КАЗАНСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ИНСТИТУТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ
И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Кафедра системного анализа и информационных технологий

И.В. КОННОВ

НАЧАЛА
ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Учебное пособие

Казань – 2024

ББК 22.18
УДК 519.6: 519.85

*Принято на заседании кафедры системного анализа
и информационных технологий
Протокол № 3 от 26 ноября 2024 года*

Рецензент:
кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры системного анализа
и информационных технологий КФУ А.А. Андрианова

Коннов И.В.
Начала линейного программирования. / И.В. Коннов. – Казань: Казанск. ун-т, 2024. – 45 с.: илл.

В пособии излагаются основы теории и базовые методы решения задач линейного программирования. Описан также метод потенциалов для транспортной задачи. В пособии содержатся упражнения, иллюстрации и примеры.

Предназначается для широкого круга читателей: студентов и магистров, обучающихся по физико-математическим, экономико-математическим и компьютерным направлениям. Ил. 4. Табл. 13. Библиогр. 6 назв.

Оглавление

Глава 1

Введение

Пусть $\mathbb{R}^n$ – вещественное n-мерное пространство. Элементами этого пространства являются точки с n координатами, которые будем считать векторами - столбцами, так что если $x \in \mathbb{R}^n$, то

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix} = (x_1, \ldots, x_n)^\top,$$

где x_j – j-я координата x, $j = \overline{1, n}$. Для любых $x, y \in \mathbb{R}^n$ определены скалярное произведение

$$\langle x, y \rangle = x^\top y = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j$$

и норма

$$\|x\| = \langle x, x \rangle^{1/2} = \left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2 \right)^{1/2}.$$

Пусть D – некоторое непустое множество в пространстве $\mathbb{R}^n$, а $f : D \to \mathbb{R}$ – заданная на этом множестве функция, т.е. она ставит в соответствие любой точке $x \in D$ число $f(x)$. Тогда можно определить *задачу оптимизации*, которая состоит в нахождении наименьшего (или наибольшего) значения функции f на множестве D. Таким образом, для случая задачи минимизации требуется найти точку $x^* \in D$ такую, что

$$f(x^*) \le f(x) \quad \forall x \in D.$$

Эту задачу будем кратко записывать следующим образом:

$$\min_{x \in D} \to f(x). \tag{1.1}$$

Множество решений этой задачи обозначим через $D^*(f)$, а оптимальное значение функции через f^*, т.е.

$$f^* = \inf_{x \in D} f(x)$$

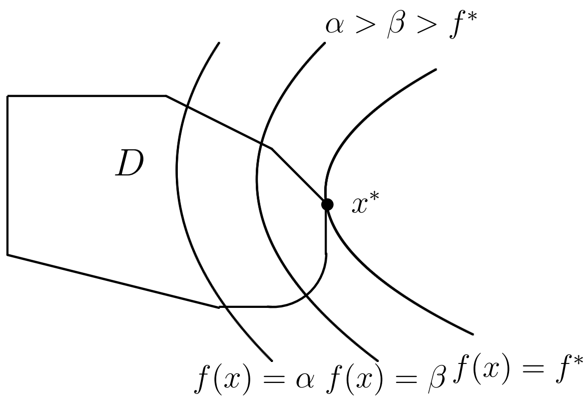


Рис. 1.1: Задача оптимизации при $n = 2$, $D^*(f) = \{x^*\}$.

(см. рис.1.1). Если оптимальное значение f^* функции в задаче (1.1) достигается, то можно записать

$$f^* = \min_{x \in D} f(x).$$

т.е. здесь правая часть соотношения, в отличие от (1.1), есть число. Функция f в задаче (1.1) называется *целевой*, а множество D – *допустимым*. Допустимое множество D может быть также задано с помощью некоторых функций $h_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i = \overline{1, m}$, например,

$$D = \{x \in \mathbb{R}^n \mid h_i(x) \le 0 \quad i = \overline{1, s}; \quad h_i(x) = 0 \quad i = \overline{s+1, m}\}.$$

Поскольку задача максимизации функции f эквивалентна задаче минимизации функции $-f$, то можно ограничиться только задачами вида (1.1).

Если функция f имеет вид $f(x) = \langle a, x \rangle + \alpha$, то она называется аффинной, а при $\alpha = 0$ – линейной. Если все функции цели и ограничений аффинные, то задача оптимизации обычно называется задачей линейного программирования (ЛП для краткости).

Глава 2

Линейное программирование

Задачи оптимизации с линейными (аффинными) функциями цели и ограничений, или, иначе, задачи линейного программирования (ЛП) составляют, пожалуй, наиболее изученный класс среди задач оптимизации. Таким образом, они приводят к необходимости нахождения наибольшего или наименьшего значения линейной функции и переменных при ограничениях, также задаваемых в виде линейных равенств и (или) неравенств.

2.1 Постановки задач, приводящих к задачам ЛП

К задачам линейного программирования (ЛП) приводятся многие модели, в которых необходимо найти наивыгоднейший способ распределения ресурсов.

Пример 1. Предприятие производит n видов красок (можно любого другого продукта), для которых использует m видов ресурсов. Известно, что цена одной тонны j-й краски – c_j, запасы (на рассматриваемый период) i-го вида ресурса – b_i тонн, расход i-го вида ресурса на одну тонну j-й краски – a_{ij}. Необходимо определить план производства краски, приносящий наибольшую прибыль при выполнении ограничений на запасы ресурсов. Введем переменные: x_j – количество тонн j-й краски, которое производит предприятие. Тогда $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j$ – затраты i-го вида ресурса, отсюда получаем ограничения

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i,\ \ i = \overline{1, m}; \tag{2.1}$$

ясно, что $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ – стоимость произведенной краски, которая определяет целевую функцию. Получаем задачу

$$\max \to \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{2.2}$$

при ограничениях (2.1), а также надо учесть ограничения на неотрицательность

$$x_j \geq 0,\ \ j = \overline{1, n}. \tag{2.3}$$

Задача (2.1)–(2.3) – это задача ЛП в стандартной форме.

При построении использованы свойства: пропорциональность (т.е. цена c_j постоянна и не зависит от x_j), аддитивность (тогда стоимость произведенной j-й краски $c_j x_j$ не зависит от x_i при $i \neq j$).

Пример 2 (Задача о рационе). (Можно использовать на предприятиях по выращиванию птиц и животных)

Для кормления используется n продуктов питания, c_j – стоимость единицы j-го продукта; необходимо, чтобы в пище содержалось m питательных веществ, i-го вещества – не менее b_i единиц; известно, что в единице j-го продукта содержится a_{ij} единиц i-го вещества. Задача заключается в минимизации стоимости закупаемых продуктов при выполнении ограничений на состав питательных веществ. А именно, если x_j – закупаемое количество j-го продукта, то требуется найти

$$\min \to \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i, \;\; i = \overline{1, m},$$

$$x_j \geq 0, \;\; j = \overline{1, n}.$$

Получена также задача ЛП в стандартной форме. Возможны и другие ограничения ($\leq b_i$, $= b_i$). Тогда получаем общую задачу ЛП. В общем случае требуется выбирать наилучшую из множества возможных постановок. Необходимо для этого рассмотреть свойства задач ЛП и методы их решения.

2.2 Графический метод решения

Пример 1 с двумя изделиями (красками). Фирма выпускает два вида изделий (краски) с ценами 3 и 2 денежных единицы за тонну, использует два вида ресурса с запасами 5 и 8 тонн на заданный период. Нормы расхода ресурсов на краску по технологии даны матрицей:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Надо найти план выпуска краски, обеспечивающий наибольший доход при ограничениях на ресурсы:

$$\begin{aligned} \max \to \quad & 3x_1 + 2x_2 \\ & x_1 + x_2 \leq 5, \\ & 2x_1 + x_2 \leq 8, \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Рис. 2.1:

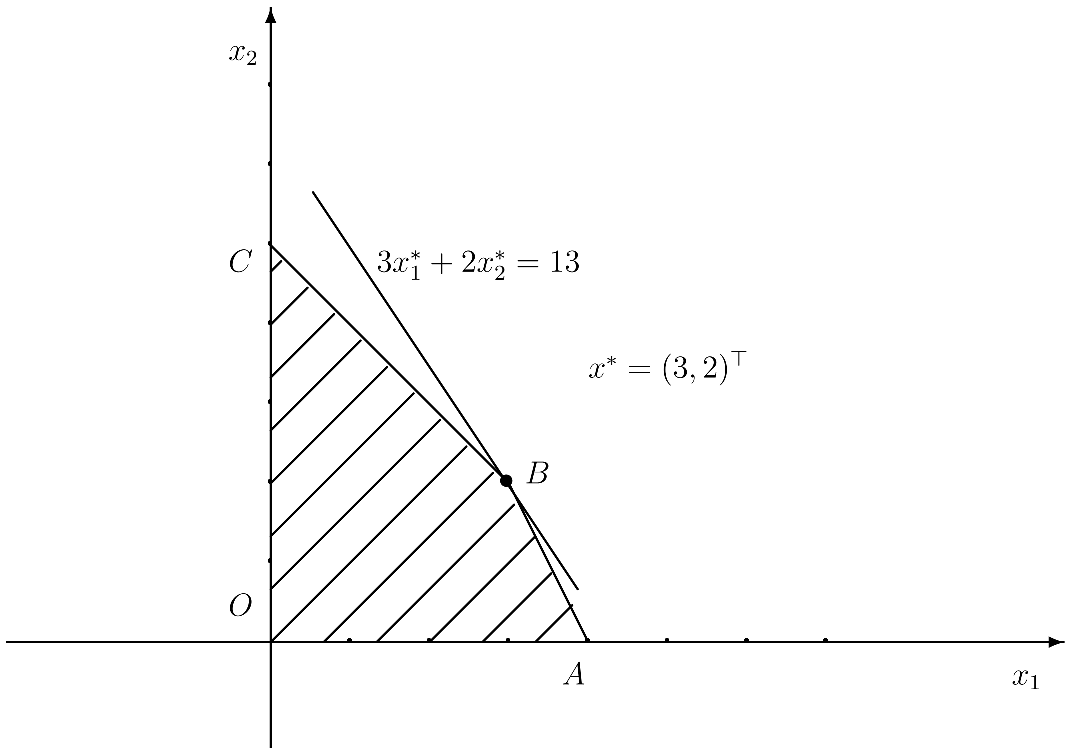
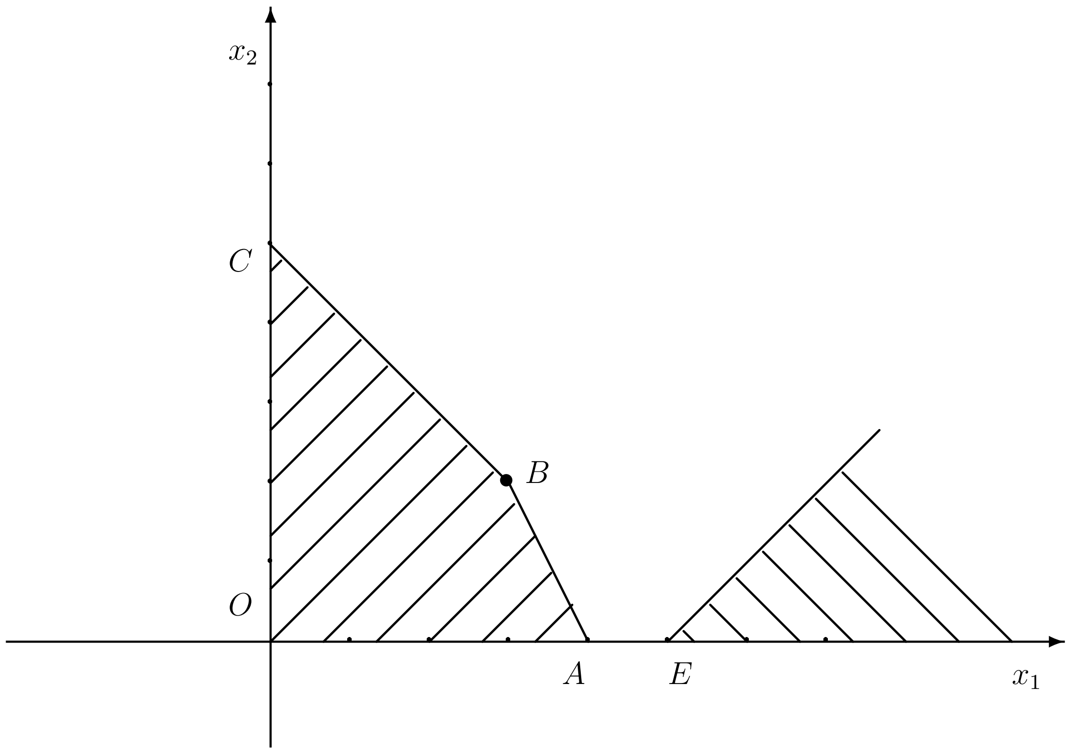


