Известия вузов. Математика *https://kpfu.ru/science/nauchnye-izdaniya/ivrm*
2024, № 7, с. 9–23 *e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru*

А.Н. АБЫЗОВ, БУЙ ТИЕН ДАТ

СУЩЕСТВЕННО КВАЗИИНЪЕКТИВНЫЕ МОДУЛИ И ИХ ПРЯМЫЕ СУММЫ

Аннотация. Изучены условия, при которых произвольная прямая сумма существенно (квази) инъективных модулей является существенно (квази) инъективным модулем. Получено описание существенно квазиинъективных абелевых групп.

Ключевые слова: существенно квазиинъективный модуль, существенно эндоморфизм-продолжаемый модуль, ADS-модуль, существенно нетеров модуль.

УДК: 512.55

DOI: 10.26907/0021-3446-2024-7-9-23

Введение

В последние несколько десятилетий были систематически изучены модули, инвариантные (соответственно коинвариантные) относительно специальных эндоморфизмов своих инъективных оболочек (соответственно проективных накрытий). Многие результаты, полученные в этом направлении, были отражены в монографиях [1], [2] и в обзорах [3]–[5]. Модули, инвариантные относительно всех эндоморфизмов своих инъективных оболочек, под названием квазиинъективных модулей впервые были введены и исследованы в работе [6]. В этой же работе было показано, что модуль M квазиинъективен в точности тогда, когда каждый гомоморфизм из подмодуля модуля M в модуль M продолжается до некоторого эндоморфизма M. Квазиинъективые абелевы группы были описаны в [7]. Обобщение результатов работы [7] на случай нетеровых наследственных первичных колец, которые не являются примитивными, было получено в работе [8]. Модуль, инвариантный относительно автоморфизмов своей инъективной оболочки, называется автоморфизм-инвариантным. Впервые автоморфизм-инвариантные модули над конечномерными алгебрами были изучены С. Диксоном и К. Фуллером в работе [9]. В статье [10] был доказан нетривиальный результат, согласно которому модуль M является автоморфизм-инвариантным в точности тогда, когда он псевдоинъективен, т. е. каждый мономорфизм из подмодуля модуля M в модуль M продолжается до некоторого эндоморфизма M. Естественным обобщением автоморфизм-инвариантных модулей являются существенно квазинъективные модули, т. е. модули, инвариантные относительно эндоморфизмов своих инъективных оболочек, у которых ядра существенны. Относительная существенная инъективность для модулей была введена в статье [11] при исследовании проблемы о нахождении условий, при которых

Поступила в редакцию 15.08.2023, после доработки 15.09.2023. Принята к публикации 26.09.2023.

Благодарности. Работа Абызова А.Н. выполнена при финансовой поддержке РНФ и Кабинета Министров Республики Татарстан в рамках научного проекта № 23-21-10086.

прямая сумма CS-модулей является CS-модулем. Существенно квазиинъективные модули были изучены в работе [12].

Модуль M называется автоморфизм-продолжаемым (соответственно эндоморфизм-продолжаемым), если для любого подмодуля X модуля M каждый автоморфизм (соответственно эндоморфизм) модуля X продолжается до эндоморфизма модуля M. В работе [13] было доказано, что полуартинов модуль M является автоморфизм-продолжаемым в точности тогда, когда M является автоморфизм-инвариантным модулем. В ([14], предложение 10.22) был доказан аналогичный результат, согласно которому каждый эндоморфизм-продолжаемый полуартиновый модуль является квазиинъективным.

В работе изучаются существенно квазиинъективные модули и близкие к ним классы модулей. В разделе 1 найдены условия на кольцо R, при которых каждый существенно эндоморфизм-продолжаемый правый R-модуль является существенно квазиинъективным. При доказательстве основных результатов из этого раздела используются методы работы [4]. В разделе 2 получены необходимые и достаточные условия, при которых бесконечная прямая сумма существенно квазиинъективных модулей является существенно квазиинъективным модулем. В частности, получен аналог теоремы Фейса, устанвливающий критерий инъективности прямой суммы изоморфных копий инъективного модуля. В разделе 3 работы получено описание существенно квазиинъективных абелевых групп. При доказательстве основного результата из этого раздела важными являются фундаментальные результаты Л.Я. Куликова [15].

Тот факт, что N является подмодулем (соответственно существенным подмодулем) модуля M будем обозначать через $N \leq M$ (соответственно через $N \leq_e M$). Инъективная оболочка модуля M обозначается $E(M)$. В работе используются стандартные понятия и факты теории модулей и теории абелевых групп (см., например, [16]–[20]).

1. Предварительные результаты

Пусть M и N — правые R-модули. Модуль N называется *существенно M-инъективным,* если для каждого подмодуля A модуля M любой гомоморфизм $f \in \mathrm{Hom}_R(A, N)$, у которого $\mathrm{Ker}(f) \leq_e A$, продолжается до некоторого гомоморфизма $f' \in \mathrm{Hom}_R(M, N)$. Модуль M называется *существенно квазиинъективным,* если он является существенно M-инъективным. Если модуль N существенно инъективен относительного каждого правого R-модуля, то такой модуль называется *существенно инъективным.*

Приведем утверждения, которые потребуются в дальнейшем.

Теорема 1 ([12], теорема 2.12)**.** *Пусть M и N — правые R-модули. Тогда модуль N существенно M-инъективен в точности тогда, когда $f(M) \leq N$ для каждого гомоморфизма $f : E(M) \to E(N)$, у которого $\mathrm{Ker}(f) \leq_e E(M)$.*

В частности, модуль M является существенно квазиинъективным в точности тогда, когда $f(M) \leq M$ для каждого $f \in \mathrm{End}_R(E(M))$, у которого $\mathrm{Ker}(f) \leq_e E(M)$.

Модуль, изоморфный подмодулю гомоморфного образа прямых сумм копий правого R-модуля M, называется M-подпорожденным модулем. Полная подкатегория категории всех правых R-модулей, состоящая из всех M-подпорожденных модулей, обозначается через $\sigma[M]$.

Лемма 1 ([21], теорема 2.15)**.** *Пусть M — правый R-модуль. Имеют место следующие утверждения:*

1) *прямое произведение* $\prod_{i\in I} U_i$ *семейства правых* R*-модулей* $\{U_i\}_{i\in I}$ *является существенно* M*-иньективным в точности тогда, когда модуль* U_i *существенно* M *-иньективен для каждого* $i \in I$;
2) *если* $0 \to M'_R \to M_R \to M''_R \to 0$ — *точная последовательность правых* R*-модулей и правый* R*-модуль* U *существенно* M*-иньективен, то* U *существенно* M'*-иньективен и существенно* M''*-иньективен*;
3) *если* $\{U_i\}_{i\in I}$ — *семейство правых* R*-модулей, то модуль* M *существенно* $\bigoplus_{i\in I} U_i$*-иньективен в точности тогда, когда модуль* M *существенно* U_i *-иньективен для каждого* $i \in I$;
4) *если правый* R*-модуль* U *существенно* M*-иньективен, то* U — *существенно* N*-иньективен для каждого* $N \in \sigma[M]$;
5) *модуль* M *существенно инъективен в точности тогда, когда* M *существенно* R_R*-инъективен.*

Следствие 1. Для правых R-модулей M и N следующие условия равносильны:
a) модуль N существенно M-инъективен;
b) модуль N существенно mR-инъективен для каждого $m \in M$.

Модуль M называется *существенно эндоморфизм-продолжаемым,* если для каждого его подмодуля A любой эндоморфизм $f \in \mathrm{End}_R(A)$, у которого $\mathrm{Ker}(f) \le_e A$, продолжается до некоторого эндоморфизма f' модуля M. Несложно заметить, что каждый существенно квазиинъективный модуль является существенно эндоморфизм-продолжаемым.

Модуль M называется *ADS-модулем,* если для каждого его разложения $M = A \oplus B$ модули A и B взаимно инъективны. ADS-модули были введены в работе [22] и в последующем были изучены в ряде работ. Обобщением понятий ADS-модуля и существенно инъективного модуля является понятие LADS-модуля, которое было введено и изучено в недавней работе [23]. Модуль M называется *LADS-модулем,* если для каждого его разложения $M = A \oplus B$ модули A и B взаимно существенно инъективны.

