *является точной.*

8. Докажите теорему П. П. Куфарева и Х. Поммеренке из пункта 5.3, т. е теорему 5.5.

9. Рекомендую прочитать интересные статьи И. А. Александрова и И. М. Милина [9], В. В. Горяйнова [15] и М. В. Павлова, Д. В. Прохорова, А. Ю. Васильева, А. М. Захарова [19].

Глава 6

Мажорации Литлвуда–Рогозинского

6.1 Теорема Литлвуда

Пусть $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$ – единичный круг, и пусть Φ, Ψ – голоморфные функции, заданные в этом круге.

Определение. *Говорят, что* Φ *подчинена функции* Ψ *и пишут*

$$\Phi \prec \Psi,$$

если существует функция ω*, голоморфная в* $\mathbb{D}$ *и удовлетворяющая условиям:* $\omega(0) = 0$, $|\omega(z)| < 1$ *для всех* $z \in \mathbb{D}$ *и*

$$\Phi(z) = \Psi(\omega(z)) \qquad \forall z \in \mathbb{D}.$$

К этому определению можно дать следующие пояснения. Полезно помнить, что по лемме Шварца для функции $\omega(z)$ справедлива точная оценка: $|\omega(z)| \leq |z|$ для любой точки $z \in \mathbb{D}$. Далее, голоморфная функция подчинена самой себе, так как можно взять $\omega(z) \equiv z$ в определении. Кроме того, если Ψ – однолистная функция, то в определении можно обойтись без функции $\omega(z)$ и говорить, что Φ подчинена функции Ψ при выполнении условий: $\Phi(0) = \Psi(0)$ и $\Phi(\mathbb{D}) \subset \Psi(\mathbb{D})$.

Теорема 6.1 (Теорема Дж. Литлвуда, см., например, [41] или [52]). *Пусть функции Φ, Ψ голоморфны в $\mathbb{D}$ и $\Phi \prec \Psi$. Тогда для любого $\rho \in (0,1)$*

$$\int\limits_0^{2\pi} |\Phi(\rho e^{i\theta})|^2 d\theta \le \int\limits_0^{2\pi} |\Psi(\rho e^{i\theta})|^2 d\theta.$$

Доказательство. Фиксируем положительное число $\rho \in (0,1)$. Возьмём некоторое число $r \in (\rho, 1)$. Рассмотрим в единичном круге квадраты голоморфных функций Φ и Ψ. Поскольку Φ^2, Ψ^2 также голоморфны в $\mathbb{D}$, то их вещественные и мнимые части являются гармоническими функциями. Поэтому к функциям, определёнными равенствами

$$\mathrm{Re}\Psi^2(z) = u(x,y), \;\; \mathrm{Im}\Psi^2(z) = v(x,y)$$

применимы формулы Пуассона. Записывая их для суммы $u(x,y) + iv(x,y)$, получаем следующую формулу Пуассона для голоморфной функции:

$$\Psi^2(z) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \Psi^2(\zeta) \; \mathrm{Re} \; \frac{\zeta + z}{\zeta - z} \, d\theta \; (\zeta = re^{i\theta}, \; r \in (0,1))$$

для любой точки $z = \rho e^{i\varphi}$, $0 < \rho < r$, $0 \le \varphi \le 2\pi$.

Поэтому

$$\Phi^2(z) = \Psi^2(\omega(z)) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \Psi^2(\zeta)\ \mathrm{Re}\ \frac{\zeta+\omega(z)}{\zeta-\omega(z)}d\theta,$$

где $\zeta = re^{i\theta}$. Простые оценки с учётом неравенств $|z| = \rho < r$, $|\omega(z)| \leq |z|$ приводят к формуле

$$|\Phi(\rho e^{i\varphi})|^2 \leq \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} |\Psi(re^{i\theta})|^2\ \ \mathrm{Re}\ \ \frac{re^{i\theta}+\omega(\rho e^{i\varphi})}{re^{i\theta}-\omega(\rho e^{i\varphi})}d\theta,$$

где реальная часть дроби под интегралом взята без знака модуля, так как она положительна в силу того, что $\mathrm{Re}\ (\zeta+z)/(\zeta-z) > 0$. Здесь учтены соотношения $|z| = \rho < r = |\zeta|$. Теперь проинтегрируем полученное неравенство для функций $\Phi^2(z)$ и $\Psi^2(z)$ при фиксированном $\rho \in (0,1)$. Имеем: $\int\limits_0^{2\pi} |\Phi(\rho e^{i\varphi})|^2 d\varphi \leq$

$$\leq \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} |\Psi(re^{i\theta})|^2 d\theta \int\limits_0^{2\pi} \mathrm{Re}\ \ \frac{re^{i\theta}+\omega(\rho e^{i\varphi})}{re^{i\theta}-\omega(\rho e^{i\varphi})}d\varphi.$$

К внутреннему интегралу применим теорему о среднем для гармонических функций, т. е. формулу

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} V(\rho e^{i\varphi})d\varphi = V(0)\ \ \left(V = \mathrm{Re}\ \ \frac{re^{i\theta}+\omega(\rho e^{i\varphi})}{re^{i\theta}-\omega(\rho e^{i\varphi})}\right),$$

Поскольку

$$V(0) = \mathrm{Re}\ \frac{re^{i\theta} + \omega(0)}{re^{i\theta} - \omega(0)} = \mathrm{Re}\frac{re^{i\theta}}{re^{i\theta}} = 1,$$

то будем иметь равенство

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} |\Psi(re^{i\theta})|^2 d\theta \int\limits_0^{2\pi} \mathrm{Re}\ \frac{re^{i\theta} + \omega(\rho e^{i\varphi})}{re^{i\theta} - \omega(\rho e^{i\varphi})}\ d\varphi =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} |\Psi(re^{i\theta})|^2 d\theta$$

для любых величин ρ и r, удовлетворяющих соотношениям $0 < \rho < r < 1$. В результате получаем неравенство $\int\limits_0^{2\pi} |\Phi(\rho e^{i\varphi})|^2 d\varphi \leq \int\limits_0^{2\pi} |\Psi(re^{i\theta})|^2\ d\theta$ для любых ρ, r таких, что $0 < \rho < r < 1$. Переходя к пределу при $r \to \rho$, приходим к утверждению теоремы.

Следствие 6.1.1 *Пусть функции Φ и Ψ голоморфны в $\mathbb{D}$ и справедливы разложения*

$$\Phi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k z^k, \qquad \Psi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} B_k z^k, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Если $\Phi \prec \Psi$ и $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |B_k|^2 < \infty$, то $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |A_k|^2 \leq \sum\limits_{k=0}^{\infty} |B_k|^2$.

Доказательство. Пусть $z = re^{i\theta}$, $0 < r < 1$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

По формуле Парсеваля

$$\int_0^{2\pi} |\Phi(z)|^2 d\theta = \int_0^{2\pi} \Phi(z)\overline{\Phi(z)} d\theta = 2\pi \sum_{k=0}^{\infty} |A_k|^2 r^{2k}.$$

Аналогично, имеем равенство

$$\int_0^{2\pi} |\Psi(z)|^2 d\theta = 2\pi \sum_{k=0}^{\infty} |B_k|^2 r^{2k}.$$

В силу теоремы 6.1 получаем $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |A_k|^2 r^{2k} \le \sum\limits_{k=0}^{\infty} |B_k|^2 r^{2k}$ при любом $r \in (0, 1)$. Остаётся устремить r к единице.

6.2 Система неравенств Рогозинского

На самом деле из теоремы Литлвуда можно получить следующую счётную серию неравенств для коэффициентов A_k, B_k:

$$|A_0| \le |B_0|,$$

$$|A_0|^2 + |A_1|^2 \le |B_0|^2 + |B_1|^2,$$

$$|A_0|^2 + |A_1|^2 + |A_2|^2 \le |B_0|^2 + |B_1|^2 + |B_2|^2,$$

$$|A_0|^2 + |A_1|^2 + |A_2|^2 + |A_3|^2 \le |B_0|^2 + |B_1|^2 + |B_2|^2 + |B_3|^2,$$

и аналогичные неравенства для любого числа слагаемых. А именно, справедлива следующая теорема, где и представлена указанная бесконечная система неравенств.

Теорема 6.2 (Теорема В. Рогозинского, см., например, [41] или [52]). *Пусть функции* Φ *и* Ψ *голоморфны в* $\mathbb{D}$ *и* $\Phi \prec \Psi$, *причём*

$$\Phi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k z^k, \quad \Psi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} B_k z^k, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Тогда для любого $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *имеет место неравенство* $\sum\limits_{k=0}^{n} |A_k|^2 \leq \sum\limits_{k=0}^{n} |B_k|^2$.

Доказательство. Равенство $\Phi(z) = \Psi(\omega(z))$, где ω – функция, голоморфная в $\mathbb{D}$, удовлетворяющая условию $|\omega(z) \leq |z|$, равносильно равенству рядов

$$\sum_{k=0}^{\infty} A_k z^k = \sum_{k=0}^{\infty} B_k \omega^k(z), \quad z \in \mathbb{D}.$$

Гениальный ход, придуманный Рогозинским, заключается в последующих элементарных преобразованиях этого тождества. Во-первых, тождество можно записать в виде

$$\sum_{k=0}^{n} A_k z^k + \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} A_k z^k - \sum_{k=n+1}^{\infty} B_k \omega^k(z) \right) = \sum_{k=0}^{n} B_k \omega^k(z).$$

Во-вторых, поскольку вблизи нуля функция $\omega(z)$ имеет следующее разложение

$$\omega(z) = a_1 z + a_2 z^2 + ... = z(a_1 + a_2 z + ...),$$

то выражение в больших круглых скобках представимо степенным рядом вида

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} C_k z^k, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Следовательно, имеем ключевое новое тождество

$$\sum_{k=0}^{n} A_k z^k + \sum_{k=n+1}^{\infty} C_k z^k = \sum_{k=0}^{n} B_k \omega^k(z), \quad z \in \mathbb{D},$$

что согласно определению подчинённых функций означает, что $\Phi_1 \prec \Psi_1$, где Φ_1 и Ψ_1, определены формулами

$$\Phi_1(z) = \sum_{k=0}^{n} A_k z^k + \sum_{k=n+1}^{\infty} C_k z^k, \quad z \in \mathbb{D},$$

и $\Psi_1(z) = \sum\limits_{k=0}^{n} B_k z^k,\ z \in \mathbb{D}$.

Далее всё просто. К функциям Φ_1 и Ψ_1 применимо следствие 6.1.1 теоремы Литлвуда. Будем иметь

$$\sum_{k=0}^{n} |A_k|^2 + \sum_{k=n+1}^{\infty} |C_k|^2 \leq \sum_{k=0}^{n} |B_k|^2,$$

отсюда следует

$$\sum_{k=0}^{n} |A_k|^2 \leq \sum_{k=0}^{n} |B_k|^2,$$

что и требовалось доказать.

6.3 Обобщённые мажорации

Определение. *Пусть* $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$ *– единичный круг,* Φ, Ψ *– голоморфные функции, заданные в этом круге. Говорят, что функция* Φ *является квазиподчинённой функции* Ψ, *если для всех* $z \in \mathbb{D}$ *справедливо равенство* $\Phi(z) = \varphi(z)\Psi(\omega(z))$, *где функции* ω *и* φ *голоморфны в* $\mathbb{D}$, *причём* $|\omega(z)| \le |z|$ *и* $|\varphi(z)| \le 1$ *для всех точек* $z \in \mathbb{D}$.

Выделим важный частный случай квазиподчинённости: *если функции* Φ, Ψ *голоморфны в единичном круге и для всех* $z \in \mathbb{D}$ *выполняется неравенство* $|\Phi(z)| \le |\Psi(z)|$. Теоремы 6.1 и 6.2 справедливы и для квазиподчинённых функций, причём схемы доказательств остаются теми же. Этот факт был обоснован и применён в работах Дж. Клуни для функций с условием $|\Phi(z)| \le |\Psi(z)|$ и М. С. Робертсона в общем случае (см. монографию Х. Поммеренке [52]).

Квазиподчинённость допускает обобщение на случай функций Φ и Ψ, голоморфных лишь в некоторой окрестности начала координат. А именно, справедлив следующий, наиболее общий аналог теоремы 6.2.

Теорема 6.3 (Ф. Г. Авхадиев, К.-Й. Виртс [38], см. также [41], теорему 2.4.) *Пусть функции* Φ *и* Ψ *голоморфны в круге* $U_\varepsilon = \{z \in \mathbb{C} : |z| < \varepsilon\}$, *где* $\varepsilon \in (0,1)$, *и в этом круге имеют разложения*

$$\Phi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k z^k, \quad \Psi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} B_k z^k, \quad z \in U_\varepsilon. \tag{6.1}$$

Если существуют две функции φ и ω, голоморфные в единичном круге $\mathbb{D}$, удовлетворяющие неравенствам $|\varphi(z)| \le 1$ и $|\omega(z)| \le |z|$ для всех точек $z \in \mathbb{D}$ и такие, что имеет место тождество

$$\Phi(z) = \varphi(z)\Psi(\omega(z)),\ \forall z \in U_\varepsilon, \tag{6.2}$$

то для любого $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ справедливо неравенство $\sum\limits_{k=0}^{n} |A_k|^2 \le \sum\limits_{k=0}^{n} |B_k|^2$.

Доказательство. Для фиксированного n определим голоморфную в единичном круге функцию g_n равенством

$$g_n(z) = \varphi(z) \sum_{k=0}^{n} B_k \omega^k(z) - \sum_{k=0}^{n} A_k z^k,\ \ z \in \mathbb{D}.$$

В силу условий (6.1) и (6.2) справедливы тождества

$$\sum_{k=0}^{n} A_k z^k + g_n(z) = \varphi(z) \sum_{k=0}^{n} B_k \omega^k(z),\ \ \forall z \in U_\varepsilon,$$

$$g_n(z) = \sum_{k=n+1}^{\infty} A_k z^k - \varphi(z) \sum_{k=n+1}^{\infty} B_k \omega^k(z),\ \ \forall z \in U_\varepsilon.$$

Из последнего тождества с учётом условия $|\omega(z)| \le |z|$ ($z \in \mathbb{D}$) получаем, что для функции g_n справедливо разложение в степенной ряд вида

$$g_n(z) = \sum_{k=n+1}^{\infty} C_k z^k,\ \ \forall z \in U_\varepsilon.$$

Так как g_n голоморфна в $\mathbb{D}$, то этот ряд сходится в круге $\mathbb{D}$. Тогда мы имеем две функции Φ_1 и Ψ_1, голоморфные в круге $\mathbb{D}$, представимые в $\mathbb{D}$ разложениями

$$\Phi_1(z) = \sum_{k=0}^{n} A_k z^k + \sum_{k=n+1}^{\infty} C_k z^k, \quad \Psi_1(z) = \sum_{k=0}^{n} B_k z^k,$$

удовлетворяющие в $\mathbb{D}$ тождеству $\Phi_1(z) = \varphi(z)\Psi_1(\omega(z))$, следовательно, неравенству $|\Phi_1(z)| \le |\Psi_1(\omega(z))|$.

Далее, замечаем, что в доказательстве теоремы 6.1 используется лишь неравенство $|\Phi(z)| \le |\Psi(\omega(z))|$, вытекающее из тождества $\Phi(z) = \Psi(\omega(z))$. Следовательно, наше неравенство $|\Phi_1(z)| \le |\Psi_1(\omega(z))|$ $(z \in \mathbb{D})$ влечёт неравенство

$$\int_0^{2\pi} |\Phi_1(\rho e^{i\theta})|^2 d\theta \le \int_0^{2\pi} |\Psi_1(\rho e^{i\theta})|^2 d\theta, \ \ \forall \rho \in (0,1).$$

Применяя формулу Парсеваля, получаем в итоге требуемое неравенство

$$\sum_{k=0}^{n} |A_k|^2 + \sum_{k=n+1}^{\infty} |C_k|^2 \le \sum_{k=0}^{n} |B_k|^2,$$

что завершает доказательство.

Теоремы Литлвуда и Рогозинского о подчинённых функциях и их обобщения имеют многочисленные применения в геометрической теории функций. В качестве примера докажем известную теорему К. Лёвнера об оценках коэффициентов выпуклых функций.

Теорема 6.4 *Пусть* $f(z) = z + a_2 z^2 + ... \in \mathbb{S}^0$. *Тогда* $|a_n| \leq 1$ *для всех* $n \geq 2$.

Доказательство. Из условия $f \in \mathbb{S}^0$ следует, что $\text{Re}\,[1 + zf''(z)/f'(z)] > 0$, $z \in \mathbb{D}$. Обозначим $P(z) = 1 + zf''(z)/f'(z)$ и заметим, что дробь $Q = (P-1)/(P+1)$ определяет конформное отображение правой полуплоскости $\text{Re}\, P > 0$ на единичный круг $|Q| < 1$, следовательно,

$$|Q(z)| = \left|\frac{P(z)-1}{P(z)+1}\right| < 1, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Поскольку $Q(0) = 0$, по лемме Шварца $|Q(z)| \leq |z|$, что равносильно неравенству $|P(z) - 1| \leq |zP(z) + z|$, т. е. неравенству $|f''(z)| \leq |2f'(z) + zf''(z)|$. Таким образом, функция f'' квазиподчинена функции, заданной формулой $2f'(z) + zf''(z)$. Вычислим коэффициенты этих функций и применим к ним обобщенную теорему Рогозинского. Имеем $f'(z) = 1 + 2a_2 z + 3a_3 z^2 + ...$, $f''(z) = 2a_2 + 2 \cdot 3a_3 z + ...$, и поэтому $2f'(z) + zf''(z) =$

$$= 2 + \sum_{n=2}^{\infty} 2na_n z^{n-1} + \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)z^{n-1}a_n =$$

$$= 2 + \sum_{n=2}^{\infty} n(n+1)z^{n-1}a_n.$$

Согласно неравенству Рогозинского будем иметь

$$4|a_2|^2 + 2^2 \cdot 3^2 |a_3|^2 + ... + n^2(n+1)^2 |a_{n+1}|^2 \leq$$

$$\leq 4 + 2^2 \cdot 3^2 |a_2|^2 + ... + n^2(n+1)^2 |a_n|^2. \tag{6.3}$$

Искомую оценку коэффициентов доказываем теперь методом математической индукции. Базой индукции можно взять известное неравенство $|a_2| \leq 1$. Предположим, что $|a_2| \leq 1, ..., |a_n| \leq 1$. Тогда из (6.3) следует, что $|a_{n+1}| \leq 1$. Действительно, перенеся первые n слагаемых в (6.3) в правую часть и применяя неравенства $|a_2| \leq 1, \ldots , |a_n| \leq 1$, получаем $n^2(n+1)^2|a_{n+1}|^2 \leq$

$$\leq 4 + (2^2 \cdot 3^2 - 4)|a_2|^2 + (3^2 \cdot 4^2 - 2^2 \cdot 3^2)|a_3|^2 + ...$$

$$... + (n^2(n+1)^2 - (n-1)^2 n^2)|a_n|^2 \leq$$

$$\leq 4 + (2^2 \cdot 3^2 - 2^2) + (3^2 \cdot 4^2 - 2^2 \cdot 3^2) + ...$$

$$... + (n^2(n+1)^2 - (n-1)^2 n^2) = n^2(n+1)^2.$$

Таким образом, пришли к оценке $n^2(n+1)^2|a_{n+1}|^2 \leq n^2(n+1)^2$, которая немедленно влечёт требуемое неравенство $|a_{n+1}| \leq 1$. Этим и завершается доказательство теоремы.

В 1943 году Рогозинский выдвинул следующую обобщённую гипотезу: *пусть задана голоморфная функция* $f(z) = z + a_2 z^2 + ..., |z| < 1$. *Если* f *подчинена некоторой функции* $g \in \mathbb{S}$, *то* $|a_n| \leq n$, *где* $n = 2, 3, \ldots$. Обобщённая гипотеза Бибербаха также оказалась верной, так как она следует из более общей гипотезы, высказанной в 1967 году И. М. Милиным и доказанной в 1985 году Луи де Бранжем с использованием изложенной выше теории Лёвнера. Для полноты информации сформулируем здесь гипотезу Милина: *пусть* $f \in \mathbb{S}$, *и пусть* γ_n – *так называемые логарифмические коэффициенты, определенные соотношением* $\ln \frac{f(z)}{z} = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n z^n, \quad |z| < 1$. *Тогда для любого натурального числа* n *справедливы неравенства* $\sum_{m=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} \left(k|\gamma_k|^2 - \frac{1}{k}\right) \leq 0$. Отметим также, что различные гипотезы и методы оценки коэффициентов наиболее полно изложены в монографиях Г. М. Голузина [14] и А. В. Гудмана [46]. Более подробную информацию о различных подтверждённых гипотезах, их взаимосвязи можно найти в нескольких публикациях, например, в статье И. А. Александрова и И. М. Милина [9], а также в главе 2 книги Ф. Г. Авхадиева и К.-Й. Виртса [41].

