КАЗАНСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Ф.Г. АВХАДИЕВ

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

Учебное пособие

КАЗАНЬ
2024

УДК 517(075.8)
ББК 22.161я73
А22

Печатается по рекомендации учебно-методической комиссии Института математики и механики имени Н.И. Лобачевского Казанского (Приволжского) федерального университета (протокол № 1 от 8 октября 2024 г.)

Авхадиев Ф.Г.
А22 Интегральные неравенства: учебное пособие / Ф.Г. Авхадиев. – Казань: Издательство Казанского университета, 2024. – 140 с.

ISBN 978-5-00130-848-5

В учебном пособии представлены семестровый курс лекций автора, а также задачи и упражнения для практических занятий по интегральным неравенствам теории функций.

Пособие предназначено для студентов, знакомых с основами вещественного и комплексного анализа.

Библиография: 22 названия.

УДК 517(075.8)
ББК 22.161я73

ISBN 978-5-00130-848-5

Посвящаю моему внуку Максиму

Предисловие

Дифференциальное исчисление даёт метод нахождения максимумов и минимумов функций. А именно, если функция

$$f : [a, b\,] \to \mathbb{R}$$

является дифференцируемой, то каждый из нас, в принципе, может найти величины

$$M = \max_{x \in [a,b]} f(x), \quad m = \min_{x \in [a,b]} f(x)$$

и записать неравенства

$$m \le f(x) \le M, \quad x \in [a, b].$$

Оговорка "в принципе" не является случайной, так как для достаточно сложных функций могут возникнуть непреодолимые трудности с точным решением уравнения $f'(x) = 0$ и с определением точных значений функции в критических точках и на концах отрезка $[a, b]$.

Имеются и фундаментальные методы математического анализа, позволяющие получать интегральные неравенства. К ним относятся методы вариационного исчисления и оптимального управления. Этими методами доказаны различные точные оценки, сформулированные в виде неравенств для интегралов. Экстремальные функции определяются как решения краевых задач для уравнений Эйлера–Лагранжа, что представляет собой сопутствующую, часто сложную, проблему.

Известные методы классического дифференциального и вариационного исчисления можно назвать стандартными методами решения экстремальных задач теории функций. Как отмечают Харди, Литтльвуд и Пойа (см. книгу [1], пункты 1.7 и 7.2), наиболее употребительные интегральные неравенства доказываются нестандартными методами.

Отметим, что разнообразные интегральные неравенства играют существенную роль в вещественном, комплексном и функциональном анализе, в теории дифференциальных, интегральных уравнений и оптимального управления, в вычислительной математике, в интегральной геометрии, в математической физике, в квантовой механике, в теории вероятностей, в математической статистике и в ряде других областей математики и физики.

Учебное пособие состоит из четырёх глав. Описаны с доказательствами три группы базовых неравенств: 1) неравенства Коши-Буняковского-Шварца, Гёльдера, Минковского, Юнга, Гильберта-Шура; 2) неравенства Гаусса, Чебышёва, Харди для монотонных функций и неравенство Йенсена; 3) ряд геометрических неравенств, включая классическое изопериметрическое неравенство и неравенство Брунна-Минковского. В дополнительной главе 4 приведена литература с комментариями и перечислены вопросы к экзамену.

Каждая из трёх основных глав книги завершается задачами и упражнениями для самостоятельного решения. Большинство заданий снабжены подсказками по выбору метода решения или краткими схемами доказательства. Отметим также, что кроме классических результатов в книгу включён и новый материал, взятый из современных научных статей. Этот материал представлен в указанных задачах и упражнениях к главам и лишь частично включён в основной текст во второй и в третьей главах.

Теория интегральных неравенств является актуальной тематикой, интенсивно развивается и содержит ряд нерешённых задач. В частности, несколько направлений современных исследований описаны в монографии Прохорова, Степанова и Ушаковой [11], в монографии [12] и обзорной статье [22] автора.

Работа поддержана Российским научным фондом, проект № 23-11-00066.

Казанский федеральный университет,
20 августа 2024 года,
Ф.Г. Авхадиев

Оглавление

1 Классические неравенства **8**

1.1 Теоремы сравнения для средних 8

1.2 Неравенство Коши-Буняковского-Шварца 12

1.3 Неравенство Гёльдера 15

1.4 Неравенства Минковского и Юнга 21

1.5 Неравенство Гильберта-Шура 27

1.6 Задачи и упражнения 33

2 Элементы выпуклого анализа **46**

2.1 Неравенства Гаусса, Чебышёва и Харди . 47

2.2 Неравенство Гаусса-Винклера 57

2.3 Свойства выпуклых функций 64

2.4 Неравенство Йенсена 71

2.5 Преобразование Лежандра 73

2.6 Аналоги неравенства Гёльдера-Йенсена . 76

2.7 Задачи и упражнения 83

3 Геометрические неравенства **94**

3.1 Изопериметрическое неравенство 94

3.2 Неравенство Брунна-Минковского 99

3.3 Теорема Прекопы и Лайндлера 105

3.4 Изопериметрическая монотонность 110

3.5 Оценки для конформных моментов 115

3.6 Задачи и упражнения 126

4 Литература и вопросы к экзамену 134

4.1 Рекомендуемая литература 134

4.2 Вопросы к экзамену 138

Глава 1

Классические неравенства

Мы начнём изложение с теорем сравнения для арифметических, геометрических и гармонических средних.

1.1 Теоремы сравнения для средних

Докажем обобщения следующих двух элементарных неравенств: для любых двух чисел $a > 0$ и $b > 0$

$$\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \leq \sqrt{a\,b} \leq \frac{a+b}{2}.$$

Равенства в этих неравенствах достигаются тогда и только тогда, когда $a = b$. Заметим, что элементарными преобразованиями оба неравенства сводятся к тривиальному неравенству

$$\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2 \geq 0,$$

в котором равенство имеет место тогда и только тогда, когда $\sqrt{a} = \sqrt{b}$, т. е. когда $a = b$.

Первое утверждение — хорошо известное соотношение между арифметическим и геометрическим средними заданных положительных чисел, т. е. величинами

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}, \qquad \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}.$$

Теорема 1.1 *Пусть* $a_k > 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, n)$. *Тогда*

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n},$$

причём равенство в этом неравенстве имеет место тогда и только тогда, когда $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

Доказательство. Имеется много доказательств этого замечательного факта, приведём одно из них.

Пользуемся методом математической индукции. База индукции $n = 2$. Пусть доказываемое утверждение имеет место при $n = k$. Требуется доказать, что оно верно тогда и для $n = k + 1$.

Обозначим $s := a_1 + a_2 + \cdots + a_k + a_{k+1}$ и $x := a_{k+1}$. Тогда доказываемое неравенство запишется в виде

$$x \prod_{j=1}^{k} a_j \leq \frac{s^{k+1}}{(k+1)^{k+1}}.$$

Произведение k чисел, стоящее в левой части этой формулы, не превосходит $(s-x)^k/k^k$ по предположению индукции, причём равенство возможно лишь при условии $a_1 = a_2 = \cdots = a_k = (s - x)/k$. Поэтому доказываемое неравенство для $n = k + 1$ будет справедливо, если мы установим, что

$$f(x) := x(s-x)^k \le \frac{s^{k+1}k^k}{(k+1)^{k+1}} \quad (\forall x \in (0,s)).$$

Имеем: $f(0) = f(s) = 0$. Кроме того, при $x \in (0,s)$ функция $f(x) > 0$, а её производная $f'(x) = 0$ в единственной точке $x_0 = s/(k+1)$. Поэтому $f(x) \le f(x_0) = s^{k+1}k^k/(k+1)^{k+1}$, $f(x) < f(x_0)$ при $x \in (0,s) \setminus \{x_0\}$.

Тем самым, неравенство доказано.

Равенство в неравенстве $f(x) \le f(x_0)$ реализуется тогда и только тогда, когда $x = x_0$ и

$$\sqrt[k]{a_1 a_2 \dots a_k} = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_k}{k},$$

следовательно, по предположению индукции будем иметь: $a_1 = a_2 = \dots = a_k = (s - x_0)/k$. Но тогда $a_{k+1} = x_0 = s/(k+1)$ и $a_1 = a_2 = \dots = a_k = (s-x_0)/k = s/(k+1)$. Таким образом, равенство в случае $n = k+1$ имеет место тогда и только тогда, когда $a_1 = a_2 = \dots = a_k = a_{k+1} = x_0 = s/(k+1)$, что и требовалось доказать.

Среднее гармоническое

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}}$$

оказывается наименьшим среди трёх рассматриваемых средних.

Теорема 1.2 *Пусть* $a_k > 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, n)$. *Тогда*

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n},$$

причём равенство в этом неравенстве имеет место тогда и только тогда, когда $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

Доказательство. Положим

$$b_k := \frac{1}{a_k} \quad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

и легко убедимся, что доказываемое неравенство равносильно соотношению между арифметическим и геометрическим средними для введённых положительных чисел $b_k > 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, n)$.

Действительно, имеем

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} = \frac{1}{\sqrt[n]{b_1 b_2 \ldots b_n}},$$

поэтому доказываемое неравенство перепишется как соотношение

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}} = \frac{n}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n} \leq \frac{1}{\sqrt[n]{b_1 b_2 \ldots b_n}},$$

что равносильно верному неравенству

$$\sqrt[n]{b_1 b_2 \ldots b_n} \leq \frac{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}{n}.$$

Случай равенства получается легко, так как $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ тогда и только тогда, когда $b_1 = b_2 = \cdots = b_n$.

1.2 Неравенство Коши-Буняковского-Шварца

Пусть $-\infty < a < b < \infty$. На отрезке $[a, b]$ рассмотрим функции

$$f : [a, b] \to \mathbb{R}, \quad g : [a, b] \to \mathbb{R}$$

и неравенство Коши-Буняковского-Шварца.

Теорема 1.3 *Пусть функции f, $g \in L^2[a, b]$. Тогда*

$$\left| \int_a^b f(x)g(x)dx \right| \leq \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2 dx \int_a^b |g(x)|^2 dx}. \quad (1.1)$$

Равенство имеет место тогда и только тогда, когда f и g являются линейно зависимыми как элементы $L^2[a, b]$, т. е. $f(x)$ и $g(x)$ являются линейно зависимыми на множестве $[a, b] \setminus E$, где E — некоторое множество лебеговой меры нуль.

Доказательство. Пусть

$$A := \int_a^b |f(x)|^2 dx, \quad C := \int_a^b |g(x)|^2 dx$$

и

$$B := \int_a^b f(x)g(x)\, dx.$$

Если f (или g) является нуль-функцией на $[a, b]$, т. е. равна нулю на $[a, b] \setminus E$ для некоторого множества E, $\mu(E) = 0$, то $A = B = 0$ (или $C = B = 0$). Тогда

$AC = 0 = B^2$, т. е. неравенство (1.1) верно тривиальным образом.

Предположим, что $A > 0$, $C > 0$. Тогда для любого $t \in \mathbb{R}$ можем записать соотношения

$$AC - B^2 + (At - B)^2 = A^2t^2 - 2ABt + AC =$$

$$= A \int_a^b (tf(x) - g(x))^2 \, dx \geq 0.$$

Отсюда следует, что для любого $t \in \mathbb{R}$

$$AC - B^2 + (At - B)^2 \geq 0.$$

Взяв $t = t_0 = B/A$, получаем неравенство (1.1).

Кроме того, ясно, что равенство $AC = B^2$ имеет место тогда и только тогда, когда

$$\int_a^b (t_0 f(x) - g(x))^2 \, dx = 0.$$

Очевидно, последнее равенство равносильно тому, что

$$t_0 f(x) - g(x)$$

является нуль-функцией.

Итак, неравенство Коши-Буняковского-Шварца сформулировано и доказано для простейшего случая, когда рассматриваются интегралы по конечному отрезку.

Замечание 1. Точно так же можно доказать неравенство Коши-Буняковского-Шварца в более общих случаях, предполагая существование рассматриваемых интегралов. В частности, *неравенство*

$$|B| \le \sqrt{A}\sqrt{C}$$

имеет место в следующих случаях.

(i) Пусть f и $g \in L^2(\Omega, m)$, и пусть

$$A = \int_\Omega |f(x)|^2 m(x)\,dx, \quad B = \int_\Omega f(x)g(x)m(x)\,dx,$$

$$C = \int_\Omega |g(x)|^2 m(x)\,dx,$$

где Ω – область в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \Omega$, $dx = dx_1 \ldots dx_n$, $m(x) \ge 0$ в Ω.

Равенство $B^2 = AC$ имеет место тогда и только тогда, когда $f(x)$ и $g(x)$ являются линейно зависимыми на множестве $\Omega \setminus E$, где E – некоторое подмножество Ω, обладающее свойством

$$\int_E m(x)\,dx = 0.$$

(ii) A, B и C – следующие интегралы Римана-Стилтьеса

$$A = \int_{x=a}^{x=b} |f(x)|^2 m(x)\,d\psi(x),$$

$$B = \int_{x=a}^{x=b} f(x)g(x)m(x)\,d\psi(x),$$

$$C = \int_{x=a}^{x=b} |g(x)|^2 m(x)\, d\psi(x),$$

где ψ — неубывающая функция на отрезке $[a, b]$.

В условии для равенства $|B| = \sqrt{A}\sqrt{C}$ подмножество E должно быть таким, что

$$\int_E m(x)\, d\psi(x) = 0.$$

1.3 Неравенство Гёльдера

Неравенство Гёльдера является обобщением неравенства Коши-Буняковского-Шварца.

Теорема 1.4 *(неравенство Гёльдера). Пусть*

$$p > 1, \quad q > 1, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

и пусть $f \in L^p[a, b]$, $g \in L^q[a, b]$. Тогда произведение fg интегрируемо и имеет место неравенство

$$\left| \int_a^b f(x)g(x)dx \right| \le$$

$$\le \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{1/p} \left(\int_a^b |g(x)|^q dx \right)^{1/q}. \qquad (1.2)$$

Равенство в (1.2) имеет место тогда и только тогда, когда произведение $f(x)g(x) \le 0$ или $f(x)g(x) \ge 0$

и функции $|f(x)|^p$, $|g(x)|^q$ *являются линейно зависимыми на некотором множестве* $[a, b] \setminus E$, $\mu(E) = 0$.

Лемма 1.1 *(неравенство Юнга). Если фиксированные параметры* p *и* q *удовлетворяют условиям*

$$p > 1, \quad q > 1, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

то для любых чисел $\alpha \geq 0$ *и* $\beta \geq 0$ *справедливо неравенство*

$$\alpha\,\beta \leq \frac{\alpha^p}{p} + \frac{\beta^q}{q}. \tag{1.3}$$

Знак равенства будет тогда и только тогда, когда $\alpha^p = \beta^q$.

Доказательство леммы. Если $\beta = 0$, то (1.3) эквивалентно тривиальному неравенству $0 \leq \alpha^p/p$, равенство в котором имеет место тогда и только тогда, когда $\alpha = 0$.

Пусть теперь $\beta > 0$, β – фиксированное число. Пусть, далее, $h(\alpha) = \alpha\,\beta - \alpha^p/p - \beta^q/q$. Требуется доказать, что $h(\alpha) \leq 0$ для любых $\alpha \geq 0$ и $\beta > 0$ и выяснить случаи равенства $h(\alpha) = 0$.

Так как $h'(\alpha) = \beta - \alpha^{p-1}$, и число $p > 1$ по условию леммы, то $h(\alpha)$ возрастает при $\alpha \in [0, \alpha_0)$ и убывает при $\alpha \in (\alpha_0, \infty)$, $h'(\alpha) = 0$ при $\alpha = \alpha_0 = \beta^{1/(p-1)} = \beta^{q/p}$. Следовательно,

$$\max_{\alpha \in [0,\infty)} h(\alpha) = h(\alpha_0).$$

Простые вычисления показывают, что $h(\alpha_0) = 0$, а равенства $\alpha = \alpha_0$, $h'(\alpha_0) = \beta - \alpha_0^{p-1}$ равносильны соотношениям $\alpha\,\beta = \alpha^p = \beta^q$. Поэтому $h(\alpha) \le 0$ для любых $\alpha \ge 0$ и $\beta \ge 0$, случай равенства реализуется тогда и только тогда, когда $\alpha^p = \beta^q$.

Таким образом, неравенство Юнга доказано.

Доказательство теоремы 1.4. Заметим прежде всего, что если произведение $f(x)g(x)$ не меняет знака почти всюду на $[a, b]$ и для некоторой постоянной C имеет место одно из следующих равенств $|f(x)|^p = C|g(x)|^q$ или $C|f(x)|^p = |g(x)|^q$ почти всюду на $[a, b]$, то в (1.2) реализуется равенство. При вычислениях приходится различать 2 случая: $C = 0$ и $C \ne 0$.

При доказательстве неравенства (1.2) мы также будем различать два случая. Первый из них соответствует случаю $C = 0$.

Первый случай. Если f (или g) – нуль-функция (т. е. измеримые функции, равные нулю почти всюду в области определения), то доказывать нечего.

Второй случай. Предположим, что

$$\lambda := \left(\int_a^b |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p} > 0,$$

$$\mu := \left(\int_a^b |g(x)|^q\,dx\right)^{1/q} > 0.$$

Применяя неравенство Юнга (1.3), получаем следующее базовое неравенство Гёльдера:

$$u(x)v(x) \leq \frac{u^p(x)}{p} + \frac{v^q(x)}{q}, \qquad (1.4)$$

где x — произвольная точка отрезка $[a,b]$, и

$$u(x) = \frac{1}{\lambda}|f(x)|, \quad v(x) = \frac{1}{\mu}|g(x)|.$$

Согласно лемме 1.1, равенство в (1.4) имеет место тогда и только тогда, когда $u^p(x) = v^q(x)$.

Интегрируя (1.4) по отрезку $[a,b]$ с учётом равенств

$$\int_a^b |f(x)|^p dx = \lambda^p, \quad \int_a^b |g(x)|^q dx = \mu^q,$$

немедленно получаем

$$\int_a^b u(x)v(x)dx \leq \frac{1}{p}\int_a^b u^p(x)dx + \frac{1}{q}\int_a^b v^q(x)dx =$$

$$= \frac{\int_a^b |f(x)|^p dx}{p\lambda^p} + \frac{\int_a^b |g(x)|^q dx}{q\mu^q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Очевидно, полученное неравенство $\int_a^b u(x)v(x)dx \leq 1$ равносильно (1.2), равенство реализуется лишь тогда, когда $u^p(x) = v^q(x)$ почти всюду на $[a,b]$, т. е. когда $|f(x)|^p = C|g(x)|^q$, $C = \lambda^p/\mu^q$, почти всюду на $[a,b]$.

Таким образом, все утверждения теоремы 2.2 доказаны и в случае $\lambda\mu > 0$.

Замечание 1. Точно так же получаем обобщения неравенства (1.2) на более общие интегралы. В частности, *справедливы следующие неравенства Гёльдера: во-первых,*

$$\left|\int_\Omega f(x)g(x)\,m(x)\,dx\right| \le$$

$$\le \left(\int_\Omega |f(x)|^p\, m\, dx\right)^{1/p} \left(\int_\Omega |g(x)|^q\, m\, dx\right)^{1/q}, \qquad (1.5)$$

где Ω *— область в евклидовом пространстве* $\mathbb{R}^n$, $m = m(x) \ge 0$ *в* Ω, $dx = dx_1 \ldots dx_n$,

и, во-вторых,

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)m(x)\,d\psi(x)\right| \le$$

$$\le \left(\int_a^b |f(x)|^p m d\psi(x)\right)^{1/p} \left(\int_a^b |g(x)|^q m d\psi(x)\right)^{1/q},$$

где ψ *— неубывающая функция,* $m = m(x) \ge 0$ *на отрезке* $[a, b]$.

В обоих случаях условия достижения равенства одни и те же с формальной точки зрения. А именно, произведение $f(x)g(x)$ *не меняет знака и функции* $|f(x)|^p$ *и* $|g(x)|^q$ *являются линейно-зависимыми на некотором множестве* $\Omega \setminus E_1$ *или* $[a, b] \setminus E_2$*. Здесь подмножества* $E_1 \subset \Omega$ *и* $E_2 \subset [a, b]$ *должны удовлетво-*

рять условию

$$\int_{E_1} m(x)\,dx = 0 \quad \text{или} \quad \int_{E_2} m(x)\,d\psi(x) = 0,$$

соответственно.

Замечание 2. Методом математической индукции легко получаются обобщения (1.2) и (1.5) на произведение k функций $f_1, f_2, \ldots, f_k$. Например, если $p_j > 0$, $f_j \in L^{p_j}[a,b]$ и $1/p_1 + 1/p_2 + \ldots + 1/p_k = 1$, то

$$\left| \int_a^b \prod_{j=1}^{k} f_j(x)\,dx \right| \le \prod_{j=1}^{k} \left(\int_a^b |f_j(x)|^{p_j}\,dx \right)^{1/p_j}.$$

Равенство имеет место тогда и только тогда, когда одна из функций f_j является нуль-функцией, или же, существуют функция $f \in L^1[a,b]$ и подмножество $E \subset [a,b]$ такие, что $\mu(E) = 0$, функции $|f_j(x)|^{p_j}$ и $f(x)$ линейно зависимы на множестве $[a,b]\setminus E$ для всех $j = 1, 2, \ldots, n$ и произведение $\prod_{j=1}^{k} f_j(x)$ сохраняет знак на $[a,b] \setminus E$.

1.4 Неравенства Минковского и Юнга

Рассмотрим сначала интегральное неравенство Минковского.

Теорема 1.5 *Пусть $p \in [1, \infty)$. Если f и $g \in L^p[a,b]$, то $f + g \in L^p[a,b]$ и имеет место неравенство*

$$\left(\int_a^b |f(x) + g(x)|^p \, dx\right)^{1/p} \leq$$

$$\leq \left(\int_a^b |f(x)|^p \, dx\right)^{1/p} + \left(\int_a^b |g(x)|^p \, dx\right)^{1/p}. \qquad (1.6)$$

Равенство в случае $p > 1$ имеет место тогда и только тогда, когда f и g являются пропорциональными с неотрицательными коэффициентами (т. е. $c_1 f(x) = c_2 g(x)$ для неотрицательных постоянных c_1 и c_2, причём $c_1 + c_2 > 0$) на некотором множестве вида $[a,b] \setminus E$, $\mu(E) = 0$.

