КАЗАНСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ПРАКТИКУМ ПО УРАВНЕНИЯМ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Учебное пособие
для студентов, обучающихся по направлению
информационные системы и технологии

Казань — 2024

УДК 519.3

Рекомендовано
учебно–методической комиссией института ВМ и ИТ
Протокол №10 от 29 мая 2024 г.

Научный редактор —
д.ф.-м.н., доцент Е.М. Федотов

Практикум по уравнениям математической физики: учебное пособие/ Л.Л. Глазырина, В.Л. Гнеденкова, О.А. Задворнов, Г.О. Трифонова. – Казань: Казан. ун-т, 2024. – 54 с.

Учебное пособие представляет собой часть практического курса по дисциплине "Уравнения математической физики", читаемого авторами студентам Института вычислительной математики и информационных технологий Казанского (Приволжского) федерального университета. В нем изложены теория, необходимая для освоения практики, по классификации уравнений в частных производных и методу разделения переменных решения краевых задач для гиперболических уравнений, приведены и подробно разобраны задачи по каждой теме. Пособие предназначено для студентов Института вычислительной математики и информационных технологий, обучающихся по направлениям "Информационные системы и технологии", изучающих уравнения математической физики.

УДК 519.3

Оглавление

Пособие написано на основе опыта, накопленного в течении ряда лет ведения лабораторных занятий по уравнениям математической физики в институте вычислительной математики и информационных технологий Казанского федерального университета.

В первой главе рассматривается классификация уравнений в частных производных, приведение к каноническому виду уравнений гиперболических, параболических и эллиптических типов, приводятся примеры как для уравнений с постоянными коэффициентами, так и для уравнений с переменными коэффициентами.

Во второй главе подробно рассматривается метод разделения переменных решения различных краевых задач для гиперболических уравнений в частных производных, содержатся примеры решения основных задач, приводятся примеры для самостоятельного решения.

Предполагается, что читатель знаком со стандартными курсами математического анализа, линейной алгебры, обыкновенных дифференциальных уравнений(Например [2], [4]).

Пособие предназначено для студентов Института вычислительной математики и информационных технологий, обучающихся по направлениям "Информационные системы и технологии".

Многие вопросы, затронутые в пособии, обсуждались с сотрудниками кафедры вычислительной математики Казанского федерального университета. Авторы выражают им свою искреннюю благодарность.

Глава 1

Классификация и приведение к каноническому виду уравнений в частных производных второго порядка

Уравнение с частными производными 2-го порядка с n независимыми переменными $x_1, ..., x_n$(см. [1], [3], [5]), называется соотношение между неизвестной функцией $u(x_1, ..., x_n)$ и ее частными производными до 2-го порядка включительно:

$$F(x_1, ..., x_n, u, u_{x_1}, ..., u_{x_n}, u_{x_1x_1}, ..., u_{x_ix_j}, ...u_{x_nx_n}) = 0, i, j = 1...n.$$

Мы пользуемся следующими обозначениями для производных

$$u_{x_i} = \frac{\partial u}{\partial x_i},\ u_{x_ix_j} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}, \text{и т.д.}$$

Уравнение называется линейным относительно старших производных, если оно имеет вид:

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}u_{x_ix_j} + F_n(x_1, ..., x_n, u, u_{x_1}, ..., u_{x_n}) = 0, \tag{1.1}$$

где $a_{ij}, i, j = 1, ..., n$ могут быть функциями $x_1, ..., x_n$. Если коэффициенты $a_{ij}, i, j = 1, ..., n$ зависят не только от $x_1, ..., x_n$, а являются, подобно F_n , функциями $x_1...x_n$, u, $u_{x_1}, ..., u_{x_n}$, то такое уравнение называется квазилинейным.