Рис. 2.2:



Решение: $x^* = (3, 2)^\top$, $f^* = 13$ ден.ед., см. рис. 2.1.

Если добавить одно ограничение (разность спроса на 1-й и 2-й виды краски не меньше 5 т.):

$$\begin{aligned} \max \to \quad & 3x_1 + 2x_2 \\ & x_1 + x_2 \le 5, \\ & 2x_1 + x_2 \le 8, \\ & x_1 - x_2 \ge 5, \\ & x_1 \ge 0, x_2 \ge 0; \end{aligned}$$

то допустимое множество становится пустым, см. рис. 2.2.

Далее, пусть известно из исследования рынка, что спрос на 2-й вид краски не превышает спрос на 1-й вид более чем на 1 т., а также спрос на 2-й вид не более 2 т. Надо записать эту задачу.

Ответ.

$$\begin{aligned}\max \to \quad & 3x_1 + 2x_2\\ & x_1 + x_2 \le 5,\\ & 2x_1 + x_2 \le 8,\\ & -x_1 + x_2 \le 1,\\ & x_2 \le 2,\\ & x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.\end{aligned}$$

В качестве упражнения предлагается найти ее решение.

2.3 Общий вид задач ЛП

Задача ЛП в общем виде имеет ограничения в виде равенств и неравенств:

$$\min \to \sum_{j=1}^{n} c_j x_j,$$

ограничения:

$$\begin{aligned}&\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge b_i,\ i = \overline{1,s},\\ &\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i,\ i = \overline{s+1,m},\\ &x_j \ge 0,\ j = \overline{1,t}.\end{aligned}$$

Двойственная задача ЛП:

$$\max \to \sum_{i=1}^{m} b_i y_i,$$

ограничения:

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \le c_j,\ j = \overline{1,t},\\ &\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i = c_j,\ j = \overline{t+1,n},\\ &y_i \ge 0,\ i = \overline{1,s}.\end{aligned}$$

Двойственная к двойственной задаче – прямая.

Удобно использовать частные случаи, в которых допускается компактная форма записи.

Стандартная форма: $s = m$, $t = n$.

$$\min \to \sum_{j=1}^{n} c_j x_j,$$

ограничения:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i, \ \ i = \overline{1, m},$$
$$x_j \geq 0, \ \ j = \overline{1, n}.$$

Записать двойственную к ней в качестве упражнения.

Каноническая форма: $s = 0$, $t = n$.

$$\min \to \sum_{j=1}^{n} c_j x_j,$$

ограничения:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \ \ i = \overline{1, m},$$
$$x_j \geq 0, \ \ j = \overline{1, n}.$$

Записать двойственную к ней в качестве упражнения.

Ответы.
Стандартная форма:

$$\max \to \sum_{i=1}^{m} b_i y_i,$$

ограничения:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \le c_j, \; j = \overline{1,n},$$
$$y_i \ge 0, \; i = \overline{1,m}.$$

Каноническая форма:

$$\max \to \sum_{i=1}^{m} b_i y_i,$$

ограничения:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \le c_j, \; j = \overline{1,n}.$$

На самом деле задача ЛП общего вида также сводится к канонической или стандартной форме, т.е. они не являются частными случаями. Это означает, что после преобразования по их решению легко восстановить решение исходной.

1. Пусть имеется переменная x_j – произвольная, т.е. без ограничения на знак. Тогда делаем замену переменных: $x_j = x'_j - x''_j$, $x'_j \ge 0$, $x''_j \ge 0$. Теперь переменные x'_j, x''_j ограничены по знаку.

2. Пусть имеется ограничение в виде равенства

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i.$$

   Вместо него можно записать эквивалентную пару неравенств

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge b_i$$

   и

$$\sum_{j=1}^{n} (-a_{ij}) x_j \ge -b_i.$$

3. Пусть имеется ограничение в виде неравенства

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge b_i.$$

Его можно заменить равенством

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - x_{n+1} = b_i$$

и условием неотрицательности для новой переменной $x_{n+1} \geq 0$.

Поэтому задача ЛП в любой из указанных форм записи может быть приведена эквивалентными преобразованиями к другой. В основном далее будем использовать стандартную или каноническую форму записи.

Теперь приведем компактную форму записи этих задач ЛП. Пусть A – матрица размерности $m \times n$ с элементами a_{ij}, через A_j обозначим ее j-й столбец, через a_i обозначим ее i-ю строку. Будем использовать векторы $c, x \in \mathbb{R}^n$ и $b, y \in \mathbb{R}^m$. Напомним, как определяются скалярное произведение

$$\langle c, x \rangle = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

и норма

$$\|x\| = \langle x, x \rangle^{1/2} = \left(\sum_{j=1}^{n} \|x_j\|^2 \right)^{1/2}.$$

Символ $\mathbf{0}$ обозначает нулевой вектор соответствующей размерности, знаки неравенств для векторов понимаются покоординатно.

Стандартная форма задачи ЛП:

$$\min \to \{\langle c, x \rangle \mid Ax \geq b, x \geq \mathbf{0}\},$$

двойственная задача:

$$\max \to \left\{\langle b, y \rangle \mid A^\top y \leq c, y \geq \mathbf{0}\right\}.$$

Каноническая форма задачи ЛП:

$$\min \to \{\langle c, x \rangle \mid Ax = b, x \geq \mathbf{0}\},$$

двойственная задача:

$$\max \to \left\{\langle b, y \rangle \mid A^\top y \leq c\right\}.$$

Дополнительно определим их допустимые множества:

$$\begin{aligned} D &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b, x \geq \mathbf{0}\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle a_i, x \rangle = b_i, i = \overline{1, m}, x \geq \mathbf{0}\right\} \\ &= \left\{ x \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n} x_i A_i = b,\ \ x \geq \mathbf{0} \right\}. \end{aligned}$$

Аналогично,

$$\begin{aligned}\widetilde{D} &= \{y \in \mathbb{R}^m \mid A^\top y \le c\} = \{y \in \mathbb{R}^m \mid \langle A_j, y\rangle \le c_j, j = \overline{1,n}\} \\ &= \left\{ y \in \mathbb{R}^m \;\middle|\; \sum_{i=1}^m y_i a_i \le c \right\}.\end{aligned}$$

Базисом задачи ЛП называется любой базис $\{A_j\}_{j\in B}$ в множестве столбцов

$$\{A_j\}_{j=\overline{1,n}}.$$

Будем считать, что ранг $A = m \le n$. Нетривиальным будет лишь случай, когда ранг $A = m < n$. Тогда любой базис содержит ровно m столбцов. Тогда решения систем линейных уравнений

$$\sum_{i\in B} x_i A_i = b \text{ и } \langle A_j, y\rangle = c_j, j \in B$$

существуют и единственны. После пополнения нулевыми небазисными компонентами получаем точку $x \in \mathbb{R}^n$. Найденные таким образом точки x и y называются *опорными точками* прямой и двойственной задачи. Если соответствующие точки x и y допустимы, то базис допустимый (двойственно допустимый). Поэтому для допустимости надо, чтобы $x_i \ge 0$, $j \in B$, для двойственной допустимости – чтобы $\langle A_j, y\rangle \le c_j$, $j \notin B$.

2.4 Геометрическая интерпретация задач ЛП

Рассмотрим приводимый ранее пример задачи ЛП:

$$\max \to 3x_1 + 2x_2,$$

ограничения:

$$\begin{aligned}&x_1 + x_2 \le 5,\\ &2x_1 + x_2 \le 8,\\ &-x_1 + x_2 \le 1,\\ &x_2 \le 2,\\ &x_1, x_2 \ge 0.\end{aligned}$$

После преобразований получим задачу ЛП в стандартной форме:

$$\min \to -3x_1 - 2x_2,$$

ограничения:

$$\begin{aligned}&-x_1 - x_2 \ge -5,\\ &-2x_1 - x_2 \ge -8,\\ &x_1 - x_2 \ge -1,\\ &-x_2 \ge -2,\\ &x_1, x_2 \ge 0.\end{aligned}$$

Преобразуем ее к задаче ЛП в канонической форме:

$$\min \to -3x_1 - 2x_2,$$

ограничения:

$$\begin{array}{lllllll}
-x_1 & -x_2 & -z_1 & & & & = -5 \\
-2x_1 & -x_2 & & -z_2 & & & = -8 \\
x_1 & -x_2 & & & -z_3 & & = -1 \\
-x_2 & & & & & -z_4 & = -2 \\
\multicolumn{7}{l}{x_1, x_2, z_1, z_2, z_3, z_4 \geq 0.}
\end{array}$$

Матрица коэффициентов:

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\
A = & \left(\begin{array}{cccccc|c}
-1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -5 \\
-2 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -8 \\
1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\
0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -2
\end{array}\right),
\end{array}$$

поэтому можно обозначить $x_3 = z_1$, $x_4 = z_2$, $x_5 = z_3$, $x_6 = z_4$. Базис состоит из четырех столбцов – две небазисные переменные обращаются в 0. Решение системы

$$\sum_{j \in B} x_j A_j = b$$

дает одну из угловых точек. При этом точка $(3,2)^\top$ может быть получена из двух базисов.

$$\begin{array}{rcl}
B & = & \{3,4,5,6\} \Longrightarrow (0,0)^\top \\
B & = & \{1,2,3,5\} \Longrightarrow (3,2)^\top.
\end{array}$$

Поэтому угловым точкам задачи в стандартной форме соответствуют опорные точки в канонической форме. Таким образом, перебирая базисы без возвращения, можно получить базис, которому соответствует оптимальная угловая (опорная) точка, см. рис. 2.3.