Доказательство. При $p = 1$ утверждение является тривиальным. Пусть $p > 1$. Обозначим

$$M = \int_a^b (|f(x)| + |g(x)|)^p dx.$$

Согласно неравенству Гёльдера с показателями $p > 1$ и $q = p/(p-1) > 1$, применённому к двум функциям $(|f(x)| + |g(x)|)^{p-1}$ и $|f(x)|$ или $(|f(x)| + |g(x)|)^{p-1}$ и

$|g(x)|$, имеем

$$\int_a^b |f(x)|(|f(x)|+|g(x)|)^{p-1}\,dx \le$$

$$\le M^{1/q}\left(\int_a^b |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p},$$

$$\int_a^b |g(x)|(|f(x)|+|g(x)|)^{p-1}\,dx \le$$

$$\le M^{1/q}\left(\int_a^b |g(x)|^p\,dx\right)^{1/p}.$$

Суммируя эти два неравенства, для $f=f(x)$ и $g=g(x)$ получаем

$$M^{1-1/q} \le \left(\int_a^b |f|^p dx\right)^{1/p} + \left(\int_a^b |g|^p dx\right)^{1/p}, \qquad (1.7)$$

что немедленно влечёт (1.6).

Если f и g пропорциональны с неотрицательными коэффициентами на $[a,b]\setminus E$, $\mu(E)=0$, то в (1.6) будем иметь знак равенства. В частности, знак равенства имеет место, если хотя бы одна из функций f и g является нуль-функцией, этот случай описывается равенством $c_1 f(x) = c_2 g(x)$ на множестве $[a,b]\setminus E$, $\mu(E)=0$, когда одна из постоянных c_1 и c_2 равна нулю.

Предположим теперь, что ни f, ни g не являются нуль-функциями, но мы имеем знак равенства в (1.6). Тогда равенства будут и в (1.7), и в тех двух неравенствах, полученных применением неравенства Гёльдера и использованных при выводе (1.7). Согласно теореме 2.6, равенства в этих вспомогательных утверждениях возможны лишь в том случае, когда $|f(x)|^p$ и $(|f(x)| + |g(x)|)^p$, также $(|f(x)| + |g(x)|)^p$ и $|g(x)|^p$ пропорциональны почти всюду на $[a, b]$. А это влечёт условие $c_1|f(x)| = c_2|g(x)|$ на множестве $[a, b] \setminus E$, $\mu(E) = 0$ с некоторыми положительными коэффициентами c_1, c_2. Тогда должно быть $c_1 f(x) = c_2 g(x)$ на множестве $[a, b] \setminus E_1$ для некоторого множества $E_1 \subset [a, b]$, $\mu(E_1) = 0$, так как мы должны иметь равенство $|f(x) + g(x)| = |f(x)| + |g(x)|$ почти всюду на $S := \{x \in [a, b] : |f(x)| + |g(x)| > 0\}$ для получения равенства в (1.6) при наличии равенства в (1.7).

Замечание 1. Аналогично доказываются обобщения. В частности, справедливы следующее неравенство Минковского:

$$\left(\int_a^b \left| \sum_{j=1}^{k} f_j(x) \right|^p dx \right)^{1/p} \leq \sum_{j=1}^{k} \left(\int_a^b |f_j(x)|^p \, dx \right)^{1/p},$$

где $p > 1$, $f_j \in L^p[a, b]$. Равенство имеет место тогда и только тогда, когда существуют некоторая функция $f \in L^p[a, b]$ и постоянные $c_j \geq 0$ такие, что

$$f_j(x) = c_j f(x), \quad x \in [a, b] \setminus E, \quad \mu(E) = 0,$$

для всех $j = 1, 2, \ldots, k$.

Замечание 2. Пользуясь неравенствами Гёльдера, приведёнными в замечаниях предыдущего раздела, легко получаем и новые версии неравенства Минковского в форме:

$$\left(\int_\Omega \left|\sum_{j=1}^k f_j(x)\right|^p m(x)\,dx\right)^{1/p} \le$$

$$\le \sum_{j=1}^k \left(\int_\Omega |f_j(x)|^p m(x)\,dx\right)^{1/p},$$

где $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $m(x) \ge 0$ в Ω, $p > 1$, и

$$\left(\int_a^b \left|\sum_{j=1}^k f_j(x)\right|^p m(x)\,d\psi(x)\right)^{1/p} \le$$

$$\le \sum_{j=1}^k \left(\int_a^b |f_j(x)|^p m(x)\,d\psi(x)\right)^{1/p},$$

а $\psi(x)$ – неубывающая функция и $m(x) \ge 0$ на $[a, b]$, $p \ge 1$.

Замечание 3. Последние неравенства можно обобщить, заменяя суммы интегралами. Например, если $X \subset \mathbb{R}^n$, $Y \subset \mathbb{R}^m$, $m_1(x) \ge 0$, $m_2(y) \ge 0$, то

$$\left(\int_Y \left|\int_X (f(x,y) m_1(x)\,dx\right|^p m_2(y)\,dy\right)^{1/p} \le$$

$$\leq \int_X \left(\int_Y |(f(x,y)|^p m_2(y)\, dy \right)^{1/p} m_1(x)\, dx$$

в предположении существования интеграла, стоящего в правой части неравенства.

Рассмотрим теперь неравенство Юнга.

Теорема 1.6 *Пусть* $y = f(x)$ *– непрерывная, строго возрастающая функция на отрезке* $[0, c]$*, причём* $f(0) = 0$*. Если* f^{-1} *– функция, обратная к* f*, и*

$$0 \leq a \leq c, \quad 0 \leq b \leq f(c),$$

то справедливо неравенство

$$ab \leq \int_0^a f(x)\, dx + \int_0^b f^{-1}(y)\, dy. \tag{1.8}$$

Равенство в этом неравенстве имеет место тогда и только тогда, когда справедливо равенство $b = f(a)$*.*

Доказательство. Необходимо проанализировать три следующих случая: $b < f(a)$, $b = f(a)$, $b > f(a)$. Поскольку соотношение (1.8) является симметричным относительно переменных x и y, то достаточно рассмотреть два случая, которые можно записать в виде одного условия $b \leq f(a)$.

Пусть $b \leq f(a)$. Тогда

$$\int_b^{f(a)} f^{-1}(y)\, dy = \int_0^{f(a)} f^{-1}(y)\, dy - \int_0^b f^{-1}(y)\, dy \geq 0.$$

Далее, график функции $y = f(x)$, $0 \le x \le a$, делит прямоугольник $\{(x, y) : 0 \le x \le a, 0 \le y \le f(a)\}$ на две части. Вычисляя площади этих частей с помощью интегралов и складывая, получаем

$$\int_0^a f(x)\,dx + \int_0^{f(a)} f^{-1}(y)\,dy = af(a).$$

С учётом этих соотношений имеем

$$\Delta := \int_0^a f(x)\,dx + \int_0^b f^{-1}(y)\,dy - ab =$$

$$= af(a) - \int_b^{f(a)} f^{-1}(y)\,dy - ab.$$

Очевидно, если $b = f(a)$, то $\Delta = 0$.

Если же $b < f(a)$, то простые преобразования приводят к искомому неравенству

$$\Delta = (a - c)(f(a) - b) > 0,$$

где

$$c = \frac{1}{f(a) - b} \int_b^{f(a)} f^{-1}(y)\,dy < a.$$

Утверждение $c < a$ следует из того, что $c \in (f^{-1}(b), a)$ по теореме о среднем для интегралов с учётом строгой монотонности подынтегральной функции.

Этим и завершается доказательство.

1.5 Неравенство Гильберта-Шура

Рассмотрим теперь неравенство, доказанное Гильбертом и Шуром, о точной оценке двойного интеграла специального вида. Обратите внимание на то, что не существует нетривиальных экстремальных функций, для которых реализуется равенство, но постоянная π в правой части этого неравенства является точной, т. е. наименьшей из возможных.

Теорема 1.7 *Если $f,\ g \in L^2(0,\infty)$, то справедливо следующее точное неравенство*

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{|f(x)g(y)|}{x+y}\,dxdy \le$$

$$\le \pi\sqrt{\int_0^\infty |f(x)|^2\,dx}\ \sqrt{\int_0^\infty |g(y)|^2\,dy}. \qquad (1.9)$$

Если f и g не являются нуль-функциями, т. е. $\int_0^\infty |f(x)|^2\,dx > 0$ и $\int_0^\infty |g(y)|^2\,dy > 0$, то неравенство будет строгим, но постоянная π в правой части этого неравенства является точной, т. е. наименьшей из возможных в следующем смысле: для любого числа $c \in (0,\pi)$ существуют $f,\ g \in L^2(0,\infty)$, такие, что

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{|f(x)g(y)|}{x+y}\,dxdy >$$

$$> c\sqrt{\int_0^\infty |f(x)|^2\,dx}\ \sqrt{\int_0^\infty |g(y)|^2\,dy}.$$

Доказательство. Имеем

$$\Delta := \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{|f(x)g(y)|}{x+y}\,dx\,dy =$$

$$= \int_0^\infty |f(x)|\,dx \int_0^\infty \frac{|g(y)|}{x+y}\,dy =$$

$$= \int_0^\infty \frac{dt}{1+t} \int_0^\infty |f(x)g(xt)|\,dx.$$

Применяя к внутреннему интегралу неравенство Коши-Буняковского-Шварца, получаем

$$\Delta \le \int_0^\infty \frac{dt}{1+t} \sqrt{\int_0^\infty |f(x)|^2\,dx} \sqrt{\int_0^\infty |g(xt)|^2\,dx} =$$

$$= \int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{t}(1+t)} \sqrt{\int_0^\infty |f(x)|^2\,dx} \sqrt{\int_0^\infty |g(x)|^2\,dx},$$

что эквивалентно искомому неравенству (1.9), так как с использованием замены переменной $t = \tau^2$ получаем

$$\int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{t}(1+t)} = 2\int_0^\infty \frac{d\tau}{1+\tau^2} = 2\operatorname{arctg}\tau\big|_0^\infty = \pi.$$

Пусть $\int_0^{+\infty} |f(x)|^2\,dx > 0$ и $\int_0^{+\infty} |g(y)|^2\,dy > 0$. Покажем, что знак равенства в неравенстве (1.9) не возможен, т. е. неравенство будет строгим. Нетрудный анализ показывает, что знак равенства в неравенстве (1.9) возможен лишь тогда, когда $|f(x)|$ и $|g(xt)|$ пропорциональны для почти всех $x \in (0, \infty)$ и почти всех $t \in (0, \infty)$, т. е. существует функция $C : (0, \infty) \to (0, \infty)$, такая, что имеет место равенство

$$|f(x)| \equiv C(t)|g(xt)|$$

для почти всех $x \in (0,\infty)$ и почти всех $t \in (0,\infty)$. Покажем, что $C(t) = A\sqrt{t}$, $A = const > 0$. Для этого запишем левый интеграл в следующем виде

$$\Delta = \iint \frac{|f(x)g(y)|}{x+y}\,dx\,dy =$$

$$= \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{|f(x)|}{t^{1/4}\sqrt{1+t}} \frac{t^{1/4}|g(xt)|}{\sqrt{1+t}}\,dxdt.$$

Полагая

$$f_1(x,t) = \frac{|f(x)|}{t^{1/4}\sqrt{1+t}}, \quad g_1(x,t) = \frac{t^{1/4}|g(xt)|}{\sqrt{1+t}},$$

применяя к двойному интегралу $\iint f_1(x,t)g_1(x,t)dxdt$ неравенство Коши-Буняковского-Шварца, получаем

$$\Delta^2 \le \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{|f(x)|^2}{t^{1/2}(1+t)}\,dxdt \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{t^{1/2}|g(xt)|^2}{1+t}\,dxdt =$$

$$= \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{|f(x)|^2}{t^{1/2}(1+t)}\,dxdt \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{|g(y)|^2}{t^{1/2}(1+t)}\,dydt =$$

$$= \pi^2 \int_0^\infty |f(x)|^2\,dx \int_0^\infty |g(y)|^2\,dy.$$

В силу свойств неравенства Коши-Буняковского-Шварца мы можем сделать следующий вывод. Равен-

ство
$$\left(\iint f_1(x,t)g_1(x,t)dxdt\right)^2 =$$
$$= \iint f_1^2(x,t)dxdt \iint g_1^2(x,t)dxdt$$
имеет место тогда и только тогда, когда функции f_1 и g_1 пропорциональны на $\Omega \setminus E$, где
$$\Omega = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, t > 0\},$$
$E \subset \Omega$, $\mu(E) = 0$, т. е. существует постоянная $A \neq 0$, такая, что
$$f_1(x,t) \equiv Ag_1(x,t) \Longleftrightarrow \frac{|f(x)|}{t^{1/4}\sqrt{1+t}} \equiv \frac{t^{1/4}|g(xt)|}{\sqrt{1+t}}$$
на множестве $\Omega \setminus E$, $A > 0$. Очевидно, это тождество равносильно тождеству
$$|f(x)| \equiv At^{1/2}|g(xt)|, \quad (x,t) \in \Omega \setminus E.$$
Следовательно, $C(t) = A\sqrt{t}$ и $|f(x)| \equiv At^{1/2}|g(xt)|$ для почти всех $x \in (0,\infty)$ и почти всех $t \in (0,\infty)$.

По предположению g не является нуль-функцией, поэтому существует такое число $y_0 \in (0,\infty)$, что $|g(y_0)| > 0$ и
$$|f(x)| \equiv A\frac{y_0^{1/2}}{x^{1/2}}|g(y_0)|$$

для почти всех $x \in (0, \infty)$. Но тогда

$$|f(x)|^2 \equiv \frac{B}{x}, \quad B = Ay_0^{1/2}|g(y_0)| = const > 0,$$

следовательно, $f \notin L^2(0, \infty)$. Получили противоречие, поэтому в неравенстве (1.9) знак равенства невозможен для функций f и $g \in L^2(0, \infty)$, для которых $\int_0^\infty |f(x)|^2 \, dx > 0$ и $\int_0^\infty |g(y)|^2 \, dy > 0$.

Покажем теперь, что постоянная π в неравенстве (1.9) является наилучшей, т. е. не может быть уменьшена. Для этого применим неравенство (1.9) к функциям

$$f_n(x) = g_n(x) = \begin{cases} 0 & , \qquad 0 \le x < 1/n, \\ x^{-(1/2+1/n)} & , \qquad 1/n \le x < \infty. \end{cases}$$

Интегралы от этих функций вычисляются в явном виде. Имеем

$$\Delta_n := \int_0^\infty |f_n(x)| \, dx \int_0^\infty \frac{|g_n(y)|}{x+y} \, dy =$$

$$= \int_0^\infty \frac{dt}{1+t} \int_0^\infty f_n(x) f_n(xt) \, dx =$$

$$= \int_0^1 \frac{t^{-1/2-1/n}}{1+t} dt \int_{1/(tn)}^\infty x^{-1-2/n} dx +$$

$$+ \int_1^\infty \frac{t^{-1/2-1/n}}{1+t} dt \int_{1/n}^\infty x^{-1-2/n} dx =$$

$$= \frac{n^{1+2/n}}{2} \left(\int_0^1 \frac{t^{-1/2+1/n}}{1+t} dt + \int_1^\infty \frac{t^{-1/2-1/n}}{1+t} dt \right).$$

Кроме того,

$$\delta_n := \sqrt{\int_0^\infty |f_n(x)|^2 \, dx} \sqrt{\int_0^\infty |g_n(y)|^2 \, dy} =$$

$$= \int_{1/n}^\infty x^{-1-2/n} dx = \frac{n^{1+2/n}}{2}.$$

Следовательно,

$$\frac{\Delta_n}{\delta_n} = \int_0^1 \frac{t^{-1/2+1/n}}{1+t} dt + \int_1^\infty \frac{t^{-1/2-1/n}}{1+t} dt,$$

и при $n \to \infty$ получаем

$$\frac{\Delta_n}{\delta_n} \to \int_0^\infty \frac{t^{-1/2}}{1+t} dt = 2 \int_0^\infty \frac{d\tau}{1+\tau^2} = \pi.$$

1.6 Задачи и упражнения

1. Применяя метод математической индукции, доказать, что для любого натурального числа n справедливы следующие равенства:

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}; \qquad (1.10)$$

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = (1+2+\dots+n)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}; \qquad (1.11)$$

$$1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{n-1} = 2^n - 1. \qquad (1.12)$$

Сравните свои решения со следующими рассуждениями. Утверждения верны при $n = 1$, Предположим, что утверждения верны при $1 \le n \le k$, и остаётся доказать их при $n = k+1$. Индуктивный переход от случая $n = k$ к случаю $n = k+1$ для всех трёх равенств сводится к простым алгебраическим преобразованиям. А именно, при доказательстве (1.10) имеем

$$1^2 + 2^2 + \dots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 =$$

$$= (k+1)\left[\frac{k(2k+1)}{6} + k + 1\right] =$$

$$= (k+1)\frac{2k^2 + 7k + 6}{6} = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6},$$

т. е. получили требуемое выражение для $n = k+1$.

Для (1.11) при $n = k + 1$ будем иметь

$$S_{k+1} = 1^3 + 2^3 + \dots + k^3 + (k+1)^3 =$$

$$= (1 + 2 + \dots + k)^2 + (k+1)^3.$$

Но $1 + 2 + \dots + k = k(k+1)/2$, поэтому

$$S_{k+1} = (k+1)^2 \left(\frac{k^2}{4} + k + 1 \right) =$$

$$= \left[\frac{(k+1)(k+2)}{2} \right]^2 = (1 + 2 + \dots + (k+1))^2.$$

В случае формулы (1.12)

$$(1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{k-1}) + 2^k = (2^k - 1) + 2^k = 2^{k+1} - 1.$$

2. Методом математической индукции докажите следующее неравенство Якоба Бернулли.

Пусть $x_1, x_2, \dots, x_n$ – вещественные числа одного и того же знака, большие или равные -1.Тогда

$$(1 + x_1)(1 + x_2) \dots (1 + x_n) \geq 1 + x_1 + x_2 + \dots + x_n.$$

Как следствие, получите следующее утверждение.

Если $x \geq -1$, то справедливо неравенство

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx \qquad (n > 1),$$

причём знак равенства имеет место лишь при $x = 0$.

3. Докажите следующее утверждение.

Пусть $0 \le x_j \le \pi \quad (j = 1, 2, \dots, n)$. Тогда

$$\left| \sin\left(\sum_{j=1}^{n} x_j \right) \right| \le \sum_{j=1}^{n} \sin x_j.$$

4. Применяя метод математической индукции, доказать следующие неравенства:

$$(2n)! < 2^{2n}(n!)^2; \tag{1.13}$$

$$n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n \qquad \text{при} \quad n > 1; \tag{1.14}$$

$$2! \cdot 4! \dots (2n)! > [(n+1)!]^n \qquad \text{при} \quad n > 1; \tag{1.15}$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \dots \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}; \tag{1.16}$$

$$n^{n+1} > (n+1)^n \qquad (n \ge 3). \tag{1.17}$$

Указания. При доказательстве (1.13) требуемое неравенство

$$(2k+2)! < 2^{2k+2}((k+1)!)^2$$

следует из предположения индукции

$$(2k)! < 2^{2k}(k!)^2$$

и элементарного неравенства

$$(2k+1)(2k+2) < 4(k+1)^2.$$

База индукции $n = 2$ при доказательстве (1.14), и для $n = 2$ имеем

$$2! < \left(\frac{2+1}{2}\right)^2.$$

Пусть $k! < (k+1)^k/2^{2k}$. Тогда

$$(k+1)! = k!(k+1) < (k+1)^{k+1}/2^k =$$

$$= \frac{(k+2)^{k+1}}{2^k} \cdot \left(\frac{k+1}{k+2}\right)^{k+1} < \frac{(k+2)^{k+1}}{2^{k+1}},$$

в силу того, что

$$\left(\frac{k+2}{k+1}\right)^{k+1} = \left(1 + \frac{1}{k+1}\right)^{k+1} > 2$$

согласно неравенству Бернулли при $x = 1/(k+1)$, $n = k+1$.

Рассмотрим (1.15). При $n = 2$

$$2! \cdot 4! = 48 > 36 = (3!)^2.$$

Если неравенство верно при $n = k$, то при $n = k+1$

$$2!4! \ldots (2k)!(2k+2)! > [(k+1)!]^k (2k+2)! =$$

$$= [(k+2)!]^{k+1} \frac{(2k+2)!}{(k+2)!(k+2)^k} =$$

$$= [(k+2)!]^{k+1} \frac{(k+3)(k+4)\ldots(2k+2)}{(k+2)^k} > [(k+2)!]^{k+1}.$$

Для (1.16) при $n = 1$ имеем

$$\frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{3}},$$

и пусть неравенство имеет место для $n = k$. Тогда

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \ldots \frac{2k-1}{2k} \cdot \frac{2k+1}{2k+2} < \frac{1}{\sqrt{2k+1}} \cdot \frac{2k+1}{2k+2} = \frac{\sqrt{2k+1}}{2k+2}.$$

Остается доказать, что

$$\frac{\sqrt{2k+1}}{2k+2} < \frac{1}{\sqrt{2k+3}}$$

или, что то же самое,

$$\sqrt{(2k+1)(2k+3)} < 2k+2 = \frac{(2k+1)+(2k+3)}{2}.$$

Последнее неравенство верно, так как для неравных положительных чисел их среднее арифметическое строго больше среднего геометрического (см. теорему 1.3).

Для (1.17) база индукции $n = 3$. Индуктивный переход также не представляет особых трудностей. Имеем

$$(k+1)^{k+2} = k^{k+1}\left(\frac{k+1}{k}\right)^{k+1}(k+1) > (k+2)^{k+1},$$

если $k^{k+1} > (k+1)^k$, так как требуемое неравенство

$$\left(\frac{k+1}{k}\right)^{k+1}(k+1)^{k+1} > (k+2)^{k+1}$$

равносильно простому неравенству

$$(k+1)^2 > k(k+2).$$

5. Докажите следующее утверждение.

Если $x \geq 0$, то существует такая монотонно возрастающая функция $\theta(x)$, что

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x+\theta(x)}},$$

где

$$\frac{1}{4} \leq \theta(x) \leq \frac{1}{2},$$

причём

$$\lim_{x\to 0} \theta(x) = \frac{1}{4}, \quad \lim_{x\to +\infty} \theta(x) = \frac{1}{2}.$$

Схема доказательства. Применяя формулу Лагранжа о конечных приращениях к функции $f(t) = \sqrt{t}$ на отрезке $[x, x+1]$, получаем

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x+\theta}},$$

где $\theta \in (0,1)$. Далее, рассматривая последнее равенство как уравнение относительно θ, находим

$$\theta = \frac{1-2x}{4} + \frac{\sqrt{x(x+1)}}{2}.$$

Отсюда следует, что $\theta = \theta(x)$ — монотонно возрастающая функция. Нетрудно найти

$$\inf_{x>0} \theta(x) = \lim_{x\to 0^+} \theta(x) = \frac{1}{4},$$

$$\sup_{x>0} \theta(x) = \lim_{x\to +\infty} \theta(x) = \frac{1}{2}.$$

6. Докажите теорему.