Уравнение называется линейным, если оно линейно как относительно старших производных $u_{x_ix_j}, i, j = 1, ..., n$, так и относительно функции u и ее первых производных $u_{x_i}, i = 1, ..., n$:

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}u_{x_ix_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i u_{x_i} + cu + f = 0, \tag{1.2}$$

где $a_{ij}, b_i, c, f, i, j = 1, ..., n$ - функции только $x_1, ..., x_n$. Если коэффициенты уравнения (1.2) не зависят от $x_1, ..., x_n$, то оно представляет собой линейное уравнение с постоянными коэффициентами. Уравнение называется однородным, если $f(x_1, ..., x_n) = 0$.

Запишем квадратичную характеристическую форму уравнения (1.1)

$$Q(\lambda_1, ..., \lambda_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\lambda_i\lambda_j. \tag{1.3}$$

В каждой фиксированной точке $x \in D$ квадратичную форму Q при помощи аффинного преобразования переменных $\lambda_i = \lambda_i(\xi_1, ..., \xi_n), i = 1, 2, \dots n$, можно привести к нормальному(или каноническому) виду

$$Q = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \xi_i^2, \tag{1.4}$$

где коэффициенты α_i принимают значения $1, -1, 0$.

Каноническим видом уравнения (1.1) называется вид, в котором его характеристическая квадратичная форма принимает нормальный (или канонический) вид:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_{x_i x_i} + \bar{F}_n(x_1...x_n, u, u_{x_1}...u_{x_n}) = 0. \tag{1.5}$$

Говорят, что линейное уравнение (1.1) в каждой точке $x \in D$

эллиптическое - если коэффициенты α_i канонической формы все отличны от нуля и одного знака,

гиперболическое - если коэффициенты α_i канонической формы все отличны от нуля и не все одного знака,

параболическое - если хотя бы один коэффициент α_i канонической формы равен нулу(но не все).

Рассмотрим линейное уравнений в частных производных 2-го порядка с 2-мя независимыми переменными

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + F_2(x, y, u, u_x, u_y) = 0. \tag{1.6}$$

Запишем квадратичную характеристическую форму уравнения (1.12)

$$Q(\lambda_1, \lambda_2) = \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}\lambda_i\lambda_j = a_{11}\lambda_1^2 + 2a_{12}\lambda_1\lambda_2 + a_{22}\lambda_2^2 \tag{1.7}$$

и дискриминант квадратичной формы

$$\Delta = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{12}^2 - a_{11}a_{22}. \tag{1.8}$$

Говорят, что линейное уравнение (1.2) в каждой точке $(x, y) \in D$

эллиптическое - если $\Delta < 0$;

гиперболическое - если $\Delta > 0$;

параболическое - $\Delta = 0$.

С помощью преобразования переменных

$$\xi = \varphi(x, y),\ \eta = \psi(x, y),\ u(x, y) = v(\xi, \eta). \tag{1.9}$$

допускающего обратное преобразование, мы получаем новое уравнение, эквивалентное исходному.

Преобразуя производные к новым переменным, получаем:

$$\left.\begin{aligned}
u_x &= v_\xi \xi_x + v_\eta \eta_x,\\
u_y &= v_\xi \xi_y + v_\eta \eta_y,\\
u_{xx} &= v_{\xi\xi}\xi_x^2 + 2v_{\xi\eta}\xi_x\eta_x + v_{\eta\eta}\eta_x^2 + v_\xi\xi_{xx} + v_\eta\eta_{xx},\\
u_{xy} &= v_{\xi\xi}\xi_x\xi_y + v_{\xi\eta}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + v_{\eta\eta}\eta_x\eta_y + v_\xi\xi_{xy} + v_\eta\eta_{xy},\\
u_{yy} &= v_{\xi\xi}\xi_y^2 + 2v_{\xi\eta}\xi_y\eta_y + v_{\eta\eta}\eta_y^2 + v_\xi\xi_{yy} + v_\eta\eta_{yy}.
\end{aligned}\right\} \tag{1.10}$$

Подставляя значения производных из (1.10) в уравнение (1.1), будем иметь:

$$\bar{a}_{11}u_{xx} + 2\bar{a}_{12}u_{xy} + \bar{a}_{22}u_{yy} + \bar{F}(x, y, u, u_x, u_y) = 0, \tag{1.11}$$