Лемма 2. *Каждый существенно эндоморфизм-продолжаемый модуль является* LADS*-модулем.*

Доказательство. Пусть M — существенно эндоморфизм-продолжаемый модуль, для которого имеет место разложение $M = A \oplus B$. Покажем, что модуль B существенно A-инъективен. Пусть $A_0 \le A$ и $f : A_0 \to B$ — гомоморфизм, у которого $\mathrm{Ker} f \le_e A_0$. Рассмотрим гомоморфизм $g : A_0 \oplus \mathrm{Im}(f) \to A_0 \oplus \mathrm{Im} f$, действующий согласно правилу $g(a+b) = f(a)$, где $a \in A_0$ и $b \in \mathrm{Im}(f)$. Ясно, что $\mathrm{Ker}(g) = \mathrm{Ker} f \oplus \mathrm{Im} f \le_e A_0 \oplus \mathrm{Im} f$. Так как модуль M существенно эндоморфизм-продолжаем, то для некоторого гомоморфизма $g' : M \to M$ имеет место равенство $g' |_{A_0 \oplus \mathrm{Im} f} = g$. Пусть $\pi : A \oplus B \to B$ — естественная проекция. Тогда для гомоморфизма $h = \pi \circ g' |_A$ имеет место равенство $h |_{A_0} = g' |_{A_0} = f$. $\square$

Модуль M называется *существенно нетеровым,* если в нем каждая возрастающая цепь существенных подмодулей стабилизируется. Кольцо R называется существенно нетеровым справа, если модуль R_R существенно нетеров. Согласно ([12], теорема 2.20) кольцо R является существенно нетеровым справа в точности тогда, когда каждая прямая сумма существенно инъективных правых R-модулей существенно инъективна. В статье [24] было показано, что модуль M является существенно нетеровым в точности тогда, когда фактор-модуль $M/\mathrm{Soc}(M)$ нетеров. Также в этой работе было доказано, что каждое самоинъективное справа и существенно нетерово справа (слева) кольцо является квазифробениусовым. В работе [25] этот результат был обобщен на случай непрерывных справа колец. В статье [26] было показано, что каждый существенно нетеровый CS-модуль представим в виде прямой суммы нетрового модуля и полупростого модуля. Следствием этого важного утверждения являются упомянутые результаты из работ [24] и [25].

Если каждый конечно порожденный подмодуль модуля M является существенно нетеровым, то M называется *локально существенно нетеровым* модулем. Несложно заметить, что модуль M является локально существенно нетеровым в точности тогда, когда каждый циклический подмодуль модуля M является существенно нетеровым.

Теорема 2. *Пусть f — эндоморфизм модуля M, у которого $\mathrm{Ker}(f) \leq_e M$. Если A — существенно нетеровый подмодуль модуля M, то $f^n(A) = 0$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$.*

Доказательство. Пусть A — существенно нетеровый подмодуль модуля M. Для каждого $i \in \mathbb{N}$ положим $A_i = A \cap \mathrm{Ker}(f^i)$. Так как $\mathrm{Ker}(f) \leq_e M$, то $A_i \leq_e A$ для каждого $i \in \mathbb{N}$. Тогда имеет место возрастающая цепь $A_1 \leq A_2 \leq \ldots$ существенных подмодулей модуля A. Поскольку модуль A существенно нетеров, то $A_n = A_{n+1} = A_{n+2} = \ldots$ для некоторого натурального числа n.

Предположим, что $f^n(A) \neq 0$ или, что равносильно, $A/A_n \neq 0$. Положим $g = (f^n)\mid_A$. Тогда $\mathrm{Ker}(g) = \mathrm{Ker}(f^n) \cap A = A_n$ и $\mathrm{Im}(g) \cong A/A_n$. Так как $\mathrm{Ker}(f) \leq_e M$, то $\mathrm{Im}(g) \cap \mathrm{Ker}(f) \leq_e \mathrm{Im}(g)$. Пусть $B = g^{-1}(\mathrm{Im}(g) \cap \mathrm{Ker}(f))$. Тогда $B/A_n \leq_e A/A_n$ и, следовательно, поскольку $A/A_n \neq 0$, то $B/A_n \neq 0$. Так как $f^{n+1}(B) = f(f^n(B)) = f(g(B)) = f(\mathrm{Im}(g) \cap \mathrm{Ker}(f)) = 0$, то $B \leq \mathrm{Ker}(f^{n+1}) \cap A = A_{n+1}$, что противоречит равенству $A_n = A_{n+1}$. Таким образом, $f^n(A) = 0$. □

Из ([14], предложение 10.22; [13], теорема 1) вытекает, что следующие импликации в случае таких широких классов колец, как полуартиновы кольца, можно заменить на эквивалентности:

квазиинъективные модули $\Rightarrow$ *эндоморфизм-продолжаемые модули,*

автоморфизм-инвариантные модули $\Rightarrow$ *автоморфизм-продолжаемые модули.*

Далее будут доказаны аналогичные утверждения, согласно которым в случае достаточно широких классов колец, классы существенно квазиинъективных модулей и существенно эндоморфизм-продолжаемых модулей совпадают.

Теорема 3. *Пусть M — существенно локально нетеров модуль. Тогда модуль M является существенно квазиинъективным в точности тогда, когда M — существенно эндоморфизм-продолжаемый модуль.*

Доказательство. Пусть модуль M является существенно эндоморфизм-продолжаемым. Покажем, что M является существенно квазиинъективным. Пусть $f \in \mathrm{End}(E(M))$ и $\mathrm{Ker}(f) \leq_e E(M)$. Положим $N = \{m \in M | f^n(m) \in M$ для каждого $n \in \mathbb{N}\}$. Несложно заметить, что N — наибольший подмодуль модуля M, для которого выполнено условие $f(N) \leq N$. Так как $M \cap \mathrm{Ker}(f) \leq_e M$ и $M \cap \mathrm{Ker}(f) \leq N$, то $N \leq_e M$. Поскольку $\mathrm{Ker}(f) \cap N \leq_e N$ и модуль M существенно эндоморфизм-продолжаем, то для некоторого $f' \in \mathrm{End}(M)$ выполнено равенство $f|_N = f'|_N$. Так как $f'(M \cap \mathrm{Ker}(f)) = f(M \cap \mathrm{Ker}(f)) = 0$, то $\mathrm{Ker}(f') \leq_e M$.

Предположим, что $N \neq M$. Тогда $m \notin N$ для некоторого $m \in M$. По теореме 2 $f'^{n_0}(m) = 0$ для некоторого $n_0 \in \mathbb{N}$. Положим $\overline{M} = M/N$ и $\overline{m} := m + N$. Так как $f'|_N = f|_N$, то для каждого $i \in \mathbb{N}$ выполнено равенство $f'^i|_N = f^i|_N$. Тогда для каждого $i \in \mathbb{N}$ корректно определен гомоморфизм $h_i : \overline{m}R \to E(M)$, действующий согласно правилу $h_i(\overline{m}r) = f^i(mr) - f'^i(mr)$ для каждого $r \in R$. Положим $\overline{V}_i = h_i^{-1}(N) \leq \overline{m}R$ для каждого $i \in \mathbb{N}$. Так как $N \leq_e E(M)$, то $\overline{V}_i \leq_e \overline{m}R$. Пусть $\overline{V} = \overline{V}_1 \cap \overline{V}_2 \cap \ldots \cap \overline{V}_{n_0}$. Тогда $\overline{V} \leq_e \overline{m}R$ и, следовательно, $\overline{m}r \in \overline{V}$ и

$\overline{m}r \neq 0$ для некоторого $r \in R$. Так как для каждого $1 \leq i \leq n_0$ имеет место принадлежность $\overline{m}r \in \overline{V}_i$, то $h_i(\overline{m}r) \in N$ и, следовательно, $f^i(mr) = h_i(\overline{m}r) + f'^i(mr) \in N + f'(M) \leq M$. Поскольку $f^{n_0+k}(mr) = f^k(f^{n_0}(mr)) = f^k(h_{n_0}(\overline{m}r) + f'^{n_0}(mr)) = f^k(h_{n_0}(\overline{m}r)) \in M$ для каждого $k \in \mathbb{N}$, то $f^i(mr) \in M$ для любого $i \in \mathbb{N}$. Тогда $mr \in N$ и, следовательно, $\overline{m}r = 0$. Получили противоречие. Таким образом, $N = M$ и $f(M) \leq M$. Тогда согласно теореме 1 модуль M является существенно квазиинъективным. □

Следствие 2. Пусть M — правый модуль над существенно нетеровым справа кольцом R. Тогда следующие условия равносильны:

a) модуль M является существенно квазиинъективным;
b) модуль M является существенно эндоморфизм-продолжаемым.