Теорема 1.8 *Пусть функция f определена и непрерывна на отрезке $[a, b]$ и имеет конечную производную $f'(x)$ внутри него. Если $\sup_{x\in(a,b)} |f'(x)| = M < \infty$, то для любых двух точек x, y из $[a, b]$*

$$|f(x) - f(y)| \le M|x - y|.$$

Схема доказательства. Без ограничения общности будем считать, что $x < y$. По формуле Лагранжа о конечных приращениях, применённой к функции $f(t)$ при $t \in [x, y]$, имеем: существует точка $t = c \in (x, y)$ такая, что

$$f(x) - f(y) = f'(c)(x - y).$$

Отсюда и следует требуемое неравенство с учётом соотношения $|f'(c)| \le M$.

Как следствие этой теоремы получите следующие неравенства:

$$|\sin x - \sin y| \le |x - y|;$$

если $0 < y < x$ и $p > 1$, то

$$py^{p-1}(x - y) \le x^p - y^p \le px^{p-1}(x - y);$$

$$|\operatorname{arctg} a - \operatorname{arctg} b| \le |a-b|;$$

$$\frac{a-b}{a} < \ln\frac{a}{b} < \frac{a-b}{b}, \quad \text{если } 0<b<a.$$

7. Проведите подробные вычисления и получите два простых применения неравенства Юнга для обоснования числовых неравенств.

Пример 1. Выбираем $y = x^{p-1}$ с некоторой постоянной $p>1$. Взяв $q = p/(p-1)$ в (1.8), получаем неравенство

$$ab \le \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Пример 2. Для $y = \ln(1+x)$ неравенство Юнга влечёт: $1+a+b+ab \le (1+a)\ln(1+a)+e^b$.

8. Выбирая в (1.1) $a=0$, $b=1$ и кусочно-постоянные функции, определённые равенствами $f(x)=a_k$ и $g(x)=b_k$ для $(k-1)/n \le x < k/n$ $(k=1,2,\dots,n)$, получите неравенство Коши для векторов

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k b_k| \le \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |a_k|^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n} |b_k|^2}.$$

Равенство имеет место тогда и только тогда, когда векторы $(a_1,a_2,\dots,a_n)$ и $(b_1,b_2,\dots,b_n)$ являются линейно зависимыми.

9. Взяв кусочно-постоянные функции в (1.2), легко получаем неравенство Гёльдера для векторов

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k b_k| \le \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^q\right)^{1/q}.$$

Равенство имеет место тогда и только тогда, когда векторы $(|a_1|^p, \dots, |a_n|^p)$ и $(|b_1|^q, \dots, |b_n|^q)$ являются линейно-зависимыми.

10. Покажите, что

$$\int_0^\pi e^{-x^2} \sin^2 x\,dx \int_0^\pi e^{x^2} \sin^2 x\,dx > \frac{\pi^2}{4}.$$

Указание. Можно обойтись без численного интегрирования. Достаточно оценить интеграл $\int_0^\pi \sin^2 x\,dx = \pi/2$ с помощью неравенства Коши-Буняковского-Шварца.

11. Докажите следующие частные случаи неравенств Гёльдера и Минковского, указанные в замечаниях основного текста, в n-мерных областях.

А именно, пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — область, т. е. непустое, открытое, связное множество. Пользуемся декартовыми координатами. Обозначим: $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ — точка n-мерной области Ω, $dx = dx_1 dx_2 ... dx_n$ — дифференциальный элемент объёма.

Рассмотрим функции $f : \Omega \to \mathbb{R}, \quad g : \Omega \to \mathbb{R}$.

а) Неравенство Гёльдера. Пусть

$$p > 1, \quad q > 1, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

и пусть $f \in L^p(\Omega)$, $g \in L^q(\Omega)$. Тогда произведение fg интегрируемо и имеет место неравенство Гёльдера

$$\left|\int_\Omega f(x)g(x)dx\right| \leq \left(\int_\Omega |f(x)|^p dx\right)^{1/p} \left(\int_\Omega |g(x)|^q dx\right)^{1/q}.$$

б) Неравенство Минковского.

Пусть $p \in [1, \infty)$, и пусть $f \in L^p(\Omega)$, $g \in L^p(\Omega)$. Тогда имеет место неравенство Минковского

$$\left(\int_\Omega |f(x)+g(x)|^p dx\right)^{1/p} \leq$$

$$\leq \left(\int_\Omega |f(x)|^p dx\right)^{1/p} + \left(\int_\Omega |g(x)|^p dx\right)^{1/p}.$$

12. Пусть H — гильбертово пространство над полем комплексных чисел. Вспомните доказательство неравенства Коши $|(f,\, g)| \leq \|f\|\,\|g\|$ для скалярного произведения $(f,\, g)$ векторов $f,\, g \in H$. Опишите связь этого неравенства с неравенством Коши-Буняковского-Шварца для интегралов и с неравенством Коши для конечномерных векторов.

13. Имеется ряд аналогов и обобщений неравенства Гильберта-Шура. Их можно найти в книге Харди Г.Г., Литтльвуд Д.Е., Пойа Г. [1]. В частности, известно следующее обобщение. Пусть

$$p > 1, \quad q > 1, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

и пусть $f \in L^p(0, \infty)$, $g \in L^q(0, \infty)$. Тогда имеет место неравенство

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{|f(x)g(y)|}{x+y}\,dxdy \le$$

$$\le \frac{\pi}{\sin(\pi/p)} \left(\int_0^\infty |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p} \left(\int_0^\infty |g(y)|^q\,dy\right)^{1/q}.$$

Если $\int_0^\infty |f(x)|^p\,dx > 0$ и $\int_0^\infty |g(y)|^q\,dy > 0$, то неравенство будет строгим, но постоянная $\pi/\sin(\pi/p)$ в правой части этого неравенства является точной.

Докажите это утверждение.

Указание. Заметим, что $\pi/p + \pi/q = \pi$, поэтому

$$\frac{\pi}{\sin(\pi/p)} = \frac{\pi}{\sin(\pi/q)}.$$

Поскольку

$$\Delta := \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{|f(x)g(y)|}{x+y}\,dx\,dy =$$

$$= \int_0^\infty \frac{dt}{1+t} \int_0^\infty |f(x)g(xt)|\,dx,$$

то, применяя к внутреннему интегралу неравенство Гёльдера, получаем: $\Delta \le$

$$\le \int_0^\infty \frac{dt}{1+t} \left(\int_0^\infty |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p} \left(\int_0^\infty |g(xt)|^q\,dx\right)^{1/q} =$$

$$= \int_0^\infty \frac{dt}{t^{1/q}(1+t)} \left(\int_0^\infty |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p} \left(\int_0^\infty |g(y)|^q\,dy\right)^{1/q},$$

что эквивалентно требуемому неравенству, так как

$$\int_0^\infty \frac{dt}{t^{1/q}(1+t)} = \frac{\pi}{\sin(\pi/q)}.$$

Действительно, заменой $1+t=1/\tau$ преобразуем наш интеграл. Вычисления дают, что рассматриваемый интеграл выражается через бета-функцию Эйлера:

$$\int_0^\infty \frac{dt}{t^{1/q}(1+t)} = \int_0^1 \frac{(1-\tau)^{-1+1/q}}{\tau^{1/q}}\,d\tau = B(1-1/q,1/q).$$

Далее пользуемся известным тождеством

$$B(x,1-x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}, \quad \forall x\in(0,1),$$

для бета-функции Эйлера. Пусть $\int_0^\infty |f(x)|^p\,dx > 0$ и $\int_0^\infty |g(y)|^q\,dy > 0$. Запишем оцениваемый интеграл в следующем виде

$$\iint \frac{|f(x)g(y)|}{x+y}\,dx\,dy =$$

$$= \int_0^\infty\int_0^\infty \frac{|f(x)|}{t^{1/(pq)}(1+t)^{1/p}}\,\frac{t^{1/(pq)}|g(xt)|}{(1+t)^{1/q}}\,dxdt,$$

и положим

$$f_1(x,t) = \frac{|f(x)|}{t^{1/(pq)}(1+t)^{1/p}}, \quad g_1(x,t) = \frac{t^{1/(pq)}|g(xt)|}{(1+t)^{1/q}}.$$

Далее, применяем к двойному интегралу $\iint f_1(x,t)g_1(x,t)dxdt$ неравенство Гёльдера и показываем невозможность реализации знака равенства в полученном неравенстве.

При обосновании точности константы $\pi/\sin(\pi/p)$ будут полезны функции

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x < 1/n, \\ x^{-(1/p+1/n)}, & 1/n \le x < \infty, \end{cases}$$

$$g_n(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x < 1/n, \\ x^{-(1/q+1/n)}, & 1/n \le x < \infty. \end{cases}$$

14. Исследуйте функцию Иоганна Бернулли (автора задачи о брахистохроне и учителя Л. Эйлера), определённую формулой $f(x) = x^x$, $x \ge 0$. Найдите минимум этой функции и докажите формулу И. Бернулли

$$\int_0^1 x^x dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^n}.$$

Указание. Для вычисления интеграла примените формулы $x^x = e^{x \ln x}$ и

$$e^y = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^n}{n!}, \quad y = y(x) = x \ln x.$$

Поскольку $|y(x)| \le 1/e$ при $x \in [0, 1]$, то степенной ряд сходится равномерно и можно проинтегрировать его почленно. Потребуется гамма-функция Эйлера с формулами $\int_0^\infty t^n e^{-t} dt = \Gamma(n+1) = n!$.

Глава 2

Элементы выпуклого анализа

Выпуклый анализ является одним из больших разделов современной математики. Поскольку монотонные функции тесно связаны с выпуклыми, то интегральные неравенства для монотонных функций являются частью выпуклого анализа.

Одним из базовых неравенств выпуклого анализа является неравенство Йенсена, в формулировке которого участвуют как выпуклые, так и монотонные функции.

Приведём сначала несколько классических интегральных неравенств для монотонных функций, затем перейдём к рассмотрению выпуклых функций и неравенства Йенсена.

2.1 Неравенства Гаусса, Чебышёва и Харди

Приведём прежде всего интегральное неравенство для монотонных функций, установленное в середине 19-го столетия Карлом Фридрихсом Гауссом.

Теорема 2.1 *Если $\lambda > 0$ и функция f является неотрицательной и невозрастающей при $x > 0$, то*

$$\lambda^2 \int_{\lambda}^{+\infty} f(x)\,dx \le \frac{4}{9} \int_0^{+\infty} x^2 f(x)\,dx. \tag{2.1}$$

Если $f(x) \not\equiv 0$ и интеграл $\int_0^{+\infty} x^2 f(x)\,dx$ сходится, то равенство в этом неравенстве достигается тогда и только тогда, когда

$$f(x) = \begin{cases} const > 0, & 0 < x < 3\lambda/2, \\ 0, & x > 3\lambda/2. \end{cases}$$

Доказательство. Пусть $a = 3\lambda/2$, тогда $a \in (\lambda, +\infty)$. Легко убедиться в том, что число a является корнем уравнения

$$27\lambda^2(a - \lambda) = 4a^3.$$

Определим вспомогательную функцию

$$g(x) = \frac{4x^3}{27\lambda^2} + \lambda, \qquad x \ge 0.$$

Очевидно, функция g является строго возрастающей, $g(\infty) = \infty$, поэтому существует обратная функция $g^{-1} : [\lambda, \infty) \to [0, \infty)$.

Учитывая уравнение для a, легко проверить, что $g(a) = a$, и, кроме того,

$$g(x) > x$$

для всех $x > 0$, $x \neq a$, так как $g(a) - a = 0$,

$$(g(x) - x)' = 4x^2/(9\lambda^2) - 1 < 0$$

при $0 < x < a$, и

$$(g(x) - x)' > 0$$

при $a < x < \infty$.

Для обратной функции получаем неравенство

$$g^{-1}(y) < y,$$

справедливое при всех значениях $y > \lambda$, $y \neq a$.

Но тогда простые преобразования с учётом невозрастания f и неравенства $g^{-1}(y) \leq y$ приводят к соотношениям

$$\frac{4}{9\lambda^2} \int_0^{+\infty} x^2 f(x)\, dx = \int_0^{+\infty} f(x) g'(x)\, dx =$$

$$= \int_{g(0)}^{+\infty} f(g^{-1}(y))\, dy \geq \int_{g(0)}^{+\infty} f(y)\, dy.$$

Очевидно, полученное неравенство эквивалентно (2.1) в силу того, что $g(0) = \lambda$.

Рассмотрим теперь утверждение теоремы относительно равенства в (2.1).

Из приведённого доказательства следует, что равенство в неравенстве (2.1) будет иметь место тогда и только тогда, когда $f(g^{-1}(y)) = f(y)$ для почти всех $y \in (\lambda, \infty)$.

Пусть $y > \lambda$ и $y \neq a$, тогда $g^{-1}(y) < y$. Очевидно, для невозрастающей функции f равенство $f(g^{-1}(y)) = f(y)$ может иметь место лишь тогда, когда $f(x) \equiv const$ в интервале $(g^{-1}(y), y)$.

Поэтому можно утверждать, что равенство в неравенстве (2.1) является возможным тогда и только тогда, когда $f(x) \equiv C_1$ для $0 < x < a$ и $f(x) \equiv C_2$ для $x > a$, где C_1 и C_2 – некоторые постоянные, причём $C_1 \geq C_2$.

В силу неотрицательности функции f будем иметь: $C_2 \geq 0$. Но постоянная C_2 должна быть равна нулю, иначе интеграл $\int_0^{+\infty} x^2 f(x)\,dx$ не будет сходящимся.

И наконец, непосредственными вычислениями получаем, что для любой функции вида

$$f_1(x) = \begin{cases} C_1 = \text{const} > 0 & , \quad 0 < x < 3\lambda/2, \\ \qquad 0 & , \quad x > 3\lambda/2, \end{cases}$$

имеем равенство

$$\lambda^2 \int_\lambda^{+\infty} f_1(x)\,dx = \frac{4}{9} \int_0^{+\infty} x^2 f_1(x)\,dx,$$

так как

$$C_1\lambda^2 \int_\lambda^a dx = \frac{4}{9} C_1 \int_0^a x^2\, dx \Longleftrightarrow \lambda^2(a-\lambda) = \frac{4}{27} a^3.$$

Этим и завершается доказательство.

Рассмотрим теперь неравенство П. Л. Чебышёва.

Теорема 2.2 *Пусть f, g и m – функции, интегрируемые на отрезке $[a, b]$. Предположим, что $m(x) \geq 0$ на $[a, b]$ и*

$$0 < \int_a^b m(x)\, dx < +\infty.$$

(i) Если обе функции f и g являются либо невозрастающими, либо неубывающими, то

$$\frac{\int_a^b f(x)m(x)dx \int_a^b g(x)m(x)\, dx}{\int_a^b m(x)dx} \leq$$

$$\leq \int_a^b f(x)g(x)m(x)dx. \qquad (2.2)$$

(ii) Если функция f является невозрастающей, а функция g — неубывающей, то

$$\frac{\int_a^b f(x)m(x)dx \int_a^b g(x)m(x)dx}{\int_a^b m(x)dx} \geq$$

$$\geq \int_a^b f(x)g(x)m(x)dx. \qquad (2.3)$$

Доказательство. Самый простой путь доказательства основан на использовании следующего тождества К. А. Андреева:

$$A := \frac{1}{2}\int_a^b\!\!\int_a^b (f(x)-f(y))(g(x)-g(y))m(x)m(y)\,dx\,dy =$$

$$= \int_a^b m(x)\,dx\ \int_a^b f(x)g(x)m(x)\,dx -$$

$$- \int_a^b f(x)m(x)\,dx\ \int_a^b g(x)m(x)\,dx.$$

В силу этого тождества разность

$$\int_a^b f(x)g(x)m(x)\,dx - \frac{\int_a^b f(x)m(x)\,dx \int_a^b g(x)m(x)\,dx}{\int_a^b m(x)\,dx}$$

либо равна нулю, либо имеет тот же знак, что и величина A, определённая выше двойным интегралом.

Ясно, что в силу условий, наложенных на функции, подынтегральное выражение в двойном интеграле является неотрицательным в случае (i) и неположительным в случае (ii).

Поэтому $A \geq 0$ в случае (i) и $A \leq 0$ в случае (ii).

Таким образом, неравенства (2.2) и (2.3) являются простыми следствиями приведённого тождества.

Тождество К. А. Андреева получается следующим образом. Подынтегральную функцию в двойном интеграле записываем в виде алгебраической суммы

$$f(x)g(x)m(x)m(y) - f(x)g(y)m(x)m(y) -$$

$$-f(y)g(x)m(x)m(y) + f(y)g(y)m(x)m(y)$$

четырёх слагаемых, затем переходим к повторным интегралам и пользуемся тривиальными равенствами

$$\int_a^b f(x)m(x)\,dx = \int_a^b f(y)m(y)\,dy$$

$$\int_a^b m(x)\,dx = \int_a^b m(y)\,dy.$$

Имеем

$$\int_a^b\!\!\int_a^b f(x)g(x)m(x)m(y)\,dx\,dy +$$

$$+\int_a^b\!\!\int_a^b f(y)g(y)m(x)m(y)\,dx\,dy =$$

$$= 2\int_a^b m(x)\,dx \int_a^b f(x)g(x)m(x)\,dx$$

и

$$\int_a^b\!\!\int_a^b f(x)g(y)m(x)m(y)\,dx\,dy +$$

$$+\int_a^b\!\!\int_a^b f(y)g(x)m(x)m(y)\,dx\,dy =$$

$$= 2\int_a^b f(x)m(x)\,dx \int_a^b g(x)m(x)\,dx.$$

Таким образом, мы убеждаемся в справедливости тождества К. А. Андреева, и, следовательно, теоремы П. Л. Чебышёва.

Упражнение. Взяв кусочно-постоянные функции в неравенствах (2.2) и (2.3), непосредственно получите часто применяемые неравенства Чебышёва для векторов:

Пусть $p > 0$. *Предположим, что* $m_k \geq 0$, $a_k \geq 0$, $b_k \geq 0$ *для* $k = 1, 2, \ldots, n$. *Если*

$$(a_k - a_j)(b_k - b_j) \geq 0$$

для всех $k = 1, 2, \ldots, n$ *и* $j = 1, 2, \ldots, n$, *то*

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^p m_k \sum_{k=1}^{n} b_k^p m_k \leq \sum_{k=1}^{n} m_k \sum_{k=1}^{n} a_k^p b_k^p.$$

Если же

$$(a_k - a_j)(b_k - b_j) \leq 0,$$

для всех $k = 1, 2, \ldots, n$ *и* $j = 1, 2, \ldots, n$, *то*

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^p m_k \sum_{k=1}^{n} b_k^p m_k \geq \sum_{k=1}^{n} m_k \sum_{k=1}^{n} a_k^p b_k^p.$$

Докажем теперь теорему Г. Харди.

Теорема 2.3 *Пусть* $f(x) \geq 0$, $f \in L^2(0, \infty)$ *и*

$$F(x) := \int_0^x f(t)dt.$$

Тогда

$$\int_0^{+\infty} \frac{F^2(x)}{x^2}\, dx < 4 \int_0^{+\infty} f^2(x)\, dx, \tag{2.4}$$

кроме того случая, когда $f \equiv 0$. *Константа* 4 *является наилучшей.*

Доказательство. Если $f(x) = 0$ для почти всех $x \in (0, \infty)$, то доказывать нечего. Поэтому в дальнейшем будем считать, что функция $f \in L^2(0, \infty)$ не является нуль-функцией.

Пусть $X \in (0, \infty)$. Интегрированием по частям, будем иметь

$$\int_0^X \frac{F^2(x)}{x^2}\,dx = -\int_0^X F^2(x)\,d(1/x) =$$

$$= \lim_{\xi \to 0^+} \frac{F^2(\xi)}{\xi} - \frac{F^2(X)}{X} + 2\int_0^X \frac{F(x)}{x} f(x)\,dx.$$

Отсюда получаем, что

$$\int_0^X \frac{F^2(x)}{x^2}\,dx \le 2\int_0^X \frac{F(x)}{x} f(x)\,dx, \tag{2.5}$$

так как $[-F^2(X)/X] \le 0$ и, кроме того,

$$\lim_{\xi \to 0^+} \frac{F^2(\xi)}{\xi} = 0.$$

Вычислить этот предел можно следующим образом. Для любого $\xi \in (0, \infty)$ имеем очевидное неравенство $0 \le F^2(\xi)/\xi$. Применяя неравенство Коши-Буняковского-Шварца к интегралу $\int_0^x f(t)dt$ для двух функций $f(t)$ и $g(t) \equiv 1$, получаем

$$F^2(x) \le \int_0^x dt \int_0^x f^2(t)dt = x\int_0^x f^2(t)dt.$$

Поэтому будем иметь

$$0 \le \lim_{\xi \to 0^+} \frac{F^2(\xi)}{\xi} \le \lim_{\xi \to 0^+} \int_0^{\xi} f^2(t)dt = 0.$$

Здесь мы использовали тот факт, что $f \in L^2(0,\infty)$ и поэтому $\lim_{\xi \to 0^+} \int_0^{\xi} f^2(t)dt = 0$ в силу абсолютной непрерывности интеграла Лебега.

Переходя к пределу при $X \to +\infty$ в неравенстве (2.5) и применяя затем неравенство Коши-Буняковского-Шварца для двух функций $f(x)$ и $g(x) = F(x)/x$, получаем

$$\int_0^{+\infty} \frac{F^2(x)}{x^2}\,dx \le 2\int_0^{+\infty} \frac{F(x)}{x} f(x)\,dx <$$

$$< 2\sqrt{\int_0^{+\infty} \frac{F^2(x)}{x^2}\,dx}\ \sqrt{\int_0^{+\infty} f^2(x)\,dx}.$$

Следовательно,

$$\sqrt{\int_0^{+\infty} \frac{F^2(x)}{x^2}\,dx} < 2\ \sqrt{\int_0^{+\infty} f^2(x)\,dx},$$

что равносильно неравенству (2.4).

Появление строгого неравенства обусловлено тем, что равенство в неравенстве Коши-Буняковского-Шварца возможно лишь для пропорциональных функций $f(x)$ и $g(x) = F(x)/x$, где $f \in L^2(0,\infty)$ не является нуль-функцией, т. е. существует постоянная $C > 0$, такая, что $f(x) \equiv CF(x)/x \Longleftrightarrow$

$$\Longleftrightarrow F'(x) \equiv CF(x)/x \Longleftrightarrow F(x) \equiv C_1 x^C,$$

где $C_1 = const > 0$. Но это означало бы, что

$$f(x) = F'(x) \equiv C_1 x^{C-1}.$$

Тогда интеграл $\int_0^{+\infty} f^2(x)\,dx$ был бы расходящимся, так как интеграл вида $\int_0^{+\infty} x^p\,dx$ расходится при любом значении параметра $p \in (-\infty, +\infty)$.

Для доказательства точности постоянной 4 рассмотрим следующий пример.