где

$$\begin{aligned}
\bar{a}_{11} &= a_{11}\xi_x^2 + 2a_{12}\xi_x\xi_y + a_{22}\xi_y^2,\\
\bar{a}_{12} &= u_\xi\xi_x\eta_x + a_{12}(\xi_x\eta_y + \eta_x\xi_y) + a_{22}\xi_y\eta_y,\\
\bar{a}_{22} &= a_{11}\eta_x^2 + 2a_{12}\eta_x\eta_y + a_{22}\eta_y^2.
\end{aligned}$$

Заметим, что если исходное уравнение (1.1) линейно, то и уравнение (1.11) остается линейным и если преобразование переменных линейно, то $\bar{F} = F$, так как вторые производные от ξ и η в формулах (1.10) равны нулю и $\bar{F}$ не получает дополнительных слагаемых от преобразования вторых производных.

Говорят, что линейное уравнение (1.2) в каждой точке $(x, y) \in D$

эллиптическое - если его канонический вид

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + \bar{b}_1u_\xi + \bar{b}_2u_\eta + \bar{c}u + \bar{f} = 0,$$

гиперболическое - если его канонический вид

$$u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} + \bar{b}_1u_\xi + \bar{b}_2u_\eta + \bar{c}u + \bar{f} = 0,$$

$$u_{\xi\eta} + \bar{b}_1u_\xi + \bar{b}_2u_\eta + \bar{c}u + \bar{f} = 0,$$

параболическое - если его канонический вид

$$u_{\eta\eta} + \bar{b}_1u_\xi + \bar{b}_2u_\eta + \bar{c}u + \bar{f} = 0.$$

1.1 Приведение к каноническому виду уравнений в частных производных второго порядка с постоянными коэффициентами

В этом параграфе мы будем рассматривать уравнения в частных производных 2-го порядка с постоянными коэффициентами и n независимыми переменными.

Алгоритм

1. Приводим характеристическую квадратичную форму к каноническому (нормальному) виду (1.5) (методом выделения полных квадратов). Выписываем матрицу преобразования, осуществляющую этот процесс:

$$\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}, \ \det A \neq 0.$$

2. Находим матрицу Γ замены переменных по закону

$$\Gamma = (A^T)^{-1}.$$

3. Производим замену переменных:

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \cdots & \gamma_{1n} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \cdots & \gamma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{n1} & \gamma_{n2} & \cdots & \gamma_{nn} \end{pmatrix}}_{\Gamma} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Результатом произведенной замены будет канонический вид (1.5) уравнения (1.1).

Задачи для самостоятельной работы можно найти [6], [7], [8]. Рассмотрим некоторые из них.

Примеры. Привести к каноническому виду уравнения.

Пример 1. Рассмотрим уравнение в частных производных

$$u_{xy} - 2u_{xz} + u_{yz} + u_x + \frac{1}{2}u_y = 0.$$

Характеристическая квадратичная форма данного уравнения имеет вид

$$Q(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \lambda_1\lambda_2 - 2\lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3.$$

Приведём её к каноническому виду:

$$Q(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)=\lambda_1\lambda_2-2\lambda_1\lambda_3+\lambda_2\lambda_3=\begin{bmatrix}\nu_1=\lambda_1+\lambda_2\\ \nu_2=\lambda_1-\lambda_2\\ \nu_3=\lambda_3\end{bmatrix}=$$

$$\frac{1}{4}(\nu_1^2-\nu_2^2)-(\nu_1+\nu_2)\nu_3+\frac{1}{2}(\nu_1-\nu_2)\nu_3=\frac{1}{4}(\nu_1^2-\nu_2^2)-\frac{1}{2}\nu_1\nu_3-\frac{3}{2}\nu_2\nu_3=$$

$$=\frac{1}{4}(\nu_1^2-2\nu_1\nu_3+\nu_3^2)-\frac{1}{4}(\nu_2^2+6\nu_2\nu_3+9\nu_3^2)+2\nu_3^2=$$