2.5 Свойства двойственных задач ЛП

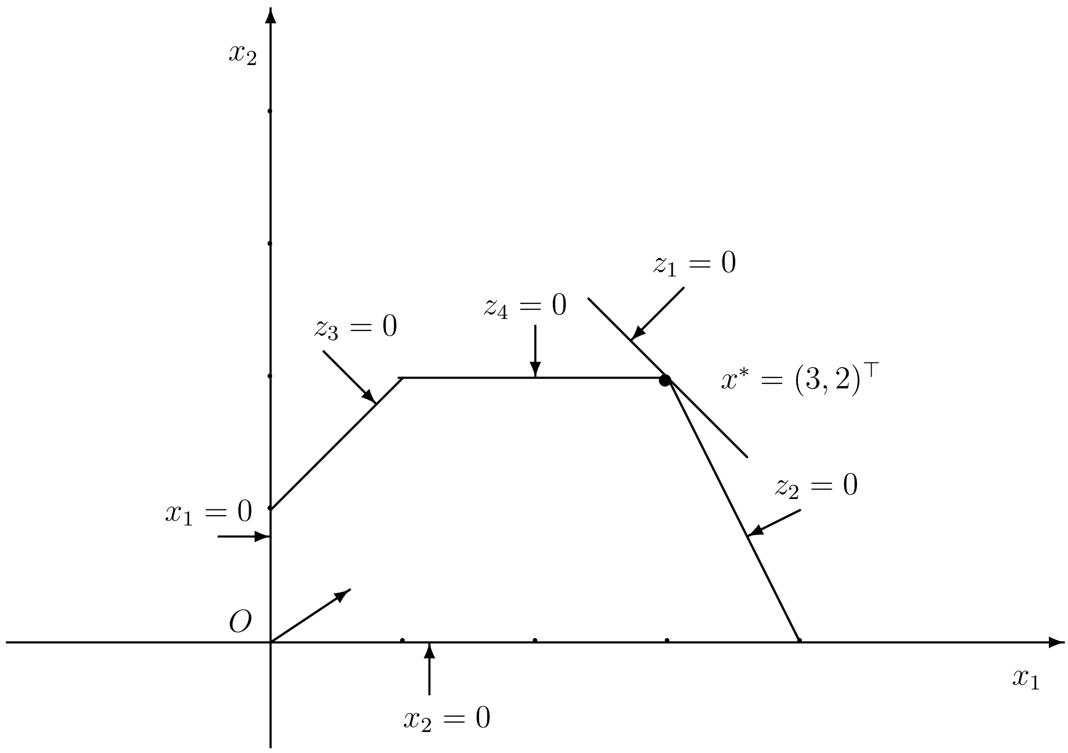
Предварительно установим некоторые свойства для пары двойственных задач в канонической форме:

$$\min_{x \in D} \to \langle c, x \rangle \tag{2.4}$$

и

$$\max_{y \in \widetilde{D}} \to \langle b, y \rangle, \tag{2.5}$$

Рис. 2.3:



где

$$D = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b, x \geq \mathbf{0}\}$$

и

$$\widetilde{D} = \left\{y \in \mathbb{R}^m \mid A^\top y \leq c\right\}.$$

Множества решений задач (2.4) и (2.5) обозначим D^* и $\widetilde{D}^*$, соответственно.

Лемма 2.1. (Основная лемма) *Для любых $x \in D$, $y \in \widetilde{D}$ выполняется*

$$\langle c, x\rangle \geq \langle b, y\rangle.$$

Доказательство. Пусть $x \in D$ и $y \in \widetilde{D}$. Тогда

$$\begin{aligned}
\langle b, y\rangle &= \sum_{i=1}^{m} b_i y_i = \sum_{i=1}^{m} \langle a_i, x\rangle y_i \\
&= \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j\right) y_i = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i\right) x_j \\
&= \sum_{j=1}^{n} \langle A_j, y\rangle x_j \leq \sum_{j=1}^{n} c_j x_j = \langle c, x\rangle.
\end{aligned}$$

□

Следствие 2.1.
a) Если выражение $\langle b, y\rangle$ не ограничено сверху на $\widetilde{D}$, то $D = \varnothing$.
b) Если выражение $\langle c, x\rangle$ не ограничено снизу на D, то $\widetilde{D} = \varnothing$.

Следствие 2.2. *Если $x^* \in D$, $y^* \in \widetilde{D}$ и $\langle c, x^*\rangle = \langle b, y^*\rangle$, то $x^* \in D^*$, $y^* \in \widetilde{D}^*$.*

Таким образом, получено достаточное условие оптимальности для задач ЛП. Получить необходимое условие намного сложнее.

Теорема 2.1. (Первая теорема двойственности) *Если даны точки $x^* \in D^*$, $y^* \in \widetilde{D}^*$, то*

$$\langle c, x^*\rangle = \langle b, y^*\rangle. \tag{2.6}$$

Можно получить и более сильное утверждение.

Теорема 2.2. (Первая теорема двойственности в сильной форме) *Если какая-либо задача из пары двойственных задач имеет решение, то и другая задача также имеет решение, при этом оптимальные значения их целевых функций совпадают.*

Доказательства этих теорем см., например, в [6], гл.3, теорема 6.1.

Кроме того, условие (2.6) можно заменить так называемыми условиями дополнительности.

Теорема 2.3. (Вторая теорема двойственности) *Пусть даны точки $x^* \in D$, $y^* \in \widetilde{D}$. Они будут решениями задач (2.4) и (2.5), соответственно, тогда и только тогда когда выполняются условия*

$$x_j^*(\langle A_j, y^*\rangle - c_j) = 0,\ \ j = \overline{1, n},$$
$$y_i^*(\langle a_i, x^*\rangle - b_i) = 0,\ \ i = \overline{1, m}.$$

Доказательство см., например, в [6], гл.3, теорема 6.2.

Не ограничивая общности, рассмотрим нетривиальный случай пары двойственных задач ЛП (2.4) и (2.5), когда ранг $A = m < n$. Возьмем любой базис $\{A_j\}_{j\in B}$, тогда он содержит ровно m столбцов. Ему соответствуют единственные решения систем линейных уравнений

$$\sum_{i\in B} x_i A_i = b \text{ и } \langle A_j, y\rangle = c_j, j \in B,$$

которые называются *опорными точками* прямой и двойственной задачи, при этом небазисные координаты x_i считаются равными нулю.

Лемма 2.2. *Для любых опорных точек выполняется*

$$\langle c, x\rangle = \langle b, y\rangle.$$

Доказательство. Пусть x и y – опорные точки базиса B. Тогда

$$\langle c, x\rangle \ = \ \sum_{j\in B} c_j x_j = \sum_{j\in B}\langle A_j, y\rangle x_j = \langle\sum_{j\in B} x_j A_j, y\rangle = \langle b, y\rangle.$$

□

Теперь можно получить критерий для проверки оптимальности.

Теорема 2.4. *Пусть даны опорные точки x, y, соответствующие базису B. Для того чтобы они были решениями своих задач (2.4) и (2.5), соответственно, необходимое и достаточно, чтобы базис был допустимым и двойственно допустимым.*

Иначе говоря, надо, чтобы $x_i \geq 0$, $j \in B$, а также $\langle A_j, y\rangle \leq c_j$, $j \notin B$.

2.6 Симплекс - метод

Обозначим $\Delta_j = \langle A_j, y\rangle - c_j$. Если B – базис, то $A_j = \sum_{i\in B} g_{ij}A_i$. Тогда имеем

$$\Delta_j = \sum_{i\in B} g_{ij}\langle A_i, y\rangle - c_j = \sum_{i\in B} g_{ij}c_i - c_j.$$

Основной метод.

Шаг 1. На итерации имеется допустимое базисное множество B и соответствующая опорная точка x. Решаем систему

$$\langle A_j, y\rangle = c_j,\ j \in B, \tag{2.7}$$

вычисляем y и $\Delta_j = \langle A_j, y\rangle - c_j$ для $j \notin B$.

Шаг 2. Если $\Delta_j \le 0$, $j = \overline{1,n}$, то B – двойственно допустимый базис и $x \in D^*$. Иначе определяем индекс

$$k = \operatorname{argmax}\{\Delta_j \mid j \in \{1,\dots,n\}\},$$

тогда $\Delta_k > 0$ и $k \notin B$.

Шаг 3. Вычисляем коэффициенты g_{ik}, $i \in B$ из системы

$$\sum_{i\in B} g_{ik}A_i = A_k \tag{2.8}$$

и определяем множество $B^+ = \{i \in B \mid g_{ik} > 0\}$. Если $B^+ = \varnothing$, то останов. *(целевая функция не ограничена снизу)*

Шаг 4. Выбираем индекс $l \in B$:

$$\theta_0 = \frac{x_l}{g_{lk}} = \min_{i\in B^+}\frac{x_i}{g_{ik}},$$

определяем новый базис $B' = B\setminus\{l\}\cup\{k\}$ и новую опорную точку x':

$$x'_i = \begin{cases} x_i - \theta_0 g_{ik}, & i \in B,\\ \theta_0, & i = k,\\ 0, & i \notin B, i \ne k.\end{cases}$$

Таким образом, метод начинает работу с допустимого базиса. Потом, последовательно переходя по допустимым базисам, он должен прийти к базису, который одновременно и допустимый, и двойственно допустимый.