Пусть $f_\varepsilon(x) = 0$ для $0 \le x < 1$, $f_\varepsilon(x) = x^{-1/2-\varepsilon}$ для $x \ge 1$, где параметр $\varepsilon \in (0, 1/2)$. Для этой функции и для функции

$$F_\varepsilon(x) := \int_0^x f_\varepsilon(t)dt$$

непосредственные вычисления дают, что

$$\int_0^{+\infty} f_\varepsilon^2(x)\,dx = \int_1^{+\infty} x^{-1-2\varepsilon}\,dx = \frac{1}{2\varepsilon},$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{F_\varepsilon^2(x)}{x^2}\,dx = \frac{1}{(1/2-\varepsilon)^2} \int_1^{+\infty} \frac{(x^{1/2-\varepsilon}-1)^2}{x^2}\,dx =$$

$$= \frac{1}{(1/2-\varepsilon)^2}\left[\frac{1}{2\varepsilon} - \frac{2}{1/2+\varepsilon} + 1\right].$$

Легко видеть, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{\int_0^{+\infty} F_\varepsilon^2(x)/x^2\,dx}{\int_0^{+\infty} f_\varepsilon^2(x)\,dx} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{1}{(1/2-\varepsilon)^2} = 4.$$

Этим и завершается доказательство теоремы Харди.

2.2 Неравенство Гаусса-Винклера

Пусть $f : (0, \infty) \to [0, \infty)$ – невозрастающая функция, причём

$$\int_0^\infty f(x)\,dx = 1. \tag{2.6}$$

Неравенство Гаусса-Винклера является одним из классических результатов теории вероятностей о моментах следующего вида

$$M_p(f) := \int_0^\infty x^p f(x)\,dx \qquad (p > -1).$$

Краткая история вопроса такова. В 1821 году Гаусс опубликовал без доказательства неравенство

$$[3M_2(f)]^2 \le 5M_4(f).$$

В 1866 году Винклер представил следующее его обобщение:

$$[(1+r)M_r(f)]^{1/r} \le [(1+s)M_s(f)]^{1/s} \tag{2.7}$$

при $0 < r < s$. Было обнаружено, что в доказательстве Винклера имеется неисправимая ошибка, но само утверждение оказалось верным и было доказано усилиями ряда математиков. Так, в 1896 году обоснование неравенства (2.7) для случая $s = 2r > 0$ и для некоторых иных случаев дал Крюгер.

Впервые полное доказательство (2.7) для всех положительных r и s ($s > r$) получил в 1922 году Фабер. Он обосновал более общее неравенство, а именно,

$$[(1+b)M_b(f)]^{c-a} \leq$$

$$\leq [(1+a)M_a(f)]^{c-b}[(1+c)M_c(f)]^{b-a} \tag{2.8}$$

при условии $0 \leq a < b < c$. Ясно, что при $a = 0$ неравенство Фабера (2.8) эквивалентно неравенству Гаусса-Винклера с показателями $b = r$ и $c = s$. Доказательство Фабера занимает более 10 страниц. Более короткое обоснование в 1931 году дал фон Мизес в предположении, что $s > r > -1$ и f является непрерывно дифференцируемой функцией. Приведём новое доказательство, опубликованное нами в 2005 году (см. [17]). Оно охватывает общий случай и позволяет описать все экстремальные функции.

Неравенство Гаусса-Винклера в полной общности составляет содержание следующего утверждения.

Теорема 2.4 *Пусть f – неотрицательная, невозрастающая функция на интервале* $(0, \infty)$*, удовлетворяющая условию* (2.6)*. Если $-1 < r < s$, то справедливо неравенство* (2.7)*. Случай*

$$0 < [(1+r)M_r(f)]^s = [(1+s)M_s(f)]^r < \infty$$

реализуется тогда и только тогда, когда

$$f(x) = f_0(x) := \begin{cases} C, & \text{если} \quad 0 < x < 1/C, \\ 0, & \text{если} \quad 1/C < x < \infty \end{cases} \tag{2.9}$$

для некоторой положительной постоянной C.

Фактически мы сначала докажем неравенство Фабера (2.8) для a и b таких, что $-1 < a < b < c$.

Теорема 2.5 *Если $-1 < a < b < c < \infty$ и f – неотрицательная, невозрастающая функция на интервале $(0, \infty)$, удовлетворяющая условию (2.6), то справедливо неравенство Фабера (2.8). Кроме того, для конечных $M_a(f)$ и $M_c(f)$ знак равенства в (2.8) реализуется тогда и только тогда, когда функция f равна функции f_0, определённой в (2.9).*

Доказательство теорем. Мы получаем (2.7) и (2.8) как следствия неравенства Гёльдера для интегралов и следующей леммы.

Лемма 2.1 *Если функция $f : (0, \infty) \to [0, \infty)$ является неотрицательной и невозрастающей и удовлетворяет условию (2.6), то функция $\psi : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, определённая равенством*

$$\psi(x) = \int_0^x f(t)\,dt - xf(x),$$

имеет следующие свойства:

(1) *ψ – неубывающая функция;*

(2) *$\psi(0) := \lim_{x\to 0^+} \psi(x) = 0$ и $\psi(\infty) := \lim_{x\to\infty} \psi(x) = 1$;*

(3) *если величина $M_p(f)$ конечна, то*

$$(p+1)M_p(f) = \int_0^\infty x^p\,d\psi(x). \qquad (2.10)$$

Доказательство леммы. Из неравенств

$$f(t) \geq f(x) \geq 0 \quad (0 < t \leq x < \infty) \tag{2.11}$$

следует, что

$$\psi(x_2) - \psi(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f(t)\,dt - x_2 f(x_2) + x_1 f(x_1) \geq$$

$$\geq (x_2 - x_1) f(x_2) - x_2 f(x_2) + x_1 f(x_1) \geq 0$$

при условии $x_2 > x_1 > 0$. Таким образом, свойство (1) доказано.

Пользуясь (2.11) и сходимостью интеграла (2.6), легко получаем

$$x f(x) \leq \int_0^x f(t)\,dt \to 0 \quad (\text{при} \quad x \to 0^+)$$

и

$$x f(x) \leq 2 \int_{x/2}^x f(t)\,dt \to 0 \quad (\text{при} \quad x \to \infty).$$

Вместе с (2.6) эти соотношения доказывают свойство (2).

Ясно, что $M_p(f) = \infty$ при $p \leq -1$. Следовательно, если величина $M_p(f)$ конечна, то $p + 1 > 0$,

$$x^{p+1} f(x) \leq (1+p) \int_0^x t^p f(t)\,dt \to 0 \quad (\text{при} \quad x \to 0^+)$$

и

$$x^{p+1} f(x) \leq 2^{p+1} \int_{x/2}^x t^p f(t)\,dt \to 0 \qquad (\text{при} \quad x \to \infty).$$

Интегрированием по частям получаем

$$\int_0^\infty x^p d(xf(x)) =$$

$$= x^{p+1} f(x)|_0^\infty - p \int_0^\infty x^p f(x)\, dx = -pM_p(f).$$

Тогда можем написать

$$\int_0^\infty x^p d\psi(x) = \int_0^\infty x^p f(x)\, dx - \int_0^\infty x^p d(xf(x)) =$$

$$= M_p(f) + pM_p(f),$$

что совпадает с соотношением (2.10). Этим и завершается доказательство леммы.

Перейдём к доказательству теорем. Пусть $-1 < a < b < c < \infty$ и величины $M_a(f)$ и $M_c(f)$ конечны. Согласно неравенству Гёльдера

$$\left| \int_0^\infty u\, v\, d\psi(x) \right| \le$$

$$\le \left(\int_0^\infty |u|^\alpha d\psi(x) \right)^{1/\alpha} \left(\int_0^\infty |v|^\beta d\psi(x) \right)^{1/\beta}$$

для показателей

$$\alpha = \frac{c-a}{c-b} > 1, \qquad \beta = \frac{c-a}{b-a} > 1 \qquad \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1 \right)$$

и функций

$$u = x^{a/\alpha}, \quad v = x^{c/\beta} \qquad \left(\frac{a}{\alpha} + \frac{c}{\beta} = b\right),$$

будем иметь

$$\int_0^\infty x^b d\psi \le \left(\int_0^\infty x^a d\psi\right)^{\frac{c-b}{c-a}} \left(\int_0^\infty x^c d\psi\right)^{\frac{b-a}{c-a}}. \qquad (2.12)$$

С учётом равенства (2.10) легко убедиться, что (2.12) эквивалентно неравенству Фабера (2.8).

Так как $a < c$, то равенство в (2.12) имеет место тогда и только тогда, когда

$$\psi(x) = \psi_0(x) := \begin{cases} 0, \text{ если } & 0 \le x < 1/C, \\ 1, \text{ если } & 1/C < x < \infty \end{cases}$$

для некоторой постоянной $C > 0$. Для соответствующей экстремальной функции $f_0(x)$ легко находим

$$xy' - y = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad 0 < x < 1/C, \\ -1, & \text{если} \quad 1/C < x < \infty, \end{cases} \qquad (2.13)$$

где

$$y = \int_0^x f_0(t)\, dt.$$

Решая уравнение (2.13), получаем

$$y = \begin{cases} C_1 x, & \text{если} \quad 0 < x < 1/C, \\ C_2 x + 1, & \text{если} \quad 1/C < x < \infty, \end{cases}$$

где C_1 и C_2 – постоянные. Таким образом,

$$f_0(x) = \begin{cases} C_1, & \text{если} \quad 0 < x < 1/C, \\ C_2, & \text{если} \quad 1/C < x < \infty. \end{cases}$$

Поскольку функция $f_0(x)$ должна быть неотрицательной и невозрастающей, то будем иметь $C_1 \geq C_2 \geq 0$. Условие (2.6) для $f_0(x)$ влечёт за собой, что $C_2 = 0$ и $C_1 = C$. Отсюда следует, что функция $f_0(x)$ должна быть функцией вида (2.9), и для таких функций равенство действительно имеет место.

Таким образом, теорема 2.5 доказана.

Согласно свойствам неравенства Гёльдера, неравенство (2.12) влечёт

$$\left(\int_0^\infty x^r d\psi(x)\right)^{1/r} \leq \left(\int_0^\infty x^s d\psi(x)\right)^{1/s}, \tag{2.14}$$

где $r < s$ (при специальной интерпретации интегральных средних в случае $r = 0$ или $s = 0$). Кроме того, равенство в (2.14) невозможно, если $\psi(x) \neq \psi_0(x)$ и рассматриваемые интегралы конечны.

Таким образом, теорема 2.4 следует из теоремы 2.5.

Этим и завершается доказательство.

2.3 Свойства выпуклых функций

Пусть $-\infty \leq \alpha < \beta \leq +\infty$, и пусть I – интервал с крайними точками α и β. Функция $f\colon I \to \mathbb{R}$ называется выпуклой, если

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2) \qquad (2.15)$$

для всех $\lambda \in [0,1]$ и всех x_1, $x_2 \in I$.

Из курса математического анализа нам известно следующая

Теорема 2.6 *Пусть $f \in C^1(\alpha,\beta)$. Функция f выпукла тогда и только тогда, когда её производная f' – неубывающая функция.*

Как следствие этой теоремы получается следующее необходимое и достаточное условие выпуклости для дважды непрерывно дифференцируемых функций.

Теорема 2.7 *Пусть $f \in C^2(\alpha,\beta)$. Функция f выпукла тогда и только тогда, когда $f''(x) \geq 0$ для любого $x \in (\alpha,\beta)$.*

В общем случае выпуклая в открытом интервале функция оказывается непрерывной и, кроме того, почти всюду дифференцируемой. Более полно эти свойства выпуклой функции представлены в следующем утверждении.

Теорема 2.8 *Пусть функция f является выпуклой в интервале (α,β). Тогда* *(i) функция f непрерывна в этом интервале и существует интегрируемая в смысле Лебега неубывающая функция $h : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ такая, что*

$$f(x) - f(y) = \int_y^x h(t)\,dt$$

для всех x и $y \in (\alpha, \beta)$, в частности, для почти всех $x \in I$ функция f дифференцируема и имеет место равенство $f'(x) = h(x)$;

(ii) для любого $x \in (\alpha, \beta)$ существуют односторонние производные $f'(x+0)$ и $f'(x-0)$ такие, что $f'(x+0) = f'(x-0)$ за исключением разве лишь некоторого счётного множества точек. Кроме того, $f'(x+0)$ является неубывающей и непрерывной справа, а $f'(x-0)$ не убывает и непрерывна слева;

(iii) в любой точке $x \in (\alpha, \beta)$

$$f'(x-0) \le f'(x+0)$$

и

$$f(y) \ge f(x) + \lambda(x)(y-x) \tag{2.16}$$

для любых $y \in (\alpha, \beta)$ и $\lambda(x) \in [f'(x-0), f'(x+0)]$.

Ключевую роль в доказательстве играет следующее простое утверждение.

Лемма 2.2 *Пусть $[x_j, y_j]$ $(j = 1, 2, 3)$ — три невырожденных отрезка, лежащих в интервале $I = (\alpha, \beta)$, несовпадающих и зацеплённых в том смысле, что*

$x_1 < x_2 < x_3$, $y_1 < y_2 < y_3$ и

$$[x_1, y_1] \cap [x_2, y_2] = [x_2, y_1] \neq \emptyset,$$

$$[x_2, y_2] \cap [x_3, y_3] = [x_3, y_2] \neq \emptyset.$$

Если функция $f\colon I \to \mathbb{R}$ выпукла, то справедливы неравенства

$$\frac{f(y_1) - f(x_1)}{y_1 - x_1} \leq$$

$$\leq \frac{f(y_2) - f(x_2)}{y_2 - x_2} \leq \frac{f(y_3) - f(x_3)}{y_3 - x_3}. \tag{2.17}$$

Доказательство леммы. Пусть L_j — прямая, проходящая через точки $(x_j, f(x_j))$, $(y_j, f(y_j))$, и пусть $\alpha_j \in (-\pi/2, \pi/2)$ — угол наклона этой прямой к оси абсцисс. Тогда

$$\mathrm{tg}\ \alpha_j = \frac{f(y_j) - f(x_j)}{y_j - x_j} \quad (j = 1, 2, 3).$$

Из определения выпуклости следует, что график выпуклой функции $f\colon I \to \mathbb{R}$ над отрезком $[x_j, y_j]$ лежит под L_j или на L_j, а график этой функции над множеством $(\alpha, \beta) \setminus [x_j, y_j]$ лежит над L_j или на L_j. С учётом условий расположения точек геометрически очевидно, что $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \alpha_3$. Так как тангенс — возрастающая функция в интервале $(-\pi/2, \pi/2)$, получаем неравенства

$$\mathrm{tg}\ \alpha_1 \leq \mathrm{tg}\ \alpha_2 \leq \mathrm{tg}\ \alpha_3,$$

что и требовалось доказать.

Схема доказательства теоремы 2.8. Из неравенств (2.17) легко следует, что на любом конечном отрезке функция удовлетворяет условию Липшица. А именно, для любого отрезка $[a, b] \subset I = (\alpha, \beta)$ существует такая постоянная M, что для любых двух точек $x, y \in [a, b]$, $x \neq y$, имеют место неравенства

$$-M \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq M.$$

Из условия Липшица следует, что функция f является абсолютно непрерывной, поэтому она дифференцируема почти всюду и имеет место требуемое равенство

$$f(x) - f(y) = \int_y^x h(t)\, dt,$$

причём $f'(x) = h(x)$ во всех точках дифференцируемости f.

Далее, пусть $x < y$ и x, y — точки, в которых функция f дифференцируема. Возьмём в (2.17) $x = y_1 = x_2$, $y = y_2 = x_3$ и перейдём в (2.17) к пределу при $x_1 \to x$ и $y_3 \to y$. Получаем

$$f'(x) \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq f'(y), \quad x < y. \tag{2.18}$$

Таким образом, f' является монотонно неубывающей функцией, следовательно, может иметь разве лишь счётное множество точек разрыва. С использованием монотонности f' и теоремы о существовании предела монотонных ограниченных функций получаем, что в любой точке разрыва x_0 функции f' существуют

$$f'(x_0-0)=\lim_{x_0>x\to x_0} f'(x)=\sup_{\alpha<x<x_0} f'(x)$$

и

$$f'(x_0+0)=\lim_{x_0<x\to x_0} \varphi'(x)=\inf_{x_0<x<\beta} f'(x),$$

причём

$$f'(x_0-0)\le f'(x_0+0),$$

что и требовалось доказать.

Для вывода неравенства (2.16) рассмотрим сначала случай, когда x, y — точки, в которых функция f дифференцируема. При $x=y$ неравенство (2.16) тривиально, при $x<y$ в силу левого неравенства в (2.18)

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\ge f'(x), \quad (x<y),$$

при $x>y$ в силу неравенства в (2.18) (поменяв ролями переменные) получаем

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\le f'(x), \quad (x>y).$$

В результате имеем неравенство

$$f(y)\ge f(x)+f(x)(y-x)$$

при любом расположении точек дифференцируемости x, y. Случай, когда x, y — точки разрыва производной, получается нетрудными предельными переходами.

Этим и завершается доказательство теоремы 2.8.

Теорема 2.9 *Функция $f\colon (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ выпукла тогда и только тогда, когда существует неубывающая функция $h\colon (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ и точка $c \in (\alpha, \beta)$ такие, что для всех $x \in (\alpha, \beta)$*

$$f(x) - f(c) = \int_c^x h(t)\, dt.$$

Доказательство. Пусть $f\colon (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ выпукла. Определяем функцию h равенством $h(x) = \varphi(x+0)$ и как следствие теоремы 2.8 получаем доказываемое утверждение для любого $c \in (\alpha, \beta)$.

Докажем обратное. Пусть существуют требуемая неубывающая функция h и значение $c \in (\alpha, \beta)$. Для любого фиксированного $\lambda \in [0, 1]$ и произвольных точек $x, y \in (\alpha, \beta)$, $x < y$, будем иметь

$$X := \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) - f(\lambda x + (1-\lambda) y) =$$
$$= (1-\lambda)[f(y) - f(\lambda x + (1-\lambda)y)] -$$
$$-\lambda[f(\lambda x + (1-\lambda)y) - f(x)] =$$
$$= (1-\lambda) \int_{\lambda x + (1-\lambda)y}^{y} h(t) dt - \lambda \int_x^{\lambda x + (1-\lambda)y} h(t) dt.$$

Заменим подынтегральные функции $h(t)$ не зависящей от переменной интегрирования t константой

$$h(\lambda x + (1-\lambda)y).$$

Поскольку $x \le \lambda x + (1-\lambda)y \le y$ и функция h является неубывающей, получим

$$Y := \int_{\lambda x+(1-\lambda)y}^{y} h(t)dt \geq Y_0 := \lambda(y-x)h(\lambda x+(1-\lambda)y),$$

$$Z := \int_{x}^{\lambda x+(1-\lambda)y} h(t)dt \leq$$
$$\leq Z_0 := (1-\lambda)(y-x)h(\lambda x+(1-\lambda)y).$$

Очевидно,

$$(1-\lambda)Y_0 - \lambda Z_0 = 0.$$

Следовательно,

$$X = (1-\lambda)Y - \lambda Z \geq (1-\lambda)Y_0 - \lambda Z_0 = 0,$$

т. е. $X = \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) - f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq 0$, что и требовалось доказать.

Очевидно, теорема 2.6 является следствием теоремы 2.9.

Замечание *Функцию f называют вогнутой, если функция $(-f)$ является выпуклой. Понятно, что для вогнутых функций имеют место соотношения вида (2.15) и (2.16) с противоположными знаками неравенства.*

2.4 Неравенство Йенсена

Неравенство Йенсена для выпуклых функций представлено в следующем утверждении.

Теорема 2.10 *Предположим, что* $\varphi : [a,b] \to (\alpha, \beta)$ *– непрерывная функция,* ψ *– неубывающая функция на отрезке* $[a,b]$*, обладающая свойством* $0 < \int_a^b d\psi(x) < +\infty$*. Если* f *– некоторая выпуклая функция в интервале* (α, β)*, существует и конечен интеграл Римана-Стилтьеса* $\int_a^b f(\varphi(x))\, d\psi(x)$*, то*

$$f\left(\frac{\int_a^b \varphi(x)\, d\psi(x)}{\int_a^b d\psi(x)}\right) \leq \frac{\int_a^b f(\varphi(x))\, d\psi(x)}{\int_a^b d\psi(x)}. \tag{2.19}$$

Доказательство. Пусть

$$\tau_0 := \int_a^b \varphi(x)\, d\psi(x) / \int_a^b d\psi(x).$$

Очевидно, $\tau_0 \in (\alpha, \beta)$. В силу (2.16) можно записать

$$f(\tau_0) + f'(\tau_0 + 0)(\varphi(x) - \tau_0) \leq f(\varphi(x)).$$

Следовательно,

$$\int_a^b [f(\tau_0)+f'(\tau_0+0)(\varphi(x)-\tau_0)] d\psi(x) \leq \int_a^b f(\varphi(x)) d\psi(x).$$

Отсюда и получаем доказываемое неравенство (2.19) с учётом определения $\tau_0 \in (\alpha, \beta)$ и легко проверяемого равенства

$$\int_a^b (\varphi(x) - \tau_0)\, d\psi(x) = 0.$$

Замечание 1. По той же схеме легко получаем обобщения (2.19) на другие типы интегралов.

Замечание 2. Рассмотрим некоторые частные случаи неравенства (2.19), которые являются весьма употребительными на практике.

Случай 1. Выбираем $f(t) = x^{s/r}$, $0 \le x < \infty$, $0 < r < s < \infty$, $\varphi(x) = |F(x)|^r$, тогда получаем следующее неравенство, играющее фундаментальную роль при сравнении интегральных средних:

$$\left(\frac{\int_a^b |F(x)|^r\, d\psi(x)}{\int_a^b d\psi(x)}\right)^{1/r} \le$$

$$\le \left(\frac{\int_a^b |F(x)|^s\, d\psi(x)}{\int_a^b d\psi(x)}\right)^{1/s}. \qquad (2.20)$$

Отметим, что неравенство (2.20) можно получить также как следствие неравенства Гёльдера (покажите!).

Случай 2. Если $f(x) = e^x$, $-\infty < x < \infty$, то (2.19) превращается в следующее утверждение:

$$\frac{\int_a^b \varphi(x)\, d\psi(x)}{\int_a^b d\psi(x)} \le \ln\left(\frac{\int_a^b \exp(\varphi(x))\, d\psi(x)}{\int_a^b d\psi(x)}\right).$$

2.5 Преобразование Лежандра

В качестве области определения выпуклой функции можно взять произвольное связное множество. Рассмотрим, например, конечный отрезок $\bar{I} = [\alpha, \beta]$ и функцию $f\colon \bar{I} \to \mathbb{R}$, удовлетворяющую неравенству (2.15) для всех $\lambda \in [0,1]$ и всех x_1, $x_2 \in \bar{I}$. Такая функция называется выпуклой на отрезке $\bar{I} = [\alpha, \beta]$.

Понятно, что ограничение этой функции на интервал (α, β) будет выпуклой функцией, и для него справедливы теоремы, доказанные выше.