$$=\frac{1}{4}(\nu_1-\nu_3)^2-\frac{1}{4}(\nu_2+3\nu_3)^2+2\nu_3^2=$$

$$=\frac{1}{4}\chi_2^2-\frac{1}{4}\chi_2^2+2\chi_3^2=\mu-1^2-\mu_2^2+\mu_3^2.$$

$$\begin{cases}\mu_1=\dfrac{1}{2}(\lambda_1+\lambda_2-\lambda_3),\\ \mu_2=\dfrac{1}{2}(\lambda_1-\lambda_2+3\lambda_3),\\ \mu_3=\sqrt{2}\lambda_3,\end{cases}\qquad \text{то есть}\begin{pmatrix}\mu_1\\ \mu_2\\ \mu_3\end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{3}{2}\\ 0&0&\sqrt{2}\end{pmatrix}}_{A}\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \lambda_3\end{pmatrix}.$$

Найдём матрицу замены переменных Γ:

$$\Gamma=(A^T)^{-1}=-\frac{2}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{2}}{2}&-\frac{\sqrt{2}}{2}&0\\ -\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}&0\\ \frac{1}{2}&-1&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&0\\ 1&-1&0\\ -\frac{\sqrt{2}}{2}&\sqrt{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}.$$

Осуществляем замену переменных:

$$\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\\ \zeta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&0\\ 1&-1&0\\ -\frac{\sqrt{2}}{2}&\sqrt{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix},\quad \text{или}\quad \begin{cases}\xi=x+y,\\ \eta=x-y,\\ \zeta=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}x+\sqrt{2}y+\dfrac{\sqrt{2}}{2}z.\end{cases}$$

Чтобы подставить новые переменные в исходное уравнение, положим

$$v(\xi,\eta,\zeta)=u(x,y,z).$$

и найдём $u_x, u_y, u{-}xy, u_{xz}, u_{yz}$ как производные сложной функции: $v(\xi(x,y,z)\ ,\eta(x,y,z)$, $\zeta(x,y,z))$

$$u_x=v_\xi+v_\eta-\frac{\sqrt{2}}{2}v_\zeta,\qquad u_y=v_\xi-v_\eta-\sqrt{2}v_\zeta;$$

$$u_{xy}=v_{\xi\xi}+v_{\xi\eta}\cdot 1-v_{\eta\eta}+\frac{\sqrt{2}}{2}(v_{\xi\zeta}\cdot 2+v_{\eta\zeta}\cdot 2)-\frac{\sqrt{2}}{2}(v_{\zeta\xi}-v_{\zeta\eta}+\sqrt{2}v_{\zeta\zeta})\Rightarrow$$

$$u_{xy}=v_{\xi\xi}-v_{\eta\eta}-v_{\zeta\zeta}+\frac{\sqrt{2}}{2}(v_{\xi\zeta}+3v_{\eta\zeta});$$

$$u_{xz} = \frac{\sqrt{2}}{2}(v_{\xi\zeta} + v_{\eta\zeta}) - \frac{1}{2}v_{\zeta\zeta};$$

$$u_{yz} = \frac{\sqrt{2}}{2}(v_{\xi\zeta} - v_{\eta\zeta}) + v_{\zeta\zeta}.$$

Подставляя найденный производные в левую часть исходного уравнения и приводя подобные, получаем:

$$u_{xy} - 2u_{xz} + u_{yz} + u_x + \frac{1}{2}u_y = \left(v_{\xi\xi} - v_{\eta\eta} - v_{\zeta\zeta} + \frac{\sqrt{2}}{2}(v_{\xi\zeta} + 3v_{\eta\zeta})\right) - 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(v_{\xi\zeta} + v_{\eta\zeta}) -\right.$$

$$\left. - \frac{1}{2}v_{\zeta\zeta}\right) + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}(v_{\xi\zeta} - v_{\eta\zeta}) + v_{\zeta\zeta}\right) + \left(v_\xi + v_\eta - \frac{\sqrt{2}}{2}v_\zeta\right) + \frac{1}{2}\left(v_\xi - v_\eta - \sqrt{2}v_\zeta\right) =$$

$$= v_{\xi\xi} - v_{\eta\eta} + v_{\zeta\zeta} + \frac{3}{2}v_\xi + \frac{1}{2}v_\eta.$$