В заключение приведём одно полезное обозначение. Для двух функций, голоморфных в некоторой окрестности нуля $U_\varepsilon = \{z \in \mathbb{C} : |z| < \varepsilon\}$ и имеющих там разложения $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k, \quad g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$, пишут

$$f(z) << g(z)$$

тогда и только тогда, когда для всех тейлоровских коэффициентов при $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ верны неравенства $|a_k| \leq |b_k|$. Так, например, гипотезу Бибербаха можно записать в виде следующего утверждения: *если* $f \in \mathbb{S}$, *то* $f(z) << z/(1-z)^2$.

6.4 Задачи и упражнения

1. Пусть выполнены условия теоремы Рогозинского. Можно ли утверждать для $n \geq 1$, что $|A_n| \leq |B_n|$?

Указание. Ищите контрпримеры.

2. Пользуясь схемой доказательства теоремы 6.4, докажите следующее известное утверждение:

если $f(z) = z + a_2 z^2 + ... \in \mathbb{S}^*$, *то справедливы точные оценки* $|a_n| \leq n$ *для всех* $n \geq 2$.

3. Пусть $\gamma \in (-\pi/2, \pi/2)$ – фиксированное число. Говорят, что f является однолистной, γ-спиралеобразной функцией и пишут $f \in \mathbb{S}^*_\gamma$, если $f \in \mathbb{S}$ и для всех $z \in \mathbb{D}$ выполняется неравенство

$$\mathrm{Re}\left(e^{i\gamma}\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) > 0.$$

Каким характеристическим свойством обладает область $f(\mathbb{D})$ для $f \in \mathbb{S}^*_\gamma$?

4. Найдите точные оценки для коэффициентов функций $f \in \mathbb{S}^*_\gamma$, пользуясь схемой доказательства теоремы 6.4 (см., например, A. W. Goodman [46]).

5. Пусть однопараметрическое семейство функций $f(z,t)$ удовлетворяет всем условиям теоремы 5.5, и пусть $0 < t_1 < t_2 < \infty$. Покажите, что $f(z,t_1)$ подчинена функции $f(z,t_2)$.

6. Пусть $\mathbb{D}$ – единичный круг, Φ и Ψ – голоморфные функции, заданные в этом круге, и $\Phi \prec \Psi$. Докажите следующее утверждение: для любого $\rho \in (0,1)$

$$\int_0^{2\pi} |\mathrm{Re}\ \Phi(\rho e^{i\theta})|\ d\theta \leq \int_0^{2\pi} |\mathrm{Re}\ \Psi(\rho e^{i\theta})|\ d\theta.$$

7. Докажите следующую классическую теорему.

Теорема 6.5 (К. Каратеодори, см., например, [14]). *Пусть функция* $P(z) = 1 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots$ *голоморфна в единичном круге* $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$ *и удовлетворяет там неравенству* $\operatorname{Re} P(z) > 0$. *Тогда* $|a_n| \leq 2$ *для любого* $n \in \mathbb{N}$, *т. е.* $P(z) << (1+z)/(1-z)$.

8. Пусть α и c – постоянные, $\alpha \geq 1$, $|c| \leq 1$, $c \neq -1$. Докажите следующее утверждение из [41], с. 24:

$$\frac{1}{c+1}\left(\left(\frac{1+cz}{1-z}\right)^{\alpha} - 1\right) << \frac{1}{2}\left(\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{\alpha} - 1\right).$$

9. Применяя теорему 6.4, докажите следующее утверждение.

Теорема 6.6 (Авхадиев, Поммеренке, Виртс [36]). *Пусть функция* F *голоморфна в круге* $\mathbb{D}$ *или* F *голоморфна в области* $\mathbb{D} \setminus \{p\}$ *для некоторого* $p \in (0,1)$ *и имеет простой полюс в точке* $z = p$. *Предположим также, что функция* F *однолистна в* $\mathbb{D}$ *и представлена разложением в ряд* $F(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots$ *в некоторой окрестности начала координат.*

Если множество $\mathbb{C} \setminus F(\mathbb{D})$ *является выпуклым, то* $|a_n| \geq 1$ *для всех* $n \geq 2$. *Равенство* $|a_n| = 1$ *для любого фиксированного* $n \geq 2$ *имеет место тогда и только тогда, когда* $F(\mathbb{D})$ — *полуплоскость.*

Рассмотрим множество всех голоморфных функций $F : \Omega \to \Pi$, где Ω и Π — выпуклые области. Точные оценки типа Шварца-Пика для величин $|F^{(n)}(z)|$ $(z \in \Omega,\ n \geq 2)$ можно найти в статье Авхадиева и Виртса [39].

Глава 7

Методы симметризации

7.1 Симметризация относительно оси

Классическое изопериметрическое неравенство достаточно установить для выпуклых областей на плоскости. Этот факт основан на следующих, весьма простых соображениях. Пусть дана невыпуклая область, ограниченная спрямляемой кривой. Рассмотрим выпуклую оболочку этой области. Очевидно, площадь выпуклой оболочки больше, чем площадь самой невыпуклой области, а длина границы – меньше. Действительно, при переходе к выпуклой оболочке некоторые граничные дуги заменяются на отрезки прямых, соединяющих концы этих дуг. А в геометрии Евклида отрезки прямых представляют собой геодезические линии, соединяющие две заданных точки кратчайшим путем.

Утончённое и обобщающее развитие этой идеи было найдено математиками ещё в 19-м веке. Речь идет о специальных преобразованиях областей под названием симметризация. К настоящему времени придумано много полезных операций такого вида (см., например, В. Н. Дубинин [16], Г. Полиа, Г. Сегё [20], C. Bandle [42]). Начнём их изучение с простейшего случая: с симметризации области относительно прямой.

Итак, пусть имеется ограниченная область $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Рассмотрим симметризацию области Ω относительно оси абсцисс на плоскости с заданной декартовой системой координат. Это означает, что исходя из области Ω строится новая область Ω^*, симметричная относительно оси абсцисс Ox, по следующим правилам.

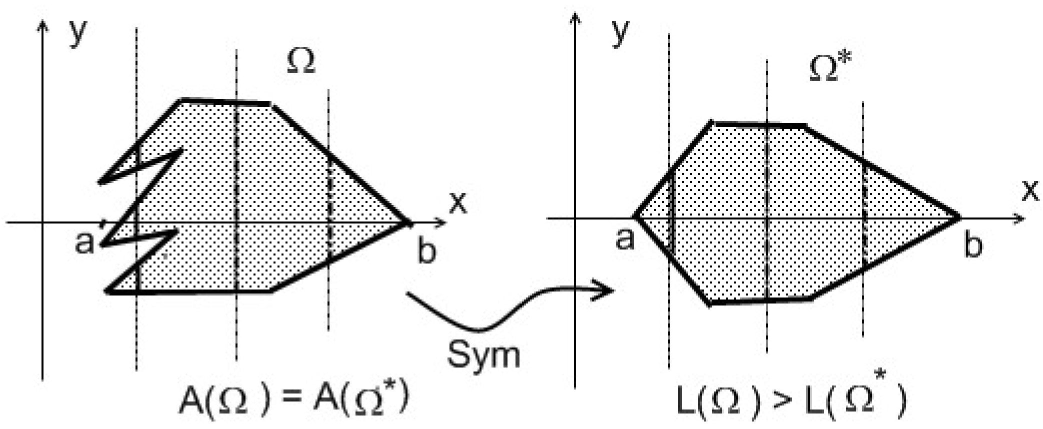

Рис. 7.1: Симметризация относительно прямой

Абсциссы точек, лежащих в области, заполняют некоторый интервал $(a,\, b)$ оси Ox. Пересечение области Ω с прямой $x = x_1 \in (a,\, b)$ состоит из конечного или бесконечного (но счётного) множества интервалов конечной суммарной длины $\sum l_k = y_1$. Объединение по всем $x_1 \in (a,\, b)$ прямолинейных интервалов вида $(z_1,\, \overline{z}_1)$, где $z_1 = x_1 + iy_1/2$ и $\overline{z}_1 = x_1 - iy_1/2$, и составляет искомую область Ω^*, симметричную относительно оси абсцисс Ox.

Рассмотрим два примера.

Пример 1. Пусть $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1,\ y > 0\}$ – полукруг. Пересечение области Ω с прямой $x = x_1 \in (-1, 1)$ состоит из одного интервала длины $y_1 = \sqrt{1 - x_1^2}$. Соответствующий симметризованный интервал имеет концы в точках $(x^*,\ y^*)$, $(x^*,\ -y^*)$, причём $x^* = x_1,\ \ y^* = y_1/2$. Поскольку $x_1^2 + y_1^2 = 1$, то $(x^*)^2 + (y^*)^2/(0,5)^2 = 1$. Таким образом, область Ω^* представляет собой внутренность эллипса с уравнением $x^2 + 4y^2 = 1$.

Пример 2. Пусть $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < a, 0 < y < b, x/a + y/b < 1\}$ – прямоугольный треугольник с гипотенузой $c = \sqrt{a^2 + b^2}$. В результате симметризации относительно оси ординат получаем равнобедренный треугольник со сторонами $a^* = a$, $b^* = c^* = \sqrt{b^2 + a^2/4}$. Очевидно, эти два треугольника имеют одинаковую площадь. Кроме того, имеет место следующее соотношение для периметров треугольников $a + b + c > a^* + b^* + c^*$, равносильное легко проверяемому неравенству $b + \sqrt{a^2 + b^2} > \sqrt{4b^2 + a^2}$.

Указанные во втором примере свойства площадей и периметров при симметризации являются знаковыми. А именно, справедлива следующая теорема.

Теорема 7.1 *При симметризации плоской области относительно прямой площадь инвариантна, а длина границы может разве лишь уменьшиться, т. е.*

$$A(\Omega) = A(\Omega^*), \qquad L(\Omega) \geq L(\Omega^*).$$

Инвариантность площади является следствием геометрических построений при симметризации и определения интеграла Лебега. Поэтому необходимо понять лишь неравенство $L^* \leq L$. Для простоты рассмотрим случай, когда граница области состоит из графиков двух непрерывно дифференцируемых функций, причём область Ω ограничена сверху графиком функции $y = y_1(x)$, а снизу – графиком функции $y = y_2(x)$. Тогда длина границы области определяется формулой

$$L = L_1 + L_2 = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy_1}{dx}\right)^2} dx + \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy_2}{dx}\right)^2} dx.$$

Граница симметризованной области определяется графиками функций $y = y(x)$, $y = -y(x)$, где

$$y(x) = \frac{y_1(x) - y_2(x)}{2}.$$

Тогда длина границы симметризованной области равна

$$L^* = L_1^* + L_2^* = 2L_1^* = 2\int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx =$$

$$= \int_a^b \sqrt{4 + (y_1'(x) - y_2'(x))^2} dx.$$

Оценим подинтегральную функцию, применяя неравенство треугольника $|w_1 + w_2| \leq |w_1| + |w_2|$ к сумме комплексных чисел $w_1 = 1 + iy_1'$ и $w_2 = 1 - iy_2'$. Будем иметь: $\forall x \in [a, b]$

$$\sqrt{4 + (y_1'(x) - y_2'(x))^2} = |2 + i(y_1'(x) - y_2'(x))| = |w_1 + w_2| \le$$

$$\le |w_1| + |w_2| = \sqrt{1 + y_1'(x)^2} + \sqrt{1 + y_2'(x)^2}.$$

Следовательно,

$$L^* = \int\limits_a^b \sqrt{4 + (y_1'(x) - y_2'(x))^2} dx \le$$

$$\le \int\limits_a^b \left(\sqrt{1 + y_1'(x)^2} + \sqrt{1 + y_2'(x)^2} \right) dx = L,$$

что и требовалось доказать.

7.2 Симметризация Штейнера в $\mathbb{R}^3$

Симметризация Штейнера ограниченной пространственной области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ относительно некоторой заданной плоскости Π строится аналогично плоскому случаю. А именно, пусть, например, Π – плоскость xOy, ω – проекция Ω на эту плоскость. Перпендикуляр к Π, проходящий через точку $(x_1, y_1) \in \omega$, пересекает Ω по множеству конечной длины $z_1 = \sum l_k$. По определению, симметризованная область

$$\Omega^* = \{(x_1, y_1, z) \in \mathbb{R}^3 : \ (x_1, y_1) \in \omega, \ -z_1/2 < z < z_1/2\}.$$

Через V обозначим объём области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Предположим, что эта область ограничена кусочно-гладкой поверхностью площади S. Пусть V^* и S^* – объём и площадь, соответственно, области $\Omega^* \subset \mathbb{R}^3$, полученной симметризацией по Штейнеру относительно некоторой плоскости. По аналогии с теоремой 7.1 доказывается

Теорема 7.2 *При симметризации по Штейнеру пространственной области относительно плоскости объём области инвариантен, а площадь границы может разве лишь уменьшиться, т. е.* $V^* = V$, $S^* \leq S$.

Различные методы симметризации успешно применяются при исследовании задач математической физики для оценки физических величин (функционалов области), таких как основная частота колеблющейся мембраны, жесткость кручения упругой балки, расход жидкости при подземных течениях. Эти величины, как правило, связаны с решениями краевых задач или вариационных проблем математической физики и представляют собой нормы некоторых операторов вложения в пространствах Соболева. Поэтому естественно возникает необходимость одновременной симметризации областей и заданных в них функций.

7.3 Симметризация Шварца

Для иллюстрации рассмотрим кратко симметризацию по Шварцу. Пусть дана ограниченная область $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Для Ω весьма просто определяется симметризованная область $\Omega^* \subset \mathbb{R}^2$ как круг с центром в начале координат и имеющий ту же площадь, что и исходная область Ω. Пусть имеется непрерывная функция $U : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$. Рассмотрим множества

$$\Omega(\mu) = \{x \in \Omega : U(x) \geq \mu\}, \qquad \mu \in \mathbb{R}.$$

Поскольку $M :=\| U(x) \|< \infty$, то, очевидно, $\Omega(\mu) = \varnothing$ для значений $\mu > M$. Соответствующая $U : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ симметризованная функция $U^* : \Omega^* \to \mathbb{R}$ определяется следующим образом:

$$U^*(x) = \sup\{\mu : x \in \Omega(\mu)^*\},$$

где $\Omega(\mu)^*$ – круг с центром в начале координат, имеющий ту же площадь, что и область $\Omega(\mu)$. Из определения следует, что симметризованная функция является так называемой радиальной функцией, т. е. зависит лишь от $|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$. В полярных координатах

$$U^*(r, \theta_1) = U^*(r, \theta_2) \quad \forall \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}.$$

В силу определения интеграла Лебега для любой непрерывной функции $\psi : [-M, M] \to \mathbb{R}$ будем иметь равенство

$$\int\limits_{\Omega} \psi(U(x))dx = \int\limits_{\Omega^*} \psi(U^*(x))dx.$$

Симметризация Шварца естественным образом распространяется и на случай пространственных областей $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$. При этом симметризованная область $\Omega^* \subset \mathbb{R}^n$ – шар с центром в начале координат, имеющий тот же объём, что и исходная область Ω. Для непрерывной функции $U : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$, как и в случае $n = 2$, определяются множества

$$\Omega(\mu) = \{x \in \Omega : U(x) \geq \mu\}, \qquad \mu \in \mathbb{R}.$$

и симметризованная функция

$$U^*(x) = \sup\{\mu : x \in \Omega(\mu)^*\},$$

определенная в шаре $\Omega^* \subset \mathbb{R}^n$. В плоском и пространственных случаях справедлива следующая теорема, ставшая уже классической.

Теорема 7.3 *Пусть область $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ограничена кусочно-гладкой поверхностью (кривой при $n = 2$). Пусть, далее, функция $U : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ является неотрицательной и непрерывно дифференцируемой и обращается в нуль на границе области Ω. Тогда при симметризации по Шварцу для любой непрерывной функции $\psi : [-M, M] \to \mathbb{R}$ будем иметь*

$$\int\limits_{\Omega} \psi(U(x))dx = \int\limits_{\Omega^*} \psi(U^*(x))dx$$

и, кроме того,

$$\int\limits_{\Omega} |\nabla U|^2 dx \geq \int\limits_{\Omega^*} |\nabla U^*|^2 dx.$$

Теорема 7.3 используется для доказательства ряда изопериметрических неравенств математической физики. Приведём два классических утверждения такого вида.

Теорема 7.4 (Теорема Рэлея – Крана – Фабера.) *Среди всех мембран (плоских односвязных областей) с заданной площадью и закрепленными краями наибольшую основную частоту имеет круг.*

В рамках общепринятой математической модели теории звука речь идет о неравенстве

$$\frac{1}{\lambda_1(\Omega)} \le \frac{1}{\lambda_1(\mathbb{D}_\rho)},$$

где $\lambda_1(\Omega)$ и $\lambda_1(\mathbb{D}_\rho)$ – первые собственные значения задачи Дирихле для уравнения Лапласа для односвязной плоской области Ω конечной площади и круга $\mathbb{D}_\rho$ той же площади, соответственно. Из курса математической физики известно следующее вариационное определение первого собственного значения:

$$\frac{1}{\lambda_1(\Omega)} = \sup_{u\in C_0^\infty(\Omega)} \frac{\iint\limits_{\Omega} |u|^2 dx\, dy}{\iint\limits_{\Omega} |\nabla u|^2 dx\, dy},$$

где $C_0^\infty(\Omega)$ – множество гладких, вещественнозначных функций $u = u(x, y)$ с компактными носителями, лежащими в области Ω.

Вариационное определение жесткости $P(\Omega)$ кручения таково:

$$P(\Omega) = \sup_{u \in C_0^\infty(\Omega)} \frac{4\left(\iint\limits_{\Omega} |u| dx\, dy\right)^2}{\iint\limits_{\Omega} |\nabla u|^2 dx\, dy}.$$

Теорема 7.5 (Теорема Сен-Венана – Полиа.) *Среди всех плоских односвязных областей Ω (поперечных сечений упругих балок) с заданной площадью $A(\Omega)$ наибольшую жесткость кручения имеет круг. А именно,*

$$P(\Omega) \leq \frac{A^2(\Omega)}{2\pi},$$

где равенство имеет место тогда и только тогда, когда Ω — круг.

Исторические сведения, множество других результатов, родственных теоремам 7.4 и 7.5, можно найти в книгах [1], [12], [20], [42].

Отметим ещё раз, что изложенные в этой главе понятия и факты стали уже классикой. Читателю, желающему познакомиться с развитием методов симметризации, с современными подходами в теории симметризации и их применениями в геометрической теории функций, рекомендую посмотреть статью В. Н. Дубинина [16]. Кроме того, следует также сказать, что в настоящее время интенсивно развивается «Геометрический анализ», лежащий на стыке теории уравнений в частных производных и дифференциальной геометрии. Одним из разделов геометрического анализа является спектральная теория уравнений Лапласа-Бельтрами.

7.4 Задачи и упражнения

1. Методами элементарной математики докажите, что среди всех прямоугольников с заданным периметром наибольшую площадь имеет квадрат;

2. Пользуясь формулой Герона, докажите, что правильный треугольник имеет наибольшую площадь среди всех треугольников заданного периметра.

3. Постройте трёхмерную область, площадь поверхности которой меньше площади поверхности её выпуклой оболочки.

Указание. Рассмотрите трёхмерное тело типа волчка с достаточно длинным центральным стержнем.

4. Постройте трёхмерную область, площадь поверхности которой больше площади поверхности её выпуклой оболочки.

5. Пользуясь схемой доказательства теоремы 7.1, докажите утверждение $S \geq S^*$ теоремы 7.2.

Указание. Если доказательство не получается, то обратитесь к книге [20] или [42].

6. Покажите, что при симметризации по Штейнеру имеют место следующие правила: 1) если $\Omega_1 \subset \Omega_2$, то $\Omega_1^* \subset \Omega_2^*$; 2) если λ – положительная постоянная, то $(\lambda\Omega)^* = \lambda\Omega^*$; 3) если B – шар с центром на плоскости симметризации (или круг с центром на прямой симметризации), то $B^* = B$.

7. Покажите, что при симметризации по Штейнеру имеют место следующие неравенства для радиусов вписанного и описанного шаров: $r(\Omega^*) \geq r(\Omega)$ и $R(\Omega^*) \leq R(\Omega)$, соответственно. В плоском случае речь идёт о радиусах r и R кругов, вписанного в область и описанного вокруг области, соответственно.

8. Пусть Ω_1 и Ω_2 – две области, $\Omega_1 + \Omega_2$ – сумма Минковского двух множеств, состоящая из всех точек c, которые можно представить как (векторные) суммы $a + b$ точек $a \in \Omega_1$ и $b \in \Omega_2$.