Вначале обоснуем несколько вспомогательных утверждений. Для базиса B и индекса $k \notin B$ определим вектор $x(\theta)$:

$$x_i(\theta) = \begin{cases} x_i - \theta g_{ik}, & i \in B,\\ \theta, & i = k,\\ 0, & i \notin B, i \ne k.\end{cases}$$

Лемма 2.3.
a) $Ax(\theta) = b, \quad \forall \theta \in \mathbb{R}$*;*
b) $\langle c, x(\theta)\rangle = \langle c, x\rangle - \theta\Delta_k, \quad \forall \theta \in \mathbb{R}$*.*

Доказательство.

$$Ax(\theta) = \sum_{i \in B} x_i(\theta)A_i + \theta A_k = \sum_{i \in B} x_i A_i - \theta\left(\sum_{i \in B} g_{ik}A_i - A_k\right) = b,$$

поскольку $\sum_{i \in B} g_{ik}A_i = A_k$. Далее,

$$\langle c, x(\theta)\rangle = \sum_{i \in B} c_i(x_i - \theta g_{ik}) + c_k\theta = \sum_{i \in B} c_i x_i - \theta\left(\sum_{i \in B} g_{ik}c_i - c_k\right) = \langle c, x\rangle - \theta\Delta_k,$$

поскольку $\Delta_k = \sum_{i \in B} g_{ik}c_i - c_k$. □

Лемма 2.4. *Если* $\Delta_k > 0$ *и* $B^+ = \varnothing$*, то целевая функция не ограничена снизу.*

Доказательство. Из леммы 2.3 следует, что в этих условиях $x(\theta) \geq 0$ при любом $\theta \geq 0$, но $\Delta_k > 0$. □

Лемма 2.5. *Если* $\Delta_k > 0$ *и* $B^+ \neq \varnothing$*, то*

$$x(\theta) \in D,\ \forall \theta \in [0, \theta_0].$$

Доказательство. Надо проверить неотрицательность только координат $x(\theta)$ из B^+. Имеем $x_i(\theta) = x_i - \theta g_{ik} \geq 0$ для $i \in B^+$, если

$$\theta \leq \theta_0 = \min_{i \in B^+} \frac{x_i}{g_{ik}}.$$

□

Из лемм 2.3–2.5 следует, что

$$\sum_{i \in B} x'_i A_i = b,\ x' \geq 0,$$

т.е. x' – допустимая точка.

Лемма 2.6. *Если* B *– допустимый базис, то и* B' *– допустимый базис.*

Доказательство. Надо показать только, что B' – базис. Пусть B' – не базис, тогда

$$\sum_{i \in B \setminus \{l\}} \alpha_i A_i + \alpha_k A_k = \mathbf{0},$$

для некоторых коэффициентов α_i, не всех равных нулю. Возможны два случая:
1) $\alpha_k = 0$, тогда B – не базис;

2) $\alpha_k \neq 0$, тогда

$$\sum_{i\in B\setminus\{l\}} \alpha_i A_i + \alpha_k \sum_{i\in B} g_{ik} A_i = \sum_{i\in B} \beta_i A_i = \mathbf{0},$$

причем $\alpha_k \neq 0$ и $g_{lk} > 0$, отсюда $\beta_l = \alpha_k g_{lk} \neq 0$, т.е. снова B – не базис. $\square$

Определение. Базис B называется *невырожденным*, если для соответствующей опорной точки $x_i > 0$ для всех $i \in B$.

Из полученных свойств теперь следует, что $\langle c, x'\rangle < \langle c, x\rangle$ в случае невырожденного базиса B. Количество базисов конечно, а поскольку опорные точки однозначно определяются по базисам, то это означает, что при переходе к новому базису строго уменьшается значение целевой функции и возврат к одному из старых невозможен. Поэтому метод конечен, что и обосновывает симплекс-метод.

Теорема 2.5. *Если базисы задачи ЛП невырождены, то симплекс-метод за конечное число шагов либо находит решение, либо указывает, что целевая функция не ограничена снизу.*

Отметим, что при обосновывании использовалось только достаточное условие оптимальности в следствии 2.2, что было доказано явно.

Пример решения задачи. Рассмотрим приводимый ранее пример задачи ЛП:

$$\max \to 3x_1 + 2x_2,$$

ограничения:

$$\begin{aligned} &x_1 + x_2 \leq 5,\\ &2x_1 + x_2 \leq 8,\\ &-x_1 + x_2 \leq 1,\\ &x_2 \leq 2,\\ &x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

После преобразований получим прямую задачу ЛП в канонической форме:

$$\min \to -3x_1 - 2x_2,$$

ограничения:

$$\begin{array}{lllllll} x_1 & +x_2 & +x_3 & & & & = 5\\ 2x_1 & +x_2 & & +x_4 & & & = 8\\ -x_1 & +x_2 & & & +x_5 & & = 1\\ x_2 & & & & & +x_6 & = 2 \end{array}$$

$$x_j \geq 0,\ j = \overline{1,6}.$$

Таблица 2.1: первая итерация

	B	x_B	C_B	g_B	y_B
1	1	4	-3	1/2	0
2	3	1	0	1/2	-3/2
3	5	5	0	3/2	0
4	6	2	0	1	0
			-12		

Таблица 2.2: оценки по итерациям

it	Δ_1	Δ_2	Δ_3	Δ_4	Δ_5	Δ_6	k	l
1	0	1/2	0	-3/2	0	0	2	6
2	0	0	0	-3/2	0	-1/2		

Начальный базис $B = \{1, 3, 5, 6\}$, находим опорную точку из системы

$$\sum_{i \in B} x_i A_i = b,$$

в коэффициентах:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 8 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right).$$

Данные в таблице 2.1. Ясно, что базис допустимый. Поэтому находим двойственную опорную точку из системы (2.7), в коэффициентах:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Вычисляем $\Delta_j = \langle A_j, y \rangle - c_j$, $j = \overline{1,6}$, в таблице 2.2. Поскольку $\Delta_2 > 0$, то базис не двойственно допустимый, полагаем $k = 2$. Поэтому вычисляем коэффициенты g_{i2}, $i \in B$ из системы (2.8), в коэффициентах:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right),$$

Таблица 2.3: вторая итерация

	B	X_B	C_B	g_B	y_B
1	1	3	-3		0
2	3	0	0		-3/2
3	5	2	0		0
4	2	2	-2		-1/2
			-13		

данные в таблице 2.1. Имеем $B^+ = \{1,3,5,6\}$, находим

$$\theta_0 = \min_{i\in B^+} \frac{x_i}{g_{i2}} = \frac{x_6}{g_{6,2}} = 2,$$

поэтому полагаем $l = 6$. Новый базис $B = \{1,3,5,2\}$, опорная точка в таблице 2.3. Отметим, что $\langle c, x'\rangle = \langle c, x\rangle - \theta_0\Delta_2$. Находим двойственную опорную точку из системы (2.7), в коэффициентах:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right),$$

данные в таблице 2.3. Вычисляем $\Delta_j = \langle A_j, y\rangle - c_j$, $j = \overline{1,6}$, в таблице 2.2. Поскольку $\Delta_j \leq 0$, $j = \overline{1,6}$, то базис допустимый и двойственно допустимый. Поэтому получено решение $x^* = (3,2,0,0,2,0)^\top$, $f^* = -13$.

Проблемы реализации.
1. Нахождение начального допустимого базиса.
2. Решение систем линейных уравнений (2.7) и (2.8).
3. Наличие вырожденных базисов.

2.7 Методы поиска начального допустимого базиса

Рассмотрим возможные решения проблем реализации симплекс-метода. Нахождение начального допустимого базиса можно провести в рамках того же метода, используя вспомогательные начальные базисы.

Например, можно применить **однофазный метод искусственного базиса**.

Вместо исходной задачи (2.4) решается задача

$$\min \to \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + M \sum_{i=1}^{m} x_{n+i}, \tag{2.9}$$

ограничения:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + x_{n+i} = b_i,\ i = \overline{1,m},$$
$$x_j \geq 0,\ j = \overline{1,n+m}.$$

При этом в задаче (2.9) умножением, если необходимо, равенств-ограничений в задаче (2.4) на -1 добиваются, чтобы $b_i \geq 0$, $i = \overline{1,m}$. Тогда начальный допустимый базис $B = \{n+1,\dots,n+m\}$, опорная точка $x = (0,...,0,b_1,...,b_m)^\top$. При достаточно большом значении параметра M задача (2.9) эквивалентна задаче (2.4). Пусть $\bar{x}$ – решение (2.9), x^* – решение задачи (2.4). При решении задачи (2.9) возможны три случая.

1) Если $\bar{x}_{n+i} = 0$, $i = \overline{1,m}$, то $x^*_j = \bar{x}_j$, $j = \overline{1,n}$.

2) Если $\exists i_0$, $\bar{x}_{n+i_0} > 0$, то $D = \varnothing$.

3) Если целевая функция не ограничена снизу, то не ограничена снизу и целевая функция в (2.4).

При реализации метода можно считать M достаточно большим параметром и не вычислять его явно, т.е. при вычислении оценок использовать вид $\Delta_j = \Delta'_j + \Delta''_j M$ и знак Δ_j определять по знаку Δ''_j. Кроме того, при исключении дополнительной переменной из базиса ее сразу исключают и из задачи. Поэтому данный метод более удобен, чем двухфазный.

Двухфазный метод искусственного базиса.

Вместо исходной задачи (2.4) вначале также вводятся искусственные переменные x_{n+i}, $i = \overline{1,m}$ и решается задача

$$\min \to \sum_{i=1}^{m} x_{n+i}, \tag{2.10}$$

ограничения:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + x_{n+i} = b_i,\ i = \overline{1,m},$$
$$x_j \geq 0,\ j = \overline{1,n+m}.$$

Также в задаче (2.10) умножением, если необходимо, равенств-ограничений в задаче (2.4) на -1 добиваются, чтобы $b_i \geq 0$, $i = \overline{1,m}$. Тогда начальный допустимый базис $B = \{n+1,\dots,n+m\}$, опорная точка $x = (0,...,0,b_1,...,b_m)^\top$, задача (2.10) всегда имеет решение. Пусть в результате применения симплекс-метода к (2.10) получено решение $\bar{x}$ с базисом B. При этом возможны три случая.

1) Если $n+i \notin B$, $i = \overline{1,m}$, то $\bar{x}$ и B – допустимый базис и опорная точка и базис для (2.4).

2) Если $\exists i_0, n+i_0 \in B$, $\bar{x}_{n+i_0} > 0$, тогда $D = \varnothing$ для задачи (2.4).

3) Пусть

$$\overline{B} = \{s \in B \mid \exists i, 1 \leq i \leq m, s = n+i\} \neq \varnothing,$$

но при этом для любого $s \in \overline{B}$ имеем $\bar{x}_s = 0$. Тогда решаем задачу

$$\min \to \sum_{j=1}^{n} c_j x_j,$$

ограничения:

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i,\ i \notin \overline{B},\\
&\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + x_{n+i} = b_i,\ i \in \overline{B},\\
&x_j \geq 0, j = \overline{1,n},\ j \in \overline{B}.
\end{aligned}$$

При выходе из базиса можно сразу исключить дополнительные переменные, если они остаются в базисе, то значения их не меняются (они равны 0), поэтому соответствующим усечением получаем решение. Этот метод более сложный, но не содержит параметров.