Модуль M называется *существенно полуартиновым,* если $\mathrm{Soc}(M/N) \neq 0$ для каждого его собственного существенного подмодуля N. Кольцо R называется существенно полуартиновым справа, если модуль R_R существенно полуартинов.

Лемма 3. *Если R — существенно полуартиново справа кольцо, то всякий модуль правый R-модуль M является существенно полуартиновым.*

Доказательство. Пусть A — собственный существенный подмодуль модуля M и $x \in M \setminus A$. Так как $xR \cap A \leq_e xR$, то $R/I \cong xR/(xR \cap A)$ для некоторого $I \leq_e R_R$. Поскольку кольцо R существенно полуартиново справа, то $\mathrm{Soc}(R_R/I) \neq 0$ и, следовательно, $\mathrm{Soc}(xR/(xR \cap A)) \neq 0$. Таким образом, $\mathrm{Soc}(M/A) \neq 0$. □

Теорема 4. *Для существенно полуартинова модуля M следующие условия эквивалентны:*

1) *модуль M является существенно квазиинъективным;*
2) *модуль M является существенно эндоморфизм-продолжаемым.*

Доказательство. Импликация 1) ⇒ 2) очевидна.

2) ⇒ 1). Пусть f — произвольный эндоморфизм модуля $E(M)$, у которого $\mathrm{Ker}(f) \leq_e E(M)$. Согласно теореме 1 достаточно доказать, что $f(M) \leq M$. Пусть X — сумма всех таких подмодулей A модуля M, что $f(A) \leq A$. Ясно, что $f(X) \leq X$ и X — наибольший подмодуль модуля M с этим свойством. Предположим, что $X \neq M$. Поскольку $\mathrm{Ker}(f) \cap M \leq_e M$ и $\mathrm{Ker}(f) \cap M \leq X$, то $X \leq_e M$. Так как модуль M существенно полуартинов, то существует такой подмодуль Y модуля M, что $X \lneq Y \leq M$ и $Y/X = \mathrm{Soc}(M/X)$. Поскольку M — существенно эндоморфизм-продолжаемый модуль и $\mathrm{Ker}(f) \cap M \leq_e X$, то существует эндоморфизм $g \in \mathrm{End}_R(M)$, для которого выполнено равенство $g|_X = f|_X$. Гомоморфизмы g и $f|_M$ можно рассматривать как элементы абелевой группы $\mathrm{Hom}_R(M, E(M))$. Так как $(f|_M - g)(X) = 0$, то

$$(f|_M - g)(Y) \leq \mathrm{Soc}(M) \leq X \lneq Y.$$

Поскольку $g(X) \leq X$, то существует эндоморфизм $\overline{g} \in \mathrm{End}_R(M/X)$, действующий согласно правилу $\overline{g}(m + X) = g(m) + X$. Тогда

$$\overline{g}(Y/X) = \overline{g}(\mathrm{Soc}(M/X)) \leq \mathrm{Soc}(M/X) = Y/X$$

и, следовательно, $g(Y) \leq Y$. Поскольку

$$f(Y) \leq (f|_M - g)(Y) + g(Y) \leq Y,$$

то получаем противоречие с выбором X. Таким образом, $X = M$. □

Следствие 3. Пусть M — правый модуль над существенно полуартиновым справа кольцом R. Тогда следующие условия равносильны:

a) модуль M является существенно квазиинъективным;
b) модуль M является существенно эндоморфизм-продолжаемым.

Доказательство следует из леммы 3 и теоремы 4. □

Следуя ([4], с. 210), модуль M назовем *сильно эндоморфизм-продолжаемым*, если для каждого его подмодуля X любой гомоморфизм $f : X \to M$, отображающий в себя некоторый существенный подмодуль из X, может быть продолжен до некоторого эндоморфизма $f' : M \to M$.

Теорема 5 ([4], 3.3)**.** *Для правого R-модуля M следующие условия равносильны*:
1) M — *сильно эндоморфизм-продолжаемый модуль*;
2) $f(M) \leq M$ *для любого эндоморфизма* $f \in \mathrm{End}(E(M))$, *переводящего в себя некоторый существенный подмодуль модуля* M;
3) M — *эндоморфизм-продолжаемый и существенно квазиинъективный модуль.*

Из теорем 3–5 непосредственно вытекают следующие утверждения.

Следствие 4. Для существенно полуартинова (нетерова) правого R-модуля M следующие условия эквивалентны:
a) M — эндоморфизм-продолжаемый модуль;
b) M — сильно эндоморфизм-продолжаемый модуль.

Следствие 5. Если R — существенно полуартиново (нетерова) справа кольцо, то следующие условия для правого R-модуля M эквивалентны:
a) M — эндоморфизм-продолжаемый модуль;
b) M — сильно эндоморфизм-продолжаемый модуль.

2. Прямые суммы существенно квазииньективных модулей

Пусть M — правый R — модуль и A, B — правые идеалы кольца R. Правый идеал A кольца R называется M-существенным в B, если для некоторого элемента $m \in M$ выполнены условия $\mathrm{Ann}(m) \leq A$ и $A_R/r(m) \leq_e B/r(m)$. Правый идеал A кольца R называется M-существенным, если он M-существенен в R.

Лемма 4. *Для правых R-модулей M и U следующие условия эквивалентны:*
1) *модуль U_R является существенно M_R-иньективным;*
2) *для любого правого идеала I кольца R и гомоморфизма $f : I \to U$, у которого* $\mathrm{Ker}(f)$ *является M-существенным правым идеалом в I, существует такой гомоморфизм $f' : R \to U$, что $f' |_I = f$;*
3) *для любого существенного правого идеала I кольца R и гомоморфизма $f : I \to U$, у которого* $\mathrm{Ker}(f)$ *является M-существенным правым идеалом кольца R, существует такой гомоморфизм $f' : R \to U$, что $f' |_I = f$.*

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2). Пусть I — правый идеал кольца R и $f : I \to U$ — гомоморфизм, у которого $\mathrm{Ker}(f)$ является M-существенным правым идеалом в I. Тогда для некоторого $m_0 \in M$ выполнены условия $\mathrm{Ann}(m_0) \leq \mathrm{Ker}(f) \leq I$ и $\mathrm{Ker}(f)/\mathrm{Ann}(m_0) \leq_e I/\mathrm{Ann}(m_0)$. Заметим, что имеют место естественные изоморфизмы $m_0R \cong R_R/\mathrm{Ann}(m_0)$ и $I/\mathrm{Ann}(m_0) \cong m_0I$. Пусть $\sigma : I \to m_0I$ — эпиморфизм, действующий согласно правилу с $\sigma(a) = m_0a$ для каждого $a \in I$. Поскольку $\mathrm{Ker}(\sigma) = \mathrm{Ann}(m_0) \leq \mathrm{Ker}(f)$, то существует гомоморфизм $\varphi : m_0I \to U$, для которого выполнено равенство $\varphi \circ \sigma = f$. Так как $\mathrm{Ker}(\varphi) = \sigma(\mathrm{Ker}(f)) = m_0\mathrm{Ker}(f)$ и $\mathrm{Ker}(f)/\mathrm{Ann}(m_0) \leq_e I/\mathrm{Ann}(m_0)$, то $\mathrm{Ker}(\varphi) \leq_e m_0I$. Согласно следствию 1 модуль U существенно m_0R-иньективен. Тогда существует такой гомоморфизм $\varphi' : m_0R \to U$, что