Но в общем случае выпуклая функция $f\colon [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ может быть разрывной в граничных точках отрезка $\bar{I} = [\alpha, \beta]$. Например, нетрудно проверить выпуклость функции $f\colon [-1, 1] \to \mathbb{R}$, определённой равенствами $f(x) = x^2$ при $-1 < x < 1$ и $f(x) = 4$ при $|x| = 1$. Очевидно, эта функция не является непрерывной в точках $x = 1$ и $x = -1$.

Определим преобразование Лежандра.

Пусть $f\colon I \to \mathbb{R}$ – некоторая выпуклая функция. Преобразованием Лежандра называется новая функция

$$f^* : I^* \to \mathbb{R},$$

определяемая следующим образом

$$f^*(x^*) := \sup_{x \in I} (x^* x - f(x)), \qquad (2.21)$$

где в качестве I^* берётся множество всех тех значений переменной $x^* \in \mathbb{R}$, для которых указанный супремум конечен.

Нетрудно показать, что f^* является выпуклой на I^*, её называют сопряжённой выпуклой функцией.

Из (2.21) с учётом определения супремума получаем очевидное, но важное соотношение

$$x^*x \leq f^*(x^*) + f(x), \quad x \in I, x^* \in I^*,$$

называемое неравенством Юнга-Фенхеля.

Обратим внимание на то, что если супремум достигается в некоторой внутренней точке x области определения I и в этой точке функция дифференцируема, то, как легко получить,

$$x^* = f'(x)$$

и при этом

$$f^*(x^*) = x^*x - f(x) = xf'(x) - f(x).$$

Приведённые формулы позволяют найти в явном виде сопряжённую выпуклую функцию для гладких выпуклых функций с монотонно возрастающей производной.

Кратко остановимся на выпуклых функциях нескольких переменных.

Формально определение выпуклой функции нескольких переменных совпадает со случаем функций одной переменной за исключением того, что возникает большой выбор в задании области определения функций.

Пусть Ω — выпуклое подмножества евклидова пространства $\mathbb{R}^n$. Говорят, что функция $f : \Omega \to \mathbb{R}$ выпукла на Ω, если

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) \qquad (2.22)$$

для любого $\lambda \in [0,1]$ и для всех $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \Omega$ и $y = (y_1, y_2, ..., y_n) \in \Omega$.

Преобразование Лежандра также определяется аналогично с естественной заменой произведения t^*t скалярным произведением

$$(x^*, x) = x_1^* x_1 + x_2^* x_2 + ... + x_n^* x_n$$

векторов $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \Omega$ и $x^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*) \in \Omega^*$.

А именно, в случае функций нескольких переменных преобразование Лежандра определяется соотношением

$$f^*(x^*) := \sup_{x \in \Omega} [(x^*, x) - f(x)].$$

Отметим, что преобразования Лежандра имеют многочисленные применения в выпуклом анализе, термодинамике, уравнениях математической физики, теоретической механике, вариационном исчислении и контактной геометрии. В этом легко убедиться, сделав запрос в Интернете "преобразование Лежандра".

Для функций многих переменных теория выпуклых функций глубоко разработана. Естественно, формулировки и доказательства соответствующих теорем существенно усложняются.

В качестве иллюстрации приведём формулировку аналога теоремы 2.7 для функции двух переменных. Вместо координат x_1, x_2 мы будем использовать более привычные обозначения $x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$, в частности, вместо $f((x_1, x_2))$ будем пользоваться записью $f(x, y)$.

Справедлив следующий критерий выпуклости функции двух переменных.

Теорема 2.11 *Пусть Ω — открытое выпуклое подмножество плоскости $\mathbb{R}^2$. Функция $f : \Omega \to \mathbb{R} \in C^2(\Omega)$ будет выпуклой на Ω тогда и только тогда, когда квадратичная форма*

$$Q := \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} u^2 + 2\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} u\, v + \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} v^2$$

является неотрицательной, т. е. $Q \geq 0$ для любых $u \in \mathbb{R}, v \in \mathbb{R}$ и всех (x, y) из Ω.

2.6 Аналоги неравенства Гёльдера-Йенсена

Для нас окажется полезным следующий факт:

если $g \in L^q(\mathrm{d}\mu)$ и $\int \mathrm{d}\mu(x) < \infty$, то

$$\frac{\int |g(x)|^q \mathrm{d}\mu(x)}{\int \mathrm{d}\mu(x)} = \int\limits_0^\infty h(t) \mathrm{d}t^q,$$

где $h(t) = \lambda(t)/\lambda(0)$, $\lambda(t)$ *– функция распределения для* $|g(x)|$.

Отметим, что $\lambda(t)$ является невозрастающей функцией. Таким образом, хорошо известное неравенство Гёльдера-Йенсена

$$\left(\frac{\int |g(x)|^{q_1} \mathrm{d}\mu(x)}{\int \mathrm{d}\mu(x)}\right)^{1/q_1} \leq \left(\frac{\int |g(x)|^{q_2} \mathrm{d}\mu(x)}{\int \mathrm{d}\mu(x)}\right)^{1/q_2} \tag{2.23}$$

для $q_1 < q_2$ эквивалентно следующей теореме.

Теорема 2.12 *Если* $0 \leq h(t) \leq 1$ *и* $h(t)$ *не возрастает на интервале* $(0, \infty)$, *то*

$$\left(\int_0^\infty h(t) \mathrm{d}t^{q_1}\right)^{1/q_1} \leq \left(\int_0^\infty h(t) \mathrm{d}t^{q_2}\right)^{1/q_2}$$

при $0 < q_1 \leq q_2 \leq \infty$.

Интегралы в теореме 2.12 являются частными случаями мультиномиальных распределений, встречающихся в теории вероятностей, точнее, частными случаями следующих интегралов:$P_n(q) :=$

$$= \int\limits_0^{x_1} \mathrm{d}\psi_1^q(y_1) \int\limits_0^{x_2} \mathrm{d}\psi_2^q(y_2) \cdots \int\limits_0^{x_n} h(y)\varphi^q(y)\mathrm{d}\psi_n^q(y_n), \tag{2.24}$$

где $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, h, φ и ψ_k – неотрицательные функции, $\psi_k(y_k)$ строго возрастают и абсолютно непрерывны в интервалах $[0, x_k]$, $\psi_k(0) = 0$. В большинстве приложений достаточно брать $\psi_k(t) = t^{r_k}$ для фиксированного $r_k > 0$.

Рассмотрим теперь функционал $P_n(q)$ из (2.24) и функции $\psi_k(y_k)$, для которых выполнены условия, сформулированные выше, предполагая, что $h \geq 0$, $\varphi \geq 0$ и $P_n(q) < \infty$.

Обобщением теоремы 2.12 является следующая теорема, доказанная Ф.Г. Авхадиевым и И.Р. Каюмовым в 2005 году.

Теорема 2.13 *Предположим, что функция $h(y)$ не убывает по переменным $y_k \in [0, x_k]$ при $k = 2, \dots, n$, а функция $\varphi(y)$ не убывает по переменным $y_k \in [0, x_k]$ при $k = 1, 2, \dots, n$. Если $0 < q_1 < q_2 \leq \infty$, $0 \leq h(y) \leq 1$, то выполнено неравенство*

$$P_n^{1/q_1}(q_1) \leq P_n^{1/q_2}(q_2). \tag{2.25}$$

Доказательство теоремы 2.13. Сначала рассмотрим одномерный случай $n = 1$. Пусть

$$S(x) = \int_0^x h(t)\varphi(t)\mathrm{d}\psi(t), \quad 0 < x < \infty.$$

Предполагаем, что $\psi(0) = 0$, $\psi(t)$ абсолютно непрерывна, $\psi'(t) > 0$ почти всюду на отрезке $[0, x]$ и $0 < q_1 < q_2 < \infty$. Требуется доказать, что

$$\left(\int_0^x h(t)\varphi^{q_1}(t)\mathrm{d}\psi^{q_1}(t)\right)^{q_2/q_1} \leq$$

$$\leq \int_0^x h(t)\varphi^{q_2}(t)\mathrm{d}\psi^{q_2}(t), \tag{2.26}$$

если $0 \leq h(t) \leq 1$ и $0 \leq \varphi(t_1) \leq \varphi(t)$ для всех t_1 и t

таких, что $0 \le t_1 \le t \le x$. Докажем также, что для $q_1 < q_2$ равенство в (2.26) выполнено тогда и только тогда, когда $S(x) = 0$ или $S(x) > 0$ и существует $\alpha \in (0, x]$ такое, что

$h(t) = 1$ почти всюду на $[0, \alpha]$;

$h(t) = 0$ почти всюду на $[\alpha, x]$;

$\varphi(t) = c = \mathrm{const} > 0$ на $(0, \alpha)$.

Обозначим

$$\Phi(u) = u^{q_2/q_1} \ (u > 0)$$

и рассмотрим функцию: $F_i(t) :=$

$$= \int\limits_0^t h(\tau)\varphi^{q_i}(\tau)\mathrm{d}\psi^{q_i}(\tau) \quad (i = 1, 2, \quad 0 \le t \le x). \quad (2.27)$$

Имеем: $F_1(t) \le$

$$\le \varphi^{q_1}(t) \int\limits_0^t \mathrm{d}\psi^{q_1}(\tau) = [\varphi(t)\psi(t)]^{q_1}, \quad 0 \le t \le x. \quad (2.28)$$

Из выпуклости функции $\Phi(u)$ и неравенства (2.28) следует, что при условии $0 \le t \le x$

$$\Phi'(F_1(t)) \le \Phi'(\varphi^{q_1}(t)\psi^{q_1}(t)) = \frac{q_2}{q_1}[\varphi(t)\psi(t)]^{q_2 - q_1}.$$

Следовательно,

$$\Phi'(F_1(t))F_1'(t) \le F_2'(t), \quad 0 \le t \le x. \quad (2.29)$$

Интегрируя неравенство (2.29), получаем

$$\Phi(F_1(x)) \leq F_2(x), \tag{2.30}$$

что эквивалентно неравенству (2.26).

Ясно, что равенство в (2.26) достигается тогда и только тогда, когда выполняется равенство в (2.29) для почти всех $t \in [0, x]$. Пусть $S(x) > 0$,

$$0 < \psi(t_1) < \psi(t_2) \text{ при } 0 < t_1 < t_2 \leq x, \tag{2.31}$$

и существует $\alpha \in [0, x]$ такое, что

$$\alpha = \inf\{t \in [0, x] : \int\limits_t^x h(\tau)\varphi(\tau)\mathrm{d}\psi(\tau) > 0\}. \tag{2.32}$$

Но тогда

$$[F_1(t) - \varphi(t)^{q_1}\psi^{q_1}(t)]h(t)\varphi(t) = 0 \tag{2.33}$$

почти всюду в $[0, \alpha]$, если в (2.26) имеет место равенство.

Кроме того, отметим, что $\varphi(t) \not\equiv 0$ на $(0, \alpha)$. Отсюда следует, что существуют $t \in (0, \alpha)$, для которых $\varphi(t) > 0$. Если $0 \leq \varphi(t_1) < \varphi(t_2)$ для некоторых $0 < t_1 < t_2 < \alpha$ и $t \in (t_2, \alpha)$, то

$$F_1(t) \leq \varphi^{q_1}\psi^{q_1}(t_1) +$$

$$+ \varphi^{q_1}(t)[\psi^{q_1}(t) - \psi^{q_1}(t_1)] < [\varphi(t)\psi(t)]^{q_1}. \tag{2.34}$$

Из соотношений (2.33) и (2.34) следует, что $h(t) = 0$

почти всюду на $[t_2, \alpha]$, а это противоречит (2.32). Следовательно,

$$\varphi(t) = c = \text{const} > 0, \quad t \in (0, \alpha). \tag{2.35}$$

Итак, соотношение (2.33) эквивалентно равенству

$$\left[\int_0^t h(\tau)\mathrm{d}\psi^{q_1}(\tau) - \psi^{q_1}(t)\right] h(t) = 0 \text{ п.в. на } [0, \alpha]. \tag{2.36}$$

Если $h(t) \neq 1$ почти всюду на $[0, \alpha]$, то найдётся $t_3 \in (0, \alpha)$ такое, что

$$\int_0^t h(\tau)\mathrm{d}\psi^{q_1}(\tau) < \psi^{q_1}(t), \quad t \in (t_3, \alpha).$$

Таким образом, $h(t) = 0$ почти всюду на (t_3, α) в силу (2.36), что противоречит (2.32). Поэтому

$$h(t) = 1 \qquad \text{почти всюду на } [0, \alpha]. \tag{2.37}$$

Равенства (2.32), (2.35), (2.37) дают желанные свойства экстремальных функций $h(t)$ и $\varphi(t)$. Этим и завершается доказательство случая $n = 1$.

Для доказательства теоремы 2.13 в случае $n \geq 2$ применим индукцию по n. Предположим, что теорема 2.13 верна для размерностей $1, 2, \ldots, n-1$. Можем написать

$$P_n(q_1) = \int\limits_0^{x_n} P_{n-1}(y_n, q_1)\mathrm{d}\psi_n^{q_1}(y_n), \tag{2.38}$$

где $P_{n-1}(y_n,q_1)=$

$$= \int\limits_0^{x_{n-1}} \mathrm{d}\psi_{n-1}^{q_1}(y_{n-1}) \dots \int\limits_0^{x_1} h(y)\varphi^{q_1}(y)\mathrm{d}\psi_1^{q_1}(y_1).$$

В этих формулах $y=(y_1,\cdots,y_n)$. Для фиксированного $y_n\in[0,x_n]$ по индукционной гипотезе

$$P_{n-1}(y_n,q_1)\le P_{n-1}^{q_1/q_2}(y_n,q_2). \tag{2.39}$$

Функция $\varphi_*(t):=P_{n-1}^{1/q_2}(t,q_2)$ не убывает при $t\in[0,x_n]$. Следовательно, из (2.38) и (2.39) вытекает, что

$$P_n(q_1)\le\int_0^{x_n}\varphi_*^{q_1}(y_n)\mathrm{d}\psi_n^{q_1}(y_n). \tag{2.40}$$

К функции (2.40) применим неравенство (2.26) при $h(t)=1$. Тогда

$$P_n(q_1)\le\left(\int_0^{x_n}\varphi_*^{q_2}(y_n)\mathrm{d}\psi_n^{q_2}(y_n)\right)^{q_1/q_2}=$$

$$=\left(\int_0^{x_n}P_{n-1}(y_n,q_2)\mathrm{d}\psi_n^{q_2}(y_n)\right)^{q_1/q_2}=P_n^{q_1/q_2}(q_2), \tag{2.41}$$

что эквивалентно неравенству (2.25). Отметим, что равенство в соотношении (2.25) достигается, если $\varphi(y)=\mathrm{const}>0$ и $h(y)=1$ почти всюду на

$$I_\alpha=[0,\alpha_1]\times\cdots\times[0,\alpha_n]\subset I_x=[0,x_1]\times\cdots\times[0,x_n],$$

$h(y)=0$ почти всюду на $I_x\setminus I_\alpha$.

2.7 Задачи и упражнения

1. Мы рассмотрели лишь один специальный случай неравенства Харди. Докажите следующую теорему, в которой представлена полная версия неравенств, называемых неравенствами Харди.

Теорема 2.14 *1) Пусть* $1 \le p < \infty$, $1 < s < \infty$, *и* $g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ *– абсолютно непрерывная неубывающая функция, такая, что*

$$g(0) = 0, \quad g'/t^{s/p-1} \in L^p(0, \infty).$$

Тогда

$$\int_0^\infty \frac{|g'(t)|^p}{t^{s-p}} dt \ge \left(\frac{s-1}{p}\right)^p \int_0^\infty \frac{|g(t)|^p}{t^s} dt. \qquad (2.42)$$

Для случая, когда $p > 1$ *и* $g \not\equiv 0$, *это неравенство является строгим, следовательно, не существует экстремальной функции, но константа* $((s-1)/p)^p$ *является точной.*

Если $p = 1$, *то имеем тождество*

$$\int_0^\infty \frac{g(t)}{t^s} dt = \frac{1}{s-1} \int_0^\infty \frac{g'(t)}{t^{s-1}} dt, \qquad (2.43)$$

которое справедливо для любой допустимой функции, т. е. для функции $g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, *удовлетворяющей условиям теоремы при* $p = 1$, $s \in (1, \infty)$.

2) Пусть $1 \le p < \infty$, $-\infty < \sigma < 1$ *и* $g : (0, \infty] \to \mathbb{R}$ *– абсолютно непрерывная невозрастающая функ-*

ция, такая, что $g(+\infty) = 0$ *и* $g'/\tau^{\sigma/p-1} \in L^p(0,\infty)$. *Тогда*

$$\int_0^\infty \frac{|g'(\tau)|^p}{\tau^{\sigma-p}} d\tau \geq \left(\frac{|\sigma-1|}{p}\right)^p \int_0^\infty \frac{|g(\tau)|^p}{\tau^\sigma} d\tau. \qquad (2.44)$$

Для случая, когда $p > 1$ *и* $g \not\equiv 0$, *это неравенство является строгим, следовательно, не существует экстремальной функции, но константа* $(|\sigma-1|/p)^p$ *является точной.*

Указания.

a) Ключевым утверждением теоремы является тождество (2.43). Это тождество для функций $g : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ получается интегрированием по частям (берем $u = g(t)$, $dv = dt/t^s$). Учитываем при этом, что при интегрировании по частям внеинтегральные слагаемые исчезают из-за равенств

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{g(x)}{x^{s-1}} = 0, \quad \lim_{x\to\infty} \frac{g(x)}{x^{s-1}} = 0. \qquad (2.45)$$

Равенства (2.45) доказываем следующим образом. Из требования $g'/t^{s-1} \in L^1(0,\infty)$ следует, что

$$\lim_{x\to 0^+} \int_0^x \frac{g'(t)}{t^{s-1}} = 0, \quad \lim_{A\to\infty} \int_A^\infty \frac{g'(t)}{t^{s-1}} = 0.$$

С другой стороны, для $x \in (A,\infty)$ при любом фиксированном $A \geq 0$ имеем

$$0 \le g(x) = g(A) + \int_A^x g'(t)d\,t \le g(A) + x^{s-1}\int_A^x \frac{g'(t)}{t^{s-1}}d\,t,$$

следовательно,

$$0 \le \frac{g(x)}{x^{s-1}} \le \frac{g(A)}{x^{s-1}} + \int_A^x \frac{g'(t)}{t^{s-1}}d\,t.$$

Полагая $A = 0$ и переходя к пределу при $x \to 0^+$, получаем первое равенство из (2.45).

Переходя сначала к верхнему пределу при $x \to \infty$ и фиксированном $A \ge 0$, а затем переходя к пределу при $A \to \infty$, получаем второе равенство из (2.45).

б) Если $p = 1$, то неравенство (2.42) является следствием тождества (2.43). Для случая, когда $p > 1$, применим тождества (2.43) к функции g^p. Будем иметь

$$\int_0^\infty \frac{g^p(t)}{t^s}dt = \frac{p}{s-1}\int_0^\infty \frac{g'(t)g^{p-1}(t)}{t^{s-1}}dt =$$

$$= \frac{p}{s-1}\int_0^\infty \frac{g'(t)}{t^{s/p-1}}\frac{g^{p-1}(t)}{t^{s-s/p}}dt.$$

Применяя неравенство Гёльдера, получаем

$$\int_0^\infty \frac{g^p(t)}{t^s}dt \le$$

$$\le \frac{p}{s-1}\left(\int_0^\infty \frac{g'(t)^p}{t^{s-p}}dt\right)^{1/p}\left(\int_0^\infty \frac{g^p(t)}{t^s}dt\right)^{1-1/p},$$

отсюда и следует доказываемое неравенство (2.42).

в) Неравенство (2.44) можно получить как следствие неравенства (2.42). Для этого достаточно записать неравенство (2.42) для абсолютно непрерывной неубывающей функции $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, такой, что $f(0) = 0, \quad f'/t^{s/p-1} \in L^p(0, \infty)$. Будем иметь

$$\int_0^\infty \frac{|f'(t)|^p}{t^{s-p}} dt \geq \left(\frac{s-1}{p}\right)^p \int_0^\infty \frac{|f(t)|^p}{t^s} dt.$$

С помощью замен переменных

$$t = 1/\tau, \quad g(\tau) := f(1/\tau), \quad s = 2 - \sigma$$

и нетрудных вычислений приходим к неравенству (2.44).

г) По аналогии со случаем $p = 2$, $s = 2$ теоремы Харди (см. доказательство теоремы 2.3), остается доказать утверждения о строгих неравенствах и точности констант в общем случае.

2. Докажите, что следующие функции

$$f(x) = x^x,$$

$$g(x) = -\ln x,$$

$$h(x) = x \ln x,$$

$$k(x) = x^p \quad (p > 1),$$

$$m(x) = -x^p \quad (0 < p < 1)$$

являются выпуклыми на луче $(0, \infty)$.

3. Докажите, что следующие функции

$$f(x) = |x + a|,$$

$$g(x) = 3|x + 1|^3 + 2|x - 1| - 4,$$

$$h(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j |x - a_j|^{b_j}, \quad (b_j \geq 1, c_j \geq 0),$$

$$k(x) = |x + a|^p \quad (p > 1),$$

$$m(x) = \sqrt{a + bx^2} \quad (a \geq 0, b \geq 0)$$

являются выпуклыми на всей числовой оси $(-\infty, \infty)$.

4. Пусть f — некоторая выпуклая функция в интервале (α, β), существуют и конечны предельные значения

$$A := f(\alpha + 0), \quad B := f(\beta - 0).$$

Докажите, что

$$\sup_{x \in (\alpha, \beta)} \varphi(x) = \max\{A, \ B\}.$$

5. Пусть f — некоторая непрерывная функция в интервале (α, β). Докажите следующее утверждение: функция f является выпуклой тогда и только тогда, когда

$$f(x) \leq \frac{1}{2h} \int_{-h}^{h} f(x + t) dt$$

для любого отрезка $[x - h, x + h]$, лежащего внутри интервала (α, β).