Докажите, что при симметризации по Штейнеру имеет место включение: $\Omega_1^* + \Omega_2^* \subset (\Omega_1 + \Omega_2)^*$.

9. Пользуясь теоремой 7.3, докажите теорему 7.4 и теорему 7.5.

Указание. Если возникли затруднения, то обратитесь к книге [20] или [42].

Глава 8

Прикладные вопросы

Комплексный анализ имеет применения во многих прикладных задачах, см., например, следующие монографии: Н. Х. Арутюнян, Б. Л. Абрамян [12], Д. В. Маклаков [18], О. Д. Страк [55]. Основные приложения связаны с краевыми задачами, возникающими при изучении сплошных сред различной физической природы, например, при описании характеристик течения жидкости, электрических или магнитных полей, распределения напряжений в упругой среде и других задачах сопротивления материалов и т. п. Поэтому фразу «рассмотрим метод конформных отображений» можно встретить в книгах для инженеров по различным областям науки.

Прежде чем перейти к рассмотрению примеров применения конформных отображений, в пунктах 8.1 и 8.2 мы изложим необходимые общеизвестные факты.

8.1 Теоремы Каратеодори и Келлога

Базовая теорема о граничном соответствии при конформных отображениях, глубокие обобщения которой были установлены в классических работах К. Каратеодори, была сформулирована уже в первой главе (см. теорему 1.5). С учётом большого прикладного значения приведём другую версию этой теоремы здесь ещё раз, акцентируя внимание на непрерывную продолжимость конформного отображения на границу области.

Теорема 8.1 (C. Caratheodory, см. библиографию в книге [14]). *Пусть* Ω *– односвязная область на плоскости* $\mathbb{C}$*, ограниченная замкнутой кривой Жордана* $\partial\Omega$ *(т. е. граница области является непрерывной замкнутой кривой без самопересечений). Пусть, далее,* $f : \mathbb{D} \to \Omega$ *- конформное отображение единичного круга* $\mathbb{D}$ *на эту область.*

Тогда функция f *непрерывно продолжима на замыкание единичного круга, и граничные значения* $f(e^{i\theta})$ $(0 < \theta \leq 2\pi)$*, полученные непрерывным продолжением, устанавливают взаимно однозначное соответствие между границами областей, т. е. между окружностью* $\partial\mathbb{D}$ *и замкнутой кривой Жордана* $\partial\Omega$*.*

По традиции, сохраняют ту же букву f для обозначения продолженного отображения $f : \overline{\mathbb{D}} \to \overline{\Omega}$. Существование продолжения означает, в частности, существование предела $\lim_{z\to e^{i\theta},\, |z|<1} \quad f(z)$ для любого вещественного числа θ.

Приведём также одну из часто используемых теорем о существовании непрерывного продолжения на границу производной конформного отображения — теорему О. Д. Келлога, ученика Д. Гильберта.

Теорема 8.2 (O. D. Kellogg, 1912.) *Пусть Ω – односвязная область на плоскости, ограниченная замкнутой, гладкой кривой Жордана $\partial\Omega$, s — дуговая абсцисса $\partial\Omega$. Если угол касательной $\theta(s)$ к границе области удовлетворяет условию Гёльдера, т. е. $\forall s_1, s_2 \in \mathbb{R}^+$*

$$|\theta(s_1) - \theta(s_2)| \leq k\,|s_1 - s_2|^\alpha, \quad k > 0, \alpha \in (0, 1],$$

то производная конформного отображения $f : \mathbb{D} \to \Omega$ и $\ln f'$ непрерывно продолжимы на замыкание $\overline{\mathbb{D}}$ единичного круга, $\ln f'$ удовлетворяет условию Гёльдера:

$$|\ln f'(z_1) - \ln f'(z_2)| \leq k_1\,|z_1 - z_2|^\alpha, \forall z_1, z_2 \in \overline{\mathbb{D}}, k_1 > 0,$$

и, в частности, $f'(z) \neq 0$ в $\overline{\mathbb{D}}$.

8.2 Замена переменных в интегралах

Производная конформного отображения $f : \mathbb{D} \to \Omega$ естественно возникает при конформных заменах переменных в интегралах. В комплексном анализе элемент длины дуги ds часто обозначают через $|dz|$, так как $|dz| = ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$. Аналогично, $|dw| =$

$\sqrt{(du)^2+(dv)^2}=d\sigma$. Поэтому

$$\frac{d\sigma}{ds}=\left|\frac{dw}{dz}\right|=|f'(z)|,$$

и при конформной замене переменных в криволинейных интегралах первого рода дифференциальные элементы длин дуг оказываются связанными следующей простой формулой: $d\sigma=|f'(z)|ds$.

Пусть $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$, где $u(x,y)$ и $v(x,y)$ – вещественная и мнимая части функции $f:\mathbb{D}\to\Omega$, и рассмотрим замену переменной $w=u+iv$ на $z=x+iy$ при связи $w=f(z)$ в двойном интеграле. Имеем

$$\iint\limits_{\Omega} F(w)\,du\,dv=\iint\limits_{\mathbb{D}} F(f(z))J\,dx\,dy.$$

Якобиан преобразования легко считается:

$$J=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2=|f'(z)|^2,$$

так как в силу условий Коши-Римана

$$f'(z)=\frac{\partial f(x+iy)}{\partial x}=\frac{1}{i}\frac{\partial f(x+iy)}{\partial y}=$$

$$=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Поэтому стандартная, часто используемая конформная замена переменных в двойном интеграле записывается так: $\iint\limits_{\Omega} F(w)\,du\,dv = \iint\limits_{\mathbb{D}} F(f(z))|f'(z)|^2\,dx\,dy$. В качестве упражнения докажем одно полезное неравенство.

Теорема 8.3 (см. [1], с. 182-183.) *Пусть $g : \Omega \to \mathbb{D}$ – однолистное конформное отображение области Ω на единичный круг $\mathbb{D}$, где Ω – односвязная область на расширенной комплексной плоскости переменной $z = x + iy$. Тогда для любой функции $u : \Omega \to \mathbb{R}$, $u \in C_0^\infty(\Omega)$*

$$\iint_{\Omega} |\nabla u(x,y)|^2\,dx\,dy \geq$$

$$\geq \iint_{\Omega} \frac{|u(x,y)|^2\,(2-|g(z)|^2)}{(1-|g(z)|^2)^2}\,|g'(z)|^2\,dx\,dy.$$

Доказательство теоремы 8.3. Обозначим $V = V(z) = \sqrt{1-|g(z)|^2}$. Сочетая первую формулу Грина

$$\iint_{\Omega} \left[u^2\,\Delta\ln V + (\nabla u^2,\,\nabla\ln V)\right]\,dx\,dy = 0$$

с простыми соотношениями

$$\iint_{\Omega} \left(|\nabla u|^2 - (\nabla u^2,\,\nabla\ln V) + u^2\,|\nabla\ln V|^2\right)\,dx\,dy =$$

$$= \iint_{\Omega} \left(\nabla u - u\,\nabla\ln V\right)^2\,dx\,dy \geq 0,$$

получаем

$$\iint_{\Omega} |\nabla u|^2\,dx\,dy \geq -\iint_{\Omega} u^2\left(\Delta\ln V + |\nabla\ln V|^2\right)\,dx\,dy.$$

Это и есть утверждение теоремы, так как непосредственные вычисления показывают, что $\Delta \ln V + |\nabla \ln V|^2 = \frac{\Delta V}{V} =$

$$= \frac{4}{V}\frac{\partial^2 V}{\partial z \partial \overline{z}} = -\frac{2-|g(z)|^2}{(1-|g(z)|^2)^2}\,|g'(z)|^2.$$

Если область Ω не содержит бесконечно удалённой точки, то как следствие получаем конформно инвариантное неравенство: для любой функции $u \in C_0^\infty(\Omega)$

$$\iint_\Omega |\nabla u(x,y)|^2\,dx\,dy \geq \iint_\Omega \frac{|u(x,y)|^2}{R^2(z,\Omega)}\,dx\,dy,$$

так как

$$\frac{(2-|g(z)|^2)}{(1-|g(z)|^2)^2}\,|g'(z)|^2 > \frac{|g'(z)|^2}{(1-|g(z)|^2)^2} = \frac{1}{R^2(z,\Omega)},$$

где $R(z,\Omega)$ – конформный радиус области Ω в точке z.

8.3 Конформная «пересадка» краевых задач

Перейдем к изложению некоторых применений конформных отображений в краевых задачах. В этом пункте опишем одну общую идею, а в следующем пункте схематично рассмотрим конкретную задачу, а именно, обратную краевую задачу теории крыла.

Одним из эффективных методов при решении краевых задач в сложно устроенной односвязной области является «пересадка» задачи с помощью конформной замены переменных на какую-нибудь простую область (единичный круг, полуплоскость, полукруг, внешность разреза, полоса, прямоугольник или какая-то иная, простая область с известной функцией Грина соответствующей краевой задачи). Для этого необходимо произвести замену переменных в дифференциальном уравнении, заданном внутри области, а также преобразовать граничные условия.

В качестве примера рассмотрим преобразование оператора Лапласа при конформной замене независимых переменных. Пусть $z = x+iy$, $\zeta = \xi+i\eta$, функция $\varphi(x, y)$ определена в области Ω_z, и пусть $f : \Omega_\zeta \to \Omega_z$ – однолистное конформное отображение области Ω_ζ плоскости переменной ζ на область Ω_z плоскости переменной z. Предположим, что функция $\varphi(x, y)$ является дважды непрерывно дифференцируемой. Рассмотрим в области Ω_ζ переменной $\zeta = \xi + i\eta$ функцию $\Phi(\xi, \eta)$, определенную равенством $\Phi(\xi, \eta) = \varphi(x,\ y)$, где

$$x = x(\xi,\ \eta) = \operatorname{Re} f(\xi + i\eta),\ \ y = y(\xi,\ \eta) = \operatorname{Im} f(\xi + i\eta).$$

Найдем связь между лапласианами

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}, \qquad \Delta\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial \eta^2}$$

двух функций, получаемых одна из другой конформной заменой независимых переменных. Непосредственными вычислениями получаем

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\xi} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\xi} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial\xi},$$

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial\xi^2} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\left(\frac{\partial x}{\partial\xi}\right)^2 + \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\left(\frac{\partial y}{\partial\xi}\right)^2 +$$

$$+2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}\frac{\partial x}{\partial\xi}\frac{\partial y}{\partial\xi} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial\xi^2}.$$

Аналогично, будем иметь

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial\eta^2} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\left(\frac{\partial x}{\partial\eta}\right)^2 + \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial\eta^2}+$$

$$+2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}\frac{\partial x}{\partial\eta}\frac{\partial y}{\partial\eta} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\left(\frac{\partial y}{\partial\eta}\right)^2 + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial\eta^2},$$

следовательно,

$$\Delta\Phi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}|f'(\zeta)|^2 + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}|f'(\zeta)|^2+$$

$$+\frac{\partial\varphi}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 x}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2 x}{\partial\eta^2}\right) + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 y}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial\eta^2}\right).$$

Это выражение упрощается с учётом того, что вещественная и мнимая части голоморфной функции являются гармоническими функциями, как следствие справедливы тождества

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 x}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2 x}{\partial\eta^2}\right) \equiv 0, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 y}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial\eta^2}\right) \equiv 0.$$

Поэтому окончательная формула оказывается весьма простой, а именно, справедливо утверждение.

Теорема 8.4 *При конформной замене* $z = f(\zeta)$ *независимых переменных справедлива формула*

$$\Delta\Phi = |f'(z)|^2\,\Delta\varphi, \ \ \text{где } \Phi = \varphi \circ f.$$

В частности, если $\Delta\varphi = 0$, то $\Delta\Phi = 0$. Таким образом, при конформной замене независимых переменных гармоническая функция остаётся гармонической. Отметим также, что конформная замена переменных успешно используется, например, в теории упругости для получения явного представления в рядах решений краевых задач. В качестве примера приведём формулу Давенпорта для интеграла от решения уравнения Пуассона $\Delta\varphi = -2$ при нулевых граничных значениях. В этой формуле звездочка над суммами означает, что суммирование распространяется на индексы, удовлетворяющие равенству $\alpha + \beta = \gamma + \delta$.

Теорема 8.5 (H. Davenport, см. [20]) *Пусть функция* $z = f(\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \zeta^n$, $|\zeta| < 1$, *осуществляет однолистное конформное отображение единичного круга на односвязную область* Ω, *содержащую начало координат и имеющую конечную площадь. Тогда для жесткости кручения* Ω *имеет место формула*

$$P(\Omega) = \frac{\pi}{2} \sum_{\alpha=1}^{\infty} \sum_{\beta=1}^{\infty} \sum_{\gamma=1}^{\infty} \sum_{\delta=1}^{\infty}{}^{*} \min\{\alpha, \beta, \gamma, \delta\} a_\alpha a_\beta \overline{a_\gamma a_\delta},$$

где ряд абсолютно сходится.

Вывод этой формулы содержится в книге [20], где подчеркивается, что для абсолютной сходимости ряда необходимо какое-то дополнительное требование на область, причём конечность площади является одним из подходящих условий. Поэтому это требование и включено нами в формулировку теоремы.

Ряд других успешных применений конформной замены переменных можно найти в монографиях [2], [13], [18], [50], [55] и в современных научных статьях, использующих метод конформных отображений для решения прикладных задач гидродинамики и теории упругости.

8.4 Обратная задача теории крыла

На расширенной комплексной плоскости переменной $z = x + iy$ рассмотрим область Ω_z^- (внешность некоторого связного компакта P), содержащую бесконечно удалённую точку и ограниченную кусочно-гладкой кривой L_z.

Предположим, что в этой области имеется потенциальное векторное поле $(v_x, v_y) = \vec{v}$ с потенциалом $\varphi(x, y)$, удовлетворяющим уравнению Лапласа

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0$$

и граничному условию Неймана на $\partial\Omega_z^-$:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0.$$

Пусть $\psi(x, y)$ – сопряженная к $\varphi(x, y)$ гармоническая функция, тогда функция $w(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$, где $z = x + iy$, называется комплексным потенциалом.

Зная область Ω_z^-, мы можем найти потенциал $\varphi(x, y)$ как решение краевой задачи для уравнения Лапласа с указанным условием Неймана (для единственности, как известно, нужны некоторые дополнительные условия). Тогда в Ω_z^- определится векторное поле по формулам

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = v_x, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = v_y.$$

Приведенная задача представляет собой простую модель из теории крыла: P – поперечное сечение так называемого крыла бесконечного размаха, обтекаемого стационарным, плоскопараллельным потоком идеальной несжимаемой жидкости, векторное поле $(v_x, v_y) = \vec{v}$ – поле скоростей течения вокруг крыла, однородное граничное условие Неймана – условие непроницаемости контура крыла L_z. Потенциал и его частные производные оказываются непрерывно продолжимыми на контур крыла L_z, за исключением отдельных особых точек, причём модуль скорости на контуре L_z равен

$$v = v(s) = \left|\frac{d\,\varphi(s)}{d\,s}\right|, \quad 0 \le s \le l,$$

где s – дуговая абсцисса кривой L_z, l – её длина, $\varphi(s)$ — граничные значения потенциала скоростей $\varphi(x, y)$.

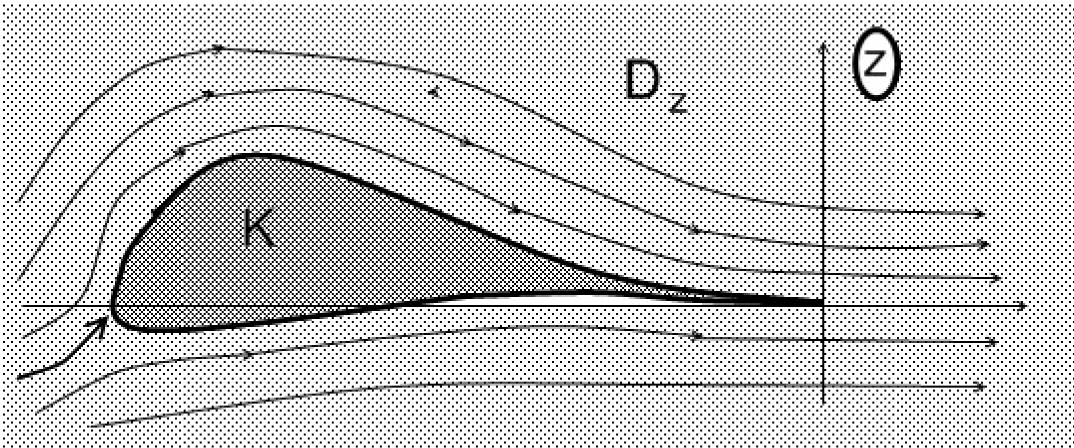

Рис. 8.1: Обтекание крыла K

Г. Г. Тумашевым в 1945 году была поставлена и решена так называемая обратная краевая задача о построении крыла с заранее заданными свойствами. А именно, предполагается, что крыло неизвестно, но известна схема его обтекания, заданы граничные значения модуля скорости $v = v(s), \quad 0 \leq s \leq l$, и требуется построить такое крыло, распределение скорости течения на котором совпадает с заданной функцией $v(s)$.

Предположим, что задача решена, т. е. известен искомый профиль крыла P. Тогда известна кривая L_z с уравнением $z = z(s), \quad 0 \leq s \leq l$, область Ω_z^- – внешность связного компакта P, содержащая бесконечно удалённую точку и ограниченная кусочно-гладкой кривой L_z. Пусть $z_0 = z(s_0)$ – точка разветвления потока, а $z_1 = z(0)$ – точка схода потока с профиля, $\varphi(x, y)$

– потенциал поля скоростей потока вне крыла.

Рассмотрим конформное отображение f внешности единичного круга $\mathbb{D}^-$ на область Ω_z^- с нормировками: $f(\infty) = \infty$, $f(1) = z_0$. Пусть $\zeta = \xi + i\eta$, с помощью конформной замены $z = f(\zeta)$ переменных определим функцию $\Phi(\xi, \eta)$ равенством $\Phi(\xi, \eta) = \varphi(x,\, y)$, где $x = x(\xi,\, \eta) = \operatorname{Re} f(\xi + i\eta)$, $y = y(\xi,\, \eta) = \operatorname{Im} f(\xi + i\eta)$. Функция $\Phi(\xi, \eta) = \varphi(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta))$ в области D^- удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta\Phi = 0$ и однородному граничному условию Неймана. Следовательно, функция Φ представляет собой потенциал поля скоростей потока, обтекающего единичный круг по той же схеме, что и искомый профиль.

Соответствие границ L_z и единичной окружности при конформном отображении $f : \mathbb{D}^- \to \Omega_z^-$ может быть описано как соответствие $s = s(\gamma)$ между дуговой абсциссой s, $0 \leq s \leq l$, и полярным углом γ, $0 \leq \gamma \leq 2\pi$. Обозначим $\varphi(s(\gamma)) = \Phi(\gamma)$ – граничные значения потенциалов течения. Функцию $s = s(\gamma)$ можно определить из равенства $\Phi(\gamma) = \varphi(s)$, $0 \leq \gamma \leq 2\pi, 0 \leq s \leq l$.

Поскольку на границах $ds = |dz|$, $d\gamma = |de^{i\gamma}| = |d\zeta|$, граничные значения модуля производной функции $z = f(\zeta)$ определятся формулой

$$\left|\frac{dz}{d\zeta}\right| = |f'(e^{i\gamma}| = s'(\gamma), \quad 0 \leq \gamma \leq 2\pi.$$

Поэтому по формуле Шварца

$$\kappa(\zeta) := \ln f'(\zeta) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln s'(\gamma)\frac{e^{i\gamma}+\zeta}{e^{i\gamma}-\zeta}\, d\gamma + i\alpha.$$

Поэтому справедливо следующее утверждение.

Теорема 8.6 *Если обратная краевая задача по построению крыла по заданному распределению скорости разрешима, то конформное отображение внешности единичного круга на область течения вокруг искомого крыла определяется формулой*

$$f(\zeta) = z_1 + e^{i\alpha}\int_1^{\zeta} \exp\left\{-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln s'(\gamma)\frac{e^{i\gamma}+t}{e^{i\gamma}-t}\, d\gamma\right\} dt,$$

где $|\zeta| > 1$.