$\varphi' \mid_{m_0 I} = \varphi$. Пусть $\sigma' : R \to m_0 R$ гомоморфизм, действующий согласно правилу $\sigma'(r) = m_0 r$ для каждого $r \in R$. Тогда для гомоморфизма $f' = \varphi' \circ \sigma'$ выполнены равенства

$$f' \mid_I = f' \circ id_I = \varphi' \circ \sigma' \circ id_I = \varphi' \circ id_{m_0 I} \circ \sigma = \varphi \circ \sigma = f.$$

$$\begin{tikzcd}
I \arrow[rr, "\sigma"] \arrow[dr, "f"] \arrow[dd, "id_I"'] & & m_0 I \arrow[dl, "\varphi"'] \arrow[dd, "id_{m_0 I}"] \\
& U & \\
R \arrow[rr, "\sigma'"'] \arrow[ur, "f'"] & & m_0 R \arrow[ul, "\varphi'"']
\end{tikzcd}$$

2) $\Rightarrow$ 1). Пусть $m_0 \in M$. Покажем, что модуль M является $m_0 R$-существенно инъективным модулем. Рассмотрим гомоморфизм $\varphi : L \to U$, где $L \leq m_0 R$ и $\mathrm{Ker}(\varphi) \leq_e L$. Для некоторого правого идеала I кольца R, удовлетворяющему условию $\mathrm{Ann}(m_0) \leq I$, выполнено равенство $m_0 I = L$. Рассмотрим эпиморфизм $\sigma : I \to L$, действующий согласно правилу $\sigma(a) = m_0 a$ для каждого $a \in I$. Ясно, что $\mathrm{Ker}(\sigma) = \mathrm{Ann}(m_0)$. Рассмотрим гомоморфизм $f = \varphi \circ \sigma$. Поскольку $\sigma(\mathrm{Ker}(f)) = \mathrm{Ker}(\varphi)$ и $\mathrm{Ker}(\varphi) \leq_e m_0 I$, то $\mathrm{Ker}(f)/\mathrm{Ann}(m_0) \leq_e I/\mathrm{Ann}(m_0)$. Тогда согласно условию пункта 2) существует такой гомоморфизм $f' : R \to U$, что $f' \mid_I = f$. Рассмотрим эпиморфизм $\sigma' : R \to m_0 R$, действующий согласно правилу $\sigma'(r) = m_0 r$ для каждого $r \in R$. Ясно, что $\mathrm{Ker}(\sigma') = \mathrm{Ann}(m_0) \leq \mathrm{Ker}(f) \leq \mathrm{Ker}(f')$. Тогда существует такой гомоморфизм $\varphi' : m_0 R \to U$, что $\varphi' \circ \sigma' = f'$. Таким образом, $\varphi' \mid_L \circ \sigma = \varphi' \circ id_L \circ \sigma = \varphi' \circ \sigma' \circ id_I = f' \circ id_I = f = \varphi \circ \sigma$. Поскольку σ — эпиморфизм, то $\varphi' \mid_L = \varphi$. Тогда согласно следствию 1 модуль U существенно M-иньективен.

2) $\Rightarrow$ 3). Очевидно.

3) $\Rightarrow$ 2). Пусть I — правый идеал кольца R и $f : I \to U$ — гомоморфизм, для которого существует такой элемент $m_0 \in M$, что $\mathrm{Ann}(m_0) \leq \mathrm{Ker}(f) \leq I$, $\mathrm{Ker}(f)/\mathrm{Ann}(m_0) \leq_e I/\mathrm{Ann}(m_0)$ и $\mathrm{Ker}(f)/\mathrm{Ann}(m_0)$ не является существенным подмодулем модуля $R_R/\mathrm{Ann}(m_0)$. Тогда R_R обладает таким подмодулем T, что $\mathrm{Ann}(m_0) \lneqq T$ и $T/\mathrm{Ann}(m_0) \oplus I/\mathrm{Ann}(m_0) \leq_e R/\mathrm{Ann}(m_0)$. Поскольку $T \cap I = \mathrm{Ann}(m_0)$, то корректно определен гомоморфизм $g : T + I \to U$, действующий согласно правилу $g(x+y) = f(y)$ для произвольных $x \in T$ и $y \in I$. Так как $\mathrm{Ker}(f)/\mathrm{Ann}(m_0) \leq_e I/\mathrm{Ann}(m_0)$, то $\mathrm{Ker}(g)/\mathrm{Ann}(m_0) = (T + \mathrm{Ker}(f))/\mathrm{Ann}(m_0) \leq_e R/\mathrm{Ann}(m_0)$. Согласно пункту 3), существует такой гомоморфизм $g' : R \to U$, что $g' \mid_{(T+I)} = g$. Тогда $g' \mid_I = f$. $\square$

Лемма 5. *Пусть M, N — правые R-модули и для модуля N имеет место разложение $N = \oplus_{i \in I} U_i$, где I — бесконечное множество. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1) *модуль $\bigoplus_{i \in I} U_i$ существенно M-иньективен;*

2) *модуль $\bigoplus_{i \in J} U_i$ существенно M-иньективен для каждого счетного подмножества $J \subseteq I$;*

3) *для каждого $i \in I$ модуль U_i существенно M-иньективен и для всякого подмножества $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ модуля N, удовлетворяющего условиям*

   a) *для каждого $i \in \mathbb{N}$ существует такое $n_i \in I$, что $x_i \in U_{n_i}$,*
   b) *если i, j — различные натуральные числа, то $n_i \neq n_j$,*
   c) *правый идеал $\mathrm{Ann}(\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}})$ является M-существенным,*

в кольце R возрастающая цепь правых идеалов

$$\mathrm{Ann}(\{x_j\}_{j=1,2,\dots}) \leq \mathrm{Ann}(\{x_j\}_{j=2,3,\dots}) \leq \dots$$

стабилизируется;
4) *для каждого* $i \in I$ *модуль* U_i *существенно* M*-иньективен и всякого подмножества* $\{x_i\}_{i\in I}$ *модуля* N, *удовлетворяющего условиям*

a) $x_i \in U_i$ *для каждого* $i \in I$;
b) *правый идеал* $\operatorname{Ann}(\{x_i\}_{i\in I})$ *является* M*-существенным,*

в кольце R *выполнено условие максимальности для правых идеалов, являющихся аннуляторами подмножеств множества* $\{x_i\}_{i\in I}$.

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2). Следует из леммы 1.
2) $\Rightarrow$ 3). Пусть $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ — семейство элементов из модуля $\bigoplus_{i\in I} U_i$, удовлетворяющее условию п. 3). Покажем, что возрастающая цепь

$$\operatorname{Ann}(\{x_j\}_{j=1,2,\dots}) \leq \operatorname{Ann}(\{x_j\}_{j=2,3,\dots}) \leq \dots$$

правых идеалов кольца R стабилизируется. Согласно лемме 1 модуль U_i существенно M-иньективен для каждого $i \in I$. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ положим $A_n = \operatorname{Ann}(\{x_j\}_{j=n+1,n+2,\dots})$. Согласно условию $\operatorname{Ann}(\{x_i\}_{i\in I})/\operatorname{Ann}(m_0) \leq_e R_R/\operatorname{Ann}(m_0)$ для некоторого $m_0 \in M$. Тогда имеется возрастающая цепь правых идеалов кольца R

$$A_0 \leq A_1 \leq A_2 \leq \dots$$

и $A_i/\operatorname{Ann}(m_0) \leq_e R/\operatorname{Ann}(m_0)$ для каждого $i \in \mathbb{N}_0$. Пусть $A = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$. Для каждого $a \in A$ существует такое неотрицательное целое число n_a, что $a \in A_{n_a}$. Тогда $x_n a = 0$ для каждого $n > n_a$ и имеет место гомоморфизм $f : A \to \bigoplus_{j=1}^{\infty} U_{n_j}$, действующий согласно правилу с $a \mapsto \sum_{j=1}^{\infty} x_j a$. Так как $\operatorname{Ker}(f) \geq A_0 \geq \operatorname{Ann}(m_0)$ и $\operatorname{Ker}(f)/\operatorname{Ann}(m_0) \leq_e R/\operatorname{Ann}(m_0)$, то согласно лемме 4 существует такой гомоморфизм $f' : R \to \bigoplus_{j=1}^{\infty} U_{n_j}$, что $f'|_A = f$. Если $f'(1) \in \bigoplus_{j=1}^{k} U_{n_j}$, то $\operatorname{Im}(f) \leq \operatorname{Im}(f') \leq \bigoplus_{j=1}^{k} U_{n_j}$. Следовательно, $x_j A = 0$ для каждого $j > k$. Тогда $\operatorname{Ann}(x_j) \geq A$ для каждого $j > k$ и $A_n \geq A$ для произвольного $n \geq k$. Таким образом, имеют место равенства