Указания. Если функция f является выпуклой, то

$$f(x) \le \frac{1}{2} f(x-t) + \frac{1}{2} f(x+t), \quad t \in [x-h, x+h].$$

Остается проинтегрировать по отрезку $[x-h, x+h]$ и воспользоваться равенством

$$\int_{-h}^{h} f(x+t)dt = \int_{-h}^{h} f(x-t)dt.$$

Предположим, что обратное утверждение неверно, т. е. непрерывная в интервале (α, β) функция f удовлетворяет неравенству

$$f(x) \le \frac{1}{2h} \int_{-h}^{h} f(x+t)dt$$

для любого отрезка $[x-h, x+h]$, лежащего внутри интервала (α, β), но функция f не является выпуклой. Тогда существуют три точки x_1, x_0, x_2, такие, что $\alpha < x_1 < x_0 < x_2 < \beta$ и справедливо неравенство

$$f(x_0) > \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2) \equiv$$

$$\equiv \frac{x_2 - x_0}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x_0 - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2),$$

где число λ найдено из равенства $x = \lambda x_1 + (1-\lambda) x_2$. В силу непрерывности рассматриваемой функции неравенство

$$f(y) > \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2) \equiv$$

$$\equiv \frac{x_2 - y}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{y - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2)$$

будет выполняться для всех точек y, достаточно близких к точке x_0. Возьмём наибольший интервал (x_1', x_2'), в котором выполнено выписанное неравенство. Очевидно, $(x_1', x_2') \subset (x_1, x_2)$ и

$$f(y) > \lambda f(x_1') + (1 - \lambda) f(x_2') \equiv$$

$$\equiv \frac{x_2' - y}{x_2' - x_1'} f(x_1') + \frac{y - x_1'}{x_2' - x_1'} f(x_2')$$

для любой точки $y \in (x_1', x_2')$. В частности, существуют точка $y_0 \in (x_1', x_2')$ и числа $\varepsilon_0 > 0$, $h > 0$, такие, что

$$f(y_0) = \frac{x_2 - y_0}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{y_0 - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2) + \varepsilon_0,$$

и для любой точки $y \in [y_0 - h, y_0 + h]$

$$\frac{x_2 - y}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{y - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2) + \varepsilon_0 \geq f(y),$$

$$\frac{x_2 - y}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{y - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2) + \varepsilon_0 \not\equiv f(y).$$

Интегрируя по $y \in [y_0 - h, y_0 + h]$, будем иметь

$$2hf(y_0) > \int_{y_0 - h}^{y_0 + h} f(y) dy = \int_{-h}^{h} f(y_0 + t) dt.$$

Получили противоречие.

6. Пусть φ — некоторая непрерывная функция в интервале (α, β). Докажите следующее утверждение:

функция φ является выпуклой тогда и только тогда, когда

$$\frac{1}{t-s}\int_s^t \varphi(x)dx \le \frac{\varphi(s)+\varphi(t)}{2}$$

для всех $\alpha < s < t < \beta$.

7. Если функция f ограничена и выпукла на некотором конечном интервале (α, β), то ее можно равномерно приблизить положительными линейными комбинациями, составленными из конечного числа выпуклых функций, принадлежащих следующим классам:

(1) линейным функциям;

(2) функциям вида $(x-c)^+ := \max\{x-c, 0\}$;

(3) функциям вида $(c-x)^+$.

Указания. Продолжаем функцию f по непрерывности с использованием формул

$$f(\alpha) = \lim_{t\to\alpha^+} f(t), \quad f(\beta) = \lim_{t\to\beta^-} f(t).$$

Продолженная функция будет непрерывной и выпуклой на отрезке $[\alpha, \beta]$, и, в частности, равномерно непрерывной на этом отрезке по теореме Кантора. Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ существует разбиение

$$\alpha = x_0 < x_1 < ... < x_n = \beta,$$

такое, что на каждом частичном отрезке $[x_{k-1}, x_k]$ колебание продолженной функции f будет меньше ε. Но тогда

$$|f(x) - g(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in (\alpha, \beta),$$

где g — ломаная, т. е. непрерывная кусочно-линейная функция, график которой состоит из хорд (отрезков прямых), соединяющих точки $(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$ и $(x_k, f(x_k))$, $k = 1, 2, ..., n$.

8. Найдите преобразование Лежандра для функций

$$f(t) = t^2, \qquad I = \mathbb{R},$$

$$g(t) = e^t, \qquad I = \mathbb{R},$$

$$h(t) = |t|, \qquad I = \mathbb{R},$$

Указания. Напомним, что преобразованием Лежандра для $f\colon I \to \mathbb{R}$ называется функция $f^* : I^* \to \mathbb{R}$, определяемая формулой

$$f^*(x^*) := \sup_{x \in I}(x^* x - f(x)),$$

где в качестве I^* берётся множество всех тех значений переменной $x^* \in \mathbb{R}$, для которых указанный супремум конечен. Функция f^* является выпуклой на I^*, ее называют сопряжённой выпуклой функцией. Простым следствием определения является следующее неравенство Юнга-Фенхеля:

$$x^* x \leq f^*(x^*) + f(x), \quad x \in I, x^* \in I^*,$$

Если супремум в определении преобразования Лежандра достигается в некоторой внутренней точке x области определения I и в этой точке функция дифференцируема, то $x^* = f'(x)$, т. е.

$$f^*(x^*) = xf'(x) - f(x).$$

Эти формулы позволяют найти в явном виде сопряжённую выпуклую функцию для гладких выпуклых функций f с монотонно возрастающей производной.

Ответы. $f^*(x) = x^2/4, I^* = \mathbb{R}$;

$g^*(x) = \{x \ln x - x, x > 0; 0, x = 0\}, I^* = [0, \infty)$;

$h^*(x) = 0, I^* = [-1, 1]$.

9. Пусть $p > 1$, $q > 1$ и $1/p + 1/q = 1$. Найдите преобразование Лежандра для функции

$$f(t) = \frac{t^p}{p},$$

и получите классическое неравенство Юнга

$$a\,b \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

10. Пользуясь преобразованием Лежандра для функции $g(t) = e^t, \quad I = \mathbb{R}$, докажите следующее неравенство $x\,t \leq e^t + x \ln \frac{x}{e}$.

11. (Безикович, Дэвис, 1965) Пусть g — непрерывная, неотрицательная, монотонная функция, определённая на отрезке $[0, 1]$. Тогда существуют две выпуклые функции $f_1 : [0, 1] \to \mathbb{R}, \qquad f_2 : [0, 1] \to \mathbb{R}$, такие, что $0 \leq f_1(t) \leq g(t) \leq f_2(t), \qquad 0 \leq t \leq 1$, но для интегралов имеют место следующие противоположные неравенства

$$2\int_0^1 f_1(t)dt \geq \int_0^1 g(t)dt \geq \frac{1}{2}\int_0^1 f_2(t)dt.$$

Константы 2 и 1/2 в этих неравенствах являются наилучшими из возможных.

12. Докажите следующую лемму.

Лемма 2.3 (Авхадиев Ф.Г. [19]). *Пусть* $v : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ *– абсолютно непрерывная функция, удовлетворяющая условиям* $v(0) = v(\pi) = 0$, $v \not\equiv 0$, $v' \in L^2(0, \pi)$. *Тогда*

$$\int_0^\pi v'^2(\theta)\, d\theta > \frac{1}{4}\int_0^\pi \frac{v^2(\theta)}{\sin^2\theta}\, d\theta + \frac{1}{4}\int_0^\pi v^2(\theta)\, d\theta.$$

Постоянные $1/4$ *являются точными: ни одну из них нельзя заменить на* $(1+\varepsilon_0)/4$ *при любом* $\varepsilon_0 > 0$.

Указание. Пусть $v_0(\theta) = \sqrt{\sin\theta}$. Так как $v_0' \notin L^2(0, \pi)$, то $v'(\theta) - v(\theta)v_0'(\theta)/v_0(\theta) \not\equiv 0$ и поэтому

$$I(v) := \int_0^\pi \left(v'(\theta) - v(\theta)\frac{v_0'(\theta)}{v_0(\theta)}\right)^2 d\theta > 0.$$

Применяя формулу $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ к подынтегральной функции и интегрируя по частям слагаемое $-2ab = -\int_0^\pi v_0'(\theta)/v_0(\theta)dv^2(\theta)$, преобразуйте неравенство $I(v) > 0$. Обоснование точности постоянных $1/4$ посмотрите в [19].

Глава 3

Геометрические неравенства

3.1 Изопериметрическое неравенство

Классическое изопериметрическое неравенство гласит, что *среди всех плоских фигур с заданным периметром наибольшую площадь имеет круг*. Эту теорему знали уже древние греки. В античную эпоху были также известны более общие задачи, например, задача царицы Дидоны (об области наибольшей площади на берегу моря, ограниченной забором заданной длины со стороны суши), а также изопериметрическое свойство шара в $\mathbb{R}^3$ (т. е. утверждение о том, что среди всех закрытых сосудов с заданной площадью поверхности наибольший объём имеет шар).

Однако, только в XIX столетии изопериметрические свойства круга и шара были строго доказаны. В первой половине XIX века Штейнер опубликовал несколько оригинальных, хотя и не совсем строгих, доказательств (он пользовался без обоснования существованием экстремальной области). Первые строгие доказательства были даны Эдлером в 1882 году для круга на плоскости и Шварцем в 1884 году для шара в $\mathbb{R}^3$.

В настоящее время известно более 10 различных способов обоснования классического изопериметрического неравенства для плоских фигур. Мы приведём здесь доказательство, принадлежащее Гурвицу. Оно не требует специальной подготовки, выходящей за пределы стандартных университетских курсов по математическому анализу и геометрии.

Теорема 3.1 *Пусть* Ω *— область на плоскости, ограниченная замкнутой спрямляемой кривой. Тогда площадь области* $S(\Omega)$ *и длина ее границы* $L(\Omega)$ *удовлетворяют неравенству*

$$S(\Omega) \leq \frac{L(\Omega)^2}{4\pi}, \tag{3.1}$$

равенство в котором достигается тогда и только тогда, когда Ω *— круг.*

Доказательство Гурвица. Обозначим

$$S = S(\Omega), \qquad L = L(\Omega).$$

Пусть $z = z(s) = \varphi(s) + i\psi(s)$ – уравнение граничной кривой, s – натуральный параметр (дуговая абсцисса), $s \in [0, L]$. Очевидно, функцию $z = z(s)$ можно продолжить на всю числовую ось, пользуясь формулами $z(s) = z(s + nL)$, $n \in \mathbb{Z}$. Полученная L-периодическая функция удовлетворяет условию Липшица

$$|z(s_2) - z(s_1)| \leq |s_2 - s_1| \quad \forall s_1, s_2 \in \mathbb{R},$$

так как длина хорды не больше, чем длина стягивающей её дуги кривой. Как следствие получаем, что функции $\varphi(s) = Re\, z(s)$ и $\psi(s) = Im\, z(s)$ удовлетворяют условию Липшица, поэтому мы можем пользоваться сходящимися рядами Фурье

$$x(t) = \varphi(s) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt + b_n \sin nt$$

и

$$y(t) = \psi(s) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos nt + d_n \sin nt,$$

где $t = 2\pi s/L$, и, следовательно, $0 \leq t \leq 2\pi$ при условии $s \in [0, L]$.

Очевидно, что функции, удовлетворяющие условию Липшица, являются абсолютно непрерывными. Поэтому функции x и y абсолютно непрерывны по $t \in [0, 2\pi]$, и

$$S = S(\Omega) = \int_0^{2\pi} x(t) y'(t) dt =$$

$$= \pi \sum_{n=1}^{\infty} n(a_n d_n - b_n c_n).$$

Пользуясь тем, что $|dz/ds| = 1$ почти всюду по $s \in [0, L]$, получаем

$$L = \int_0^L ds = \int_0^L |dz/ds|^2 ds = \frac{2\pi}{L} \int_0^{2\pi} |x'(t) + iy'(t)|^2 dt.$$

Следовательно, будем иметь

$$\frac{L^2}{2\pi} = \int_0^{2\pi} |x'(t) + iy'(t)|^2 dt = \int_0^{2\pi} [x'(t)^2 + y'(t)^2] dt =$$

$$= \pi \sum_{n=1}^{\infty} n^2 (a_n^2 + b_n^2 + c_n^2 + d_n^2).$$

Очевидно, доказываемое утверждение (3.1) является простым следствием тривиального неравенства $n \leq n^2$ и элементарных неравенств для арифметических и геометрических средних, а именно:

$$2a_n d_n \leq a_n^2 + d_n^2, \qquad -2b_n c_n \leq b_n^2 + c_n^2.$$

Ясно, что равенство $S = L^2/(4\pi)$ возможно тогда и только тогда, когда для любого натурального числа n выполняются равенства

$$2a_n d_n = n(a_n^2 + d_n^2), \qquad -2b_n c_n = n(b_n^2 + c_n^2).$$

Простой анализ показывает, что все эти равенства возможны тогда и только тогда, когда $a_n = b_n = c_n = d_n = 0$ для любого натурального числа $n \geq 2$, и

$$a_1 = d_1, \qquad b_1 = -c_1.$$

Таким образом, равенство $S = L^2/(4\pi)$ возможно тогда и только тогда, когда уравнение граничной кривой имеет вид

$$x = \frac{a_0}{2} + a_1 \mathrm{cos} t + b_1 \mathrm{sin} t, y = \frac{b_0}{2} - b_1 \mathrm{cos} t + a_1 \mathrm{sin} t, t \in [0, 2\pi],$$

следовательно,

$$(x - a_0/2)^2 + (y - b_0/2)^2 = a_1^2 + b_1^2,$$

т. е. граничная кривая является окружностью. Этим и завершается доказательство.

3.2 Неравенство Брунна-Минковского

Пусть X и Y – подмножества $\mathbb{R}^n$. Определим векторную сумму (сумму Минковского)

$$X + Y := \{x + y \in \mathbb{R}^n : x \in X, y \in Y\},$$

а также растяжение

$$sX := \{sx \in \mathbb{R}^n : x \in X\},$$

где s – неотрицательное число. Пусть $|X|$ – n-мерная мера Лебега множества $X \subset \mathbb{R}^n$ (объём при $n \geq 3$, площадь при $n = 2$).

Рассмотрим простой пример. Пусть X_0 – квадрат в $\mathbb{R}^2$ со стороной длины l и с центром в начале координат, и Y_0 – круг радиуса r с центром в начале координат. Тогда $X_0 + Y_0$ – "квадрат" со стороной $l + 2r$ с закруглёнными углами. Легко вычисляется и оценивается площадь

$$|X_0 + Y_0| = |X_0| + 4lr + |Y_0| \geq |X_0| + 2\sqrt{\pi}lr + |Y_0|$$

$$= |X_0| + 2\sqrt{|X_0||Y_0|} + |Y_0|.$$

Отсюда следует, что

$$|X_0 + Y_0|^{1/2} \geq |X_0|^{1/2} + |Y_0|^{1/2}.$$

Обобщение этого неравенства на случай n-мерных выпуклых тел X и Y называется неравенством Брунна-

Минковского. Оно имеет вид

$$|(1-t)X+tY|^{1/n} \geq (1-t)|X|^{1/n} + t|Y|^{1/n}, \qquad (3.2)$$

где t – любое число из интервала $(0,1)$, и было получено в 1887 году Брунном в случае $n=3$. В 1910 году Минковский указал на ошибку в доказательстве Брунна, которую тот исправил. Минковский дал также новое доказательство этого неравенства. И Брунн, и Минковский показали, что равенство достигается тогда и только тогда, когда X и Y являются равными с точностью до переноса и расширения.

В 1935 году Л.А. Люстерник доказал, что неравенство (3.2) является верным для произвольных ограниченных и измеримых множеств X и Y. Неравенство (3.2) для произвольных X и Y принято теперь называть *общим неравенством Брунна-Минковского.* В 1954 году Хадвигер и Охман дали изумительно простое доказательство общего неравенства Брунна-Минковского. Его мы и приводим ниже.

Сформулируем теперь общее неравенство в несколько иной форме (равносильной, впрочем, неравенству (3.2), применённому к множествам $X_1 = (1-t)X$ и $Y_1 = tY$).

Теорема 3.2 *Пусть X и Y — непустые компакты в $\mathbb{R}^n$. Тогда*

$$|X+Y|^{1/n} \geq |X|^{1/n} + |Y|^{1/n}. \qquad (3.3)$$

Доказательство Хадвигера-Охмана. Рассмотрим вначале частный случай, когда X и Y – параллелепипеды, грани которых параллельны координатным плоскостям и ребра которых имеют длины x_k и y_k $(k = 1, \ldots, n)$, соответственно. Тогда

$$|X| = \prod_{k=1}^{n} x_k, \quad |Y| = \prod_{k=1}^{n} y_k, \quad |X+Y| = \prod_{k=1}^{n} (x_k + y_k).$$

Применяя неравенство для арифметических и геометрических средних, получаем

$$1 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{x_k + y_k} + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{y_k}{x_k + y_k} \geq$$

$$\geq \left(\prod_{k=1}^{n} \frac{x_k}{x_k + y_k}\right)^{1/n} + \left(\prod_{k=1}^{n} \frac{y_k}{x_k + y_k}\right)^{1/n},$$

следовательно,

$$1 \geq \frac{\left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{1/n} + \left(\prod_{k=1}^{n} y_k\right)^{1/n}}{\left(\prod_{k=1}^{n} (x_k + y_k)\right)^{1/n}} = \frac{|X|^{1/n} + |Y|^{1/n}}{|X+Y|^{1/n}}.$$

Отсюда и вытекает неравенство (3.3) для двух параллелепипедов.

Пусть теперь X и Y являются элементарными множествами, т. е. X и Y составлены из конечного числа невырожденных замкнутых параллелепипедов с ребрами, параллельными координатным осям. Пусть m – суммарное число составляющих X и Y параллелепипедов, $m > 2$.

Применим метод математической индукции по m.

Пусть (3.3) верно для элементарных X и Y, когда общее число составляющих X и Y параллелепипедов меньше или равно $(m-1)$ и $m>2$. Тогда хотя бы одно из множеств X и Y содержит не менее двух составляющих параллелепипедов.

Индуктивный переход от $(m-1)$ *к* $m>2$ не является тривиальным и требует специальных построений.

Предположим, для определённости, что множество X содержит не менее двух составляющих параллелепипедов. Без ограничения общности можно считать, что по обе стороны от гиперплоскости $\{x_n = 0\}$ имеются составляющие X параллелепипеды. Тогда $\{x_n = 0\}$ разбивает X на непустые элементарные множества $X_1 = X \cap \{x_n > 0\}$ и $X_2 = X \cap \{x_n < 0\}$, лежащие в разных полупространствах (мы пренебрегаем множеством $X \cap \{x_n = 0\}$, имеющим нулевую меру и поэтому не влияющим на результат). Число составляющих параллелепипедов в каждом из множеств X_1 и X_2 будет хотя бы на единицу меньше, чем в X в силу проведенного построения. Через $\mu \in (0,1)$ обозначим число, определяемое равенством

$$|X_1| = \mu|X|.$$

Параллельно перенесем множество Y вдоль оси Ox_n настолько, чтобы гиперплоскость $\{x_n = 0\}$ делила Y на множества $Y_1 = Y \cap \{x_n > 0\}$ и $Y_2 = Y \cap \{x_n < 0\}$, причём

$$|Y_1| = \mu|Y|.$$

Естественно, учитываем следующий факт: параллельный перенос не меняет $|X|$, $|Y|$, $|X+Y|$. Кроме того, снова пренебрегаем множеством $Y \cap \{x_n = 0\}$, имеющим нулевую меру и поэтому не влияющим на результат.

Далее, Y_1 и Y_2 – элементарные множества, лежащие в разных полупространствах и такие, что число составляющих параллелепипедов в каждом из них не больше, чем в Y. Следовательно, в каждой из пар (X_1, Y_1) и (X_2, Y_2) имеется не более, чем $(m-1)$ составляющих параллелепипедов. Поэтому предположение индукции позволяет записать для них неравенства Брунна-Минковского

$$|X_1 + Y_1|^{1/n} \geq |X_1|^{1/n} + |Y_1|^{1/n},$$

$$|X_2 + Y_2|^{1/n} \geq |X_2|^{1/n} + |Y_2|^{1/n}.$$

Но тогда

$$|X + Y| \geq |X_1 + Y_1| + |X_2 + Y_2| \geq$$

$$\geq (|X_1|^{1/n} + |Y_1|^{1/n})^n + (|X_2|^{1/n} + |Y_2|^{1/n})^n =$$
$$= \mu(|X|^{1/n} + |Y|^{1/n})^n + (1-\mu)(|X|^{1/n} + |Y|^{1/n})^n =$$
$$= (|X|^{1/n} + |Y|^{1/n})^n,$$

что и требовалось доказать.

Заметим наконец, что всякий компакт X можно приближать элементарными X_k так, чтобы $|X_k| \to |X|$. Поэтому доказательство неравенства (3.3) завершается предельным переходом

$$|X+Y|^{1/n} \geq \lim_{k\to\infty}|X_k+Y_k|^{1/n} \geq$$

$$\geq \lim_{k\to\infty}(|X_k|^{1/n}+|Y_k|^{1/n}) = |X|^{1/n}+|Y|^{1/n}.$$

Теорема доказана.

3.3 Теорема Прекопы и Лайндлера

В геометрическом анализе, математической физике и теории вероятностей имеется ряд неравенств типа Брунна-Минковского. Они имеют такой же вид, что и неравенство для объёмов (площадей) областей, но вместо объёмов рассматриваются иные интегральные характеристики областей. Отметим здесь несколько результатов, которые способствовали становлению и развитию неравенств типа Брунна-Минковского.

В 1956 году Хадвигер (H. Hadwiger) обнаружил, что неравенства типа Брунна-Минковского справедливы и для двух моментов инерции выпуклой области, а именно, момента области относительно центра масс и момента относительно гиперплоскости.

В 1971-72 годах Прекопа (A. Prékopa) и Лайндлер (L. Liendler) доказали следующую функциональную версию неравенства Брунна-Минковского.

Теорема 3.3 *Пусть* $0 < \lambda < 1$, *и пусть* φ_0, φ_1, h *— неотрицательные интегрируемые функции в евклидовом пространстве* $\mathbb{R}^n$. *Если для всех* $x, y \in \mathbb{R}^n$

$$h((1-\lambda)x + \lambda y) \geq \varphi_0(x)^{1-\lambda}\varphi_1(y)^{\lambda}, \qquad (3.4)$$

то

$$\int_{\mathbb{R}^n} h(x)dx \geq$$

$$\geq \left(\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_0(x)dx \right)^{1-\lambda} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_1(x)dx \right)^{\lambda}. \qquad (3.5)$$

Доказательство Гарднера. Имеется несколько доказательств, мы выбрали наиболее простое, основанное на методе математической индукции по размерности. Таким образом, нам необходимо сначала рассмотреть случай $n = 1$, т. е. доказать следующее утверждение.