Эти рассуждения подсказывают и путь решения задачи. Во-первых, задание схемы течения означает, что известны дуговые абсциссы $s = s_0$ и $s = 0$ точек разветвления и схода потока, а это позволяет определить граничные значения $\varphi(s)$ потенциала по известному модулю $|\varphi'(s)| = v(s)$ его производной. Во-вторых, прямая задача описания течения вне единичного круга решается явными формулами и с точностью до выбора некоторых числовых параметров заранее известна функция $\Phi(\xi, \eta)$ в области $\mathbb{D}^-$, следовательно, известны граничные значения $\Phi(\gamma)$, $0 \le \gamma \le 2\pi$. Поэтому из равенства $\Phi(\gamma) = \varphi(s)$, $0 \le \gamma \le 2\pi, 0 \le s \le l$, определятся функции $s = s(\gamma)$ и $\ln s'(\gamma) = \mathrm{Re}\ \kappa(e^{i\gamma})$. Но тогда по формулам, приведённым выше, можно найти $\ln f'(\zeta)$,

$f(\zeta)$, и искомая область Ω_z^- определится как образ $\mathbb{D}^-$ при конформном отображении $f: \mathbb{D}^- \to \Omega_z^-$.

Мы оставили в стороне подробное обсуждение ряда важных и тонких вопросов по этой задаче, в частности, вопроса о целесообразном выборе задаваемой функции $|\varphi'(s)| = v(s)$, о выборе числовых параметров при определении $\Phi(\xi, \eta)$, об условиях, гарантирующих законность применения формулы Шварца при определении $\ln f'(\zeta)$, об однозначности и однолистности построенного конформного отображения. Изложение теории обратной краевой задачи теории крыла можно найти в монографиях Ф. Г. Авхадиева [1], Ф. Д. Гахова [13].

Кратко опишем близкую, но более трудную задачу построения крыла по заданным максимальным значениям скорости в зависимости от угла атаки. Для заданного профиля крыла P распределение скорости потока на его границе зависит также и от угла атаки α, и скорость $v = v(s, \alpha)$ является функцией двух переменных. Функция $K : [-\pi/2, \pi/2] \to (0, \infty]$, определённая равенством $K(\alpha) = \max_{s \in [0,l]} v(s, \alpha)$, называется кавитационной диаграммой.

В статье [35] Ф. Г. Авхадиевым и Д. В. Маклаковым была поставлена и решена задача о построении гидропрофиля по заданной кавитационной диаграмме (см. также монографию Д. В. Маклакова [18]).

8.5 Задачи и упражнения

1. По заданному комплексному потенциалу течения постройте схематично эквипотенциальные линии и линии тока, определите скорость и её критические точки, если $a)\, w = (\alpha + i\beta)z$; $b)\, w = \frac{\Gamma + iQ}{2\pi i} \ln z$; $c)\, w = 1/z$.

2. Пусть комплексный потенциал $w = w(z)$ потока, обтекающего единичный круг, имеет вид

$$w = a\left(z + \frac{1}{z}\right) + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln z, \quad 0 < \Gamma < 4\pi a.$$

Определите скорость потока и её критические точки.

3. Пользуясь решением предыдущей задачи и однолистными конформными отображениями из класса $\mathbf{\Sigma}$, найдите комплексные потенциалы $w = w(z)$ потоков, обтекающих компакты, отличные от единичного круга. В частности, найдите в явном виде комплексный потенциал потока вне наклонного отрезка $[i,\, a]$, $a > 0$.

4. Найдите общее решение следующей краевой задачи (задачи A_0 по Ф. Д. Гахову [13]): пусть Ω – односвязная область на плоскости, ограниченная замкнутой жордановой кривой L, и задана точка $z_0 \in \Omega$. Требуется определить функцию $Q(z)$, аналитическую в области Ω, за исключением точки z_0, где для неё допустим полюс порядка не выше n и действительная часть которой непрерывна в замыкании области и на контуре L обращается в нуль.

Указание. Рассмотрите функцию $\zeta = \omega(z)$, определяющую однолистное конформное отображение области Ω на единичный круг с нормировкой $\omega(z_0) = 0$ и ищите функцию $q(\zeta) = Q(\omega^{-1}(\zeta))$ в виде следующей суммы $q(\zeta) = \sum_{k=-n}^{n} c_k\, \zeta^k$.

5. Пусть снова Ω – односвязная область на плоскости, ограниченная замкнутой жордановой кривой L, и задана точка $z_0 \in \Omega$. Рассмотрим функцию Грина задачи Дирихле для уравнения Лапласа, т. е. функцию вида

$$G(z, z_0) = \ln \frac{1}{|z - z_0|} + u(x, y), \quad z = x + iy,$$

гармоническую в $\Omega \setminus \{z_0\}$, непрерывно продолжимую на L и обращающуюся в нуль на L.

Найдите связь между функцией Грина $G(z, z_0)$ и однолистным конформным отображением $F : \Omega \to \mathbb{D}$ с нормировкой $F(z_0) = 0$. Пользуясь этой связью, найдите явно функцию Грина для нескольких конкретных областей, в частности, для круга $\mathbb{D}$ с произвольно фиксированным полюсом $z_0 \in \mathbb{D}$.

6. Пусть функция $f(\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \zeta^n, \ \ |\zeta| < 1$, осуществляет однолистное конформное отображение единичного круга $\mathbb{D}$ на односвязную область Ω, и пусть $P(\Omega)$ – жёсткость кручения этой области. Докажите формулу, приведённую в следующей теореме.

Теорема 8.7 (Д. А. Абрамов, Ф. Г. Авхадиев, Д. Х. Гиниятова [25]). *Справедлива формула*

$$P(\Omega) = \frac{\pi}{2} \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{\alpha=1}^{[\frac{n}{2}]} \left| \sum_{\beta=\alpha}^{n-\alpha} a_\beta a_{n-\beta} \right|^2,$$

где $[x]$ *означает, как обычно, целую часть числа* x.

Указание. Рассмотрите области $\Omega_r = f(r\mathbb{D})$, $0 < r < 1$. К ограниченным областям Ω_r применима формула Давенпорта. За счёт перестановки слагаемых в формуле Давенпорта (перестановки будет законными в силу абсолютной сходимости рядов) можно показать, что

$$P(\Omega_r) = \frac{\pi}{2} \sum_{n=2}^{\infty} r^{2n} \sum_{\alpha=1}^{[\frac{n}{2}]} \left| \sum_{\beta=\alpha}^{n-\alpha} a_\beta a_{n-\beta} \right|^2 .$$

Остаётся аккуратно осуществить предельный переход при $r \to 1^-$.

7. Пусть $P(\Omega)$ – жёсткость кручения односвязной плоской области Ω, $R(z, \Omega)$ – конформный радиус. Докажите следующее утверждение.

Теорема 8.8 (Ф. Г. Авхадиев, см., например, [1], гл. 4). *Справедливо неравенство*

$$P(\Omega) \le 4 \iint_\Omega R^2(x+iy, \Omega)\, dx\, dy.$$

Указание. Обозначим $R_\Omega = R(x+iy, \Omega)$. Применяя неравенство Коши-Буняковского-Шварца, получаем

$$\left(\iint_\Omega |u|\, dx\, dy \right)^2 = \left(\iint_\Omega \frac{|u|}{R_\Omega} R_\Omega\, dx\, dy \right)^2 \le$$

$$\le \iint_\Omega R_\Omega^2\, dx\, dy \iint_\Omega \frac{|u|^2}{R_\Omega^2}\, dx\, dy.$$

Далее нужно воспользоваться вариационным определением жёсткости кручения и конформно инвариантным неравенством, полученным как следствие теоремы 8.3 для функции $u \in C_0^\infty(\Omega)$.

8. Докажите теорему Р. Г. Салахудинова.

Теорема 8.9 (Р. Г. Салахудинов [54]). *Справедливо неравенство* $P(\Omega) \geq \frac{3}{2} \iint_\Omega R^2(x+iy,\Omega)\,dx\,dy$. *Если* Ω *— круг, то имеет место равенство.*

Указание. Воспользуйтесь формулой Г. Давенпорта. Предварительно докажите следующую формулу: если функция $z = f(\zeta) = \sum_{n=1}^\infty a_n\zeta^n$, $|\zeta| < 1$, осуществляет однолистное конформное отображение единичного круга $\mathbb{D}$ на область Ω, то $\iint_\Omega R^2(x+iy,\Omega)\,dx\,dy =$

$$= 2\pi \sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n(n^2-1)} \left| \sum_{\beta=1}^{[\frac{n}{2}]} (n-2\beta+1) \sum_{\alpha=\beta}^{n-\beta} a_\alpha a_{n-\alpha} \right|^2,$$

где $[x]$ – целая часть числа x.

9. Новое, более простое доказательство теоремы Р. Г. Салахудинова можно найти в статье Д. А. Абрамова, Ф. Г. Авхадиева, Д. Х. Гиниятовой [25], где дополнительно к теореме 8.9 доказано, что равенство $P(\Omega) = (3/2) \iint_\Omega R^2(x+iy,\Omega)\,dx\,dy < \infty$ реализуется тогда и только тогда, когда Ω — круг.

Замечание. Продолжение исследований по изопериметрическом неравенствам в математической физике можно найти в ряде статей, см., например, статьи Ф. Г. Авхадиева и А. Р. Касимова [5] и [32].

Глава 9

Неравенства в математической физике

Для решения краевых задач математической физики разработан ряд общих методов. Центральное место среди них занимает вариационный подход. Он основан на интегральных неравенствах, справедливых для всех функций, которые принадлежат подходящему пространству Соболева в заданной области Ω из евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$. Известен ряд классов вариационных неравенств, связанных с именами Стеклова, Пуанкаре, Фридрихса, Харди, Соболева и других.

Главная трудность при исследовании вариационных неравенств состоит в оценках констант, точнее, специальных функционалов области Ω, зависящих также от числовых параметров задачи. Существование конечных констант означает ограниченность норм соответствующих операторов вложения, и это требование приводит к «сортировке» областей Ω, точнее, к описанию «хороших» областей, для которых соответствующая задача математической физики имеет решение.

Пусть Ω – область на плоскости $\mathbb{C}$, $C_0^\infty(\Omega)$ – пространство бесконечно дифференцируемых функций f, имеющих компактные в Ω носители, т. е. обращающихся в нуль вблизи границы области. Нам также потребуется величина $\delta = \operatorname{dist}(z, \partial\Omega)$ — расстояние от точки $z = x + iy \in \Omega$ до границы области.

Хорошо известно, что для любой ограниченной области Ω существует конечная постоянная $c(\Omega)$ в неравенстве Пуанкаре

$$\iint\limits_{\Omega} |f|^2 dx\, dy \leq c(\Omega) \iint\limits_{\Omega} |\nabla f|^2 dx\, dy \quad \forall f \in C_0^\infty(\Omega).$$

Но известно, что имеются и неограниченные области, для которых существует $c(\Omega) < \infty$, и до сих пор не решена проблема описания *всего множества «хороших» областей* Ω *посредством простых геометрических характеристик* Ω. Более того, неясна возможность такого описания, так как нет подходящей гипотезы в случае плоских бесконечносвязных областей.

Усилиями ряда математиков доказано, что проблема описания всех «хороших» областей простыми геометрическими условиями решается для следующего двумерного аналога неравенства Харди: для любой вещественнозначной функции $f \in C_0^\infty(\Omega)$

$$\iint\limits_{\Omega} \frac{|f(z)|^2 dx\, dy}{\operatorname{dist}^2(z, \partial\Omega)} \leq C(\Omega) \iint\limits_{\Omega} |\nabla f(z)|^2 dx\, dy \;\; (z = x + iy).$$

Пункты 9.1 и 9.2 этой главы посвящены решению этой проблемы с использованием максимальных модулей и метрики Пуанкаре для плоскости Лобачевского. Этапы решения и различные подходы можно найти в оригинальных статьях: A. Ancona [26], Ф. Г. Авхадиев [27], J. L. Fernández [45].

Оригинальную теорему Харди с сингулярным ядром $1/t^s$ при условии $s > 1$ можно сформулировать следующим образом.

Теорема 9.1 *Пусть* $1 \leq p < \infty$ *и* $1 < s < \infty$. *Для любой абсолютно непрерывной неубывающей функции* $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ *такой, что* $f'/t^{s/p-1} \in L^p(0, \infty)$ *и* $f(0) = 0$, *имеет место неравенство*

$$\int_0^\infty \frac{f(t)^p}{t^s} dt \leq \left(\frac{p}{s-1} \right)^p \int_0^\infty \frac{f'(t)^p}{t^{s-p}} dt. \qquad (9.1)$$

Если $p > 1$ *и* $f \not\equiv 0$, *то неравенство является строгим (т. е. не существует экстремальной функции), но постоянная* $(p/(s-1))^p$ *является точной, т. е. не может быть уменьшена; если же* $p = 1$, *то это неравенство превращается в равенство, точнее, в следующее функциональное тождество*

$$\int_0^\infty \frac{f(t)}{t^s} dt = \frac{1}{s-1} \int_0^\infty \frac{f'(t)}{t^{s-1}} dt,$$

справедливое для всех допустимых функций.

Различные доказательства этой теоремы можно найти в книге [24], там же подробно обсуждаются и важные частные случаи:

$$a)\ p = s = 2, \qquad b)\ p = s > 1,$$

а также не охваченный нашей формулировкой случай c) $p \geq 1,\ s < 1$, и тонкие вопросы о точности констант при отсутствии экстремальных функций. При доказательстве теоремы Харди 9.1 можно ограничиться функциями $f \in C_0^\infty(0, \infty)$, затем замкнуть класс допустимых функций при условии $f'/t^{s/p-1} \in L^p(0, \infty)$.

Теорема Харди 9.1 лежит в основе актуального направления в современной математике.

Для дальнейшего знакомства с неравенствами типа Харди в плоских и пространственных областях рекомендую статьи А. Анконы [26], Ф. Г. Авхадиева [28], Ф. Г. Авхадиева и А. Лаптева [34], В. М. Миклюкова и М. Р. Вуоринена [49], отражающие различные подходы к задачам и вскрывающие глубокие связи этой тематики с геометрической теорией функций.

В этом учебном пособии мы ограничились описанием решения лишь двух задач. Отметим также, что неравенств типа Харди связаны с некоторыми физическими явлениями, в частности, с принципом неопределённости Гейзенберга.

В настоящее время развиваются несколько новых направлений по интегральным неравенствам (см., например, монографию [2] и статьи [6], [31], [40]).

9.1 Евклидов максимальный модуль

Классические конформные модули и различные экстремальные проблемы для них описаны в большой статье А. Ю. Солынина [22] (см. также разделы 8 и 9 в обзорной статье [6]). В этом пункте мы обсуждаем новые характеристики областей, называемые максимальными модулями и введённые сравнительно недавно.

Пусть Ω – область (открытое связное множество) на комплексной плоскости $\mathbb{C}$, причём будем предполагать, что Ω имеет не менее трёх граничных точек в $\overline{\mathbb{C}}$, что равносильно наличию более одной граничной точки в $\mathbb{C}$. Таким образом, всюду в дальнейшем мы рассматриваем области Ω гиперболического типа.

Напомним, что нетривиальное (т. е. содержащее более одной точки) множество называется совершенным, если оно содержит все свои предельные точки.

Следуя Х. Поммеренке [53], мы будем говорить, что граница $\partial\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$ области $\Omega \subset \mathbb{C}$ является *равномерно совершенной* (uniformly perfect), если является конечной величиной *евклидов максимальный модуль* $M_0(\Omega)$, определяемый следующим образом.

P_1) $M_0(\Omega) = 0$, если не существует никакой граничной точки $z_0 \in \partial\Omega$, которая служила бы центром некоторой окружности, лежащей в Ω;

P_2) если в область Ω можно вписать хотя бы одну окружность с центром в некоторой граничной точке $\zeta \in \partial\Omega$, то область Ω содержит и круговые концентрические кольца, центры которых лежат на $\partial\Omega$, и поэтому корректно определена величина

$$M_0(\Omega) := \sup \frac{1}{2\pi} \ln \frac{R(A)}{r(A)},$$

где супремум берется по всем круговым концентрическим кольцам вида

$$A = \{z \in \mathbb{C} : r(A) < |z - z_0| < R(A)\}$$

и таким, что $A \subset \Omega, \quad z_0 \in \partial\Omega$.

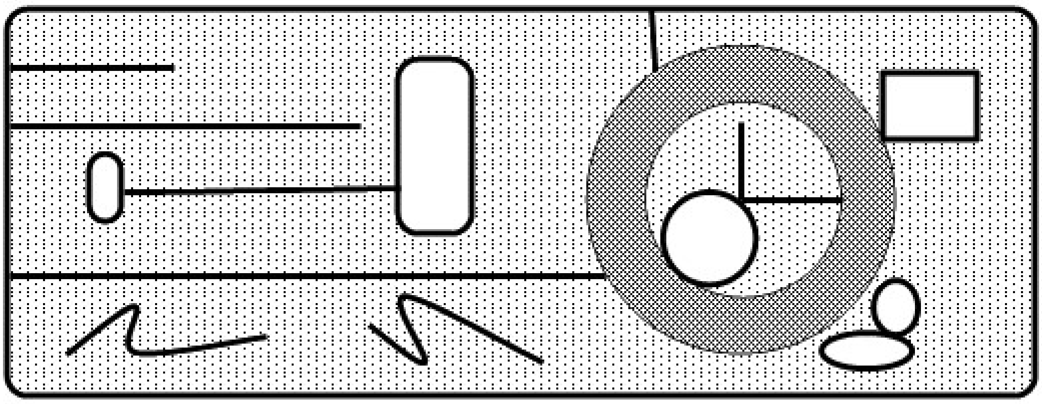

Рис. 9.1: Определение максимального модуля

Поясним некоторые простые, но важные нюансы в этом определении областей с равномерно совершенными границами. Поскольку мы рассматриваем области $\Omega \subset \mathbb{C}$, т. е. $\infty \notin \Omega$, бесконечно удалённая точка является либо внешней, либо граничной точкой для области Ω. Поэтому в области $\{z \in \overline{\mathbb{C}} : |z - z_0| \geq R(A)\}$ имеются точки из $\partial\Omega$, и *кольца $A \subset \Omega$, участвующие в пункте P_2) определения максимального модуля $M_0(\Omega)$, разде-*

ляют границу области Ω на две части, так как круг $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq r(A)\}$, внутренняя компонента множества $\overline{\mathbb{C}} \setminus A$, содержит граничную точку z_0 и во внешней компоненте $\{z \in \overline{\mathbb{C}} : |z - z_0| \geq R(A)\}$ множества $\overline{\mathbb{C}} \setminus A$ также имеются граничные точки области Ω. Отметим, что граница $\partial\Omega$ любой односвязной области $\Omega \subset \mathbb{C}$ гиперболического типа является равномерно совершенной по определению.

Совершенство границы $\partial\Omega$ для любой конечносвязной области означает, что $\partial\Omega$ не имеет компонент, состоящих из одной точки, т. е. граница любой конечносвязной области совершенна тогда и только тогда, когда отсутствуют изолированные граничные точки. Легко установить, что равномерная совершенство в этом случае сводится к тому же условию. Таким образом, граница любой конечносвязной области равномерно совершенна тогда и только тогда, когда она совершенна.

Для бесконечносвязных областей равномерное совершенство означает нечто большее, чем простое отсутствие изолированных граничных точек. Приведём три примера. Рассмотрим области типа $\mathbb{D}_3(0) \setminus E_j$, где $\mathbb{D}_3(0) = \{z : |z| < 3\} \subset \Omega$ (т. е. берём круг радиуса 3, из которого удалён некоторый компакт). Границы рассматриваемых областей состоят из объединения удаляемых компактов с окружностью радиуса 3.

Пример 1. Предположим, что $E_1 = \bigcup_{m=1}^{\infty} K_m \bigcup \{0\}$, где

$$K_m = \{z = x + iy \in \mathbb{C} : y = 0,\ m^{-m} \leq x \leq 2m^{-m}\}.$$

Область $\Omega_1 = \mathbb{D}_3(0) \backslash E_1$ содержит в себе кольца

$$A_m = \{z \in \mathbb{C} : 2(m+1)^{-m-1} < |z| < m^{-m}\}$$

и

$$\frac{R(A_m)}{r(A_m)} = \frac{m+1}{2}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m \to \infty \text{ при } m \to \infty.$$

Следовательно, $M_0(\Omega_1) = \infty$, т. е. граница области Ω_1 не является равномерно совершенной, хотя она, очевидно, представляет собой совершенное множество.

Пример 2. Пусть теперь $E_2 = \bigcup_{m=1}^{\infty} L_{2m-1} \bigcup \{0\}$, где

$$L_{2m-1} = \{z = x + iy \in \mathbb{C} : y = 0,\ 3^{-2m+1} \le x \le$$

$$\le 3^{-2m+2}\}.$$

Для любого кольца A в $\Omega_2 = \mathbb{D}_3(0) \backslash E_2$ с центром на $\partial\Omega_2$ имеем $R(A)/r(A) \le 3$. Просто показать, что $M_0(\Omega_2) = \frac{1}{2\pi} \ln\ 3$. Таким образом, граница области Ω_2 является равномерно совершенной, несмотря на то, что вторая область отличается от области из примера 1 лишь выбором длин удаляемых отрезков.