$$A = A_k = A_{k+1} = \dots .$$

3) $\Rightarrow$ 4). Пусть $\{x_i\}_{i\in I}$ — подмножество модуля N, удовлетворяющее условиям п. 4). Тогда $\operatorname{Ann}(m_0) \leq \operatorname{Ann}(\{x_i\}_{i\in I})$ и $\operatorname{Ann}(\{x_i\}_{i\in I})/\operatorname{Ann}(m_0) \leq_e R/\operatorname{Ann}(m_0)$ для некоторого $m_0 \in M$. Предположим, что в кольце R существует такая возрастающая цепь правых идеалов $A_1 \lneqq A_2 \lneqq A_3 \lneqq \dots$, что для каждого $k \in \mathbb{N}$ выполнено равенство $A_k = \operatorname{Ann}(\{x_i\}_{i\in I_k})$, где $I_k \subseteq I$. Для каждого $k \in \mathbb{N}$ положим $B_k = \{x \in \{x_i\}_{i\in I} \mid xA_k = 0\}$. Тогда имеет место строго убывающая цепь подмножеств множества $\{x_i\}_{i\in I}$

$$B_1 \gneqq B_2 \gneqq B_3 \gneqq \dots .$$

Для каждого $k \in \mathbb{N}$ выберем такой элемент x_k из модуля N, что $x_k \in B_k \setminus B_{k+1}$. Так как $x_j A_{n+1} = 0$ для каждого $j \geq n+1$, то $\operatorname{Ann}(\{x_j\}_{j=n+1,n+2,\dots}) \geq A_{n+1}$. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ из условия $x_n A_{n+1} \neq 0$ следует, что $\operatorname{Ann}(\{x_j\}_{j=n,n+1,n+2,\dots}) \neq \operatorname{Ann}(\{x_j\}_{j=n+1,n+2,\dots})$. Получено противоречие с условием п. 3).

4) $\Rightarrow$ 1). Пусть $A \leq_e R_R$ и $f : A \to \bigoplus_{i\in I} U_i \leq \prod_{i\in I} U_i$ — гомоморфизм, для которого выполнены условия $\operatorname{Ann}(m_0) \leq \operatorname{Ker}(f)$ и $\operatorname{Ker}(f)/\operatorname{Ann}(m_0) \leq_e R/\operatorname{Ann}(m_0)$, где m_0 — некоторый элемент из модуля M.

Поскольку для каждого $i \in I$ модуль U_i существенно M-иньективен, то согласно лемме 1 модуль $\prod_{i\in I} U_i$ является существенно M-иньективным. Следовательно, для некоторого гомоморфизма $f' : R_R \to \prod_{i\in I} U_i$ имеет место равенство $f' \mid_A = f$.

Для каждого подмножества $J \subseteq I$ положим $x_J = (y_i)_{i \in I}$, где $y_i = x_i$, если $i \in J$, и $y_i = 0$, если $i \in I \setminus J$. Пусть $f'(1) = (x_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} U_i$. Тогда $\mathrm{Ker}(f') = \mathrm{Ann}(x_I)$. Из условия 4) следует, что множество $\mathcal{E} = \{\mathrm{Ann}(x_{I \setminus F}) \mid F$ — конечное подмножество в $I\}$ содержит максимальный элемент $\mathrm{Ann}(x_{I \setminus G})$ относительно частичного порядка включения множеств.

Пусть $a \in A$. Так как $f'(a) = f(a) = (x_i a)_{i \in I} \in \bigoplus_{i \in I} U_i$, то существует такое конечное подмножество $F(a)$ в I, что $G \subseteq F(a)$ и $x_i a = 0$ для каждого $i \in I \setminus F(a)$. Так как $a \in \mathrm{Ann}(x_{I \setminus F(a)})$ и $\mathrm{Ann}(x_{I \setminus F(a)}) = \mathrm{Ann}(x_{I \setminus G})$, то $a \in \mathrm{Ann}(x_{I \setminus G})$. Следовательно, $x_i a = 0$ для каждого $i \in I \setminus G$ и $f(a) \in \bigoplus_{i \in G} U_i$. Таким образом, $f(A) \leq \bigoplus_{i \in G} U_i$. Согласно лемме 1 модуль $\bigoplus_{i \in G} U_i$ существенно M-иньективен. Тогда существует такой гомоморфизм $g : R \to \bigoplus_{i \in G} U_i \leq \bigoplus_{i \in I} U_i$, что $g\,|_A = f$. Следовательно, согласно лемме 4 модуль $\bigoplus_{i \in I} U_i$ является M-иньективным.

□

Следствие 6. Для семейства правых R-модулей $\{M_i\}_{i \in I}$ следующие условия эквивалентны:
a) модуль $\bigoplus_{i \in I} M_i$ существенно иньективен;
b) для каждого $i \in I$ модуль M_i существенно иньективен и для всякого подмножества $\{x_i\}_{i \in I}$ модуля $\bigoplus_{i \in I} M_i$, удовлетворяющего условиям

- $x_i \in M_i$ для каждого $i \in I$;
- $\mathrm{Ann}(\{x_i\}_{i \in I}) \leq_e R_R$,

в кольце R выполнено условие максимальности для правых идеалов, являющихся аннуляторами подмножеств множества $\{x_i\}_{i \in I}$.

Следствие 7. Для семейства правых R-модулей $\{M_i\}_{i \in I}$ следующие условия эквивалентны:
a) модуль $\bigoplus_{i \in I} M_i$ существенно квазииньективен;
b) модуль $\bigoplus_{j \in J} M_j$ существенно квазииньективен для каждого счетного подмножества $J \subseteq I$;
c) M_i существенно M_j-иньективен для каждых $i, j \in I$ и для всякого подмножества $\{x_i\}_{i \in I}$ модуля $\bigoplus_{i \in I} M_i$, удовлетворяющего условиям

- $x_i \in M_i$ для каждого $i \in I$,
- правый идеал $\mathrm{Ann}(\{x_i\}_{i \in I})$ является $\bigoplus_{i \in I} M_i$-существенным,

в кольце R выполнено условие максимальности для правых идеалов, являющихся аннуляторами подмножеств множества $\{x_i\}_{i \in I}$.

Пусть N и M — правые R-модули. Через $\mathrm{Ann}_M(N)$ будем обозначать множество всех правых идеалов A кольца R, для которых выполнены условия

a) $A = \mathrm{Ann}(X)$, где $\varnothing \neq X \subseteq N$;
b) $\mathrm{Ann}(m) \leq A$ и $A_R / \mathrm{Ann}(m) \leq_e R_R / \mathrm{Ann}(m)$ для некоторого элемента $m \in M$.

Теорема 6. *Пусть N и M — правые R-модули. Тогда следующие условия эквивалентны:*
1) модуль $N^{(I)}$ существенно M-иньективен для любого множества индексов I;
2) модуль $N^{(\mathbb{N})}$ существенно M-иньективен;
3) модуль N — существенно M-иньективен и в кольце R выполнено условие максимальности для правых идеалов из множества $\mathrm{Ann}_M(N)$.

Доказательство. Эквивалентность 1) ⇒ 2) и импликация 3) ⇒ 1) непосредственно следуют из леммы 5.