2.8 Реализация по методу симплексных таблиц и вырожденные базисы

Для каждого базиса B построим таблицу $T(B)$ размерности $(m+1)\times(n+1)$, с индексами $(i) = \overline{1, m+1}$, $j = \overline{0,n}$ и элементами g_{ij}. Здесь (i) определяет номер по порядку, тогда как i определяет индекс соответствующей переменной задачи (2.4). Вычисление элементов g_{ij} проводится по правилам.

1) Для $(i) = \overline{1,m}$, т.е. для $i \in B$ и $j = \overline{1,n}$: из систем $A_j = \sum_{i\in B} g_{ij} A_i$.

2) Для $(i) = \overline{1,m}$ и $j = 0$: полагаем $A_0 = b$, тогда из системы $A_0 = \sum_{i\in B} g_{i0} A_i$ имеем $g_{i0} = x_i$ для $(i) = \overline{1,m}$, т.е. для $i \in B$.

3) Для $(i) = m+1$ и $j = \overline{1,n}$: $g_{(m+1),j} = \sum_{i\in B} g_{ij} c_i - c_j$ – это оценки ограничений; для $(i) = m+1$ и $j = 0$ тогда полагаем $c_0 = 0$ и получаем по аналогии $g_{(m+1),0} = \sum_{i\in B} g_{i0} c_i = \langle c, x\rangle$ – значение целевой функции.

Укажем теперь способ пересчета таблицы при смене базисов $B \to B'$. Пусть таблица $T(B')$ содержит элементы g'_{ij}, они будут определяться по формулам:

$$\begin{aligned}
&g'_{kj} = g_{lj}/g_{lk},\ j = \overline{1,n},\\
&g'_{ij} = g_{ij} - g_{lj}\frac{g_{ik}}{g_{lk}},\ j = \overline{1,n}, i \neq k.
\end{aligned}$$

Обозначим через B_1 общую (неизменную) часть базисов B и B', т.е. $B = B_1 \cup \{l\}$, $B' = B_1 \cup \{k\}$. Из

$$A_k = \sum_{i\in B_1} g_{ik} A_i + g_{lk} A_l$$

имеем
$$A_l = \sum_{i\in B_1} -\frac{g_{ik}}{g_{lk}} A_i + \frac{1}{g_{lk}} A_k.$$

Тогда действительно
$$\begin{aligned} A_j &= \sum_{i\in B_1} g_{ij} A_i + g_{lj} A_l = \sum_{i\in B_1} g_{ij} A_i - \sum_{i\in B_1} \frac{g_{ik} g_{lj}}{g_{lk}} A_i + \frac{g_{lj}}{g_{lk}} A_k \\ &= \sum_{i\in B_1} \left(g_{ij} - \frac{g_{ik} g_{lj}}{g_{lk}} \right) A_i + \frac{g_{lj}}{g_{lk}} A_k \end{aligned}$$

получаем
$$g'_{ij} = g_{ij} - \frac{g_{ik} g_{lj}}{g_{lk}},\ g'_{kj} = \frac{g_{lj}}{g_{lk}}.$$

Кроме того,
$$\begin{aligned} g'_{(m+1),j} &= \sum_{i\in B'} g'_{ij} c_i - c_j = \sum_{i\in B_1} (g_{ij} - \frac{g_{ik} g_{lj}}{g_{lk}}) c_i + \frac{g_{lj}}{g_{lk}} c_k - c_j \\ &= \sum_{i\in B} g_{ij} c_i - c_j - \frac{g_{lj}}{g_{lk}} \left(\sum_{i\in B_1} g_{ik} c_i - c_k + g_{lk} c_l \right) = g_{(m+1),j} - \frac{g_{lj}}{g_{lk}} g_{(m+1),k}. \end{aligned}$$

В итоге пересчет таблицы осуществляется известным преобразованием Гаусса. Будем говорить, что таблица $T(B)$ находится в допустимой форме, если $g_{i0} \geq 0$ для $i \in B$, а также, что таблица $T(B)$ находится в оптимальной форме, если $g_{(m+1),j} \leq 0$ для $j = \overline{1,n}$.

Метод симплексных таблиц.

Шаг 1. На итерации имеется таблица $T(B)$ в допустимой форме.

Шаг 2. Если она находится в оптимальной форме, то $x \in D^*$. Иначе определяем индекс
$$k = \operatorname{argmax}\{g_{(m+1),j} \mid j \in \{1,\ldots,n\}\},$$
тогда $g_{(m+1),k} > 0$ и $k \notin B$.

Шаг 3. Определяем множество $B^+ = \{i \in B \mid g_{ik} > 0\}$. Если $B^+ = \varnothing$, то останов. *(целевая функция не ограничена снизу)*

Шаг 4. Выбираем индекс $l \in B$:
$$\theta_0 = \frac{g_{l0}}{g_{lk}} = \min_{i\in B^+} \frac{g_{i0}}{g_{ik}},$$
определяем новый базис $B' = B \setminus \{l\} \cup \{k\}$ и новую таблицу $T(B')$.

В этом варианте не требуется решать вспомогательные системы линейных уравнений и вычислять двойственную опорную точку, поскольку вся требуемая для работы информация содержится в текущей таблице. Таким образом можно решить вторую проблему реализации симплекс-метода.

Отметим, что для решения систем (2.7) и (2.8) на итерации достаточно знать обратную матрицу $A_B^{-1}(m \times m)$. При переходе от B к B' заменяется один столбец, поэтому можно получить $A_{B'}^{-1}$ подобной преобразованию Гаусса формулой пересчета. Это приводит к другому варианту реализации симплекс-метода.

Была указана третья проблема симплекс-метода. А именно, появление вырожденных базисов может привести к его зацикливанию, поскольку не гарантируется перебор базисов без возвращения. Действительно, когда минимум при определении индекса l в формуле

$$\frac{x_l}{g_{lk}} = \min_{i \in B^+} \frac{x_i}{g_{ik}}$$

находится не единственным образом, то сразу несколько компонент опорной точки обращаются в ноль. Это приводит к тому, что на последующих итерациях обращается в ноль значение θ_0, тогда $\langle c, x' \rangle = \langle c, x \rangle$, см. п. b) леммы 2.3. Существуют специальные модификации метода для борьбы с зацикливанием, но они довольно сложны. Например, за счет малых возмущений коэффициентов матрицы A можно всегда сделать задачу невырожденной. Кроме того, можно применить лексикографическое правило выбора индекса l. Пусть J_0 обозначает множество индексов из B^+, на которых достигается минимум отношения

$$\min_{i \in B^+} \frac{x_i}{g_{ik}}.$$

Если J_0 состоит из одного элемента, то это l. Иначе определяем множество индексов J_1 из J_0, на которых достигается минимум отношения

$$\min_{i \in J_0} \frac{g_{i1}}{g_{ik}}.$$

Если J_1 состоит из одного элемента, то это l. Иначе определяем множество индексов J_2 из J_1, на которых достигается минимум отношения

$$\min_{i \in J_1} \frac{g_{i2}}{g_{ik}},$$

и т.д. Такое правило позволяет избежать зацикливания; см. [6, 1].

Однако на практике зацикливание встречается очень редко. Поэтому обычно применяют какое-либо простое правило выбора индекса. Например, в этом случае можно выбирать элемент с наименьшим номером из B^+, среди которых достигается минимум

$$\min_{i \in B^+} \frac{x_i}{g_{ik}}.$$

Пример решения задачи. Рассмотрим пример задачи ЛП:

$$\max \to x_1 - 2x_2 - 3x_3 - x_4,$$

ограничения:

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 15,$$
$$x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 20,$$
$$x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 10,$$
$$x_j \geq 0, \; j = \overline{1,4}.$$

Применим однофазный метод искусственного базиса, получим следующую задачу ЛП в канонической форме:

$$\min \to x_1 - 2x_2 - 3x_3 - x_4 + M(x_5 + x_6 + x_7),$$

ограничения:

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 = 15,$$
$$x_2 + 5x_3 + 2x_4 + x_6 = 20,$$
$$x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_7 = 10,$$
$$x_j \geq 0, \; j = \overline{1,7}.$$

Ход решения с исключением дополнительных переменных дан в таблицах 2.4 и 2.5. Получено решение $x^* = (0, 5/2, 5/2, 5/2)^\top$, $f^* = -15$.

Таблица 2.4: Исключение дополнительных переменных

				1	-2	-3	-1	M	M	M	
	B	C	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	
1	5	M	15	1	2	3	1	1	0	0	
2	6	M	20	0	1	$\boxed{5}$	2	0	0	0	$k=3$
3	7	M	10	1	2	1	1	0	0	1	$l=6$
			0	-1	2	3	1	0	0	0	
			45	2	5	$\boxed{9}$	4	0	0	0	
1	5	M	3	1	$\boxed{7/5}$	0	-1/5	1	-	0	
2	3	-3	4	0	1/5	1	2/5	0	-	0	$k=2$
3	7	M	6	1	9/5	0	3/5	0	-	1	$l=5$
			-12	-1	7/5	0	-1/5	0	-	0	
			9	2	$\boxed{16/5}$	0	2/5	0	-	0	
1	2	-2	15/7	5/7	1	0	-1/7	-	-	0	
2	3	-3	25/7	-1/7	0	1	3/7	-	-	0	$k=4$
3	7	M	15/7	-2/7	0	0	$\boxed{6/7}$	-	-	1	$l=7$
			-15	-2	0	0	0	-	-	0	
			15/7	-2/7	0	0	$\boxed{6/7}$	-	-	0	

Таблица 2.5: Исходная задача

				1	-2	-3	-1
	B	C	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4
1	2	-2	5/2	2/3	1	0	0
2	3	-3	5/2	0	0	1	0
3	4	-1	5/2	-1/3	0	0	1
			-15	-2	0	0	0
			0	0	0	0	0

Глава 3

Транспортная задача

Кроме общей задачи ЛП, существуют различные классы моделей со специальными свойствами, которые позволяют значительно упростить как анализ их свойств, так и методы решения по сравнению с общим случаем. К числу таких задач относится транспортная задача, имеющая значительное число приложений. Приведем вначале примеры содержательных задач, приводящих к транспортной задаче.