Следующий пример существенно отличается от первых двух тем, что рассматриваемая область не является счётносвязной.

Пример 3. Пусть $E_3 = K \subset [0, 1]$ – классическое канторово множество. Рассмотрим $\Omega_3 = \mathbb{D}_3(0) \backslash E_3$. Легко показать, что $M_0(\Omega_3) = M_0(\Omega_2) = \frac{1}{2\pi} \ln 3$.

Отметим также, что $M_0(\Omega) = 0$ для любой односвязной области, но обратное утверждение, вообще говоря, неверно. *Семейство* $\{\Omega : M_0(\Omega) = 0\}$ *является богатой коллекцией областей, причём оно содержит области произвольной связности.*

Так, например, равенство $M_0(\Omega_0 \setminus \overline{K}) = 0$ справедливо для всех областей $\Omega = \Omega_0 \setminus \overline{K}$, удовлетворяющих следующим условиям:

(1) Ω_0 – такая область в плоскости $\mathbb{C}$, что $\sup\{\operatorname{dist}(z, \partial\Omega_0) : z \in \Omega_0\} = 1$, в частности, Ω_0 – некоторая полоса ширины 2;

(2) $K = \bigcup_{m=1}^{\infty} C_m$, где C_m являются континуумами (связными компактами), причём $\operatorname{diam} C_m \geq 2$;

(3) $K \subset \Omega_0$, и $\Omega_0 \setminus \overline{K}$ – открытое связное множество.

В литературе по равномерно совершенным множествам можно найти и два других варианта определения максимального модуля области. Во всех определениях максимальный модуль односвязной области гиперболического типа берётся равным нулю. *Считая определение максимального модуля* $M_0(\Omega)$ *первой версией, приведём две других.*

Версия вторая определения евклидова максимального модуля $M_1(\Omega)$:

P_1) $M_1(\Omega) = 0$, если не существует никакой окружности, лежащей в области Ω и разделяющей границу этой области;

P_2) если в область Ω можно вписать хотя бы одну окружность, разделяющую её границу, то корректно определена величина

$$M_1(\Omega) := \sup \frac{1}{2\pi} \ln \frac{R(A)}{r(A)},$$

где супремум берется по круговым концентрическим кольцам $A = \{z \in \mathbb{C} : r(A) < |z - z_0| < R(A)\} \subset \Omega$, которые разделяют $\partial\Omega$.

Версия третья, связана с конформными отображениями, она является основной в теоретических исследованиях, когда нет необходимости в явных оценках постоянных. А именно, речь идёт о конформном максимальном модуле $M(\Omega)$, определяемом следующим образом:

P_1) $M(\Omega) = 0$ для любой односвязной области гиперболического типа, а для любой двусвязной области $\Omega = \Omega_2$ максимальный модуль определяется равным модулю $M(\Omega_2)$ этой области;

P_2) в общем случае, если область Ω не является односвязной, то полагают $M(\Omega) := \sup M(\Omega_2)$, где супремум берется по всем таким двусвязным областям Ω_2, что $\Omega_2 \subset \Omega$ и Ω_2 разделяет $\partial\Omega$.

Справедливы следующие неравенства: для любой области $\Omega \subset \mathbb{C}$ гиперболического типа:

$$M_0(\Omega) \le M_1(\Omega) \le M(\Omega) \le M_0(\Omega) + 1/2.$$

Первые два неравенства являются очевидными следствиями определений. Удивительным фактом является третье неравенство, восходящее к О. Тейхмюллеру. В указанной форме оно доказано в [41] с применением одного результата О. Тейхмюллера об экстремальных модулях для двусвязных областей и формул Л. Альфорса для модуля экстремальной области.

Отметим, что имеются некоторые обобщения теории равномерно совершенных множеств на пространственный случай (см., например, [27]).

9.2 Критерий конечности констант Харди

Качественный результат, о котором шла речь во введении к этой главе, может быть сформулирован так: *равномерное совершенство границы области* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *является необходимым и достаточным условием существования конечной константы Харди.*

В следующей теореме докажем «необходимость».

Теорема 9.2 (Ф. Г. Авхадиев [27]). *Пусть* Ω *– область на комплексной плоскости* $\mathbb{C}$, *имеющая более одной граничной точки в* $\mathbb{C}$. *Если существует такая конечная величина* $C(\Omega)$, *что для любой вещественнозначной функции* $f \in C_0^\infty(\Omega)$ *имеет место неравенство Харди*

$$\iint\limits_{\Omega} \frac{|f|^2}{\operatorname{dist}^2(z, \partial\Omega)} dx\, dy \leq C(\Omega) \iint\limits_{\Omega} |\nabla f|^2 dx\, dy,$$

то справедлива оценка $2M_0(\Omega) \leq \sqrt{C(\Omega)}$, *следова-*

тельно, граница области Ω является равномерно совершенным множеством.

Доказательство. Если максимальный модуль равен нулю, то доказывать нечего. Очевидно, достаточно рассмотреть лишь случай, когда $0 < M_0(\Omega) \leq \infty$ и $0 < C(\Omega) < \infty$.

Предположим обратное, т. е. допустим существование такой области Ω гиперболического типа, для которой $\sqrt{C(\Omega)} < 2M_0(\Omega)$. Из этого предположения и из определения $M_0(\Omega)$ следует, что для любого числа m, удовлетворяющего неравенствам $\sqrt{C(\Omega)}/2 < m < M_0(\Omega)$, существует такое круговое кольцо

$$A = \{z \in \mathbb{C} : r(A) < |z - z_0| < R(A)\} \subset \Omega,$$

что $z_0 \in \partial\Omega$ и

$$\sqrt{C(\Omega)} < 2m = \frac{1}{\pi} \ln \, \frac{R(A)}{r(A)} < \infty.$$

Так как постоянная Харди $C(\Omega)$ является инвариантной при линейных конформных преобразованиях Ω, без ограничения общности можно считать, что $z_0 = 0$, $R(A) = 1$, $r(A) = \varepsilon \in (0, 1)$. Тогда круговое кольцо имеет вид $A = \{z \in \mathbb{C} : \varepsilon < |z| < 1\} \subset \Omega$, а наше ограничение $\sqrt{C(\Omega)} < 2m$ эквивалентно неравенству

$$m = \frac{1}{2\pi} \ln \, \frac{1}{\varepsilon} > \frac{\sqrt{C(\Omega)}}{2}.$$

Запишем теперь рассматриваемое неравенство Харди для более узкого семейство функций, а именно, для произвольной функции $f \in C_0^\infty(A) \subset C_0^\infty(\Omega)$. Будем иметь неравенство

$$\iint_A \frac{|f|^2 dx\, dy}{\operatorname{dist}^2(z, \partial\Omega)} \le C(\Omega) \iint_A |\nabla f|^2 dx\, dy \;\; \forall f \in C_0^\infty(A).$$

Перейдём к полярным координатам и ещё раз сузим класс допустимых функций, а именно, возьмём радиальные функции вида $f(r,\theta) = v(r)$, $v \in C_0^\infty(\varepsilon, 1)$. Пользуясь оценкой $dist(z,\partial\Omega) \le |z|$, справедливой в силу выбора $z_0 = 0 \in \partial\Omega$, получаем из последнего неравенства

$$\int_\varepsilon^1 \frac{|v(r)|^2 r dr}{r^2} \le C(\Omega) \int_\varepsilon^1 |v'(r)|^2 r dr \quad \forall\ v \in C_0^\infty(\varepsilon, 1).$$

Заменами независимой переменной $r = \varepsilon \exp(2mt)$ и функции $v(r) = g(t)$ приходим к эквивалентному одномерному неравенству Пуанкаре

$$\int_0^\pi |g(t)|^2\ dt \le \frac{C(\Omega)}{4m^2} \int_0^\pi |g'(t)|^2 dt \quad \forall\ g \in C_0^\infty(0, \pi).$$

Поскольку точная константа в указанном одномерном неравенстве Пуанкаре равна единице, то будем иметь неравенство $C(\Omega) \ge 4m^2$. что противоречит неравенству $\sqrt{C(\Omega)} < 2m$. Теорема доказана.

Далее мы приведём явные оценки сверху для констант Харди при условии конечности максимального модуля области. Эти оценки показывают, что равномерное совершенство границы области является также и достаточным условием существования константы Харди $C(\Omega) < \infty$. Рассмотрим последовательно случаи односвязных, двусвязных и многосвязных областей.

Теорема 9.3 (А. Анкона [26]). *Пусть Ω – односвязная область на комплексной плоскости $\mathbb{C}$, имеющая более одной граничной точки в $\mathbb{C}$. Тогда имеет место следующее неравенство Харди: для любой $f \in C_0^\infty(\Omega)$*

$$\iint\limits_{\Omega} \frac{|f|^2}{\operatorname{dist}^2(z, \partial\Omega)} dx\, dy \le 16 \iint\limits_{\Omega} |\nabla f|^2 dx\, dy.$$

Доказательство. Пусть $R(z, \Omega)$ – конформный радиус области Ω в точке z. Для односвязной области, как показано в теореме 8.3, справедливо неравенство: для любой $f \in C_0^\infty(\Omega)$

$$\iint_{\Omega} |\nabla u(x,y)|^2\, dx\, dy \ge \iint_{\Omega} \frac{|u(x,y)|^2}{R^2(z,\Omega)}\, dx\, dy. \qquad (9.2)$$

Утверждение теоремы непосредственно следует из этого неравенства при $f = u(x,y)$ с учётом неравенства Кёбе об 1/4 для односвязной области (см. задачу 6 к главе 4)

$$R(z, \Omega) \le 4 \operatorname{dist}(z, \partial\Omega), \quad z \in \Omega. \qquad (9.3)$$

Таким образом, теорема доказана. Приведём два пояснения к формулировке и доказательству этой важной теоремы.

1) А. Анкона [26] получает (9.2) сначала для полу-

плоскости $\Pi = \{z = x + iy \in \mathbb{C} : x > 0\}$ как простое следствие неравенства Харди (9.12) следующим образом. Полагая $s = p = 2$ и $f(t) = |u(t, y)|$ $(u \in C_0^\infty(\Pi))$ в неравенстве Харди (9.12), имеем

$$\int_0^\infty \frac{|u(t,y)|^2}{t^2} dt \le 4 \int_0^\infty \left| \frac{\partial u(t,y)}{\partial t} \right|^2 dt \le$$

$$\le 4 \int_0^\infty |\nabla u(t,y)|^2 \, dt,$$

следовательно,

$$\int_{-\infty}^\infty dy \int_0^\infty \frac{|u(x,y)|^2}{4x^2} dx \le \int_{-\infty}^\infty dy \int_0^\infty |\nabla u(x,y)|^2 \, dx.$$

Поскольку $4x^2 = R^2(z, \Pi)$, неравенство (9.2) доказано для случая полуплоскости. Остаётся заметить, что неравенство (9.2) является конформно инвариантным, поэтому оно будет верно для любой односвязной области, конформно эквивалентной полуплоскости.

2) Постоянная 16 в теореме А. Анконы не является, по-видимому, оптимальной, т. е. наименьшей из возможных. В настоящее время можно лишь утверждать следующее: наилучшая постоянная $C(\Omega)$, определяемая равенством

$$C(\Omega) = \sup_{f \in C_0^\infty(\Omega)} \frac{\iint\limits_\Omega |f|^2 \operatorname{dist}^{-2}(z, \partial\Omega) dx\, dy}{\iint\limits_\Omega |\nabla f|^2 dx\, dy},$$

должна удовлетворять неравенству $C(\Omega) \le 16$ для любой односвязной области Ω. Остаётся неизвестной точная константа $C = \sup C(\Omega) \in [4, 16]$, где супремум берется по всем односвязным областям $\Omega \subset \mathbb{C}$ гиперболического типа.

Прежде чем перейти к обсуждению неравенств Харди в многосвязных областях, напомним одно определение. Пусть $\lambda_\Omega(z)$ – плотность метрики Пуанкаре с гауссовой кривизной -4 в области Ω гиперболического типа. В главе 2 было отмечено, что величину $R(z, \Omega) := 1/\lambda_\Omega(z)$ называют гиперболическим радиусом. Напомним также, что в случае односвязных областей, не содержащих бесконечно удалённой точки, гиперболический радиус $R(z, \Omega)$ совпадает с конформным радиусом $R(z, \Omega)$.

Для оценки сверху константы Харди для двусвязных областей нам потребуется конформно инвариантное неравенство. Специалистам по гиперболической геометрии известно, что аналог неравенства (9.2) верен и для двусвязных областей. Но доказательство этого факта, насколько известно автору, можно извлечь лишь из научных статей, посвященных оценкам собственных чисел лапласиана на поверхностях с постоянной отрицательной кривизной. Для удобства читателя мы приведём простое прямое доказательство аналога неравенства (9.2) для двусвязных областей с заменой конформного радиуса на гиперболический.

Лемма 9.1 *Если Ω_2 – двусвязная область гиперболического типа, то справедливо неравенство: для любой*

$u \in C_0^\infty(\Omega_2)$

$$\iint_{\Omega_2} |\nabla u|^2 \, dx \, dy \geq \iint_{\Omega_2} |u|^2 \lambda^2_{\Omega_2}(z) \; dx \, dy. \qquad (9.4)$$

Доказательство леммы (см. Ф. Г. Авхадиев [27]). Рассмотрим полосу

$$\Pi(q) = \{z : \ln\, q < Rez < 0\} \qquad (0 \leq q < 1).$$

Отметим, что случаю $q = 0$ соответствует полуплоскость. В силу (9.2) имеет место неравенство

$$\iint\limits_{\Pi(q)} \frac{|f|^2 dx\, dy}{R^2\left(z, \Pi(q)\right)} \leq \iint\limits_{\Pi(q)} |\nabla f|^2 dx\, dy \qquad (9.5)$$

где $f \in C_0^\infty\left(\Pi(q)\right)$. В качестве f выберем функцию, обладающую свойством 2π-периодичности по переменной y на отрезке $[0, 2\pi N]$, т. е. будем считать, что $f_N\left(x, y\right) = f_N\left(x, y + 2\pi k\right)$ при $0 \leq y \leq 2\pi$ и $k = 1, \ldots, N - 1$. Вставляя, если нужно, лишние звенья длины 2π по переменной y, мы можем считать, что (9.5) имеет вид

$$N \iint_{\Omega_0} \frac{|f|^2 dx\, dy}{R^2\left(z, \Pi(q)\right)} \leq N \iint_{\Omega_0} |\nabla f|^2 dx\, dy + A, \quad (9.6)$$

где N – любое натуральное число, Ω_0 – прямоугольник $[\ln\, q, 0] \times [0, 2\pi]$, A – величина, не зависящая от N, функция f удовлетворяет граничным условиям: $f\left(x, 0\right) = f\left(x, 2\pi\right)$, $f\left(x, y\right) = 0$ на $\partial\Pi(q)$. Деля обе части (9.6) на N и переходя к пределу при $N \to +\infty$, получаем

$$\iint_{\Omega_0} \frac{|f|^2 dx\, dy}{R^2\,(z, \Pi(q))} \leq \iint_{\Omega_0} |\nabla f|^2 dx\, dy. \qquad (9.7)$$

Функция $w = e^z$ даёт универсальное накрытие кольца $K = \{w : q < |w| < 1\}$ полосой $\Pi(q)$. При этом образом открытого прямоугольника $\Omega_0 \setminus \partial\Omega_0$ является кольцо K без отрезка $[q, 1]$. В силу конформной инвариантности метрики Пуанкаре

$$\frac{|dw|}{R\,(w, K)} = \frac{|dz|}{R\,(z, \Pi(q))},$$

неравенство (9.7) принимает вид

$$\iint\limits_K \frac{|F|^2 du\, dv}{R^2\,(w, K)} \leq \iint\limits_K |\nabla F|^2 du\, dv, \quad \forall F \in C_0^\infty\,(K)\,,$$

где $w = u + iv$, $F\,(w) = F\,(e^z) = f\,(z)$ для любого $w \in K$.

Снова пользуясь конформной инвариантностью и учитывая произвольность q, получаем, что вариационное неравенство в кольце K остаётся верным и при замене K на произвольную двусвязную область Ω_2 гиперболического типа. Этим и завершается доказательство.

Нам также потребуются числовая характеристика $\gamma(\Omega) := \sup_{z \in \Omega} \left|\nabla \lambda_\Omega^{-1}(z)\right|$ и известная постоянная

$$a_0 = \frac{1}{2\lambda_{\mathbb{C}\setminus\{0,1\}}(-1)} = \frac{\Gamma^4\,(1/4)}{4\pi^2} = 4,3768796...,$$

использованная Дж. А. Хемпелем [47] и Дж. А. Дженкинсом [48] для установления точной формы теоремы Ландау об оценке $|F'(0)|$ для функции F, голоморфной в единичном круге и не принимающей значений 0 и 1.

Теорема 9.4 (Ф. Г. Авхадиев [27]). *Пусть Ω – двусвязная область на комплексной плоскости $\mathbb{C}$, имеющая более одной граничной точки в $\mathbb{C}$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) если $\Omega = A = \{z \in \mathbb{C} : r(A) < |z - z_0| < R(A)\}$ – круговое кольцо, то для любой функции $f \in C_0^\infty(A)$

$$\iint\limits_A \frac{|f|^2}{\operatorname{dist}^2(z, \partial\Omega)} dx\, dy \leq$$

$$\leq \left(4 + \frac{4}{\pi^2} \ln^2 \frac{R(a)}{r(a)}\right) \iint\limits_A |\nabla f|^2 dx\, dy;$$

2) если Ω – двусвязная область на комплексной плоскости $\mathbb{C}$, которая не содержит никакой окружности, имеющей в качестве центра граничную точку этой области, то для любой функции $f \in C_0^\infty(\Omega)$

$$\iint\limits_\Omega \frac{|f|^2}{\operatorname{dist}^2(z, \partial\Omega)} dx\, dy \leq \frac{\Gamma^8(1/4)}{4\pi^4} \iint\limits_\Omega |\nabla f|^2 dx\, dy;$$

3) если Ω – произвольная двусвязная область на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ с равномерно совершенной границей и с максимальным модулем $M_0(\Omega)$, то для *любой функции* $f \in C_0^\infty(\Omega)$

$$\iint\limits_{\Omega} \frac{|f|^2}{\operatorname{dist}^2(z, \partial\Omega)} dx\, dy \le$$

$$\le 4 \left(\pi M_0(\Omega) + \frac{\Gamma^4(1/4)}{4\pi^2} \right)^2 \iint\limits_{\Omega} |\nabla f|^2 dx\, dy.$$

Доказательство пункта 1). Для произвольно взятой точки $z \in A$ через $\zeta \in \partial A$ обозначим ближайшую к ней точку, взятую на границе кольца. Интегрируя вдоль отрезка $[\zeta, z]$ с учётом соотношений $R(\zeta, A) = 0$ и $|\zeta - z| = \operatorname{dist}(z, \partial A)$, получаем

$$R(z, A) = \int_0^{|\zeta - z|} \frac{dR(\zeta + se^{i\theta}, A)}{ds} ds \le$$

$$\le \gamma(A)\, |\zeta - z| = \gamma(A) \operatorname{dist}(z, \partial A).$$

Поэтому неравенство (9.4) леммы 9.1 при $u = f(x, y)$, $f \in C_0^\infty(A)$, влечёт неравенство

$$\iint\limits_{A} \frac{|f|^2}{\operatorname{dist}^2(z, \partial\Omega)} dx\, dy \le \gamma^2(A) \iint\limits_{A} |\nabla f|^2 dx\, dy.$$

Согласно формуле

$$\gamma^2(A) = 4 + 16\, M^2(A) = 4 + \frac{4}{\pi^2} \ln^2 \frac{r(A)}{R(A)},$$

доказанной в [41], с. 43 (см. также упражнение 2 конце этой главы), мы можем выразить характеристику $\gamma(A)$

через модуль кольца и получить доказываемое неравенство пункта 1 теоремы.

Доказательство пункта 3). А. Е. Бирдон и Х. Поммеренке [43] доказали, что для любой области гиперболического типа

$$\frac{1}{2\lambda_\Omega(z)\mathrm{dist}(z,\partial\Omega)} \le \pi M_0(\Omega) + a_0, \quad z \in \Omega,$$

где a_0 – постоянная из теоремы Ландау. Точное значение этой постоянной стало известно позже, и мы привели её перед формулировкой теоремы. Таким образом, в любой точке $z \in \Omega$ справедлива оценка

$$\frac{1}{\mathrm{dist}^2(z,\partial\Omega)} \le \left(2\pi M_0(\Omega) + \frac{\Gamma^4(1/4)}{2\pi^2}\right)^2 \lambda_\Omega^2(z), \qquad (9.8)$$

Эти оценки в сочетании с леммой 9.1, применённой к функции $u = f(x,y)$, непосредственно ведут к утверждениям пункта 3) нашей теоремы.