Теорема 3.4 *Пусть* $0 < \lambda < 1$, *и пусть* φ_0, φ_1, h *— неотрицательные интегрируемые функции, определённые на всей числовой прямой* $\mathbb{R}$. *Если для всех* $x, y \in \mathbb{R}$

$$h((1-\lambda)x + \lambda y) \geq \varphi_0(x)^{1-\lambda}\varphi_1(y)^{\lambda}, \qquad (3.6)$$

то

$$\int_{\mathbb{R}} h(x)dx \geq \left(\int_{\mathbb{R}} \varphi_0(x)dx \right)^{1-\lambda} \left(\int_{\mathbb{R}} \varphi_1(x)dx \right)^{\lambda}. \qquad (3.7)$$

Доказательство теоремы 3.4. Если хотя бы один их интегралов в правой части (3.7) равен нулю, то доказывать нечего. Поэтому предположим с учётом неотрицательности функций φ_0, φ_1, что

$$\Phi_j := \int_{\mathbb{R}} \varphi_j(x)dx > 0 \quad (j = 0, 1).$$

Определим две монотонно неубывающие (а следовательно, почти всюду дифференцируемые) функции $v_j : [0,1] \to \mathbb{R}$, считая, что $v_j(t)$ является наименьшим числом, удовлетворяющим равенству

$$\frac{1}{\Phi_j}\int_{-\infty}^{v_j(t)} \varphi_j(x)dx = t \quad (t \in [0,1],\ j=0,1).$$

Дифференцируя это тождество по переменной t для почти всех $t \in [0,1]$ получаем два следующих равенства

$$\frac{\varphi_0(v_0(t))\, v_0'(t)}{\Phi_0} = \frac{\varphi_1(v_1(t))\, v_1'(t)}{\Phi_1} = 1.$$

В силу этих равенств и неравенства Юнга $(1-\lambda)a + \lambda b \geq a^{1-\lambda}b^{\lambda}$ для функции

$$V(t) := (1-\lambda)v_0(t) + \lambda v_1(t)$$

получаем

$$V'(t) := (1-\lambda)v_0'(t) + \lambda v_1'(t) \geq v_0'(t)^{1-\lambda} v_1'(t)^{\lambda} =$$

$$= \left(\frac{\Phi_0}{\varphi_0(v_0(t))}\right)^{1-\lambda} \left(\frac{\Phi_1}{\varphi_1(v_1(t))}\right)^{\lambda}.$$

Следовательно, с учётом заданного в условии теоремы неравенства (3.6) будем иметь

$$\int_{\mathbb{R}} h(x)dx \geq$$

$$\geq \int_0^1 h(V(t))dV(t) \geq \int_0^1 h(V(t))V'(t)dt \geq$$

$$\geq \int_0^1 \varphi_0(v_0(t))^{1-\lambda}\varphi_1(v_1(t))^{\lambda} v_0'(t)^{1-\lambda} v_1'(t)^{\lambda} dt =$$

$$= \Phi_0^{1-\lambda}\Phi_1^{\lambda} = \left(\int_{\mathbb{R}} \varphi_0(x)dx \right)^{1-\lambda} \left(\int_{\mathbb{R}} \varphi_1(x)dx \right)^{\lambda},$$

что и требовалось доказать.

Доказательство теоремы 3.3. Действуем по индукции. При $n = 1$ теорема уже доказана. Пусть теперь $n \geq 2$ и утверждение теоремы верно для размерности, меньшей или равной $n - 1$.

Для обоснования теоремы в случае размерности $n \geq 2$ рассмотрим функции φ_0, φ_1, h от n переменных, удовлетворяющие условиям теоремы 3.3. Взяв декартовы координаты точек $x = (x_1, ..., x_{n-1}, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $y = (y_1, ..., y_{n-1}, y_n) \in \mathbb{R}^n$, обозначим $x = (x', x_n)$, $y = (y', x_n)$, где $x' = (x_1, ..., x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$, $y' = (y_1, ..., y_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$.

Считая переменные $x_n \in \mathbb{R}$, $y_n \in \mathbb{R}$, $z_n := (1 - \lambda)x_n + \lambda y_n \in \mathbb{R}$ фиксированными параметрами, рассмотрим три функции H_{z_n}, Φ_{0x_n}, Φ_{1y_n} от $n-1$ переменных, определяемые равенствами

$$H_{z_n}((1-\lambda)x' + \lambda y') := h((1-\lambda)x + \lambda y),$$

$$\Phi_{0x_n}(x') := \varphi_0(x),$$

$$\Phi_{1y_n}(y') := \varphi_1(y).$$

Имеем

$$H_{z_n}((1-\lambda)x' + \lambda y') = h((1-\lambda)x + \lambda y) \geq$$

$$\geq \varphi_0(x)^{1-\lambda}\varphi_1(y)^\lambda = \Phi_{0x_n}(x')^{1-\lambda}\Phi_{1y_n}(y')^\lambda$$

и поэтому, согласно предположению индукции о справедливости теоремы для функций от $n-1$ переменных, можем записать

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} H_{z_n}(x')dx' \geq$$

$$\geq \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \Phi_{0x_n}(x')dx'\right)^{1-\lambda}\left(\int_{\mathbb{R}^n} \Phi_{1y_n}(x')dx'\right)^\lambda$$

при любых $x_n \in \mathbb{R}$, $y_n \in \mathbb{R}$, причём $z_n := (1-\lambda)x_n + \lambda y_n \in \mathbb{R}$.

Полученное неравенство можно истолковать следующим образом: три новых функции h_1, φ_{10}, φ_{11}, зависящие лишь от одной переменной и определяемые равенствами

$$h_1(z_n) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} H_{z_n}(x')dx',$$

$$\varphi_{10}(x_n) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \Phi_{0x_n}(x')dx',$$

$$\varphi_{11}(y_n) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \Phi_{0y_n}(x')dx',$$

удовлетворяют условиям теоремы 3.4.

Пользуясь трижды теоремой Фубини о переходе к повторным интегралам и применяя к тройке h_1, φ_{10}, φ_{11} теорему 3.4, будем иметь

$$\int_{\mathbb{R}^n} h(x)dx = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}^{n-1}} H_{z_n}(x')dx'dz_n = \int_{\mathbb{R}} h_1(z_n)dz_n \geq$$

$$\geq \left(\int_{\mathbb{R}} \varphi_{10}(x_n)dx_n \right)^{1-\lambda} \left(\int_{\mathbb{R}} \varphi_{11}(y_n)dy_n \right)^{\lambda} = A^{1-\lambda}B^{\lambda} =$$

$$= \left(\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_0(x)dx \right)^{1-\lambda} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_1(y)dy \right)^{\lambda},$$

где

$$A = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \Phi_{0x_n}(x')dx_n dx',$$

$$B = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \Phi_{0y_n}(y')dy_n dy'.$$

Этим и завершается доказательство теоремы 3.3.

3.4 Изопериметрическая монотонность

В этом пункте изложены теоремы сравнения для степенных моментов n-мерного множества Ω. Рассматриваются q-моменты вида

$$\int_{\Omega} |x|^q f(x)\mathrm{d}x \quad (q > -n),$$

где $f(x)$ – неотрицательная функция, $f \in L^1(\Omega)$.

Напомним, что при $q = 2$ такая величина называется моментом инерции Ω относительно начала координат, если рассматривать функцию f как плотность массы. Основное изопериметрическое неравенство для моментов инерции, доказанное Пойа в случае плоских областей и Бэндл в общем случае, имеет вид

$$\frac{|\Omega|^{1+2/n}}{\int\limits_{\Omega} |x|^2 \mathrm{d}x} \leq \frac{|B|^{1+2/n}}{\int\limits_{B} |x|^2 \mathrm{d}x}. \tag{3.8}$$

Здесь $B = B(0,1)$. Неравенство (3.8) является точным для любого шара $\Omega = B(0,\rho) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq \rho\}$.

Оказывается, что можно доказать теорему 2.12, не требуя монотонности функции $h(t)$, и получить неравенство Пойа (3.8) как следствие неубывания интегральных средних

$$m(q) = \left(\frac{q}{\omega_{n-1}} \int\limits_{\Omega} |x|^{q-n} f(x) \mathrm{d}x\right)^{1/q}$$

по $q \in (0,\infty)$. Здесь

$$\omega_{n-1} = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}$$

– площадь сферы $|x| = 1$ в $\mathbb{R}^n$. А именно, мы покажем, что если $0 \leq f(x) \leq 1$, то $m(q)$ является неубывающей функцией.

В следующей теореме, доказанной автором и И.Р. Каюмовым, свойство монотонности интегральных средних сочетается с тем, что равенство в интегральном неравенстве реализуется лишь в том случае, когда область интегрирования является шаром, если не обращать внимания на множества меры нуль. Ясно, что такое свойство можно назвать свойством *изопериметрической монотонности.* Этот термин ввёл в оборот в 70-е годы двадцатого века Херш в подобной, но более сложной ситуации.

Теорема 3.5 *Пусть* Ω *– компактное множество из* $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$, $mes(\Omega) > 0$. *Если* $0 < f(x) \leq 1$ *в* Ω *и* $0 < q_1 < q_2 \leq \infty$, *то*

$$\left(\frac{q_1}{\omega_{n-1}} \int\limits_{\Omega} |x|^{q_1-n} f \mathrm{d}x\right)^{1/q_1} \leq$$

$$\leq \left(\frac{q_2}{\omega_{n-1}} \int\limits_{\Omega} |x|^{q_2-n} f \mathrm{d}x\right)^{1/q_2}. \tag{3.9}$$

Равенство в (3.9) *достигается тогда и только тогда, когда* $f(x) = 1$ *почти всюду в* Ω *и, кроме того,* $\Omega = B(0,\rho) \cup E$ *для некоторого числа* ρ, *причём* $\mathrm{mes(E)} = 0$ *и* $B(0,\rho) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq \rho\}, \quad \rho = ||x||_{L^\infty(\Omega)}$.

Теорема 3.5 влечёт ряд интересных неравенств для величины

$$V = \int\limits_{\Omega} f(x) \mathrm{d}x.$$

Действительно, полагая $q_1 = n$ и $q_2 = n + 2$ в (3.9), мы получаем следующие обобщения изопериметрических неравенств Пойа и Бэндл.

Следствие 3.5.1 *Если множество* Ω *— компакт в* $\mathbb{R}^n$ *и* $0 \le f(x) \le 1$ *в* Ω, *то*

$$\left(\frac{V}{c_n}\right)^{(n+2)/n} \le \frac{1+2/n}{c_n} \int\limits_{\Omega} |x|^2 f(x) \mathrm{d}x, \qquad (3.10)$$

где $c_n = \omega_{n-1}/n$ *– объём шара* $|x| \le 1$ *в* $\mathbb{R}^n$.

Неравенство $m'(n) \ge 0$ оказывается новой точной оценкой для величины V.

Следствие 3.5.2 *Если множество* Ω *— компакт в* $\mathbb{R}^n$ *и* $0 \le f(x) \le 1$ *в* Ω, *то*

$$V \ln \frac{V}{c_n} \le V + n \int\limits_{\Omega} f(x) \ln |x| \mathrm{d}x, \qquad (3.11)$$

где $c_n = \omega_{n-1}/n$.

Равенство в (3.10), а также и (3.11) достигается, если $f(x) \equiv 1$ в Ω и $\Omega = B(0, \rho)$ для некоторого $\rho \ge 0$.

Доказательство теоремы 3.5. Положим $x = |x|\omega$, $|x| = t$, $dx = t^{n-1} dt\, d\omega$. Из теоремы Фубини следует, что

$$m(q) = \left(\frac{q}{\omega_{n-1}} \int_{\Omega} |x|^{q-n} f(x) \mathrm{d}x\right)^{1/q} =$$

$$= \left(\int_0^{\rho} h(t) \mathrm{d}t^q\right)^{1/q}, \qquad (3.12)$$

где $\rho = ||x||_{L^\infty(\Omega)}$ и

$$h(t) = \frac{1}{\omega_{n-1}} \int\limits_{|x|=t} f(x)\chi_\Omega(x)\mathrm{d}\omega.$$

Ясно, что (3.9) является следствием (2.26). Далее, $h(t) = 1$ почти всюду на $[0, \rho]$ тогда и только тогда, когда $\chi_\Omega(t\omega) = 1$ для почти всех $t \in [0, \rho]$ и $f(x) = 1$ почти всюду в Ω.

Отметим, что существует и другой путь исследования случаев равенства в неравенстве (3.9). А именно, если

$$0 < q_1 < q_2 \leq \infty,\ m(q_1) = m(q_2),$$

то $m(q) = m_0 = \mathrm{const}$ для $q_1 \leq q \leq q_2$. Так как $m(q)$ аналитична по параметру q в некоторой окрестности луча $\{q : 0 < q < \infty\}$, то по теореме единственности для аналитических функций $m(q) = m_0$ для любого $q \in (0, \infty)$. Поэтому

$$m(1) = \frac{1}{\omega_{n-1}} \int\limits_{\Omega} |x|^{1-n} f(x)\mathrm{d}x =$$

$$= \lim_{q\to\infty} m(q) = ||x||_{L^\infty(\Omega)} = \rho.$$

С другой стороны, $\mathrm{mes}\,[\Omega \setminus B(0, \rho)] = 0$ и

$$m(1) < \frac{1}{\omega_{n-1}} \int\limits_{B(0,\rho)} |x|^{1-n} f(x)\mathrm{d}x = \rho,$$

если $f(x) \neq 1$ почти всюду в Ω и $\mathrm{mes}(\Omega) > 0$ или

$$\mathrm{mes}(B(0,\rho) \setminus \Omega) > 0,$$

что и доказывает теорему 3.5.

Доказательство следствия 3.5.1. В этом случае достаточно положить $q_1 = n$ и $q_2 = n+2$ в неравенстве (3.9).

Доказательство следствия 3.5.2. Прямые вычисления для функции $m(q)$ из (3.12) показывают, что

$$q^2 m'(q) = -[m(q)]^q \ln[m(q)]^q + [m(q)]^q +$$

$$+\frac{q^2}{\omega_{n-1}} \int\limits_{\Omega} |x|^{q-n} f(x) \log |x| \mathrm{d}x.$$

Неравенство (3.9) влечёт

$$m'(q) \geq 0,$$

и (3.11) эквивалентно неравенству $m'(q) \geq 0$ в точке $q = n$.

3.5 Оценки для конформных моментов

Как известно, формально геометрия Лобачевского строится на тех же аксиомах, что и геометрия Евклида, но с заменой одной из аксиом, а именно, аксиомы о параллельных, на новую: на плоскости через точку, взятую вне заданной прямой, можно провести не менее двух прямых, не пересекающих заданную.

В 1882 году А. Пуанкаре предложил новую модель плоскости Лобачевского, тесно связанную с ТФКП и группами дробно-линейных отображений. Согласно модели Пуанкаре, плоскостью Лобачевского объявляется единичный круг $D = \{z : |z| < 1\}$. Роль точек играют точки, а роль прямых – диаметры круга D и лежащие в круге D дуги окружностей вида $|z - z_0| = \rho$ $(|z_0| > 1)$, ортогональных к единичной окружности $|z| = 1$. Пуанкаре доказал, что эти дуги являются геодезическими линиями, если дифференциальный элемент длины дуги определять по формуле

$$d\sigma = \frac{|dz|}{1 - |z|^2}.$$

А именно, среди всех линий $\gamma(z_1, z_2)$, лежащих в круге D и соединяющих заданные точки $z_1,\ z_2$ из круга D, инфимум в равенстве

$$l(z_1, z_2) = \inf_{\gamma(z_1,z_2)} \int\limits_{\gamma} \frac{|dz|}{1 - |z|^2},$$

реализуется на кривой $\gamma(z_1, z_2)$, которая является либо отрезком диаметра, либо дугой окружности, ортогональной к окружности $|z| = 1$. Метрика Пуанкаре является конформно инвариантной.

Следуя Феликсу Клейну, геометрию Лобачевского принято называть гиперболической геометрией.

Покажем, как метрику Пуанкаре определяют в любой односвязной области $\Omega \subset \mathbb{C}$, $\Omega \neq \mathbb{C}$. Для этого рассмотрим однолистное конформное отображение $F : D \to \Omega$. Через $w = F(z)$ обозначим соответствующую голоморфную функцию со значениями в области Ω.

Область Ω превращается в плоскость Лобачевского, если определить в ней коэффициент метрики Пуанкаре $\lambda_\Omega(w)$ равенством

$$\lambda_\Omega(w)|dw| = \lambda_D(z)|dz| \qquad \forall z \in D,\ w = F(z) \in \Omega.$$

В этом случае имеем

$$\lambda_\Omega(F(z))\ |F'(z)| = \frac{1}{1-|z|^2} \qquad \forall z \in D,$$

тогда

$$\lambda_\Omega(w) = \frac{|F'(F^{-1}(w))|^{-1}}{1-|F^{-1}(w)|^2} \quad \forall w \in \Omega.$$

Если Ω — односвязная область, не содержащая бесконечно удаленной точки, то величина

$$R(z,\Omega) = \frac{1}{\lambda_\Omega(z)}$$

называется конформным радиусом. Например, для единичного круга

$$D = \{z : |z| < 1\}$$

конформный радиус определяется равенством

$$R(z,D) = 1 - |z|^2.$$

Для доказательства следующей теоремы нам понадобятся две леммы, связанные с функциями Эйлера

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt, \quad \mathrm{B}(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt.$$

В отличие от приведённых выше классических фактов, леммы 3.1, 3.2 и теорема 3.6 доказаны сравнительно недавно, а именно, в 2002 году в статье Ф.Г. Авхадиева и Р.Г. Салахудинова [14].

Лемма 3.1 *Для любых $\alpha > 0$, $\beta > 0$ и любого натурального числа n имеет место тождество*

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{\mathrm{B}(k+\alpha, n-k+\beta)}{k!(n-k)!} = \frac{\mathrm{B}(\alpha,\beta)}{n!}. \tag{3.13}$$

Доказательство. Мы можем получить ряд Тейлора функции $(1-\zeta)^{-\alpha-\beta}$ двумя способами. А именно, непосредственно по определению ряда или как произведение рядов двух функций $(1-\zeta)^{-\alpha}$ и $(1-\zeta)^{-\beta}$ имеем:

$$\mathrm{B}(\alpha,\beta)\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+\alpha+\beta)}{n!}\zeta^n = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{(1-\zeta)^{\alpha+\beta}} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+\alpha)}{n!}\zeta^n \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+\beta)}{n!}\zeta^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{\Gamma(k+\alpha)\Gamma(n-k+\beta)}{k!(n-k)!}\zeta^n.$$

Отсюда имеем

$$\mathrm{B}(\alpha,\beta)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(n+\alpha+\beta)}{n!}\zeta^n=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{\Gamma(k+\alpha)\Gamma(n-k+\beta)}{k!(n-k)!}\zeta^n.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях переменной ζ, получаем, что для любого натурального числа n имеет место тождество

$$\mathrm{B}(\alpha,\beta)\frac{\Gamma(n+\alpha+\beta)}{n!}=\sum_{k=0}^{n}\frac{\Gamma(k+\alpha)\Gamma(n-k+\beta)}{k!(n-k)!}.$$

Таким образом, формула (3.13) — следствие единственности ряда Тейлора и классической формулы

$$\mathrm{B}(x,y)=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

Лемма доказана.

Лемма 3.2 *Пусть* (a_k) *и* (b_k) *– произвольные последовательности комплексных чисел. Тогда для любых* $\alpha>0$, $\beta>0$ *и любого натурального числа* n *имеет место неравенство*

$$\left|\sum_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}\right|^2\leq$$

$$\leq \frac{\mathrm{B}(\alpha,\beta)}{n!}\sum_{k=0}^{n}\frac{k!(n-k)!\ |a_k b_{n-k}|^2}{\mathrm{B}(k+\alpha,n-k+\beta)}. \tag{3.14}$$

Равенства в (3.14) достигаются для всех $n = 0,1,2,\ldots$ *тогда и только тогда, когда имеет место один из следующих случаев:*

либо все a_k *равны нулю; либо все* b_k *равны нулю;*

либо $a_0 \neq 0, b_0 \neq 0$ *и найдётся постоянная* q, *такая, что*

$$ka_k = \frac{a_0 q^k}{\mathrm{B}(\alpha,k)},\ \ kb_k = \frac{b_0 q^k}{\mathrm{B}(\beta,k)}. \tag{3.15}$$

Доказательство. Мы применяем неравенство Коши-Буняковского для векторов, определяемых формулами

$$u_k = \frac{a_k b_{n-k}\sqrt{k!\ (n-k)!}}{\sqrt{n!\ \mathrm{B}(k+\alpha,n-k+\beta)}},$$

и

$$v_k = \frac{\sqrt{n!\ \mathrm{B}(k+\alpha,n-k+\beta)}}{\sqrt{k!\ (n-k)!}}$$

для $k=0,1,\ldots,n$. Имеем

$$\left|\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right|^2 = \left|\sum_{k=0}^{n} u_k v_k\right|^2 \leq \sum_{k=0}^{n}|u_k|^2\sum_{k=0}^{n}|v_k|^2, \tag{3.16}$$

что и даёт неравенство (3.14) в силу тождества (3.13). В неравенстве Коши-Буняковского равенство имеет место лишь для пропорциональных векторов. Поэтому равенства в (3.16) для всех n имеют место тогда и только тогда, когда $u_k = \lambda_n v_k$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$, где λ_n зависит лишь от n. Следовательно, равенства в (3.14) имеют место тогда и только тогда, когда

$$k!(n-k)!\, a_k b_{n-k} = \lambda_n\, n!\, \mathrm{B}(k+\alpha, n-k+\beta), \quad (3.17)$$

где $0 \le k \le n$.

Первые два случая получаются просто. Действительно, если $a_0 = 0$, но не все a_k равны нулю, то $a_s \ne 0$ для некоторого номера $s \ge 1$. Но тогда из (3.17) следует, что $b_k = 0$ для всех $k = 0, 1, 2, \ldots$. Меняя ролями a_k и b_k, получаем, что если $b_0 = 0$, то все b_k равны нулю.

Предположим теперь $a_0 \ne 0, b_0 \ne 0$ и положим $n = 1$, тогда из (3.17) следует, что

$$\frac{a_1}{\alpha a_0} = \frac{b_1}{\beta b_0} = q,$$

где

$$q = \frac{\lambda_1 \mathrm{B}(\alpha, \beta)}{(\alpha+\beta) a_0 b_0}.$$

Для $n \ge 2$ имеем

$$\lambda_n = \frac{u_n}{v_n} = \frac{u_{n-1}}{v_{n-1}}, \qquad \lambda_n = \frac{u_0}{v_0} = \frac{u_1}{v_1},$$

что равносильно соотношениям

$$a_n = q\frac{n+\alpha-1}{n} a_{n-1}, \qquad b_n = q\frac{n+\beta-1}{n} b_{n-1}.$$

Применение индукции приводит к равенствам (3.15).

Этим и завершается доказательство леммы.

Теорема 3.6 *Для любых $\alpha > 1$ и $\beta > 1$ конформный радиус $R(.,\Omega)$ односвязной области $\Omega \subset \mathbb{C}$ удовлетворяет неравенству*

$$\frac{\pi(\alpha+\beta-1)}{(\alpha-1)(\beta-1)} \iint_\Omega R^{\alpha+\beta-2}(z,\Omega)dx\,dy \leq$$

$$\leq \iint_\Omega R^{\alpha-2}(z,\Omega)dx\,dy \iint_\Omega R^{\beta-2}(z,\Omega)dxdy. \qquad (3.18)$$

При любых допустимых значениях параметров α и β равенство в (3.18) с конечной правой частью имеет место тогда и только тогда, когда Ω — круг.