Пример 1. Планируются перевозки однородного продукта от m поставщиков к n потребителям. Известно, что запас продукта у i-го поставщика – a_i, $i = \overline{1,m}$, потребность j-го потребителя – b_j, $j = \overline{1,n}$, стоимость перевозки единицы продукта от i-го поставщика к j-му потребителю – c_{ij}. Требуется выполнить заявки потребителей с учетом имеющихся запасов у поставщиков, так чтобы суммарные затраты на перевозку были бы наименьшими. Введем неизвестные x_{ij} – количество перевозимого продукта от i-го поставщика к j-му потребителю. Тогда требуется минимизировать суммарные затраты

$$f(x) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij},$$

при ограничениях

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le a_i,\ i = \overline{1,m},\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \ge b_j,\ j = \overline{1,n}, \\ & x_{ij} \ge 0,\ i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}; \end{aligned}$$

которые определяют множество D, а $X = \mathbb{R}^{mn}$. Поскольку и целевая функция и ограничения линейные (аффинные), то полученная задача является задачей линейного программирования специального вида с mn переменными. Для удобства номер переменной здесь определяется двумя индексами (i,j).

Пример 2. Пусть в данном регионе имеется m провайдеров, которые оказывают сетевые услуги пользователям, причем в заданный период времени имеется

n заявок на сетевые услуги. При реализации j-й заявки надо выполнить объем b_j, пользователи за единицу объема этой заявки готовы заплатить d_j единиц. С другой стороны, мощность i-го провайдера по объемам услуг – a_i, его затраты за единицу объема при выполнении j-й заявки – $\tilde{c}_{ij}$. Требуется выполнить заявки пользователей с учетом имеющихся мощностей провайдеров, так чтобы суммарная прибыль была бы наибольшей. Введем неизвестные x_{ij} – объем сетевых услуг i-го провайдера по j-й заявке. Тогда требуется максимизировать выражение

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(d_j - \tilde{c}_{ij})x_{ij},$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le a_i,\ i = \overline{1,m},\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \ge b_j,\ j = \overline{1,n},$$
$$x_{ij} \ge 0,\ i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}.$$

Обозначим $c_{ij} = \tilde{c}_{ij} - d_j$, тогда решение задачи совпадает с задачей минимизации суммарных убытков

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij},$$

при тех же ограничениях, а это та же транспортная задача.

3.1 Свойства транспортной задачи

Итак, имеем общую транспортную задачу вида

$$\min \to \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij},$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le a_i,\ i = \overline{1,m},\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \ge b_j,\ j = \overline{1,n},$$
$$x_{ij} \ge 0,\ i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}.$$

Для удобства номер переменной здесь определяется двумя индексами (i, j). Если выполнено условие баланса

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j = M, \tag{3.1}$$

то ограничения-неравенства, очевидно, можно заменить на равенства, тогда получим так называемую замкнутую транспортную задачу:

$$\min \to \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}, \tag{3.2}$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i,\ i=\overline{1,m},\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j,\ j=\overline{1,n},$$
$$x_{ij} \geq 0,\ i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}.$$

Для ее решения можно было бы применить обычный симплекс-метод, однако здесь удобнее применить его специализированную версию, которая называется методом потенциалов. Предварительно установим некоторые свойства задачи. Далее считаем, что $a_i, b_j, c_{ij} \geq 0$.

Лемма 3.1.

а) Любая замкнутая транспортная задача имеет решение.

б) Ранг матрицы коэффициентов ограничений-равенств замкнутой транспортной задачи равен $m+n-1$.

Доказательство. а) Действительно, определим $x_{ij} = a_i b_j / M$ для всех $i = \overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$, тогда точка x допустимая, кроме того, целевая функция ограничена снизу нулем.

б) Запишем задачу в виде

$$\min \to \{\langle c,x\rangle \mid Ax=b, x\geq \mathbf{0}\},$$

где $x = (x_{11},\ldots,x_{1n},\ldots,x_{m1},\ldots,x_{mn})^\top$, тогда получаем

$$A = \left(\begin{array}{ccccl}
\overbrace{1,1,\ldots,1,}^{n} & \overbrace{0,0,\ldots,0,}^{n} & \ldots, & \overbrace{0,0,\ldots,0}^{n} & \left.\right\} \\
0,0,\ldots,0, & 1,1,\ldots,1, & \ldots, & 0,0,\ldots,0 & \quad m \\
\ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots & \\
0,0,\ldots,0, & 0,0,\ldots,0, & \ldots, & 1,1,\ldots,1 & \left.\right\} \\
1,0,\ldots,0, & 1,0,\ldots,0, & \ldots, & 1,0,\ldots,0 & \left.\right\} \\
0,1,\ldots,0, & 0,1,\ldots,0, & \ldots, & 0,1,\ldots,0, & \quad n \\
\ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots & \\
0,0,\ldots,1, & 0,0,\ldots,1, & \ldots, & 0,0,\ldots,1 & \left.\right\}
\end{array}\right)$$

Матрица A имеет размеры $(m+n)\times(mn)$. Кроме того, любая строка является линейной комбинацией остальных. Например, 1-я строка есть сумма строк с $(m+1)$-й по $(m+n)$-ю минус сумма строк со 2-й по m-ю, т.е. $\mathrm{rank} A \leq m+n-1$. С другой стороны, если убрать последнюю строку матрицы A, составить столбцы m-й, $2n$-й, и т.д. до mn-го, затем справа приписать первые $n-1$ столбцов, то получим квадратную матрицу B порядка $m+n-1$, которая невырождена, поскольку $\det B =$

1. Поэтому $\mathrm{rank} A = m+n-1$.

$$B = \left(\begin{array}{ccc} \overbrace{1,0,\dots,0,}^{m} & \overbrace{1,1,\dots,1}^{n-1} & \\ 0,1,\dots,0, & 0,0,\dots,0 & m \\ \dots, & \dots & \\ 0,0,\dots,1, & 0,0,\dots,0 & \\ 0,0,\dots,0, & 1,0,\dots,0 & \\ 0,0,\dots,0, & 0,1,\dots,0 & n-1 \\ \dots, & \dots & \\ 0,0,\dots,0, & 0,0,\dots,1 & \end{array}\right)$$

$\square$

Столбцы матрицы A будем также нумеровать двумя индексами, так что

$$A_{ij} = (0,\dots,0, \underset{(i)}{1}, 0,\dots,0,0,\dots,0, \underset{(m+j)}{1}, 0,\dots,0)^\top \in \mathbb{R}^{m+n}.$$

Последовательность пар индексов столбцов $\overline{S} = \{(i_1,j_2),(i_2,j_2),\dots,(i_{s-1},j_s),(i_1,j_s)\}$ будем называть циклом.

Лемма 3.2. *Столбцы $\{A_{ij}\}_{(i,j)\in S}$ линейно независимы тогда и только тогда когда элементы множества S не образуют цикл.*

Доказательство. Достаточность. Пусть элементы S не образуют цикл, но столбцы линейно зависимы. Тогда

$$\sum_{(i,j)\in S} \alpha_{ij} A_{ij} = \mathbf{0}_{m+n}, \quad \exists (i,j)\in S,\ \alpha_{ij}\neq 0,$$

например, пусть $\alpha_{i_1 j_1}\neq 0$. Тогда

$$-\alpha_{i_1 j_1} A_{i_1 j_1} = \sum_{(i,j)\in S_1} \alpha_{ij} A_{ij},$$

определим $S_1 = S\setminus\{(i_1,j_1)\}$, но тогда справа существует ненулевой коэффициент $\alpha_{i_1 j_2}$ (иначе равенства быть не может). Отсюда

$$-\alpha_{i_1 j_1} A_{i_1 j_1} - \alpha_{i_1 j_2} A_{i_1 j_2} = \sum_{(i,j)\in S_2} \alpha_{ij} A_{ij},$$

определяем $S_2 = S_1\setminus(i_1,j_2)$. Далее, существует ненулевой коэффициент $\alpha_{i_2 j_2}$, отсюда

$$-\alpha_{i_1 j_1} A_{i_1 j_1} - \alpha_{i_1 j_2} A_{i_1 j_2} - \alpha_{i_2 j_2} A_{i_2 j_2} = \sum_{(i,j)\in S_3} \alpha_{ij} A_{ij},$$

определяем $S_3 = S_2\setminus(i_2,j_2)$ и т.д.

Через $2k-1$ шагов переноса имеем

$$-\sum_{s=1}^{k}\alpha_{i_sj_s}A_{i_sj_s}-\sum_{s=1}^{k-1}\alpha_{i_sj_{s+1}}A_{i_sj_{s+1}}=\sum_{(i,j)\in S_{2k-1}}\alpha_{ij}A_{ij},$$

определяем $S_{2k-1}=S_{2k-2}\backslash(i_k,j_k)$. Если $i_k\neq i_l$ для некоторого $l\in\left\{\overline{1,k-1}\right\}$ для k, то процесс продолжаем. В конечном итоге перенос закончится, справа будет 0, а слева вектор, у которого компонента с номером i_k ненулевая, что приводит к противоречию. Поэтому обязательно найдется такой номер k, что $i_k=i_l$ для некоторого $l\in\{1,\ldots,k-1\}$. Тогда индексы

$$(i_l,j_{l+1}),(i_{l+1},j_{l+1}),(i_{l+1},j_{l+2}),\ldots,(i_{k-1},j_{k-1}),(i_{k-1},j_k),(i_k,j_k)$$

из S образуют цикл.

Необходимость. Если существует цикл $\overline{S}$ из индексов в S, то $\overline{S}\subseteq S$ и

$$A_{i_1j_2}-A_{i_2j_2}+A_{i_2j_3}-\ldots-A_{i_{s-1}j_{s-1}}+A_{i_{s-1}j_s}-A_{i_1j_s}=\mathbf{0},$$

т.е. столбцы из S линейно зависимы. □

Лемма 3.2 позволяет довольно просто строить базисы.

Теперь укажем двойственную задачу для замкнутой транспортной задачи (3.2):

$$\max\to\sum_{i=1}^{m}u_ia_i+\sum_{j=1}^{n}v_jb_j, \tag{3.3}$$

при ограничениях

$$u_i+v_j\leq c_{ij}, i=\overline{1,m}, j=\overline{1,n}.$$

Удобно разделить двойственные переменные. Напомним, что базисное множество соответствует оптимальной опорной точке, если оно допустимо и двойственно допустимо. Как уже отмечалось, для транспортной задачи вместо прямого применения симплекс-метода удобнее использовать его модификацию, называемую методом потенциалов. Основное отличие состоит в способе выбора номера столбца, выводимого из базиса.

Существует несколько способов нахождения начального базиса для замкнутой транспортной задачи. Наиболее популярен так называемый метод «северо-западного» угла, где в допустимый «северо-западный» угол назначается максимально возможная перевозка, с вычеркиванием выполненных заявок на ввоз / вывоз. Тогда индексы у ненулевых компонент плана перевозок не образуют цикла, так что соответствующие столбцы, согласно лемме 3.2, образуют линейно независимую систему, а поскольку в ней $m+n-1$ элементов (каждая пара содержит по одному новому индексу i или j, и лишь первая содержит два новых), то получен базис B, а также опорная точка.