Очевидно, пункт 2) является прямым следствием пункта 3), соответствующим случаю $M_0(\Omega_2) = 0$. Теорема доказана полностью.

Если число граничных компонент области $m \ge 3$, то неравенство (9.4) является, вообще говоря, неверным. Например, для $\Omega_3 = \mathbb{C} \setminus \{0,1\} = \overline{\mathbb{C}} \setminus \{0,1,\infty\}$ формула не имеет места, даже если мы умножим правую часть (9.4) на сколь угодно большое, но не зависящее от пробной функции, число, т. е. имеет место соотношение

$$\sup_{u\in C_0^\infty(\Omega_3)} \frac{\iint_{\Omega_3} |u(x,y)|^2 \lambda^2_{\Omega_3}(z)\ dx\,dy}{\iint_{\Omega_3} |\nabla u(x,y)|^2\, dx\, dy} = \infty.$$

Для областей связности 3 и более аналог предыдущей теоремы будет справедлив, но с иными оценками для констант Харди через максимальный модуль рассматриваемой области.

Теорема 9.5 (Ф. Г. Авхадиев [27]). *Пусть Ω – произвольная область на комплексной плоскости $\mathbb{C}$, имеющая более одной граничной точки в $\mathbb{C}$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) если область Ω не содержит никакой окружности, имеющей в качестве центра граничную точку этой области, то имеет место следующее неравенство Харди: для любой функции $f \in C_0^\infty(\Omega)$

$$\iint\limits_{\Omega} \frac{|f|^2}{\mathrm{dist}^2(z,\partial\Omega)} dx\, dy \leq \frac{\Gamma^{16}(1/4)}{16\pi^8} \iint\limits_{\Omega} |\nabla f|^2 dx\, dy;$$

2) в общем случае справедливо следующее неравенство: для любой функции $f \in C_0^\infty(\Omega)$

$$\iint\limits_{\Omega} \frac{|f|^2}{\mathrm{dist}^2(z,\partial\Omega)} dx\, dy \leq$$

$$\leq 16\left(\pi M_0(\Omega) + \frac{\Gamma^4(1/4)}{4\pi^2}\right)^4 \iint\limits_{\Omega} |\nabla f|^2 dx\, dy.$$

Доказательство. Отметим сразу же, что пункт 1) является прямым следствием пункта 2), соответствующим случаю $M_0(\Omega) = 0$. При доказательстве пункта 2) считаем, что $M_0(\Omega) < \infty$. Пусть λ_Ω – плотность метрики Пуанкаре в Ω с кривизной -4.

Пусть $f \in C_0^\infty(\Omega)$, тогда имеем, что $|f|^2 \in C_0^1(\Omega)$ и $|\nabla |f|^2| = 2|f||\nabla f|$. Пользуясь уравнением Лиувилля

$$\frac{\Delta \ln \lambda_\Omega(z)^{-1}}{\lambda_\Omega(z)^2} = -4, \ z = x + iy \in \Omega,$$

и формулой Грина

$$\iint_\Omega [u\Delta v + (\nabla u, \nabla v)] dx\, dy = 0$$

для $v = \ln \lambda_\Omega^{-1}$ и $u = |f|^2, f \in C_0^\infty(\Omega)$, получаем

$$4 \iint_\Omega |f|^2 \ \lambda_\Omega^2(z) dx\, dy =$$

$$= 2 \iint_\Omega |f| \ \lambda_\Omega(z) \ (\nabla |f|, \nabla \lambda_\Omega^{-1}(z)) \ \ dx\, dy.$$

Комбинируя это соотношение с неравенством Коши-Буняковского-Шварца

$$\left(\iint_\Omega |f(z)| \ \lambda_\Omega(z) \ |(\nabla |f(z)|, \nabla \lambda_\Omega^{-1}(z))| \ \ dx\, dy \right)^2 \leq$$

$$\leq \iint_\Omega |f|^2 \lambda_\Omega^2 dxdy \ \iint_\Omega \lambda_\Omega |(\nabla f, \nabla \lambda_\Omega^{-1})|^2 dxdy,$$

непосредственно получаем

$$\iint_\Omega |f(z)|^2 \ \lambda_\Omega^2(z) \ \ dx\,dy \leq$$

$$\leq \frac{1}{4}\iint_\Omega |\,(\nabla f(z), \nabla \lambda_\Omega^{-1}(z))|^2 \ \ dx\,dy \tag{9.9}$$

для любой функции $f \in C_0^\infty(\Omega)$.

Пользуясь (9.9), а также следующим неравенством В. Осгуда [51]

$$\lambda_\Omega(z)|\nabla \lambda_\Omega^{-1}(z)| \leq \frac{2}{\operatorname{dist}(z, \partial\Omega)}, \ z = x + iy \in \Omega,$$

приходим к соотношению

$$\iint_\Omega |f(z)|^2 \lambda_\Omega^2(z) \ dx\,dy \leq \iint_\Omega \frac{\lambda_\Omega^{-2}(z)|\nabla f(z)|^2}{\operatorname{dist}^2(z, \partial\Omega)} \ dx\,dy.$$

Следовательно, для любой функции $f \in C_0^\infty(\Omega)$ имеет место неравенство

$$\iint_\Omega \frac{\alpha(\Omega)^2|f(z)|^2}{\operatorname{dist}^2(z, \partial\Omega)} \ dx\,dy \leq \frac{1}{\alpha(\Omega)^2}\iint_\Omega |\nabla f(z)|^2 \ \ dx\,dy,$$

или, что то же самое, неравенство

$$\iint_\Omega \frac{|f(z)|^2}{\operatorname{dist}^2(z, \partial\Omega)} \ dx\,dy \leq \iint_\Omega \frac{|\nabla f(z)|^2}{\alpha(\Omega)^4} \ \ dx\,dy, \tag{9.10}$$

где $\alpha(\Omega) := \inf\{\lambda_\Omega(z)\operatorname{dist}(z, \partial\Omega) : z \in \Omega\}$. Применяя далее уточненную версию (9.8) оценки А. Е. Бирдона и Х. Поммеренке, получаем утверждения теоремы.

9.3 Универсальное неравенство

Имеется ряд обобщений неравенства Харди на функции $f \in C_0^\infty(\Omega)$, где Ω – открытое собственное подмножество $\mathbb{C}$. При этом почти всегда требуется то или иное "условие регулярности" границы Ω.

Неравенство, справедливое в любом открытом собственном подмножестве $\mathbb{C}$, мы называем универсальным. Следующая теорема даёт именно такое универсальное неравенство, так как в этой теореме Ω — произвольное открытое собственное подмножество $\mathbb{C}$.

Теорема 9.6 (Ф. Г. Авхадиев [27]). *Пусть* $1 \le p < \infty$ *и* $2 < s < \infty$, *и пусть* Ω *– открытое собственное подмножество* $\mathbb{C}$. *Тогда для любой вещественнозначной функции* $f \in C_0^\infty(\Omega)$ *имеет место неравенство*

$$\iint_\Omega \frac{|f|^p}{\delta^s} dx\,dy \le \left(\frac{p}{s-2}\right)^p \iint_\Omega \frac{|\nabla f|^p}{\delta^{s-p}} dx\,dy, \qquad (9.11)$$

где $\delta = \delta(z) = \operatorname{dist}(z, \partial\Omega)$. *Существуют области, для которых постоянная* $(p/(s-2))^p$ *не может быть уменьшена.*

Доказательство. Так как открытое множество является конечным или счётным объединением областей, то без ограничения общности можно считать, что Ω – область, т. е. открытое связное подмножество $\mathbb{C}$. Действительно, если неравенства доказаны для всех подобластей Ω, то суммированием придём к доказываемому неравенству.

Шаг 1. Упростим немного задачу, а именно, покажем, что достаточно ограничиться рассмотрением областей специального вида, составленных из «вадратиков» со сторонами, параллельными осям координат. С этой целью для $h \in (0,1)$ рассмотрим стандартное покрытие $\mathbb{C}$ квадратами $Q_{h,w} = [0,h] \times [0,h] + hw, \ w \in \mathbb{Z}^2 \subset \mathbb{C}$. Определим конечное множество индексов

$$\mathbb{Z}^2(\Omega, h) = \{w \in \mathbb{Z}^2 \, : Q_{h,w} \subset \Omega \cap \{w \in \mathbb{C} \, : |w| < 1/h\}\}$$

и следующую аппроксимацию Ω:

$$\Omega_h = \operatorname{int} \cup_{w \in \mathbb{Z}^2(\Omega,h)} Q_{h,w}.$$

Ясно, что для фиксированной функции $f \in C_0^\infty(\Omega)$ достаточно доказать неравенство (9.11) для $\Omega = \Omega_h$ при всех достаточно малых $h \in (0,1)$ таких, что носитель функции f содержится в Ω_h.

Замена $\zeta = z/h$, $z \in \Omega_h$, показывает, что (9.11) для $\Omega = \Omega_h$ и $\Omega = \Omega_1$ эквивалентны. Таким образом, нам достаточно доказать неравенство (9.11) для области вида

$$\Omega_1 = \operatorname{int} \cup_{j=1}^m \left([0,1] \times [0,1] + w_j\right), \qquad w_j \in \mathbb{Z}^2,$$

составленной из "квадратиков".

Шаг 2. Построим специальное разбиение области $\Omega = \Omega_1$, в которой будем теперь доказывать искомое неравенство Харди.

Пусть S – некоторая сторона или вершина квадрата Q_{1,w_j}, т. е. q-мерная грань квадрата, такая, что

$S \subset \partial\Omega_1$. Определим следующее подмножество области Ω_1:

$$Q(S) = \{z \in \mathbb{C} : \exists\, z' \in \operatorname{int} S,\ B(z, |z - z'|) \subset \Omega_1\},$$

где $B(z, |z - z'|)$ – круг $\{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta - z| < |z' - z|\}$. Отметим, что под внутренностью $\operatorname{int} S$ мы подразумеваем сторону квадрата без концевых точек и, по определению, $\operatorname{int} S = S$, если S – 0-мерная грань, т. е. точка, являющаяся вершиной квадрата.

Предположим, что $Q(S) \neq \emptyset$. Это всегда имеет место, если S – сторона квадрата такая, что $S \subset \partial\Omega_1$. Множество $Q(S) \neq \emptyset$ является звёздной относительно S, т. е. $z' + t(z - z') \in Q(S)$ для любого $z' \in \operatorname{int} S$ и всех $t \in (0, 1)$, если $|z - z'| = \operatorname{dist}(z, \partial\Omega_1)$ и $z \in Q(S)$.

Если S' – некоторая j-мерная грань некоторого квадрата $(j = 0, 1$ и $S' \subset (\partial\Omega_1) \setminus S$, то эквидистантное множество

$$(S, S') := \{z \in \Omega : \operatorname{dist}(z, S) = \operatorname{dist}(z, S') \leq$$

$$\leq \operatorname{dist}(z, \partial\Omega_1)\}$$

является либо отрезком некоторой прямой, либо дугой параболы. Очевидно, плоская мера $\operatorname{mes}_2(S, S') = 0$ и $(\partial Q(S)) \setminus S \subset \cup_{S'}(S, S')$, получаем, что $\operatorname{mes}_2 \partial Q(S) = 0$. Следовательно, для любой функции $g \in C(\overline{\Omega}_1)$

$$\iint_{\Omega_1} g(z)\, dx\, dy = \sum_{S \subset \partial\Omega_1} \iint_{Q(S)} g(z)\, dx\, dy. \qquad (9.12)$$

Предположим, что $f \in C_0^\infty(\Omega_1)$, $p \geq 1$, $s > 2$, и будем пользоваться формулой (9.12) для функции $g(z) = |f(z)|^p/\delta^s(z)$.

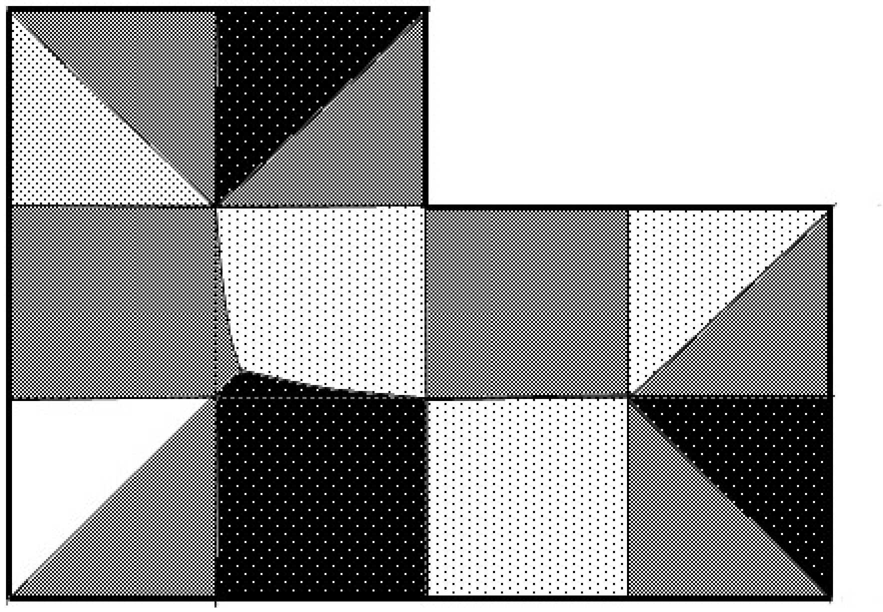

Рис. 9.2: Разбиение простейшей невыпуклой области, составленной из квадратиков

Шаг 3. Докажем теперь некоторые неравенства типа Харди для каждого множества $Q(S) \neq \emptyset$ в отдельности, и затем просуммируем. При вычислении интегралов по $Q(S) \neq \emptyset$ будем иметь в виду, что функция f обращается в нуль на множестве S. Кроме того, каждое множество $Q(S) \neq \emptyset$ с точностью до движения на евклидовой плоскости, т. е. с точностью до сдвига и вращения можно представить в следующем виде:

$$Q(S) = \{x + ir \in \mathbb{C} : 0 < x < 1,\ \ 0 < r \le \varphi_1(x)\}$$

в случае, когда S — сторона квадрата, и

$$Q(S) = \{re^{i\theta} \in \mathbb{C} : 0 \le \theta \le \pi/2,\ \ 0 < r = |z| \le \varphi_0(\theta)\}$$

в случае, когда $S = \{0\}$ — вершина квадрата. Отметим, что в обоих случаях $\delta(z) = r$, т. е. расстояние до границы является одной из координат, а именно, декартовой координатой в первом случае и полярным радиусом во втором. Укажем также, что функции φ_1 и φ_0 являются кусочно-гладкими функциями, их графики состоят из конечного числа отрезков прямых или дуг парабол.

Переходя к повторным интегралам, для двойного интеграла по множеству $Q(S) \neq \emptyset$ мы получаем формулы двух типов:

если S — сторона квадрата, то

$$\int_0^1 dx \int_0^{\varphi_1(x)} \frac{|f(x+ir)|^p}{r^s}\, dr; \tag{9.13}$$

если же $S = \{0\}$ — вершина квадрата, то

$$\int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{\varphi_0(\theta)} \frac{|f(re^{i\theta})|^p}{r^s}\, r\, dr. \tag{9.14}$$

Преобразуем и оценим внутренние интегралы в формулах (9.13), (9.14) с учётом того, что f обращается в нуль при $r=0$. Для $k=1$ или $k=2$ получаем

$$\int_0^{\varphi_{2-k}} \frac{|f|^p}{r^s} r^{k-1} dr = \int_0^{\varphi_{2-k}} t^{k-s-1} dt \int_0^t \frac{\partial |f|^p}{\partial r} dr \le$$

$$\le p \int_0^{\varphi_{2-k}} t^{k-s-1} dt \int_0^t |f|^{p-1} |\nabla f| dr =$$

$$= p \int_0^{\varphi_{2-k}} |f|^{p-1} |\nabla f| dr \int_r^{\varphi_{2-k}} t^{k-s-1} dt =$$

$$= p \int_0^{\varphi_{2-k}} |f|^{p-1} |\nabla f| \ \ A(r, \varphi_{2-k}) dr,$$

где

$$A(r, \varphi_{2-k}) = \frac{1}{s-k} \left(\frac{1}{r^{s-k}} - \frac{1}{\varphi_{2-k}^{s-k}} \right).$$

Поскольку при $k=1$ или $k=2$

$$A(r, \varphi_{2-k}) \le \frac{1}{s-k} \frac{1}{r^{s-k}} \le \frac{r^{k-1}}{(s-2) r^{s-1}}$$

и интегрирование по внешним переменным x или θ сохраняет неравенство, для любого $Q(S) \ne \emptyset$ имеем

$$\iint_{Q(S)} \frac{|f|^p}{\delta^s} dx\, dy \le \frac{p}{s-2} \iint_{Q(S)} \frac{|f|^{p-1} |\nabla f|}{\delta^{s-1}} dx\, dy.$$

Пользуясь этим и формулой (9.12), окончательно получаем

$$\iint_{\Omega_1} \frac{|f|^p}{\delta^s} dx\, dy \le \frac{p}{s-2} \iint_{\Omega_1} \frac{|f|^{p-1} |\nabla f|}{\delta^{s-1}} dx\, dy.$$

В случае $p = 1$ полученное соотношение представляет собой доказываемое неравенство. Если $p > 1$, то, дополнительно применяя неравенство Гёльдера с показателями p и $p' = p/(p-1)$ к интегралу в правой части, имеем

$$\iint_{\Omega_1} \frac{|f|^p dx\, dy}{\delta^s} \leq$$

$$\leq \frac{p}{s-2} \left(\iint_{\Omega_1} \frac{|f|^p dx\, dy}{\delta^s} \right)^{1-1/p} \left(\iint_{\Omega} \frac{|\nabla f|^p dx\, dy}{\delta^{s-p}} \right)^{1/p}.$$

Отсюда и следует доказываемое неравенство (9.11) при $p > 1$.

Шаг 4. Покажем теперь точность верхней границы $(p/(s-2))^p$ на некоторых примерах. Пусть Ω_0 – открытое множество в $\mathbb{C}$ такое, что $0 \in \partial\Omega_0$, $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 3\} \subset \Omega_0$. Введем следующие обозначения

$$X = \iint_{\Omega_0} \frac{|u|^p}{\delta^s} dx\, dy, \quad Y = \iint_{\Omega_0} \frac{|\nabla u|^p}{\delta^{s-p}} dx\, dy,$$

$$\delta = \operatorname{dist}(z, \partial\Omega_0).$$

Пусть $p \geq 1$, $s > 2$, $\varepsilon > 0$.

Рассмотрим функцию u_ε, определенную следующими равенствами: $u_\varepsilon(z) = |z|^{(s-2+\varepsilon)/p}$, $0 < |z| \leq 1$; $u_\varepsilon(z) = 2 - |z|$, $1 < |z| \leq 2$; $u_\varepsilon(z) = 0$, $2 < |z| < \infty$.

Прямыми вычислениями получаем

$$X(u_\varepsilon) = \frac{2\pi}{\varepsilon} + O(1), \quad Y(u_\varepsilon) = \frac{2\pi}{\varepsilon} \left(\frac{s-2+\varepsilon}{p} \right)^p + O(1).$$

Аппроксимируя u_ε радиальными функциями (т. е.

функциями, зависящими лишь от $|z|$), принадлежащими $C_0^\infty(\mathbb{D}_3(0)\setminus\{0\})$, получаем, что постоянная в неравенстве (9.11) не может быть меньше величины

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(\frac{p}{s-2+\varepsilon}\right)^p=\left(\frac{p}{s-2}\right)^p.$$

В частности, константа из теоремы точна для области $\mathbb{D}_3(0)\setminus\{0\}$, следовательно, она точна для любого круга с проколотым центром.

Этим и завершается доказательство теоремы 9.6.

В заключение приведем полную версию нашей универсальной теоремы 9.6.

Теорема 9.7 (Ф. Г. Авхадиев [27]). *Предположим, что* $1\le p<\infty$, $n\ge 2$ *и* Ω *– открытое собственное подмножество* $\mathbb{R}^n$. *Пусть*

$$\rho(x,\partial\Omega)=\operatorname{dist}(x,\partial\Omega)=\min_{y\in\partial\Omega}|x-y|.$$

Если $n<s<\infty$, *то имеет место неравенство*

$$\int_\Omega\frac{|f(x)|^p dx}{\rho^s(x,\partial\Omega)}\le\frac{p^p}{(s-n)^p}\int_\Omega\frac{|\nabla f(x)|^p}{\rho^{s-p}(x,\partial\Omega)},\ \forall f\in C_0^\infty(\Omega).$$

Для любой размерности $n\ge 2$, *любых допустимых параметров* $p\in[1,\infty)$ *и* $s\in(n,\infty)$ *существуют области, для которых постоянная* $(p/(s-n))^p$ *не может быть уменьшена.*

9.4 Задачи и упражнения

1. Пусть A – круговое концентрическое кольцо с модулем $M(A)$. Методами элементарной математики докажите следующие утверждения: если $M(A) \leq (2\pi)^{-1} \ln 3$, то $M_0(A) = 0$; если же $M(A) > (2\pi)^{-1} \ln 3$, то $M_0(A) = M(A) - \frac{1}{2\pi} \ln 3$.