2) $\Rightarrow$ 3). Предположим, что в кольце R существует строго возрастающая цепь правых идеалов $A_1 \subsetneqq A_2 \subsetneqq A_3 \subsetneqq \ldots$ из множества $\mathrm{Ann}_M(N)$. Для каждого $k \in \mathbb{N}$ положим $B_k = \{x \in N \mid xA_k = 0\}$. Тогда имеет место строго убывающая цепь подмножеств модуля N

$$B_1 \supsetneqq B_2 \supsetneqq B_3 \supsetneqq \ldots .$$

Для каждого $k \in \mathbb{N}$ выберем такой элемент x_k из модуля N, что $x_k \in B_k \setminus B_{k+1}$. Так как $x_j A_{n+1} = 0$ для каждого $j \geq n+1$, то $\mathrm{Ann}(\{x_j\}_{j=n+1,n+2,\ldots}) \geq A_{n+1}$. Поскольку $\mathrm{Ann}(\{x_j\}_{j\in\mathbb{N}}) \geq A_1$, то $\mathrm{Ann}(m) \leq \mathrm{Ann}(\{x_j\}_{j\in\mathbb{N}})$ и $\mathrm{Ann}(\{x_j\}_{j\in\mathbb{N}})/\mathrm{Ann}(m) \leq_e R_R/\mathrm{Ann}(m)$ для некоторого элемента $m \in M$. Таким образом, для подмножества $\{x_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ выполнено условие 3) леммы 5 в случае когда $U_i = N$ для каждого $i \in \mathbb{N}$. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ из условия $x_n A_{n+1} \neq 0$ следует, что $\mathrm{Ann}(\{x_j\}_{j=n,n+1,n+2,\ldots}) \neq \mathrm{Ann}(\{x_j\}_{j=n+1,n+2,\ldots})$. Получили противоречие с утверждением леммы 5. □

Следствие 8. Для правого R-модуля M следующие условия эквивалентны:
a) модуль $M^{(I)}$ существенно квазииньективен для любого множества индексов I;
b) модуль $M^{(\mathbb{N})}$ существенно квазииньективен;
c) модуль M существенно квазииньективен и в кольце R выполнено условие максимальности для M-существенных правых идеалов, которые являются аннуляторами подмножеств модуля M.

Следствие 9. Для правого R-модуля M следующие условия эквивалентны:
a) модуль $M^{(I)}$ существенно иньективен для любого множества индексов I;
b) модуль $M^{(\mathbb{N})}$ существенно иньективен;
c) M существенно иньективен и в кольце R выполнено условие максимальности для существенных правых идеалов, которые являются аннуляторами подмножеств модуля M.

Модуль из категории $\sigma[M]$, существенно инъективный относительно любого модуля из $\sigma[M]$, называется существенно инъективным в $\sigma[M]$. Следующее утверждение является аналогом хорошо известного результата, согласно которому модуль M является локально нетеровым в точности тогда, когда всякая прямая сумма M-инъективных модулей является M-инъективным модулем (см., например, [17], 27.3).

Теорема 7. *Для правого R-модуля M следующие условия равносильны:*

1) *модуль M является локально существенно нетеровым;*

2) *всякая прямая сумма существенно M-инъективных модулей является существенно M-инъективным модулем;*

3) *всякая счетная прямая сумма существенно M-инъективных модулей является существенно M-инъективным модулем;*

4) *если модуль N существенно M-инъективен, то для каждого множества I модуль $N^{(I)}$ существенно M-инъективен;*

5) *если модуль N существенно M-инъективен, то модуль $N^{(\mathbb{N})}$ существенно M-инъективен;*

6) *всякая прямая сумма существенно инъективных в категории $\sigma[M]$ модулей существенно инъективна в $\sigma[M]$;*

7) *всякая счетная прямая сумма существенно инъективных в категории $\sigma[M]$ модулей существенно инъективна в $\sigma[M]$;*

8) *всякая прямая сумма попарно изоморфных существенно инъективных в категории $\sigma[M]$ модулей существенно инъективна в $\sigma[M]$;*

9) *всякая счетная прямая сумма попарно изоморфных существенно инъективных в категории $\sigma[M]$ модулей существенно инъективна в $\sigma[M]$.*

Доказательство. Импликации 2) $\Rightarrow$ 3), 2) $\Rightarrow$ 4), 3) $\Rightarrow$ 5), 4) $\Rightarrow$ 5), 5) $\Rightarrow$ 8), 6) $\Rightarrow$ 7), 7) $\Rightarrow$ 9), 8) $\Rightarrow$ 9) очевидны.

1) $\Rightarrow$ 2). Следует из леммы 5.

2) $\Rightarrow$ 6). Следует из условия 4) леммы 1.

9) $\Rightarrow$ 1). Предположим, что модуль M не является локально существенно нетеровым. Тогда в M существует такой элемент m, что в mR имеется бесконечная строго возрастающая цепь существенных mR-подмодулей

$$A_1 \lneqq A_2 \lneqq \dots .$$

Пусть $\varphi : R_R/\operatorname{Ann}(m) \to mR$ — естественный изоморфизм. Тогда в R существуют такая бесконечная строго возрастающая цепь правых идеалов кольца R

$$I_1 \lneqq I_2 \lneqq \dots,$$

что $\operatorname{Ann}(m) \leq I_1$ и $I_k/\operatorname{Ann}(m) \cong A_k$ для каждого $k \in \mathbb{N}$. Так как $I_k/\operatorname{Ann}(m), R/\operatorname{Ann}(m) \in \sigma[M]$, то $R_R/I_k \in \sigma[M]$. Рассмотрим модуль $N = E_M(\bigoplus_{k\in\mathbb{N}} R/I_k)$. Согласно условию 9) модуль $N^{(\mathbb{N})}$ является существенно M-инъективным и, следовательно, согласно лемме 5 для модуля N выполнено условие 3) этой леммы. Для каждого $k \in \mathbb{N}$ положим $x_k = (y_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \bigoplus_{k\in\mathbb{N}} R/I_k \leq N$, где $y_k = 1+I_k$ и $y_i = 0$, если $i \neq k$. Тогда $\operatorname{Ann}(x_k) = \operatorname{Ann}(\{x_j\}_{j=k,k+1,\dots}) = I_k$ для каждого $k \in \mathbb{N}$ и $\operatorname{Ann}(\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}) = I_1$. Так как $\operatorname{Ann}(m) \leq I_1$, $\operatorname{Ann}(\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}})/\operatorname{Ann}(m) = I_1/\operatorname{Ann}(m) \leq_e R_R/\operatorname{Ann}(m)$ и имеет место строго возрастающая цепь

$$\operatorname{Ann}(\{x_j\}_{j=1,2,\dots}) \lneqq \operatorname{Ann}(\{x_j\}_{j=2,3,\dots}) \lneqq \dots,$$

то получаем противоречие с условием 3) леммы 5. Таким образом, модуль M является локально существенно нетеровым.

□

Следствие 10 ([12])**.** Следующие условия эквивалентны для кольца R:

a) R — существенно нетерово справа кольцо;
b) всякая (счетная) прямая сумма существенно иньективных правых R-модулей является существенно иньективной;
c) если N — существенно инъективный правый R-модуль, то модуль $N^{(I)}$ является существенно иньективным для каждого множества индексов I;
d) если N — существенно инъективный правый R-модуль, то модуль $N^{(\mathbb{N})}$ является существенно иньективным.

3. Существенно квазиинъективные абелевы группы

Абелева группа A называется существенно инъективной, если она существенно инъективна как $\mathbb{Z}$-модуль. Аналогично определяются ADS-абелевы группы, LADS-абелевы группы, существенно квазиинъективные и существенно эндоморфизм-продолжаемые абелевы группы. Очевидно, что каждая абелева группа без кручения является существенно квазиинъективной. В настоящем разделе будут описаны существенно квазиинъективные абелевы группы. Также будет показано, что абелева группа является существенно квазиинъективной в точности тогда, когда она является LADS-абелевой группой. Отметим, что ADS-абелевы группы были описаны в недавней работе [27].

Если M — правый R-модуль, то его сингулярным подмодулем называется подмодуль вида $\operatorname{Sing}(M) = \{m \in M \mid \operatorname{ann}(m) \leq_e R_R\}$. Кольцо R называется несингулярным справа, если $\operatorname{Sing}(R_R) = 0$.