3.2 Метод потенциалов для транспортной задачи

Метод потенциалов. На итерации имеется допустимая опорная точка $x(B)$ и соответствующий базис B. Решаем систему линейных уравнений

$$u_i + v_j = c_{ij},\ (i,j) \in B, \tag{3.4}$$

находим двойственную опорную точку $(u,v)(B)$. Решение системы (3.4) не представляет труда, поскольку она содержит $m+n$ переменных и $m+n-1$ ограничений, т.е. одна переменная может быть определена произвольно, например, $u_1 = 0$ и потом последовательно вычислены остальные. После этого вычисляем оценки

$$\Delta_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}, \quad i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n},$$

на самом деле достаточно только для $(i,j) \notin B$, поскольку $\Delta_{ij} = 0$ для $(i,j) \in B$.

Если $\Delta_{ij} \leq 0$ для всех $(i,j) \notin B$, то опорная точка x – решение транспортной задачи, поскольку базис B – допустимый и двойственно допустимый, утверждение следует из теоремы 2.4. В противном случае выбираем пару индексов

$$(k,p) = \operatorname{argmax}\left\{\Delta_{ij} \mid (i,j) \notin B\right\}.$$

Если добавить столбец (k,p) к столбцам из базиса B, то они будут линейно зависимы, поэтому из этих индексов можно составить цикл T, обязательно включающий (k,p). Пусть для определенности

$$T = \left\{(i_1,j_2),(i_2,j_2),...,(i_{s-1},j_s),(i_s,j_s)\right\}, \quad \text{причем} \quad (i_1,j_2) = (k,p), i_s = i_1.$$

Отметим, что цикл T содержит четное число пар индексов.

Далее, модифицируем план перевозок: к элементам, стоящим на нечетных местах в цикле T, добавляем параметр θ, а из элементов, стоящих на четных местах, вычитаем θ, после чего полагаем

$$\theta_0 = \min_{t=\overline{2,s}} x_{i_t j_t}$$

и далее

$$x'_{i_{t-1}j_t} = x_{i_{t-1}j_t} + \theta_0,\ x'_{i_t j_t} = x_{i_t j_t} - \theta_0,\ t = \overline{2,s}.$$

После этого полагаем

$$(l,q) = \operatorname{argmin}\left\{x'_{i_t j_t} \mid (i_t,j_t), t = \overline{2,s}\right\},\ B' = B\backslash\{(l,q)\} \cup \{(k,p)\},$$

т.е. пара индексов (l,q) выводится из базиса. Получаем новый базис и опорную точку.

Пример решения транспортной задачи.

Исходные данные: $m = 3, n = 4$.

Таблица 3.1: Коэффициенты

	c_{ij}				a_i
	1	2	3	4	6
c_{ij}	4	3	2	0	8
	0	2	2	1	10
b_j	4	6	8	6	$\boxed{24}$

Таблица 3.2: Метод «северо-западного» угла

4	2	0	0	$\cancel{6}$	2	
0	4	4	0	$\cancel{8}$	$\cancel{4}$	0
0	0	4	6	$\cancel{10}$	$\cancel{6}$	0
$\cancel{4}$	$\cancel{6}$	$\cancel{8}$	$\cancel{6}$			
0	$\cancel{4}$	$\cancel{4}$	0			
	0	0				

Находим начальный базис и план перевозок методом «северо-западного» угла. Получили значение функции $f = 42$, базис

$$B = \{(1,1),(1,2),(2,2),(2,3),(3,3),(3,4)\}.$$

Итерация 1. Находим двойственную опорную точку из системы:

$$\begin{aligned} u_1 + v_1 &= 1 \quad (u_1 = 0) \\ u_1 + v_2 &= 2 \\ u_2 + v_2 &= 3 \\ u_2 + v_3 &= 2 \\ u_3 + v_3 &= 2 \\ u_3 + v_4 &= 1, \end{aligned}$$

потом вычисляем оценки. Имеем $\Delta_{k,p} > 0$, где $(k,p) = (3,1)$. Составляем цикл. Получаем $\theta_0 = 4$, $(l,q) = (2,2)$. Новое значение функции $f' = 34$, базис

$$B' = \{(1,1),(1,2),(3,1),(2,3),(3,3),(3,4)\}.$$

Итерация 2. Находим двойственную опорную точку из системы:

$$\begin{aligned} u_1 + v_1 &= 1 \quad (u_1 = 0) \\ u_1 + v_2 &= 2 \\ u_2 + v_3 &= 2 \\ u_3 + v_3 &= 2 \\ u_3 + v_4 &= 1 \\ u_3 + v_1 &= 0 \end{aligned}$$

Таблица 3.3: Итерация 1: оценки

v_j / u_i	1	2	1	0
0	0	0	-2	-4
1	-2	0	0	1
1	$\boxed{2}$	1	0	0

Таблица 3.4: Итерация 1: цикл

$4^{-\theta}$	$2^{+\theta}$	0	0	6
0	$\boxed{4^{-\theta}}$	$4^{+\theta}$	0	8
$0^{+\theta}$	0	$4^{-\theta}$	6	10
4	6	8	6	

потом вычисляем оценки. Имеем $\Delta_{k,p} > 0$, где $(k,p) = (2,4)$. Составляем цикл. Получаем $\theta_0 = 6$, $(l,q) = (3,4)$. Новое значение функции $f' = 28$, базис

$$B' = \{(1,1),(1,2),(3,1),(2,3),(3,3),(2,4)\}.$$

Итерация 3. Находим двойственную опорную точку из системы:

$$\begin{aligned}
u_1 + v_1 &= 1 \quad (u_1 = 0)\\
u_1 + v_2 &= 2\\
u_2 + v_3 &= 2\\
u_3 + v_3 &= 2\\
u_2 + v_4 &= 0\\
u_3 + v_1 &= 0
\end{aligned}$$

потом вычисляем оценки. Имеем $\Delta_{ij} \le 0$ для всех $(i,j) \notin B$, получено решение транспортной задачи, минимальные затраты $f^* = 28$.

Таблица 3.5: Итерация 2: оценки

v_j / u_i	1	2	3	2
0	0	0	0	-2
-1	-4	-2	0	$\boxed{1}$
-1	0	-1	0	0

Таблица 3.6: Итерация 2: цикл

$\boxed{0^*}$	6	0	0	6
0	0	$8^{-\theta}$	$0^{+\theta}$	8
4	0	$\boxed{0^{*+\theta}}$	$6^{-\theta}$	10
4	6	8	6	

Таблица 3.7: Итерация 3: оценки

v_j / u_i	1	2	3	1
0	0	0	0	-3
-1	-4	-2	0	0
-1	0	-1	0	-1

Таблица 3.8: Решение транспортной задачи

0*	6	0	0	6
0	0	2	6	8
4	0	6	0	10
4	6	8	6	

Укажем, как менялась система линейных уравнений (3.4) для определения двойственной опорной точки.

$$
\begin{array}{ll}
 & u_1+v_1=1 \quad (u_1=0)\\
 & u_1+v_2=2\\
(1)- & u_2+v_2=3\\
 & u_2+v_3=2\\
 & u_3+v_3=2\\
(2)- & u_3+v_4=1\\
(1)+ & u_3+v_1=0\\
(2)+ & u_2+v_4=1.
\end{array}
$$

Обоснование метода потенциалов.

Вначале покажем, что в результате итерации получена новая опорная точка и базис.

1. Пусть B' – не базис, тогда любой цикл $S\subseteq B'$ содержит (k,p), в противном случае B – не базис. Отсюда

$$
A_{k,p}+\sum_{(i,j)\in S\backslash\{(k,p)\}}\alpha_{ij}A_{ij}=\mathbf{0},
$$

при этом $(l,q)\notin S$, поскольку $(l,q)\notin B'$. Но пара индексов (k,p) входит в цикл $T\subseteq B\cup\{(k,p)\}$, при этом $(l,q)\in T$ и

$$
A_{k,p}=\sum_{(i,j)\in T\backslash\{(k,p)\}}\alpha_{ij}A_{ij},
$$

где $\alpha_{l,q}=1$. Из этих соотношений следует, что столбцы с индексами из $T'=S\cup T\backslash\{(k,p)\}\subseteq B$ линейно зависимы, т.е. B – не базис.

2. В цикле T каждый индекс строки и столбца встречается по два раза, причем один раз к соответствующему элементу добавляется θ, а второй – вычитается θ. Поэтому баланс в строках и столбцах не нарушается и ограничения выполняются. Условие неотрицательности x выполняется по выбору θ_0. Таким образом, получаем новую опорную точку.

Остается показать, что базисы в методе не могут повторяться.

3. Отметим, что

$$
\begin{aligned}
f(x') &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x'_{ij}=\sum_{(i,j)\in B\backslash T}c_{ij}x_{ij}+\sum_{t=2}^{s}c_{i_tj_t}(x_{i_tj_t}-\theta_0)\\
&\quad+\sum_{t=3}^{s}c_{i_{t-1},j_t}(x_{i_{t-1},j_t}+\theta_0)+\theta_0c_{kp}\\
&= \sum_{(i,j)\in B}c_{ij}x_{ij}-\theta_0\left(\left(\sum_{t=2}^{s}c_{i_tj_t}-\sum_{t=2}^{s-1}c_{i_tj_{t+1}}\right)-c_{kp}\right),
\end{aligned}
$$

поскольку $u_i + v_j = c_{ij}$ для $(i,j) \in B$, а $T \backslash \{(k,p)\} \subseteq B$. Далее,

$$\begin{aligned} f(x') &= \sum_{(i,j)\in B} c_{ij}x_{ij} - \theta_0 \left(\left(\sum_{t=2}^{s} c_{i_t j_t} - \sum_{t=2}^{s-1} c_{i_t j_{t+1}} \right) - c_{kp} \right) \\ &= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} - \theta_0(u_{i_s} + v_{j_2} - c_{kp}) \\ &= f(x) - \theta_0(u_k + v_p - c_{kp}) = f(x) - \theta_0 \Delta_{kp}. \end{aligned}$$

Напомним, что по определению $i_s = i_1$, $(i_1, j_2) = (k, p)$. Также по определению $\Delta_{kp} > 0$, а если базис B невырожденный, то $\theta_0 > 0$ и тогда базисы не повторяются, так как уменьшается целевая функция.

Теорема 3.1. *Если базисы в транспортной задаче невырождены, то метод потенциалов находит решение за конечное число шагов.*

В том случае, когда получается вырожденный базис, в цикле на четных местах могут появиться несколько равных объемов $x_{ij} = \theta_0$, тогда можно в принципе возвратиться к предыдущему базису, так как не меняется значение целевой функции. Как и в общем случае, существуют специальные модификации метода для борьбы с зацикливанием, но они более сложные. Обычно применяют какое-либо простое фиксированное правило выбора индекса при неоднозначности. Например, для вывода из базиса выбирают пару (l, q), соответствующую потребителю с наименьшим номером.