Указание. Без рисунка не обойтись.

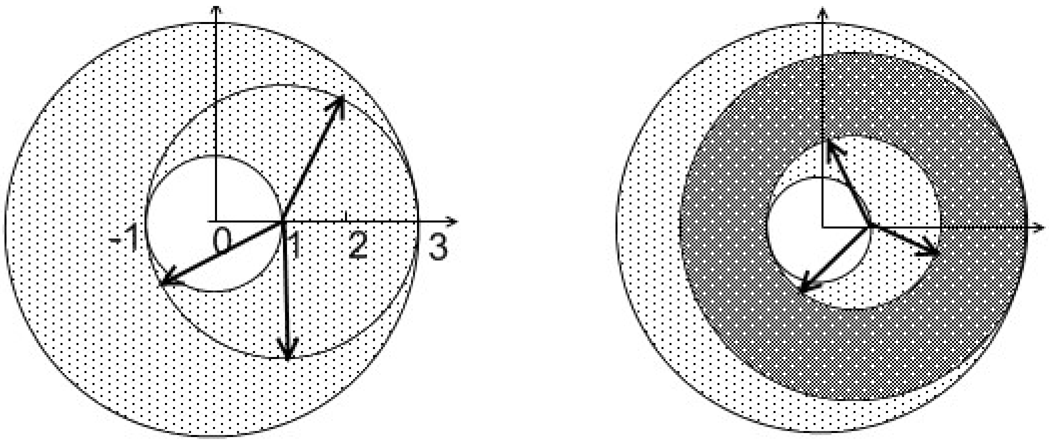

Рис. 9.3: Центр вложенного кольца – граничная точка большого кольца

2. Пусть A – круговое концентрическое кольцо с модулем $M(A)$. Докажите формулу $\gamma^2(A)/16 = 1/4 + M^2(A)$, взятую из книги [41] и использованную при доказательстве теоремы 9.4.

Указание. Достаточно взять кольцо с центром в начале координат и с радиусами $\varepsilon \in (0,1)$ и 1. Тогда

$$\frac{1}{\lambda_A(z)} = 4M\,|z|\,\sin\left(\frac{\ln(1/|z|)}{2M}\right),$$

где $M := M(A) = \frac{1}{2\pi}\ln(1/\varepsilon)$. Поэтому

$$|\nabla\lambda_A^{-1}(z)| = \left|\frac{d\lambda_A^{-1}(z)}{d|z|}\right| = |g(t)|,$$

где $t = \frac{\ln(1/|z|)}{2M} \in (0,\pi)$, $g(t) = 4M\sin t - 2\cos t$. Вычисления показывают, что максимум $|g(t)|$ достигается в точке $t_0 \in (\pi/2,\pi)$, определяемой равенством $\operatorname{tg} t_0 = -2M$, и поэтому $\gamma(A) = |g(t_0)| = 2\sqrt{1+4M^2}$.

3. Для заданного числа $c > 0$ постройте примеры трёхсвязных областей Ω_3, удовлетворяющих условию $M_0(\Omega_3) = c$.

4. Докажите следующее утверждение.

Теорема 9.8 (Ф. Г. Авхадиев, см. [2] и [27]). *Пусть $1 \le p < \infty$, и пусть Ω – односвязная или двусвязная область гиперболического типа на расширенной комплексной плоскости. Тогда для любой функции $u \in C_0^\infty(\Omega)$ справедливо неравенство*

$$\iint_\Omega |u(z)|^p\,\lambda_\Omega^2(z)\,dx\,dy \le$$

$$\le \left(\frac{p}{2}\right)^p \iint_\Omega |\nabla u(z)|^p\,\lambda_\Omega^{2-p}(z)\,dx\,dy.$$

Указание. В силу конформной инвариантности неравенство достаточно доказать для полуплоскости и для колец. Для полуплоскости требуемое неравенство можно получить как следствие результата Харди. А именно, полагая $s = 2$ и $f(t) = |u(t,y)|$ ($u \in C_0^\infty(\Pi)$) в неравенстве Харди (9.12), имеем

$$\int_0^\infty \frac{|u(t,y)|^p}{t^2} dt \le p^p \int_0^\infty \left|\frac{\partial u(t,y)}{\partial t}\right|^p t^{p-2}\, dt \le$$

$$\le p^p \int_0^\infty |\nabla u(t,y)|^p\, t^{p-2}\, dt,$$

следовательно,

$$\int_{-\infty}^\infty dy \int_0^\infty \frac{|u(x,y)|^p}{(2x)^2}\, dx \le$$

$$\le \left(\frac{p}{2}\right)^p \int_{-\infty}^\infty dy \int_0^\infty |\nabla u(x,y)|^p\, (2x)^{p-2}\, dx.$$

Остаётся заметить, что $2x = \lambda_\Pi^{-1}(x+iy)$ для полуплоскости П. Таким образом, утверждение будет доказано для любой односвязной области гиперболического типа. Переход к двусвязным областям можно провести по схеме доказательства неравенства леммы 9.1.

5. Развивая описанные выше примеры 1-3 на стр. 143–145, постройте примеры бесконечносвязных областей, для которых максимальные модули $M_0(\Omega)$ или $M_1(\Omega)$ можно вычислить точно.

6. Докажите, что свойство равномерного совершенства границы области, т. е условие $M_0(\Omega) < \infty$, является конформно инвариантным.

Указание. Конформно инвариантной является характеристика $M(\Omega)$, поскольку модули двух конформно эквивалентных двусвязных областей равны по определению. Во-вторых, $M_0(\Omega) < \infty \Leftrightarrow M(\Omega) < \infty$.

7. Пусть $\Omega \subset \mathbb{C}$ и $\Omega' \subset \mathbb{C}$ – конформно эквивалентные области с равномерно совершенными границами. Докажите, что $|M_0(\Omega) - M_0(\Omega')| \leq 1/2$.

8. Докажите теорему: *если* $M_0(\Omega) = \infty$, *то для такой области* Ω *постоянная* $(p/(s-2))^p$ *в теореме 9.6 не может быть уменьшена, т. е. является точной.*

9. Пусть $\Omega \subset \mathbb{C}$ — область, имеющая не менее одной граничной точки $w \neq \infty$, $z = x + iy$. Для конечносвязных областей $G \subset \Omega$ с кусочно-гладкими границами $\partial G \subset \Omega$ рассмотрим изопериметрическое неравенство $A(G) \leq q(\Omega)L(\partial G)$, где площади $A(G)$ и периметры $L(\partial G)$ определены формулами

$$A(G) = \iint_G \frac{dxdy}{\operatorname{dist}^2(z, \partial\Omega)}, \quad L(\partial G) = \int_{\partial G} \frac{|dz|}{\operatorname{dist}(z, \partial\Omega)},$$

а константа $q(\Omega) = \sup_G A(G)/L(\partial G)$. Такую величину будем называть изопериметрической константой для метрики $|dz|/\operatorname{dist}(z, \partial\Omega)$.

Свойство $q(\Omega) < \infty$ присуще не всем областям Ω. Докажите следующий критерий конечности $q(\Omega)$.

Теорема 9.9 (Ф. Г. Авхадиев [3]). *Пусть* $\Omega \subset \mathbb{C}$ — *область, такая, что* $\Omega \neq \mathbb{C}$. *Изопериметрическая константа* $q(\Omega)$ *для метрики* $|dz|/\operatorname{dist}(z, \partial\Omega)$ *является конечной тогда и только тогда, когда граница* $\partial\Omega$ *области* Ω *является равномерно совершенным множеством, причём* $q(\Omega)$ *удовлетворяет неравенству* $q(\Omega) \leqslant 2\left(\pi M_0(\Omega) + \frac{(\Gamma(1/4))^4}{4\pi^2}\right)^2$.

Глава 10

Обобщения конформных отображений

10.1 Квазиконформные отображения

Рассмотрим область (открытое связное множество) $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ и непрерывное отображение $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$. Таким образом, в области Ω задана непрерывная вектор-функция $y = f(x)$ векторного аргумента. Пусть в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ определена декартова система координат. Тогда задание $y = f(x)$ в координатной записи означает задание системы функций многих переменных: для любого $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \Omega$ определены числовые функции

$$y_1 = f_1(x_1, ..., x_n),$$

$$y_2 = f_2(x_1, ..., x_n),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$y_n = f_n(x_1, ..., x_n).$$

Предположим, что отображение $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ является инъективным. Для точек $a = (a_1, ..., a_n) \in \Omega$ рассмотрим верхний предел

$$K(a) = \limsup_{r \to 0^+} \frac{\max_{|x-a|=r} |f(x) - f(a)|}{\min_{|x-a|=r} |f(x) - f(a)|}.$$

Очевидно, что $1 \leq K(a) \leq +\infty$.

Определение. Пусть $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ – непрерывное, инъективное, сохраняющее ориентацию отображение области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Говорят, что отображение f

A) квазиконформно в точке $a \in \Omega$, если для этой точки величина $K(a) < +\infty$;

B) квазиконформно в области Ω, если оно квазиконформно в каждой точке этой области;

C) K-квазиконформно в области Ω для некоторой постоянной $K \geq 1$, если оно квазиконформно в этой области и $\sup\{K(a) : a \in \Omega\} \leq K$.

Рассмотрим частный случай, когда $n = 2$ и f – конформное отображение области Ω. Для обозначения точек будем пользоваться комплексными числами $z = x_1+ix_2$, $a = a_1+ia_2 \in \Omega$. Поскольку в достаточно малой окрестности любой точки $a \in \Omega$ имеем представление

$$f(z) - f(a) = f'(a)(z - a) + o(z - a), \quad f'(a) \neq 0,$$

то легко получаем: для любого $a \in \Omega$

$$K(a) = \lim_{r \to 0} \frac{\max_{|z-a|=r} |f(z) - f(a)|}{\min_{|z-a|=r} |f(z) - f(a)|} = \lim_{r \to 0}(1+O(r)) = 1.$$

Можно доказать и обратное утверждение: если

$$K(a) = 1 \quad \forall a \in \Omega,$$

то f – конформное отображение области Ω. Таким образом, любое 1-квазиконформное отображение области является, в действительности, конформным отображением этой области.

Следует сразу отметить, что для конформных отображений пространственный случай $n \geq 3$ существенно отличается от плоского случая $n = 2$.

В пространственном случае конформные отображения областей также существуют. Например, конформными являются отображения, которые можно представить как суперпозицию отображений вида $f(x) = cx + d$ ($c = \text{const} \neq 0$, d – фиксированная точка) и чётного числа инверсий относительно сфер и (или) плоскостей. Такие отображения называются мёбиусовыми. В плоском случае сохраняющие ориентацию мёбиусовы отображения, как известно из общего курса комплексного анализа, совпадают с дробно-линейными отображениями.

Известна следующая теорема Лиувилля.

Теорема 10.1 *При $n \geq 3$ любое сохраняющее ориентацию конформное отображение области является мёбиусовым.*

Прекрасным введением в теорию конформных отображений при $n \geq 3$ является курс лекций Л. Альфорса [11]: «Преобразование Мёбиуса в многомерном пространстве». По пространственным квазиконформным отображениям и их обобщениям рекомендую также монографию Ю. Г. Решетняка [21].

10.2 Уравнение Бельтрами

Рассмотрим подробнее квазиконформные отображения плоских областей, т. е. двумерную теорию, обобщающую теорию конформных отображений областей на плоскости. Возьмём для простоты гладкое, K-квазиконформное отображение $f : \Omega \to \mathbb{C}$, где $\Omega \subset \mathbb{C}$ – область. Вычислим сначала якобиан отображения. Дифференциал отображения f можно записать в следующем виде:

$$df = f_z dz + f_{\bar{z}} d\bar{z},$$

где f_z, $f_{\bar{z}}$ – частные производные в смысле Виртингера (см. определения в первой лекции). Выделяя вещественные и мнимые части функции и независимой переменной $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, $x + iy = z$, можем вычислить якобиан по известной формуле:

$$J = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}.$$

С другой стороны, имеем

$$|f_z|^2 - |f_{\bar{z}}|^2 =$$

$$= \frac{|u_x + iv_x - i(u_y + iv_y)|^2}{4} - \frac{|u_x + iv_x + i(u_y + iv_y)|^2}{4} =$$

$$= \frac{(u_x+v_y)^2+(v_x-u_y)^2-(v_x+u_y)^2-(u_x-v_y)^2}{4} =$$
$$= u_x v_y - v_x u_y.$$

Таким образом, якобиан отображения f выражается формулой $J = |f_z|^2 - |f_{\bar z}|^2$. В частном случае, когда f — конформное отображение, отсюда получаем уже известную нам формулу $J = |f'(z)|^2$, так как для конформного отображения $f_{\bar z} \equiv 0$, $f_z \equiv f'(z)$.

Оказывается, геометрическое описание квазиконформности отображений областей на плоскости можно заменить следующим: *квазиконформным является любое инъективное отображение, определяемое как решение уравнения Бельтрами*

$$f_{\bar z} = \mu(z) f_z$$

с коэффициентом $\mu(z)$, удовлетворяющим условию непрерывности (или измеримости, как минимум) и неравенству

$$|\mu(z)| < 1 \quad \forall z \in \Omega.$$

В стандартной теории рассматривается случай, когда существует такая постоянная $k \in (0,1)$, что имеет место неравенство $|\mu(z)| \le k$ во всех точках области Ω. Тогда f — K-квазиконформное отображение, причём

$$K = \frac{1+k}{1-k}.$$

Предположим, что решение уравнения Бельтрами удовлетворяет условию $f_z \neq 0$. Тогда

$$J = |f_z|^2 - |f_{\bar{z}}|^2 = |f_z|^2 - |\mu f_z|^2 = |f_z|^2(1 - |\mu|^2) > 0,$$

следовательно, отображение сохраняет ориентацию.

Определим теперь основной гомеоморфизм уравнения Бельтрами. Пусть Ω – ограниченная область на плоскости, и пусть f –решение следующего уравнения Бельтрами

$$f_{\bar{z}} = \mu(z) f_z, \quad |\mu(z)| \leq k = \mathrm{const} < 1, \quad z \in \Omega.$$

Одновременно с этим рассмотрим решение q следующего уравнения Бельтрами на всей плоскости $\mathbb{C}$:

$$q_{\bar{z}} = \tilde{\mu}(z) q_z, \qquad z \in \mathbb{C},$$

где $\tilde{\mu}(z) = \{\mu(z),\ z \in \Omega; \quad 0,\ z \in \mathbb{C} \setminus \Omega\}$.

Справедливо следующее утверждение, доказанное Л. Альфорсом и И. Н. Векуа (см. [10]).

Теорема 10.2 *Пусть коэффициент $\tilde{\mu}(z)$ является измеримой функцией, удовлетворяющей в ограниченной области Ω неравенству*

$$|\mu(z)| \leq k = \mathrm{const} < 1, \quad z \in \Omega.$$

Тогда существует гомеоморфизм

$$q : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$$

расширенной плоскости на себя, обладающее свойствами:

1) отображение q является конформным в области $\mathbb{C} \setminus \Omega$ и $q(\infty) = \infty$;

2) q имеет локально интегрируемые с квадратом обобщённые производные в смысле Соболева в Ω и удовлетворяет уравнению Бельтрами $q_{\bar{z}} = \tilde{\mu}(z)\, q_z$.

Отображение $q : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ называется основным гомеоморфизмом уравнения Бельтрами. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 10.3 *Пусть Ω — область, ограниченная спрямляемой кривой Жордана, и пусть f — непрерывная функция, обладающая локально интегрируемыми с квадратом обобщёнными производными в смысле Соболева и удовлетворяющая уравнению Бельтрами*

$$f_{\bar{z}} = \mu(z) f_z, \quad z \in \Omega,$$

с условием

$$|\mu(z)| \leq k = \mathrm{const} < 1, \quad z \in \Omega.$$

Тогда f может быть представлена как суперпозиция аналитической функции и основного гомеоморфизма, т. е. справедливо представление

$$f(z) = \Phi(q(z)), \quad z \in \Omega,$$

где Φ – функция, аналитическая в области $\Omega_1 = q(\Omega)$.

Схема доказательства теоремы. Пусть f – любое непрерывное решение уравнения Бельтрами, обладающее локально интегрируемыми с квадратом обобщёнными производными в смысле Соболева и удовлетворяющее уравнению Бельтрами $f_{\bar{z}} = \mu(z) f_z, \quad z \in \Omega$. Определим функцию Φ равенством $f(z) = \Phi(q(z))$, т. е. соотношениями $\Phi(w) = f(q^{-1}(w)), \quad w = q(z)$. Легко получаем, что Φ — аналитическая функция, так как для неё выполняются условия Коши-Римана $\Phi_{\bar{q}} = 0$ в силу следующих простых вычислений.

А именно, с использованием уравнений Бельтрами для f и q, а также соотношений $\bar{q}_{\bar{z}} = \overline{(q_z)}$, $\bar{q}_z = \overline{q_{\bar{z}}}$, для $f(z) = \Phi(q(z))$ будем иметь

$$f_{\bar{z}} = \mu f_z \Longleftrightarrow \Phi_q q_{\bar{z}} + \Phi_{\bar{q}} \bar{q}_{\bar{z}} = \mu\, \Phi_q q_z + \mu\, \Phi_{\bar{q}} \bar{q}_z \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \Phi_{\bar{q}} \left[\bar{q}_{\bar{z}} - \mu \bar{q}_z\right] = 0 \Longrightarrow \Phi_{\bar{q}} = 0,$$

так как $\bar{q}_{\bar{z}} - \mu \bar{q}_z = \overline{(q_z)}(1 - \mu\bar{\mu}) = \overline{(q_z)}(1 - |\mu|^2)$, и поэтому $|\bar{q}_{\bar{z}} - \mu \bar{q}_z| \geq \sqrt{J_q}\,(1 - |\mu|^2) > 0$.

Легко получить и обратное утверждение: *если Φ – аналитическая функция, определенная в Ω_1, то функция вида $f = \Phi \circ q$ удовлетворяет уравнению Бельтрами.*

Действительно, поскольку $q_{\bar{z}} = \mu q_z, z \in \Omega$ и $\Phi_{\bar{q}} = 0$ в силу условий Коши-Римана, будем иметь равенства $f_z = \Phi_q q_z + \Phi_{\bar{q}} \bar{q}_z = \Phi_q q_z$ и $f_{\bar{z}} = \Phi_q q_{\bar{z}} + \Phi_{\bar{q}} \bar{q}_{\bar{z}} = \Phi_q \mu q_z$. Отсюда непосредственно следует, что $f = \Phi \circ q$ удовлетворяет уравнению Бельтрами. Требуемые свойства производных f индуцируются соответствующими свойствами производных q и гладкостью аналитической функции.

10.3 Гармонические отображения

В 1984 году английские математики Дж. Клуни и Т. Шейл-Смолл опубликовали большую, программную статью, инициируя изучение классов однолистных гармонических отображений $f = \varphi + i\psi$ единичного круга. Для гармонических отображений они рассматривали прямые аналоги класса $\mathbb{S}$ конформных отображений и его подклассов. Базовые результаты возникшей на этой основе теории можно найти в книге П. Дюрена [44]. Это направление интенсивно развивается и в настоящее время.