Предложение 1. *Пусть R — несингулярное справа кольцо и M — правый R-модуль. Следующие условия равносильны:*

1) *модуль M является существенно инъективным;*
2) *модуль $\mathrm{Sing}(M)$ является инъективным;*
3) *модуль $\mathrm{Sing}(M)$ является существенно инъективным.*

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2). Пусть M — существенно иньективный модуль и $f : A \to \mathrm{Sing}(M)$ — гомоморфизм правых R-модулей, где $A \leq_e R_R$. Так как кольцо R несингулярно справа, то $\mathrm{Ker}(f) \leq_e A$. Для некоторого гомоморфизма $f' \in \mathrm{Hom}_R(R_R, M)$ имеет место равенство $f'_{|A} = f$. Так как $\mathrm{Ker}(f) \leq \mathrm{Ker}(f')$, то $\mathrm{Ker}(f') \leq_e R_R$ и, следовательно, $f'(R) \leq \mathrm{Sing}(M)$. Таким образом, модуль $\mathrm{Sing}(M)$ является инъективным.

2) $\Rightarrow$ 3). Очевидно.

3) $\Rightarrow$ 1). Пусть $\mathrm{Sing}(M)$ — существенно иньективный модуль и $f : A \to M$ — гомоморфизм правых R-модулей, где $A \leq R_R$ и $\mathrm{Ker}(f) \leq_e A$. Тогда $f(A) \leq \mathrm{Sing}(M)$ и, следовательно, для некоторого гомоморфизма $f' \in \mathrm{Hom}_R(R_R, \mathrm{Sing}(M))$ имеет место равенство $f'_{|A} = f$. Таким образом, модуль M является существенно инъективным. □

Если A — абелева группа, то ее периодическую часть будем обозначать через $t(A)$.

Следствие 11. Для абелевой группы A следующие условия эквивалентны:

a) A — существенно иньективная абелева группа;

b) имеет место разложение $A = B \oplus t(A)$, где $t(A)$ — делимая абелева группа и B — абелева группа без кручения.

Из следствия непосредственно вытекает

Лемма 6. *Пусть M — правый модуль над существенно нетеревым справа кольцом R и $M = \oplus_{i \in I} M_i$, где M_i — вполне инвариантный подмодуль модуля M и для каждого $i \in I$. Если $\mathrm{Hom}(N_i, M_j) = 0$ для каждых различных $i, j \in I$ и любого подмодуля N_i модуля M_i, то модуль M существенно квазиинъективен в точности тогда, когда M_i существенно квазиинъективен для каждого $i \in I$.*

Через $\mathbb{P}$ будем обозначать множество всех простых натуральных чисел.

Предложение 2. *Для периодической абелевой группы A следующие условия равносильны:*

1) *A — существенно квазиинъективная абелева группа;*
2) *A — существенно эндоморфизм-продолжаемая абелева группа;*
3) *A — LADS-абелева группа;*
4) *$A = \oplus_{p \in \mathbb{P}} A_p$, где для каждого $p \in \mathbb{P}$ A_p — p-компонента A и либо $A_p \cong \oplus_I \mathbb{Z}_{p^\infty}$, либо $A_p \cong (\oplus_I \mathbb{Z}_{p^n}) \oplus (\oplus_{I'} \mathbb{Z}_{p^{n+1}})$.*

Доказательство. Пусть $A = \oplus_{p \in \mathbb{P}} A_p$ — разложение абелевой группы A на ее примарные компоненты.

Импликации 1) $\Rightarrow$ 2) и 2) $\Rightarrow$ 3) очевидны.

3) $\Rightarrow$ 4). Рассмотрим ненулевую p-примарную компоненту A_p абелевой группы A. Тогда $A_p = D_p \oplus C_p$, где D_p — делимая абелева группа и C_p — редуцируемая абелева группа. Если $D_p \neq 0$ и $C_p \neq 0$, то согласно ([20], следствие 2.3, с. 155) имеют место разложения $D_p = A \oplus A'$ и $C_p = B \oplus B'$, где $A \cong \mathbb{Z}_{p^\infty}$ и $B \cong \mathbb{Z}_{p^n}$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$. Тогда согласно ([23], предложение 3.10) $\mathbb{Z}_{p^\infty} \oplus \mathbb{Z}_{p^n}$ — LADS-абелева группа и, следовательно, абелева группа $\mathbb{Z}_{p^n}$ существенно $\mathbb{Z}_{p^\infty}$-инъективна, что, очевидно, невозможно. Таким образом, либо $D_p = 0$, либо $C_p = 0$. Рассмотрим два случая.

1) $C_p = 0$. В этом случае A_p является делимой абелевой группой и, следовательно, $A_p \cong \oplus\,\mathbb{Z}_{p^\infty}$.

2) $D_p = 0$. Предположим, что A_p содержит прямое слагаемое, изоморфное абелевой группе $\mathbb{Z}_{p^n} \oplus \mathbb{Z}_{p^m}$, где $n - m \geq 2$. Тогда абелева группа $\mathbb{Z}_{p^m}$ существенно $\mathbb{Z}_{p^n}$-инъективна. Рассмотрим гомоморфизм $f : p^{n-m-1}\mathbb{Z}_{p^n} \to \mathbb{Z}_{p^m}$, действующий согласно правилу $a \mapsto pa$. Тогда для некоторого гомоморфизма $f' : \mathbb{Z}_{p^n} \to \mathbb{Z}_{p^m}$ имеет место равенство $f'_{|p^{n-m-1}\mathbb{Z}_{p^n}} = f$. Так как $f(p^{n-m-1}\mathbb{Z}_{p^n}) = f'(\mathbb{Z}_{p^n})$, то $\mathrm{Ker}(f') + p^{n-m-1}\mathbb{Z}_{p^n} = \mathbb{Z}_{p^n}$. Следовательно, $\mathbb{Z}_{p^n} = p^{n-m-1}\mathbb{Z}_{p^n}$, что противоречит условию $n - m \geq 2$. Таким образом, A_p не содержит прямого слагаемого, изоморфного абелевой группе $\mathbb{Z}_{p^n} \oplus \mathbb{Z}_{p^m}$, где $n - m \geq 2$. Так как согласно ([19], следствие 2.5.3) в неограниченной примарной редуцируемой абелевой группе длины циклических прямых слагаемых неограничены в совокупности, то A_p является ограниченной абелевой группой. Тогда из ([19], следствие 2.3.1) и из изложенного выше следует, что $A_p \cong (\oplus_I \mathbb{Z}_{p^n}) \oplus (\oplus_{I'} \mathbb{Z}_{p^{n+1}})$.

4) $\Rightarrow$ 1) В силу леммы 6 достаточно доказать существенную квазиинъективность примарных компонент абелевой группы A. Если $A_p \cong \oplus_I \mathbb{Z}_{p^\infty}$, то существенная квазиинъективность A_p очевидна. Предположим, что $A_p \cong (\oplus_I \mathbb{Z}_{p^n}) \oplus (\oplus_{I'} \mathbb{Z}_{p^{n+1}})$. Так как $E((\oplus_I \mathbb{Z}_{p^n}) \oplus (\oplus_{I'} \mathbb{Z}_{p^{n+1}})) = \oplus_{I \cup I'} \mathbb{Z}_{p^\infty}$, то для каждого эндоморфизма $f : E((\oplus_I \mathbb{Z}_{p^n}) \oplus (\oplus_{I'} \mathbb{Z}_{p^{n+1}})) \to E((\oplus_I \mathbb{Z}_{p^n}) \oplus (\oplus_{I'} \mathbb{Z}_{p^{n+1}}))$, у которого $\mathrm{Ker}(f) \leq_e E(A_p)$, выполнены включения $\mathrm{Im}(f) \leq \oplus_{I \cup I'} \mathbb{Z}_{p^n} \leq (\oplus_I \mathbb{Z}_{p^n}) \oplus (\oplus_{I'} \mathbb{Z}_{p^{n+1}})$. Тогда из теоремы 1 следует существенная инъективность A_p. □

Из предложения 2 и ([28], следствие 23) вытекает

Следствие 12. Для периодической абелевой группы A следующие условия равносильны:

a) A — существенно квазиинъективная абелева группа;
b) A — существенно эндоморфизм-продолжаемая абелева группа;
c) A — LADS-абелева группа;
d) A — CS-абелева группа.