Следствие 3.1. *Если все величины a_i, b_j – целые числа, то метод потенциалов находит решение задачи в целых числах.*

Доказательство. Начальная опорная точка, найденная методом «северо-западного» угла, целочисленная, на любой итерации θ_0 – целое число, поэтому метод потенциалов строит только целочисленные опорные точки. □

Транспортные задачи с нарушенным условием баланса.

Если условие баланса (3.1) соблюдается, то, как уже отмечалось, ограничения-неравенства в общей транспортной задаче можно заменить на равенства.

Рассмотрим случай, когда в общей транспортной задаче с неравенствами условие баланса нарушено.

1) *Избыток запасов:* $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$.

Вводим дополнительные переменные $x_{1,n+1}, ..., x_{m,n+1}$, соответствующие фиктивному потребителю, при этом полагаем

$$b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j,$$

тогда $c_{i,n+1} \geq 0$ – штраф за избыток на единицу продукта в п. i (производитель), можно считать $c_{i,n+1} = 0$. Получаем эквивалентную исходной транспортную задачу с $m \times (n+1)$ переменными и выполнением условия баланса.

2) *Нехватка запасов:* $\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$.

Вводим дополнительные переменные $x_{m+1,1}, ..., x_{m+1,n}$, соответствующие фиктивному поставщику, при этом полагаем

$$a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i,$$

тогда $c_{m+1,j} \geq 0$ – штраф за недопоставку единицы j-му потребителю, можно считать $c_{m+1,j} = 0$. Получаем эквивалентную исходной транспортную задачу с $(m+1) \times n$ переменными и выполненным условием баланса.

3.3 Задача назначения

Задача назначения состоит в оптимальном назначении n претендентов на n возможных мест по критерию либо минимальных суммарных затрат, либо максимальной суммарной полезности при проведении всех назначений. При этом на одно место может быть назначен только один претендент и соответственно один претендент может быть назначен не более чем на одно место. В первом случае назначение i-го претендента на j-е место влечет затраты c_{ij} (например, зарплата претендента). Данная словесная формулировка задачи выглядит как полностью комбинаторная. В самом деле, обозначим через $\pi = \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$ перестановку индексов множества $\{1, 2, \ldots, n\}$, так что $\pi(i) = s_i$. Все множество таких перестановок обозначим Π, оно содержит $n!$ элементов. Задача будет теперь состоять в выборе перестановки $\pi^* \in \Pi$, которая доставляет минимум выражению

$$c_{1,\pi(1)} + c_{2,\pi(2)} + \ldots + c_{n,\pi(n)} = \sum_{i=1}^{n} c_{i,\pi(i)}$$

по всем $\pi \in \Pi$. Во втором случае назначение i-го претендента на j-е место приносит полезность d_{ij}. Но он полностью сводится к предыдущему, если определить $c_{ij} = -d_{ij}$. Поэтому можно ограничиться только первым случаем. Эта задача кажется довольно сложной, но ее специальные свойства позволяют предложить простые по объему вычислений методы поиска решения.

Прежде всего сведем комбинаторную задачу к задаче линейного булевского программирования. Для этого введем булевские переменные

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i\text{-й претендент назначается на } j\text{-е место}, \\ 0, & \text{иначе}, \end{cases}$$

для $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$. Определим задачу

$$\min \to \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}, \tag{3.5}$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1,\ i = \overline{1,n},\ \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1,\ j = \overline{1,n},$$
$$x_{ij} \in \{0,1\},\ i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}.$$

Нетрудно убедиться, что она в точности соответствует предыдущей постановке. Решение такой задачи общими методами линейного булевского программирования также довольно сложно, но если мы будем учитывать дополнительные свойства этого специального класса задач, то увидим, что данная задача в некотором смысле эквивалентна задаче обычного линейного программирования. Действительно, ослабим условия целочисленности переменных x_{ij} и определим задачу

$$\min \to \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}, \tag{3.6}$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1,\ i = \overline{1,n},\ \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1,\ j = \overline{1,n},$$
$$x_{ij} \geq 0,\ i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}.$$

Отметим, что условие $x_{ij} \geq 0$ в силу других ограничений здесь эквивалентно условию $0 \leq x_{ij} \leq 1$.

Однако задача (3.6) есть частный случай замкнутой транспортной задачи (3.2), где $m = n$, $a_i = b_j = 1$. Теперь решение данной задачи (3.6) можно в принципе найти методом потенциалов, точнее его модификацией, приспособленной к свойствам этой задачи. Тогда, согласно теореме 3.1, через конечное число шагов мы получим точное решение задачи (3.6). Более того, поскольку все величины a_i, b_j здесь являются целыми числами, то метод потенциалов найдет решение в целых числах, как утверждает следствие 3.1. Это значит, что метод потенциалов найдет решение задачи (3.5).

Можно показать, что аналогичным образом для решения задачи (3.5) можно применять соответствующие модификации симплекс-метода. В частности, наиболее эффективным для задачи назначения считается так называемый венгерский метод, который является фактически одним из вариантов симплекс-метода, приспособленного к специфике задачи. Более подробно об этом можно прочитать, например, в [2].

3.4 Транспортная задача в сетевой постановке

В разделах 3.4 и 3.4 были описаны свойства и метод решения для так называемой транспортной задачи в матричной постановке, когда пути от поставщиков к потребителям явно не указываются, а задаются косвенно с помощью затрат c_{ij} на перевозку единицы продукта от i-го поставщика к j-му потребителю. Для этой задачи существует множество модификаций. Например, вместо явных поставщиков и потребителей можно указывать пункты, а функцию i-го пункта задавать его емкостью a_i, т.е. если $a_i > 0$, то это потребитель, если $a_i < 0$ – то поставщик, $i = \overline{1, l}$. Тогда вместо задачи (3.2) можно записать следующую с тем же смыслом:

$$\min \to \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{l} c_{ij} x_{ij}, \tag{3.7}$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ji} - \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \quad i = \overline{1, l},$$
$$x_{ij} \geq 0, \; i = \overline{1, l}, \; j = \overline{1, l}.$$

Отметим, что ограничения определяют баланс потоков товара в каждом пункте и неотрицательность величины потока. По аналогии с задачей (3.3) укажем двойственную задачу для задачи (3.7):

$$\max \to \sum_{i=1}^{l} a_i u_i, \tag{3.8}$$

при ограничениях

$$c_{ij} - u_j + u_i \geq 0, \quad i, j = \overline{1, l}.$$

Здесь u_i обозначает цену перевозимого товара для i-го пункта, а смысл задачи (3.8) состоит в обеспечении наибольшей разницы между стоимостью закупленных и проданных товаров. Ограничения определяют отсутствие прибыли от перевозки товара между каждой парой пунктов.

Более общей и приближенной к реальности является так называемая сетевая транспортная задача или транспортная задача в сетевой постановке, которая учитывает особенности топологии сети транспортных коммуникаций между всеми пунктами и поэтому задается с помощью графов. Подробно такие задачи и методы их решения описаны, например, в [2].

Напомним, что граф задается множеством вершин V, которое будет считаться конечным, множеством дуг $\mathcal{D}$ и отображением, ставящим в соответствие паре вершин i и j элемент $d \in \mathcal{D}$. Если значение отображения для i и j непусто, то определена дуга $d = (i, j)$, для которой вершина i является исходящей (начальной), а j – входящей (конечной). Если значение отображения для i и j пусто, то вершины i и j не связаны дугой. Для данной вершины k мы обозначим через $\mathcal{D}_k^+$ и $\mathcal{D}_k^-$ наборы входящих и исходящих для нее дуг. Последовательность дуг

$$d_1, d_2, ..., d_{k-1},$$

где $d_l = (i_l, i_{l+1})$ или (i_{l+1}, i_l) и любые две соседние дуги имеют смежную вершину, называется *цепью*, соединяющей вершины i_1 и i_k, если $i_1 \notin a_2$ и $i_k \notin a_{k-2}$.

Граф транспортной задачи считается связным, т.е. любые две его вершины можно соединить цепью. Для задания сетевой транспортной задачи каждой дуге графа $d = (i, j) \in \mathcal{D}$ приписывается вес $c_d = c_{ij}$, который определяет затраты на перевозку единицы товара (продукта) из i-й вершины в j-ю по дуге d. Пусть граф имеет n вершин, величина a_i обозначает емкость i-го пункта, т.е. если $a_i > 0$, то это потребитель, если $a_i < 0$ – то поставщик, а если $a_i = 0$ – то перевалочный пункт, $i = \overline{1, n}$. Так же $x_d = x_{ij}$ обозначает объем перевозки продукта по дуге $d = (i, j)$.

Тогда можно записать следующее обобщение задачи (3.7):

$$\min \to \sum_{d \in \mathcal{D}} c_d x_d, \tag{3.9}$$

при ограничениях

$$\begin{aligned} &\sum_{d=(j,i) \in \mathcal{D}_i^+} x_d - \sum_{d=(i,j) \in \mathcal{D}_i^-} x_d = a_i, \quad \forall i \in V, \\ &x_d \geq 0, \ \forall d \in \mathcal{D}. \end{aligned}$$

Здесь несколько по-другому записаны условия баланса потоков товара в каждом пункте. По аналогии с задачей (3.8) укажем двойственную задачу для задачи (3.9):

$$\max \to \sum_{i \in V} a_i u_i, \tag{3.10}$$

при ограничениях

$$c_d - u_j + u_i \geq 0, \quad \forall d = (i, j) \in \mathcal{D}.$$

Здесь u_i также обозначает цену перевозимого товара для i-го пункта, а смысл задачи (3.10) состоит также в обеспечении наибольшей разницы между стоимостью закупленных и проданных товаров при данном плане перевозок. Ограничения определяют отсутствие прибыли от перевозки товара по каждой дуге графа. Для приведенной постановки транспортной задачи можно построить аналог метода потенциалов.

Литература

1. Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. – М.: Наука, 1988.

2. Гольштейн Е.Г., Юдин Д.Б. Задачи линейного программирования транспортного типа. – М: Наука, 1969.

3. Коннов И.В. Нелинейная оптимизация и вариационные неравенства. – Казань: Казанск. ун-т, 2013.

4. Сухарев А.Г., Тимохов А.В., Федоров В.В. Курс методов оптимизации. – М.: Наука, 1986.

5. Таха Х. Введение в исследование операций. – Т.1. – М.: Мир, 1985.

6. Юдин Д.Б., Гольштейн Е.Г. Линейное программирование. – М: Наука, 1969.