Ответ: Уравнение имеет гиперболический тип

$$v_{\xi\xi} - v_{\eta\eta} + v_{\zeta\zeta} + \frac{3}{2}v_\xi + \frac{1}{2}v_\eta = 0, \quad \text{где}$$

$$\begin{cases} \xi = x + y, \\ \eta = x - y, \\ \zeta = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}x + \sqrt{2}y + \dfrac{\sqrt{2}}{2}z. \end{cases}$$

Замечание. Поскольку преобразование, приводящее квадратичную форму к нормальному виду, определено неоднозначно, то и замена переменных, приводящая уравнение к каноническому виду, также определена неоднозначно, поэтому правильных ответов много. Но старшие члены при любой замене, приводящей квадратичную форму к каноническому виду, в каноническом виде дифференциального уравнения не меняются, могут измениться только младшие члены.

Пример 2. Рассмотрим уравнение в частных производных:

$$u_{xx} + 2u_{xy} + 5u_{yy} - 32u = 0.$$

Характеристическая квадратичная форма данного уравнения имеет вид

$$Q(\lambda_1, \lambda_2) = \lambda_1^2 + 2\lambda_1\lambda_2 + 5\lambda_2^2 = (\lambda_1 + \lambda_2)^2 + (2\lambda_2)^2 = \mu_1^2 + \mu_2^2, \text{ где}$$

$$\begin{cases} \mu_1 = \lambda_1 + \lambda_2, \\ \mu_2 = 2\lambda_2, \end{cases} \qquad \text{то есть} \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Найдём матрицу замены переменных Г:

$$\Gamma = (A^T)^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Осуществляем замену переменных:

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \text{или} \quad \begin{cases} \xi = x, \\ \eta = \frac{1}{2}(-x+y). \end{cases}$$

Чтобы подставить новые переменные в исходное уравнение, положим

$$v(\xi, \eta) = u(x, y).$$

и найдём $u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}$ как производные сложной функции $v(\xi(x,y), \eta(x,y))$

$$u_x = v_\xi - \frac{1}{2}v_\eta, u_y = \frac{1}{2}v_\eta,$$

$$u_{xx} = v_{\xi\xi} - v_{\xi\eta} + \frac{1}{4}v_{\eta\eta}, u_{xy} = \frac{1}{2}v_{\xi\eta} - \frac{1}{4}v_{\eta\eta}, u_{yy} = \frac{1}{4}v_{\eta\eta}.$$

Подставляя найденный производные в левую часть исходного уравнения и приводя подобные, получаем:

$$u_{xx} + 2u_{xy} + 5u_{yy} - 32u = \left(v_{\xi\xi} - v_{\xi\eta} + \frac{1}{4}v_{\eta\eta}\right) + 2\left(\frac{1}{2}v_{\xi\eta} - \frac{1}{4}v_{\eta\eta}\right) + 5\left(\frac{1}{4}v_{\eta\eta}\right) - 32v =$$

$$= v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta} - 32u.$$

Ответ: Уравнение имеет эллиптический тип,

$$v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta} - 32u = 0, \text{ где}$$

$$\begin{cases} \xi = x, \\ \eta = \frac{1}{2}(-x+y). \end{cases}$$

Пример 3. Рассмотрим уравнение в частных производных:

$$u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} + 9u_x + 9u_y - 9u = 0.$$

Характеристическая квадратичная форма данного уравнения имеет вид

$$Q(\lambda_1, \lambda_2) = \lambda_1^2 - 2\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2^2 = (\lambda_1 - \lambda_2)^2 = \mu_1^2 + 0\mu_2^2, \text{ где}$$

$$\begin{cases} \mu_1 = \lambda_1 - \lambda_2, \\ \mu_2 = \lambda_2, \end{cases} \qquad \text{то есть} \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{A}\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

(В качестве μ_2 можно было взять любую линейную комбинацию λ_1 и λ_2, такую чтобы матрица замены переменных была невырождена.)