Предложение 3. *Для смешанной абелевой группы A следующие условия равносильны:*

1) A — *существенно инъективная абелева группа;*
2) A — *существенно квазиинъективная абелева группа;*
3) A — *существенно эндоморфизм-продолжаемая абелева группа;*
4) A — LADS-*абелева группа;*
5) $A = B \oplus t(A)$, *где $t(A)$ — делимая абелева группа.*

Доказательство. Импликации 1) $\Rightarrow$ 2), 2) $\Rightarrow$ 3), 3) $\Rightarrow$ 4) очевидны. Импликация 5) $\Rightarrow$ 1) вытекает из следствия 11.

4) $\Rightarrow$ 5). Имеет место разложение $t(A) = D \oplus B$, где D — делимая абелева группа и B — редуцируемая абелева группа. Тогда $A = D \oplus A'$, где A' — непериодическая абелева группа, у которой периодическая часть $t(A')$ редуцируема. Предположим, что $t(A') \neq 0$. Тогда согласно ([15], с. 156, следствие 2.4) имеет место разложение $A' = A_1 \oplus A_2$, где A_1, A_2 — ненулевые абелевы группы. Без ограничения общности можно считать, что A_1 обладает элементом a бесконечного порядка. Тогда согласно условию 2) леммы 1 абелева группа A_2 существенно инъективна относительно $\mathbb{Z}_\mathbb{Z}$ и, следовательно, согласно условию 5) леммы 1 A_2 существенно инъективна. Тогда из редуцируемости $t(A_2)$ и следствия 11 вытекает, что A_2 — абелева группа без кручения. Тогда A_2 обладает элементом b бесконечного порядка и, следовательно, абелева группа A_1 является существенно инъективной. Тогда из редуцируемости $t(A_1)$ и следствия 11 имеем, что A_1 — абелева группа без кручения. Следовательно,

A' — абелева группа без кручения. Получили противоречие. Таким образом, $t(A') = 0$ и, следовательно, $t(A) = D$. □

Из предложений 2, 3 непосредственно вытекает

Теорема 8. *Для абелевой группы A следующие условия равносильны:*

1) *A — существенно квазиинъективная абелева группа;*
2) *A — существенно эндоморфизм-продолжаемая абелева группа;*
3) *A — LADS-абелева группа;*
4) *выполнено одно из следующих условий:*
   a) *A — абелева группа без кручения;*
   b) *A — периодическая абелева группа и $A = \oplus_{p\in\mathbb{P}} A_p$, где для каждого $p \in \mathbb{P}$ A_p — p-компонента A и либо $A_p \cong \oplus_I \mathbb{Z}_{p^\infty}$, либо $A_p \cong (\oplus_I \mathbb{Z}_{p^n}) \oplus (\oplus_{I'} \mathbb{Z}_{p^{n+1}})$;*
   c) *A — смешанная абелева группа и $A = B \oplus t(A)$, где $t(A)$ — делимая абелева группа.*

Литература

[1] Srivastava A.K., Tuganbaev A.A., Asensio P.A.G. *Invariance of Modules under Automorphisms of their Envelopes and Covers* (Cambridge Univ. Press, 2021).

[2] Tuganbaev A.A. *Arithmetical Rings and Endomorphisms* (Walter de Gruyter GmbH, Berlin-Boston, 2019).

[3] Абызов А.Н., Куинь Ч.К., Туганбаев А.А. *Модули, инвариантные относительно автоморфизмов и идемпотентных эндоморфизмов своих оболочек и накрытий*, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. матем. и ее прил. Темат. обз. **159**, 3–45 (2019).

[4] Туганбаев А.А. *Автоморфизм-продолжаемые и эндоморфизм-продолжаемые модули*, Фундамент. и прикл. матем. **21** (4), 175–248 (2016).

[5] Tuganbaev A.A. *Extending and Lifting of Endomorphisms and Automorphisms of Modules over Non-Primitive HNP Rings*, Lobachevskii J. Math. **42** (4), 767–775 (2021).

[6] Johnson R.E., Wong E.T. *Quasi-injective modules and irreducible rings*, J. London Math. Soc. **36** (1), 260–268 (1961).

[7] Килп М.А. *Квазиинъективые абелевы группы*, Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Механ. **3**, 3–4 (1967).

[8] Singh S. *Quasi-injective and quasi-projective modules over hereditary noetherian prime rings*, Can. J. Math. **26** (5), 1173–1185 (1974).

[9] Dickson S.E., Fuller K.R. *Algebras for which every indecomposable right module is invariant in its injective envelope*, Pac. J. Math. **31** (3), 655–658 (1969).

[10] Er N., Singh S., Srivastava A.K. *Rings and modules which are stable under automorphisms of their injective hulls*, J. Algebra **379**, 223–229 (2013).

[11] Santa-Clara C. *Extending modules with injective or semisimple summands*, J. Pure Appl. Algebra **127** (2), 193–203 (1998).

[12] Quynh T.C., Abyzov A.N., Ha N.T.T, Yildirim T. *Modules close to the automorphism-invariant and coinvariant*, J. Algebra Appl. **18** (12), 1950235 (2019).

[13] Tuganbaev A.A. *Automorphism-invariant semi-Artinian modules*, J. Algebra Appl. **16** (2), 1750029 (2017).

[14] Tuganbaev A.A. *Semidistributive rings and modules* (Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1998).

[15] Куликов Л.Я. *К теории абелевых групп произвольной мощности*, Матем. сб. **9 (51)** (1), 165–181 (1941).

[16] Туганбаев А.А. *Теория колец. Арифметические модули и кольца* (МЦНМО, М., 2009).

[17] Wisbauer R. *Foundations of module and ring theory* (Gordon and Breach Sci. Publ., Philadelphia, 1991).

[18] Kasch F. *Modules and rings* (Acad. Press, Inc., London-New York, 1982).

[19] Krilov P.A., Tuganbaev A.A. *Modules over Discrete Valuation Domains* (De Gruyter, Berlin, 2008).

[20] Fuchs L. *Abelian Groups* (Springer Monogr. Math., 2015).

[21] Dung N.V., Huynh D.V., Smith P.F., Wisbauer R. *Extending modules* (Pitman Res. Notes Math. Ser., 1994).

[22] Alahmadi A., Jain S.K., Leroy A. *ADS modules*, J. Algebra **352** (1), 215–222 (2012).

[23] Trang D.T., Koşan T.M., Taşdemir Ö., Quynh T.C. *On modules and rings having large absolute direct summands*, Commun. Algebra (2023) DOI: 10.1080/00927872.2023.2223301.

[24] Dung N.V., Huynh D.V., Wisbauer R. *Quasi-injective modules with ACC or DCC on essential submodules*, Arch. Math. **53**, 252–255 (1989).

[25] Jain S.K., Lopez-Permouth S.R., Rizvi S.T. *Continuous rings with ACC on essentials are Artinian*, Proc. Amer. Math. Soc. **108**, 583–586 (1990).

[26] Camillo V., Mohamed F. Yousif *CS-Modules with ACC or DCC on essential submodules*, Commun. Algebra **19** (2), 655–662 (1991).

[27] Koşan M.T., Žemlička J. *ADS Abelian groups*, J. Algebra Appl., https://doi.org/10.1142/S0219498824501822 (2023).

[28] Kamal M.A., Müller B.J. *The structure of extending modules over noetherian rings*, Osaka J. Math. **25**, 539–551 (1988).

Адель Наилевич Абызов

Казанский федеральный университет,
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия

e-mail: aabyzov@ksu.ru

Буй Тиен Дат

Казанский федеральный университет,
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия,

e-mail: btdat@ctuet.edu.vn

A.N. Abyzov and Bui Tien Dat

Essentially quasi-injective modules and their direct sums

Abstract. Conditions are studied under which an arbitrary direct sum of essentially (quasi-) injective modules is an essentially (quasi-) injective module. A description of essentially quasi-injective Abelian groups is obtained.

Keywords: essentially quasi-injective module, essentially endomorphism-extendable module, ADS-module, essentially Noetherian module.

Adel Nailevich Abyzov

Kazan Federal University,
18 Kremlyovskaya str., Kazan, 420008 Russia,

e-mail: aabyzov@ksu.ru

Bui Tien Dat

Kazan Federal University,
18 Kremlyovskaya str., Kazan, 420008 Russia,

e-mail: btdat@ctuet.edu.vn