Доказательство. Пользуясь заменой переменных при помощи конформного отображения $f : D \to \Omega$, мы можем перейти к интегралам по единичному кругу D с использованием следующих обозначений и формул:

$$z = f(\zeta), \quad z = x + iy \in \Omega,$$

$$\zeta = re^{i\theta} \in D, \, (0 \leq r < 1, \, 0 \leq \theta \leq 2\pi),$$

$$dx\,dy = |f'(\zeta)|^2 r dr\,d\theta,$$

$$R(z,\Omega) = R(f(\zeta),\Omega) = |f'(\zeta)|(1-r^2).$$

Введём в рассмотрение две аналитические функции, имеющие следующие ряды Тейлора в D

$$F(\zeta) = a_0 + a_1\zeta + a_2\zeta^2 + \cdots, G(\zeta) = b_0 + b_1\zeta + b_2\zeta^2 + \cdots,$$

и определяемые равенствами

$$F(\zeta) = f'(\zeta)^{\alpha/2}, \qquad G(\zeta) = f'(\zeta)^{\beta/2}.$$

Переход к единичному кругу с помощью замены переменных показывает, что неравенство (3.18) равносильно следующему

$$A_{\alpha+\beta}(FG) \le A_\alpha(F) A_\beta(G),$$

где использовано обозначение

$$A_s(g) := \frac{s-1}{\pi} \iint_D |g(re^{i\theta})|^2 (1-r^2)^{s-2} r dr d\theta.$$

Поскольку

$$A_s(g) = \Gamma(s) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{\Gamma(n+s)} |c_n|^2,$$

где $c_n = g^{(n)}(0)/n!$ – коэффициенты ряда Тейлора функции g, то легко видеть, что неравенство $A_{\alpha+\beta}(FG) \le A_\alpha(F)A_\beta(G)$ в свою очередь равносильно неравенству

$$\Gamma(\alpha+\beta) \sum_{n=0}^{\infty} \left| \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \right|^2 \frac{n!}{\Gamma(n+\alpha+\beta)} \le$$

$$\le \Gamma(\alpha)\Gamma(\beta) \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{k!(n-k)!}{\Gamma(k+\alpha)\Gamma(n-k+\beta)} |a_k b_{n-k}|^2.$$

Но это неравенство является следствием оценок (3.14), так как

$$\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(k+\alpha)\Gamma(n-k+\beta)}\,\frac{\Gamma(n+\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} =$$

$$= \frac{\mathrm{B}(\alpha,\beta)}{\mathrm{B}(k+\alpha,n-k+\beta)}.$$

Итак, неравенство теоремы доказано.

Остаётся доказать, что при любых допустимых значениях параметров α и β равенство в (3.18) с конечной правой частью имеет место тогда и только тогда, когда Ω — круг.

Поскольку f — конформное отображение, то производная $f'(\zeta) \neq 0$. Поэтому $a_0 \neq 0, b_0 \neq 0$, и в силу леммы 3.2 случай равенства в оценках реализуется для коэффициентов вида (3.15), т. е. коэффициенты определяются равенствами

$$ka_k = \frac{a_0 q^k}{\mathrm{B}(\alpha,k)}, \qquad kb_k = \frac{b_0 q^k}{\mathrm{B}(\beta,k)} \quad (\forall k \in \mathbb{N}).$$

Соответствующие этим коэффициентам функции имеют вид

$$F(\zeta) = \frac{a_0}{(1-q\zeta)^{\alpha}}, \qquad G(\zeta) = \frac{b_0}{(1-q\zeta)^{\beta}}.$$

Условие аналитичности этих функций в единичном круге влечёт неравенство $|q| \leq 1$, а условие ограниченности интегралов $A_\alpha(F)$, $A_\beta(G)$ приводит к строгому неравенству $|q| < 1$. Но тогда для конформного отображения f получаем

$$f(\zeta) = \frac{a_0^2/q}{1 - q\zeta} + \text{const}.$$

Следовательно, $\Omega = f(D)$ – круг.

Теорема доказана полностью.

3.6 Задачи и упражнения

1. 1.1) Докажите, что среди всех прямоугольников с заданным периметром наибольшую площадь имеет квадрат.

1.2) Вспомните формулу Герона и докажите, что среди всех треугольников с заданным периметром наибольшую площадь имеет равносторонний треугольник.

Указания. Вычислите сначала отношения

$$\frac{S(K)}{L^2(\partial K)}, \quad \frac{S(T)}{L^2(\partial T)}$$

для квадрата K и равностороннего треугольника T. Затем докажите неравенства

$$\frac{S}{L^2} \leq \frac{S(K)}{L^2(\partial K)}, \quad \frac{S}{L^2} \leq \frac{S(T)}{L^2(\partial T)}$$

на множестве прямоугольников и треугольников, соответственно.

2. 2.1) Докажите, что не существует константы $c_1 \in (0, \infty)$, такой, что справедливо неравенство изопериметрического типа $S(\Omega) \leq c_1 L(\partial\Omega)$ на множестве ограниченных выпуклых областей $\Omega \subset \mathbb{R}^2$.

2.2) Докажите, что не существует константы $c_2 \in (0, \infty)$, такой, что справедливо неравенство изопериметрического типа $S(\Omega) \geq c_2 L^2(\partial\Omega)$ на множестве ограниченных выпуклых областей $\Omega \subset \mathbb{R}^2$.

Указание. Нужно искать подходящие контрпримеры.

3. Как следствие теоремы Лайндлера-Прекопы получите следующее утверждение:

для любого $\lambda \in [0,1]$ и любых ограниченных измеримых множеств X, Y, $(1-\lambda)X + \lambda Y$ справедливо неравенство $|(1-\lambda)X + \lambda Y| \geq |X|^{1-\lambda}|Y|^{\lambda}$.

Указания. В качестве функций φ_0, φ_1, h возьмите характеристические функции множеств X, Y, а также множества $(1-\lambda)X + \lambda Y$, соответственно. Покажите, что для них условия теоремы выполнены, т. е. справедливо неравенство (3.4).

4. Следуя указаниям, получите классические изопериметрические неравенства как следствие неравенства (3.3), т. е. неравенства

$$|X + Y|^{1/n} \geq |X|^{1/n} + |Y|^{1/n}.$$

1) Примените (3.3) к множествам X и $Y = \varepsilon B$, где B – замкнутый шар единичного радиуса с центром в начале координат. Должно получиться следующее неравенство

$$|X + \varepsilon B|^{1/n} \geq |X|^{1/n} + \varepsilon |B|^{1/n}, \tag{3.19}$$

причём равенство достигается тогда, когда X является шаром или точкой.

2) Перепишите (3.19) в виде

$$\frac{|X + \varepsilon B|^{1/n} - |X|^{1/n}}{\varepsilon} \geq |B|^{1/n} \tag{3.20}$$

и перейдите к нижнему пределу при $\varepsilon \to 0^{+}$. Правая часть в неравенстве (3.20) постоянна. Докажите, что предел левой части равен величине

$$\frac{1}{n}|X|^{\frac{1-n}{n}}\sigma(\partial X),$$

где

$$\sigma(\partial X) = \liminf_{\varepsilon\to 0^+}\frac{|X+\varepsilon B| - |X|}{\varepsilon}$$

есть площадь по Минковскому границы ∂X множества X. Запишите полученное изопериметрическое неравенство, связывающее величины $\sigma(\partial X)$ и $|X|$.

5. Докажите, что следующие три утверждения эквивалентны:

(1) для любого $\lambda \in [0,1]$ и любых ограниченных измеримых множеств X, Y, $(1-\lambda)X + \lambda Y \subset \mathbb{R}^n$ справедливо неравенство

$$|(1-\lambda)X + \lambda Y|^{1/n} \geq (1-\lambda)|X|^{1/n} + \lambda|Y|^{1/n};$$

(2) для любого $\lambda \in [0,1]$ и любых ограниченных измеримых множеств X, Y, $(1-\lambda)X + \lambda Y \subset \mathbb{R}^n$ справедливо неравенство

$$|(1-\lambda)X + \lambda Y| \geq |X|^{1-\lambda}|Y|^{\lambda};$$

(3) для любого $\lambda \in [0,1]$ и любых ограниченных измеримых множеств X, Y, $(1-\lambda)X + \lambda Y \subset \mathbb{R}^n$ справедливо неравенство

$$|(1-\lambda)X + \lambda Y| \geq \min\{|X|,\, |Y|\}.$$

Указания. Без ограничения общности можно считать, что меры $|X| > 0$, $|Y| > 0$.

Ясно, что **(1)** влечёт **(2)**, если

$$\Big((1-\lambda)|X|^{1/n} + \lambda|Y|^{1/n}\Big)^n \geq |X|^{1-\lambda}|Y|^\lambda.$$

А это соотношение справедливо, так как оно равносильно верному неравенству $(1-\lambda)a + \lambda b \geq a^{1-\lambda}b^\lambda$ для положительных чисел $a = |X|^{1/n}$, $b = |Y|^{1/n}$.

Далее, **(2)** влечёт **(3)**, так как минимум величины $|X|^{1-\lambda}|Y|^\lambda$ по переменной $\lambda \in [0,1]$ может достигаться лишь в крайних точках отрезка $[0,1]$.

Остаётся показать, что **(3)** влечёт **(1)**. Доказательство этого факта нетривиально, хотя и не очень сложно.

Пользуемся следующим свойством объёмов: $|sX| = s^n|X|$ для любого положительного числа s. Кроме того, как мы знаем, неравенство утверждения **(1)** достаточно доказать лишь для $\lambda = 1/2$. Применяя неравенство из утверждения (3) к множествам

$$X_1 = \frac{1}{|X|^{1/n}}X, \quad Y_1 = \frac{1}{|Y|^{1/n}}Y,$$

получаем для любого $\lambda \in [0,1]$

$$|(1-\lambda)X_1 + \lambda Y_1| \geq \min\{|X_1|, |Y_1|\} = 1,$$

так как $|X_1| = 1$, $|Y_1| = 1$. Возьмём

$$\lambda = \lambda_0 := \frac{|Y|^{1/n}}{|X|^{1/n} + |Y|^{1/n}}.$$

Тогда
$$1-\lambda_0 := \frac{|X|^{1/n}}{|X|^{1/n}+|Y|^{1/n}},$$
следовательно,
$$1 \le |(1-\lambda_0)X_1+\lambda_0 Y_1| =$$
$$= \left|\frac{1}{|X|^{1/n}+|Y|^{1/n}}X + \frac{1}{|X|^{1/n}+|Y|^{1/n}}Y\right| =$$
$$= \frac{|X+Y|}{(|X|^{1/n}+|Y|^{1/n})^n}.$$
Таким образом,
$$|X+Y|^{1/n} \ge |X|^{1/n}+|Y|^{1/n},$$
что и требуется показать.

6. Многомерный случай теоремы 2.13 является более сложным. Если $n \ge 2$, то теорема 2.13 утверждает, что величина $z_n(q) :=$
$$= \left(q^n \int\limits_0^{x_1} \dots \int\limits_0^{x_n} y_1^{q-1} \cdots y_n^{q-1} h(y_1,\dots,y_n)\mathrm{d}y_1 \cdots \mathrm{d}y_n\right)^{1/q}$$
не убывает по переменной q, при условии, что $0 \le h \le 1$, h не убывает по переменным y_k за исключением, быть может, одного значения k.

1.1) Убедитесь, что только одного условия ограниченности $0 \le h \le 1$ недостаточно для монотонности функции $z_n(q)$ в многомерном случае $n \ge 2$. Например, функция

$$z_2(q) = \left(q^2 \int_0^1 \int_0^1 (xy)^{q-1} h(x,y) \mathrm{d}x \mathrm{d}y \right)^{1/q}$$

не является монотонной при $q > 0$, если

$$h(x,y) = 1 - xy.$$

1.2) Докажите, что неравенство (2.25) будет верно без ограничения на монотонность функции h, если

$$h(y) = \prod_{k=1}^{n} h_k(y_k).$$

А именно, докажите путём двукратного использования одномерного случая теоремы 2.13 и метода математической индукции по n следующее утверждение.

Предположим, что функция φ *не убывает по переменным* $y_k \in [0, x_k]$ *при всех* $k = 1, 2, \ldots, n$. *Если* $h(y) = \prod_{k=1}^{n} h_k(y_k)$ *и* $0 \le h_k(y_k) \le 1$ *при* $y_k \in [0, x_k]$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, *то выполнено неравенство* (3.9).

7. Используйте неравенство (2.25) для вывода интересных неравенств для величин типа энтропии, следуя указаниям.

2.1) Неравенство (2.25) влечёт за собой

$$(dP_n^{1/q}(q)/dq)|_{q=1} \ge 0.$$

2.2) Непосредственными вычислениями покажите, что это соотношение эквивалентно неравенству

$$P_n(1)\ln P_n(1) \le nP_n(1) +$$

$$+\int\limits_0^{x_1} \mathrm{d}\psi_1 \int\limits_0^{x_2} \mathrm{d}\psi_2 \ldots \int\limits_0^{x_n} h(y)\varphi^q(y)\log(\varphi\psi_1\ldots\psi_n)\mathrm{d}\psi_n,$$

где

$$P_n(1) = \int\limits_0^{x_1} \mathrm{d}\psi_1(y_1) \int\limits_0^{x_2} \mathrm{d}\psi_2(y_2) \ldots \int\limits_0^{x_n} h(y)\varphi(y)\mathrm{d}\psi_n(y_n).$$

Как это принято в теории энтропии, мы полагаем, что $0 \ln 0 = 0$.

8. Установите, что мы имеем дело с монотонностью, но не с выпуклостью. Например, функция

$$m_0(q) = \left(\frac{q}{\omega_{n-1}} \int\limits_{1\le|x|\le 2} |x|^{q-n}\mathrm{d}x\right)^{1/q} = (2^q - 1)^{1/q} \quad (3.21)$$

является возрастающей, но $\ln m_0^q(q)$ вогнута при $q \in (0,\infty)$, поскольку из (3.21) следует, что

$$(\ln m_0^q(q))'' = -\frac{2^q \ln^2 2}{(2^q-1)^2} < 0.$$

Поведение функции $m_0(q)$ показывает разницу между неравенством (2.23) и неравенствами изопериметрического типа для $m(q)$.

9. Пусть $\Omega \subset \mathbb{C}$ и G — односвязные области, $\Omega \ne \mathbb{C}$,

$\overline{G} \subset \Omega$ и ее граница ∂G является кусочно гладкой кривой. Докажите следующее изопериметрическое неравенство (следствие изопериметрического неравенства Е. Шмидта [13]):

$$\iint_G \frac{dxdy}{R^2(z,\Omega)} \leqslant \frac{1}{2}\int_{\partial G} \frac{|dz|}{R(z,\Omega)} \quad (z = x + iy).$$

Указание. В силу конформной инвариантности метрики Пуанкаре можно считать, что Ω — полуплоскость $x > 0$ с конформным радиусом $R(z,\Omega) \equiv 2\,x$. Тогда требуемое неравенство легко получить, взяв за основу формулу Грина

$$\iint_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \int_{\partial G} Pdx + Qdy$$

для функций $P(x,y) \equiv 0$, $Q(x,y) \equiv -1/(4x)$.

Замечание. Изопериметрическое неравенство Е. Шмидта можно записать в следующем виде

$$4\pi \iint_G \frac{dxdy}{R^2(z,\Omega)} + 4\left(\int_G \frac{dxdy}{R^2(z,\Omega)}\right)^2 \leqslant \left(\int_{\partial G} \frac{|dz|}{R(z,\Omega)}\right)^2,$$

где равенство имеет место тогда и только тогда, когда G — гиперболический круг.

Глава 4

Литература и вопросы к экзамену

4.1 Рекомендуемая литература

В списке литературы для дальнейшего изучения указаны двенадцать книг, расположенных в хронологическом порядке по годам издания. Рекомендую начать углублённое изучение темы с просмотра книг Харди, Литтльвуда и Пойа [1], Беккенбаха и Беллмана [3] и Митриновича [5]. Все эти книги содержат богатый материал, фактически являются справочниками по неравенствам теории функций и их доказательствам.

Монография Маршалла и Олкина [8] вполне доступна студентам-математикам. Для чтения статьи Шмидта [13] и монографий Хадвигера [4], Бураго и Залгаллера [6] требуется высокий уровень знаний по дифференциальной геометрии и теории меры.

Первые главы монографий Пойа и Сегё [2] и Бэндл [7] просты для изучения. Для понимания основного содержания этих книг, а также книг [9]—[12], нужен высокий уровень знаний по комплексному и функциональному анализу и по уравнениям математической физики.

Интегральным неравенствам посвящено большое число статей в научных журналах. Ниже приведены лишь статьи [14] — [20], использованные нами при составлении данного учебного пособия.

Тем, кто заинтересовался геометрическими неравенствами, рекомендую статьи Гарднера [15] и Оссермана [21]. Тем студентам, кто хотел бы заниматься научными исследованиями по интегральным неравенствам и их приложениям, будет полезна монография Прохорова, Степанова и Ушаковой [11]. Отметим также обзорную статью автора [22] по геометрической теории функций, где даны формулировки пятнадцати актуальных нерешённых проблем, относящихся к неравенствам типа Пуанкаре-Фридрихса и Харди-Реллиха.

Литература

[1] Харди Г.Г., Литтльвуд Д.Е., Полиа Г. *Неравенства.* М.: ИЛ, 1948.

[2] Полиа Г., Сегё Г. *Изопериметрические неравенства в математической физике.* М.: Физматгиз, 1962.

[3] Беккенбах Э., Беллман Р. *Неравенства.* М.: Мир, 1965.

[4] Хадвигер Г. *Лекции об объёме, площади поверхности и изопериметрии.* М.: Наука, 1966.

[5] Mitrinovic D.S. *Analytic Inequalities.* Springer-Verlag, Berlin and New York, 1970.

[6] Бураго Ю.Д., Залгаллер В.А. *Геометрические неравенства.* Ленинград: Наука, 1980.

[7] Bandle C. *Isoperimetric inequalities and applications.* Pitman Adv. Publ. Program, Boston-London-Melbourne, 1980.

[8] Маршалл А., Олкин И. *Неравенства: теория мажорации и ее приложения.* М.: Мир, 1983.

[9] Авхадиев Ф.Г. *Неравенства для интегральных характеристик областей.* Учебное пособие. Казань: Изд-во Казанск. ун-та. 2006.

[10] Avkhadiev F.G., Wirths K.-J. *Schwarz-Pick Type Inequalities.* Basel-Boston-Berlin: Birkhäuser. 2009.

[11] Прохоров Д.В., Степанов В.Д., Ушакова Е.П. *Интегральные операторы Харди–Стеклова.* Совр. пробл. матем., 22, МИАН, М., 3—185 (2016).

[12] Авхадиев Ф.Г. *Конформно-инвариантные неравенства.* Казань: Изд-во Казанск. ун-та. 2020.

[13] Schmidt E. *Über die Isoperimetrische Aufgabe im n-dimensionalen Raum konstanter negativer Krümmung. I. Die isoperimetrischen Ungleichungen in der hyperbolichen Ebene und für Rotationskörper im n-dimensionalen hyperbolichen Raum.* Math. Z., 46, 204–230 (1940).

[14] Avkhadiev F.G., Salahudinov R.G. *Isoperimetric Inequalities for Conformal Moments of Plane Domains.* J. of Inequal. Appl. V.7, No.4, 593–601 (2002).

[15] Gardner R.J. *The Brunn–Minkowski inequality.* Bull. Amer. Math. Soc. V. 39, No. 3, 355–405 (2002).

[16] Avkhadiev F.G., Kayumov I.R. *Comparison theorems of isoperimetric type for moments of compact sets.* Collectanea Math., V.55, No.1, 1—9 (2004).

[17] Avkhadiev F.G. *A simple proof of the Gauss-Winckler inequality.* Amer. Math. Monthly, V.112, No.5, 459–462 (2005).

[18] Avkhadiev F.G., Wirths K.-J. *Unified Poincaré and Hardy inequalities with sharp constants for convex domains.* Z. Angew. Math. Mech. (ZAMM), V. 87 (8-9), 632–642 (2007).

[19] Авхадиев Ф.Г. *Интегральные неравенства в областях гиперболического типа и их применения.* Матем. сборник, 206 (12), 3–28 (2015).

[20] Авхадиев Ф.Г. *Однопараметрические монотонные функционалы, связанные с интегралами Стилтьеса.* Изв. вузов. Матем. № 4, 3—14 (2019).

[21] Osserman R. *The isoperimetric inequality.* Bull. Amer. Math. Soc., V. 84, No. 6, 1182–1238 (1978).

[22] Avkhadiev F. *Selected results and open problems on Hardy-Rellich and Poincaré-Friedrichs inequalities.* Analysis and Math. Physics. **11**, 134, 1–20 (2021).

4.2 Вопросы к экзамену

Примерный список вопросов к экзамену

1. Теоремы сравнения для арифметических, геометрических и гармонических средних.

2. Неравенство Коши-Буняковского-Шварца.

3. Неравенство Гёльдера.

4. Неравенство Минковского для интегралов.

5. Неравенство Юнга для интегралов.

6. Неравенство Гаусса для монотонных функций.

7. Неравенство Гаусса-Винклера для моментов.

8. Неравенства Чебышёва для монотонных функций.

9. Неравенство Гильберта-Шура для двойного интеграла.

10. Неравенство Харди.

11. Выпуклые функции, критерии выпуклости для гладких функций.

12. Критерий выпуклости функции в общем случае.

13. Неравенство Йенсена для интегралов.

14. Классическое изопериметрическое неравенство.

15. Изопериметрическое неравенство в семействах прямоугольников и треугольников.

16. Неравенство Брунна-Минковского с доказательством Хадвигера-Охмана.

17. Неравенство Прекопы-Лайндлера с доказательством в одномерном случае.

18. Неравенство Прекопы-Лайндлера с доказательством в многомерном случае.

19. Связи неравенства Прекопы-Лайндлера с неравенствами типа Брунна-Минковского.

20. Вывод изопериметрического неравенства из неравенства Брунна-Минковского.

21. Модель Пуанкаре плоскости Лобачевского.

22. Оценки для конформных моментов.

Учебное издание

Авхадиев Фарит Габидинович

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

Учебное пособие

Компьютерная вёрстка
Ф.Г. Авхадиева

Дизайн обложки
Р.М. Абдрахмановой

Подписано в печать 15.10.2024.
Бумага офсетная. Печать цифровая.
Формат 60x84 1/16. Гарнитура «Book Antiqua».
Усл. печ. л. 8,13. Уч.-изд. л. 6,10.
Тираж 50 экз. Заказ 37/10

Отпечатано в типографии
Издательства Казанского университета

420008, г. Казань, ул. Профессора Нужина, 1/37
тел. (843) 206-52-14 (1704), 206-52-14 (1705)