Мы начнём с описания примера, взятого из нашей статьи [29]. Как обычно, обозначим $z = x + iy = re^{i\theta}$. Потребуются правая полуплоскость

$$H^+ = \{z = x + iy \in \mathbb{C} : x > 0, -\infty < y < \infty\}$$

и горизонтальная полуполоса

$$\Pi^+ = \{w = u + iv \in \mathbb{C} : u > 0, -\pi/2 < v < \pi/2\}.$$

Пример. *Рассмотрим отображение* $f_0 : H^+ \to \Pi^+$, *определяемое формулами:* $z = x + iy = re^{i\theta} \in H^+$ *и*

$$w = f_0(z) = x + i\theta, \quad x > 0, -\pi/2 < \theta < \pi/2.$$

Вещественная и мнимая части этого отображения

$$u_0(x, y) = Ref_0(z) = x,\ \ v_0(x, y) = Imf_0(z) = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$$

являются гармоническими функциями. Обратим внимание: $\theta = \operatorname{arctg}(y/x)$ *– гармоническая функция как мнимая часть аналитической функции* $\ln z$*. Ясно также, что отображение* $f_0 : H^+ \to \Pi^+$ *— сюръекция.*

Фиксируя однозначную ветвь логарифма условием $\ln 1 = 0$ *и полагая*

$$h_0(z) = \frac{z + \ln z}{2}, \quad g_0(z) = \frac{z - \ln z}{2},$$

будем иметь

$$w = f_0(z) = h_0(z) + \overline{g_0(z)}.$$

Пусть $z = x + iy = re^{i\theta} \in H^+$*. Якобиан отображения*

$$J_{f_0}(z) = \frac{\partial\theta}{\partial y} \equiv |h_0'(z)|^2 - |g_0'(z)|^2 = \frac{x}{r^2}$$

положителен в области H^+*, следовательно, отображение сохраняет ориентацию. Очевидно, функция* f_0 *и её частные производные непрерывно продолжимы на границу полуплоскости, за исключением точек* 0 *и* ∞*. Но отображение* f_0 *вырождено на границе: образами лучей* $\{x = 0,\, 0 < y < \infty\}$ *и* $\{x = 0,\, -\infty < y < 0\}$ *оказываются всего лишь две точки* $w_1 = i\pi/2$ *и* $w_2 = -i\pi/2$*, соответственно. Вся остальная часть границы полуполосы* Π^+ *порождается предельными значениями* $f_0(z)$ *при* $z \to 0$ *и* $z \to \infty$*. Аналогичное граничное поведение имеет и обратное отображение* $f_0^{-1}(w) = u + iu \operatorname{tg} v$*, причём мнимая часть* $f_0^{-1}(w)$ *не является гармонической функцией.*

В 1927 году фон Мизес, изучая погранслой течения жидкости вблизи твердого тела, изобрёл отображения вида

$$f(z) = x + i\psi(x, y)$$

области $\Omega \subset \mathbb{C}$, где $\psi : \Omega \to \mathbb{R}$ – гармоническая функция (мнимая часть комплексного потенциала). Очевидно, наш пример $f_0(z) = x + i\theta$ представляет собой частный случай отображения фон Мизеса.

Как показывают исследования В. Н. Монахова (см. его книгу [50]), «пересадка» краевых задач с использованием координат фон Мизеса (x, ψ) является плодотворным приёмом в аэрогидродинамике при решении ряда проблем, математические модели которых связаны с уравнениями эллиптического типа.

В заключение приведём одно неожиданное утверждение о том, что для многих областей локальная однолистность функции фон Мизеса влечёт её глобальную однолистность.

Теорема 10.4 (Ф. Г. Авхадиев [29]). *Пусть $\Omega \subset \mathbb{C}$ – область, выпуклая в направлении оси ординат: для любой пары точек $z_1 = x + iy_1 \in \Omega$, $z_2 = x + iy_2 \in \Omega$ отрезок $[z_1, z_2]$ также лежит в этой области.*

Функция фон Мизеса вида $f(z) = x + i\psi(x, y)$, где $\psi : \Omega \to \mathbb{R}$ – гармоническая функция, является однолистной в области Ω тогда и только тогда, когда она является локально однолистной в Ω.

Доказательство. Нетрудно видеть, что достаточно доказать следующее утверждение: *если* $f(z) = x + i\psi(x, y)$

осуществляет сохраняющее ориентацию локально однолистное отображение области Ω*, то* $f(z)$ *– однолистная функция в* Ω.

Докажем это утверждение от противного: предположим, что существует пара точек $z_1 = x_1 + iy_1 \in \Omega$, $z_2 = x_2 + iy_2 \in \Omega$, таких, что $z_1 \neq z_2$ и $f(z_1) = f(z_2)$, т. е. $x_1 + i\psi(x_1, y_1) = x_2 + i\psi(x_2, y_2)$. Из последнего равенства следует, что $x_1 = x_2$ и $\psi(x_1, y_1) = \psi(x_1, y_2)$.

Поскольку область Ω выпукла в направлении оси ординат, то имеем включение $[x_1 + iy_1, x_1 + iy_2] \subset \Omega$. По теореме Лагранжа о конечных приращениях существует такая промежуточная точка

$$x_1 + iy_0 \in [x_1 + iy_1, x_1 + iy_2],$$

что $\psi'_y(x_1, y_0) = 0$. Полученное равенство противоречит локальной однолистности f.

Действительно, якобиан отображения фон Мизеса $z \to x + i\psi(x, y)$ определяется формулой

$$J_f(x + iy) = \frac{\partial\psi(x, y)}{\partial y}, \quad x + iy \in \Omega.$$

Следовательно, $J_f(x_1 + iy_0) = 0$, что противоречит локальной однолистности f, так как согласно известной теореме Леви справедливо следующее утверждение.

Теорема 10.5 (H. Lewy, см. [44]). *Если гармоническая функция* $f = \varphi + i\psi : \Omega \to \mathbb{C}$ *локально однолистна в точке* $z_0 \in \Omega$ *(т. е. она однолистна в некоторой окрестности этой точки), то её якобиан* $J_f(z_0) \neq 0$.

Этим и завершается доказательство.

10.4 Задачи и упражнения

1. Найти квазиконформное отображение квадрата

$$\{z = x + iy : 0 < x < 1,\, 0 < y < 1\}$$

на прямоугольник

$$\{w = u + iv : 0 < u < 4,\, 0 < v < 2\},$$

переводящее вершины квадрата в вершины прямоугольника.

Решение. Искомое отображение можно определить равенствами $u = 4x,\ v = 2y$, или, в комплексной записи, как

$$w = u + iv = 4x + i2y = 4\frac{z + \bar{z}}{2} + i2\frac{z - \bar{z}}{2i} = 3z + \bar{z}.$$

Функция w удовлетворяет уравнению Бельтрами $w_{\bar{z}} = (1/3)w_z$, и построенное нами отображение является квазиконформным с коэффициентом $K = 2$.

2. Как хорошо известно, конформное отображение круга $|z| < 1$ на круг $|w| < 1$ даётся функцией $w = (z - a)/(1 - \bar{a}z)$, где a — постоянная, $|a| < 1$. Зафиксируем z как точку единичного круга и рассмотрим $w = (z-a)/(1-\bar{a}z)$ как функцию переменной a, $|a| < 1$, т. е. рассмотрим функцию $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$, определённую равенствами

$$w = f(a) := \frac{z-a}{1-\bar{a}z}, \quad |a| < 1,$$

при фиксированном z, $|z| < 1$. Покажите, что получаемое таким образом отображение является квазиконформным.

Указание. Покажите прямыми вычислениями, что $f(a_1) \neq f(a_2)$ для $a_1 \neq a_2$ $(a_1, a_2 \in \mathbb{D})$. Кроме того, простые вычисления дают

$$f_{\bar{a}} = \frac{z-a}{(1-\bar{a}z)^2} z, \quad f_a = \frac{-1}{1-\bar{a}z}.$$

Следовательно,

$$\frac{f_{\bar{a}}}{f_a} = -\frac{z-a}{1-\bar{a}z} z = \mu(a).$$

Отображение $f : \{a : |a| < 1\} \to \{w : |w| < 1\}$ является квазиконформным, причём $|\mu(a)| \leq |z| = k < 1$.

3. Докажите, что не существует K-квазиконформного отображения единичного круга на всю плоскость.

4. Докажите аналог теоремы Каратеодори о граничном соответствии для K-квазиконформных отображений плоских областей.

5. Пусть $f : \Omega \to D$ — K-квазиконформное отображение жордановой области на единичный круг, удовлетворяющее уравнению Бельтрами $f_{\bar{z}} = \mu(z) f_z$ с условием $|\mu(z)| \leq k = \mathrm{const} < 1, \quad z \in \Omega.$

Докажите, что такое отображение можно определить, причём единственным образом, если задать одну из нормировок B или C, рассмотренных нами в первой главе.

6. Докажите, что справедливы следующие утверждения:

6.1) если отображения f является K-квазиконформным, то и обратное отображение f^{-1} также K-квазиконформно;

6.2) суперпозиция K_1-квазиконформного и K-квазиконформного отображений будет K_1K_2-квазиконформным отображением.

Если $K_1 = 1$ или $K_2 = 1$, то, соответственно, будем иметь равенства $K_1K = K$ или $KK_2 = K$, поэтому мы можем утверждать: *класс K-квазиконформных отображений инвариантен относительно конформных отображений.*

7. Попробуйте самостоятельно разобраться в доказательстве следующей теоремы Мори, приведённой в книге [10], с. 48-51.

Теорема 10.6 *Пусть $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ – K-квазиконформное отображение единичного круга на себя с нормировкой $\varphi(0) = 0$. Тогда функция φ является гёльдеровой, точнее, для любых двух точек z_1, z_2 из единичного круга имеет место неравенство*

$$|\varphi(z_1) - \varphi(z_2)| < 16\,|z_1 - z_2|^{1/K}, \quad z_1 \neq z_2,$$

причём константа 16 *не может быть уменьшена.*

8. Докажите, что гармоническая функция

$$w = f(z) = h(z) + \overline{g(z)},$$

где

$$h(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} \left[1 + \frac{1 + (-1)^{n-1}}{n}\right] z^n,$$

$$g(z) = \sum_{n=2}^{\infty} \left[1 - \frac{1 + (-1)^{n-1}}{n}\right] z^n,$$

осуществляет сохраняющее ориентацию однолистное отображение единичного круга $|z| < 1$ на полуполосу $\Pi^+ = \{w = u + iv \in \mathbb{C} : u > 0, -\pi/2 < v < \pi/2\}$. Исследуйте граничное поведение этой функции.

9. Докажите следующее утверждение.

Теорема 10.7 (Ф. Г. Авхадиев, Р. Г. Насибуллин, И. К. Шафигуллин [7]). *Пусть функции h и g являются голоморфными в единичном круге $\mathbb{D}$ и удовлетворяют условиям: $h'(z) \neq 0$ и $|\omega(z)| < 1$ в любой точке $z \in \mathbb{D}$, где $\omega(z) := g'(z)/h'(z)$. Если выполняется неравенство*

$$|\omega(z)| + (1 - |z|^2) \left| z \frac{h''(z)}{h'(z)} \right| \leq 1 \qquad \forall z \in \mathbb{D},$$

то отображение $f = h + \overline{g}$ является однолистным в круге $\mathbb{D}$.

Глава 11

О задачах, упражнениях и литературе

В конце каждой из десяти предыдущих глав приведены задачи и упражнения для самостоятельной работы. Некоторые задачи снабжены схемами решения или указаниями. Часть задач весьма трудны, для их решения потребуется изучение дополнительной литературы.

Как показал опыт, практические занятия со студентами по данному курсу целесообразно начинать с решения более простых примеров из стандартных задачников по комплексному анализу.

Отметим, что геометрической теории функций посвящены несколько тысяч статей в научных журналах и более ста монографий. В приведённом ниже списке литературы указаны лишь те источники, на которые имеются ссылки в тексте учебного пособия.

Список литературы содержит двадцать монографий, ряд обзорных и оригинальных статей, отражающих в целом основные разделы геометрической теории функций комплексного переменного.

Литература

[1] Ф. Г. Авхадиев. *Конформные отображения и краевые задачи.* 2-е изд., перераб. и доп. Казань: Изд-во Казанского университета. 2019, 412 стр.

[2] Ф. Г. Авхадиев. *Конформно инвариантные неравенства.* Казань: Изд-во Казанского университета. 2020, 260 стр.

[3] Ф. Г. Авхадиев. *Аналог метрики Пуанкаре и изопериметрические константы.* Известия вузов. Математика, 2024, №9, 92–99.

[4] Ф. Г. Авхадиев, Л. А. Аксентьев. *Основные результаты в достаточных условиях однолистности аналитических функций.* Успехи матем. наук, 1975. т. 30. № 4(184), 3–63.

[5] Ф. Г. Авхадиев, А. Р. Касимов. *Интегральные оценки решений краевых задач для уравнения Пуассона.* Изв. вузов. Матем., 2023, № 10, 70–76.

[6] Ф. Г. Авхадиев, И. Р. Каюмов, С. Р. Насыров. *Экстремальные проблемы в геометрической теории функций.* Успехи матем. наук, 2023. т. 78. № 2(470), 3–70.

[7] Ф. Г. Авхадиев, Р. Г. Насибуллин, И. К. Шафигуллин. *Условия однолистности типа Беккера для гармонических отображений.* Изв. вузов. Матем., 2016, № 11, 80–85.

[8] Л. А. Аксентьев. *Сборник задач по теории функций комплексного переменного и операционному исчислению.* Учебное пособие.(4-ое изд.) Казань: КГУ, 2005, 122 стр.

[9] И. А. Александров, И. М. Милин. *О гипотезе Бибербаха и логарифмических коэффициентах однолистных функций.* Изв. вузов. Матем., 1989. № 8, 3–15.

[10] Л. Альфорс. *Лекции по квазиконформным отображениям.* Москва: Мир. 1969, 132 стр.

[11] Л. Альфорс. *Преобразования Мёбиуса в многомерном пространстве.* Москва: Мир. 1986, 112 стр..

[12] Н. Х. Арутюнян, Б. Л. Абрамян. *Кручение упругих тел.* Москва: ГИФМЛ. 1963, 686 стр.

[13] Ф. Д. Гахов. *Краевые задачи.* Москва: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит. 1977, 640 стр.

[14] Г. М. Голузин. *Геометрическая теория функций комплексного переменного.* Москва: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит. 1966, 628 стр.

[15] В. В. Горяйнов. *Полугруппы аналитических функций в анализе и приложениях*. Успехи матем. наук, 2012. т. 67. № 6(408), 5—52.

[16] В. Н. Дубинин. *Симметризация в геометрической теории функций комплексного переменного*. Успехи матем. наук, 1994. т. 49. № 1(295), 3–76.

[17] Дж. Литлвуд. *Математическая смесь*. Перевод с англ. 5-е изд. Москва: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит. 1990, 140 стр.

[18] Д. В. Маклаков. *Нелинейные задачи гидродинамики потенциальных течений с неизвестными границами*. Москва: Янус-К. 1997, 280 стр.

[19] М. В. Павлов, Д. В. Прохоров, А. Ю. Васильев, А. М. Захаров. *Эволюция Лёвнера и конечномерные редукции интегрируемых систем*. Теорет. и матем. физика (ТМФ), 2014, 181:1, 155–172.

[20] Г. Полиа, Г. Сегё. *Изопериметрические неравенства в математической физике*. Москва: Физматгиз. 1962, 336 стр.

[21] Ю. Г. Решетняк. *Пространственные отображения с ограниченным искажением*. Новосибирск: Наука. 1982, 285 стр.

[22] А. Ю. Солынин. *Модули и экстремально-метрические проблемы*. Алгебра и анализ, 1999. **11**:1, 3–86.

[23] Е. Титчмарш. *Теория функций.* Москва: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит. 1980, 464 стр.

[24] Г. Г. Харди, Дж. Е. Литтльвуд и Г. Полиа. *Неравенства.* М.: ИЛ. 1948, 456 стр.

[25] D. A. Abramov, F. G. Avkhadiev, D. Kh. Giniyatova. *Versions of the Schwarz lemma for domain moments and the torsional rigidity.* Lobachevskii J. Math., 2011, 32, no. 2, 149–158.

[26] A. Ancona. *On strong barriers and an inequality of Hardy for domains in* $\mathbb{R}^n$. J. London Math. Soc., 1986, (2) 37, 274–290.

[27] F. G. Avkhadiev. *Hardy type inequalities in higher dimensions with explicit estimate of constants.* Lobachevskii J. Math., 2006, 21, 3–31.

[28] F. G. Avkhadiev. *Hardy-Rellich inequalities in domains of the Euclidean space.* J. Math. Anal. Appl., 2016, **442** (5), 469–484.

[29] F. G. Avkhadiev. *On Locally Invertible Harmonic Mappings of Plane Domains.* Lobachevskii J. Math., 2017, 38, no. 3, 400–407.

[30] F. G. Avkhadiev. *Euclidean maximum moduli of plane domains and their applications.* Complex Variables and Elliptic Equations, 2019, **64** (11), 1869–1880.

[31] F. Avkhadiev. *Selected results and open problems on Hardy-Rellich and Poincaré-Friedrichs inequalities.* Anal. Math. Phys., 2021, V. 11, 134. 1–20.

[32] F. G. Avkhadiev, A. R. Kacimov. *The Saint-Venant type isoperimetric inequalities for assessing saturated water storage in lacunary shallow perched aquifers.* ZAMM-Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik, 2022, Vol. 103, Is. 1, 1–22.

[33] F. G. Avkhadiev, I. R. Kayumov. *Comparison theorem of isoperimetric type for moments of compact sets.* Collectanea Math., 2004, 55, no.1, 1–9.

[34] F. G. Avkhadiev and A. Laptev. *Hardy Inequalities for Nonconvex Domains.* Int. Math. Series «Around Research of Vladimir Maz'ya, I». Function Spaces, **11**, Springer, 2010, 1–12.

[35] F. G. Avkhadiev, D. V. Maklakov. *A theory of Pressure Envelope for Hydrofoils.* J. «Ship Technology Research Schiffsthechnik», 1995, V. 42, No. 2, pp. 81–102.

[36] F. G. Avkhadiev, Ch. Pommerenke, K.-J. Wirths. *Sharp inequalities for the coefficients of concave schlicht functions.* Comment. Math. Helv., 2006, **81**, 801–807.

[37] F. G. Avkhadiev, R. G. Salahudinov. *Isoperimetric Inequalities for Conformal Moments of Plane Domains.* J. of Inequal. Appl., 2002, 7(4), 593–601.

[38] F. G. Avkhadiev, K.-J. Wirths. *The conformal radius as a function and its gradient image*. Isr. J. Math., 2005, 145, 349–374.

[39] F. G. Avkhadiev, K.-J. Wirths. *The punishing factors for Convex pairs are* 2^{n-1}. Revista Math. Iberoamericana. 2007, V.23, No.3, 843–860.

[40] F. G. Avkhadiev, K.-J. Wirths. *Unified Poincaré and Hardy inequalities with sharp constants for convex domains*. Z. Angew. Math. Mech. (ZAMM), 2007, 87: (8-9), 632–642.

[41] F. G. Avkhadiev, K.-J. Wirths. *Schwarz-Pick Type Inequalities*. Basel - Boston - Berlin: Birkhäuser Verlag, 2009, 156 pp.

[42] C. Bandle. *Isoperimetric Inequalities and Applications*. Pitman Monographs and Studies in Math., v. 7, Boston, 1980, 228 pp.

[43] A. E. Beardon, Ch. Pommerenke. *The Poincaré metric of plane domains*. J. London Math. Soc., 1978, (2) 18, 475–483.

[44] P. Duren. *Harmonic mappings in the plane*. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2004, 156 pp.

[45] J. L. Fernández. *Domains with Strong Barrier*. Revista Matematica Iberoamericana, 1989, 5, 47–65.

[46] A. W. Goodman. *Univalent functions*. Tampa, FL: Mariner Publ. Comp. 1983.

[47] J. A. Hempel. *The Poincaré metric on the twice punctured plane and the theorems of Landau and Schottky*. J. London M.S., 1979, (2) 20, 435–445.

[48] J. A. Jenkins. *On explicit bounds in Landau's Theorem II*. Can. J. Math., 1981, 33, 559–562.

[49] V. M. Miklyukov, M. R. Vuorinen. *Hardy's inequality for $W_0^{1,p}$- functions on Riemannian manifolds*. Proc. Amer. Math. Soc., 1999, 127, no. 9, 2145–2154.

[50] V. N. Monakhov. *Boundary-value Problems with Free Boundaries for Elliptic Systems*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, Translations of Mathematical Monographs Volume: 57; 1983, 522 pp.

[51] B. Osgood. *Some properties of f''/f' and the Poincaré metric*. Indiana University Math. J., 1982, 31, 449–461.

[52] Ch. Pommerenke. *Univalent functions*. Vandenhoeck and Ruprecht, Göttingen, 1975, 382 pp.

[53] Ch. Pommerenke. *Uniformly perfect sets and the Poincaré metric*. Arch. Math., 1979, 32, 192–199.

[54] R. G. Salahudinov. *Isoperimetric Inequality for Torsional Rigidity in the Complex Plane*. J. of Inequal. Appl., 2001, 6(4), 253–260.

[55] O. D. Strack *Analytical Groundwater Mechanics*. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2017, 435 pp.

Учебное издание

Авхадиев Фарит Габидинович

ОСНОВЫ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ

Учебное пособие

Компьютерная вёрстка
Ф.Г. Авхадиева

Дизайн обложки
З.Р. Ахтямовой

Подписано в печать 05.03.2025.
Бумага офсетная. Печать цифровая.
Формат 60x84 1/16. Гарнитура «Book Antiqua».
Усл. печ. л. 11,13. Уч.-изд. л. 9,10.
Тираж 50 экз. Заказ 60

Отпечатано в ИП Селивананова А.Г.
г. Казань, ул. Некрасова, 38