Найдём матрицу замены переменных Γ:

$$\Gamma = (A^T)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Осуществляем замену переменных:

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \text{или} \quad \begin{cases} \xi = x, \\ \eta = x + y. \end{cases}$$

Чтобы подставить новые переменные в исходное уравнение, положим

$$v(\xi, \eta) = u(x, y).$$

и найдём $u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}$ как производные сложной функции $v(\xi(x, y), \eta(x, y))$

$$u_x = v_\xi + v_\eta, u_y = v_\eta,$$

$$u_{xx} = v_{\xi\xi} + 2v_{\xi\eta} + v_{\eta\eta}, u_{xy} = v_{\xi\eta} + v_{\eta\eta}, u_{yy} = v_{\eta\eta}.$$

Подставляя найденный производные в левую часть исходного уравнения и приводя подобные, получаем:

$$u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} + 9u_x + 9u_y - 9u =$$
$$= (v_{\xi\xi} + 2v_{\xi\eta} + v_{\eta\eta}) - 2(v_{\xi\eta} + v_{\eta\eta}) + (v_{\eta\eta}) + 9(v_\xi + v_\eta) + 9(v_\eta) - 9v =$$

$$= v_{\xi\xi} + 9v_\xi + 18v_\eta - 9v.$$

Ответ: Уравнение имеет параболический тип,

$$v_{\xi\xi} + 9v_\xi + 18v_\eta - 9v = 0, \text{ где}$$

$$\begin{cases} \xi = x, \\ \eta = x + y. \end{cases}$$

Пример 4. Рассмотрим уравнение в частных производных:

$$2u_{xx} + 3u_{xy} + u_{yy} + 7u_x + 4u_y - 2u = 0.$$

Характеристическая квадратичная форма данного уравнения имеет вид

$$Q(\lambda_1, \lambda_2) = \lambda_1^2 + 3\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2^2 = (\frac{3}{2}\lambda_1 + \lambda_2)^2 - (\frac{1}{2}\lambda_1)^2 = \mu_1^2 - \mu_2^2, \text{ где}$$

$$\begin{cases} \mu_1 = \dfrac{3}{2}\lambda_1 + \lambda_2, \\ \mu_2 = \dfrac{1}{2}\lambda_2, \end{cases} \qquad \text{то есть} \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Найдём матрицу замены переменных Γ:

$$\Gamma = (A^T)^{-1} = -2\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ -1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Осуществляем замену переменных:

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \text{или} \quad \begin{cases} \xi = y, \\ \eta = 2x - 3y. \end{cases}$$

Чтобы подставить новые переменные в исходное уравнение, положим

$$v(\xi, \eta) = u(x, y).$$

и найдём $u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}$ как производные сложной функции $v(\xi(x, y), \eta(x, y))$

$$u_x = 2v_\eta, u_y = v_\xi - 3v_\eta,$$

$$u_{xx} = 4v_{\eta\eta}, u_{xy} = 2v_{\xi\eta} - 6v_{\eta\eta}, u_{yy} = v_{\xi\xi} - 6v_{\xi\eta} + 9v_{\eta\eta}.$$

Подставляя найденный производные в левую часть исходного уравнения и приводя подобные, получаем:

$$u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} + 9u_x + 9u_y - 9u =$$
$$= 2\,(4v_{\eta\eta}) + 3\,(2v_{\xi\eta} - 6v_{\eta\eta}) + (v_{\xi\xi} - 6v_{\xi\eta} + 9v_{\eta\eta}) + 7\,(2v_\eta) + 4\,(v_\xi - 3v_\eta) - 2v =$$

$$= v_{\xi\xi} - v_{\eta\eta} + 4v_\xi + 2v_\eta - 2v.$$

Ответ: Уравнение имеет гиперболический тип,

$$v_{\xi\xi} - v_{\eta\eta} + 4v_\xi + 2v_\eta - 2v = 0, \text{ где}$$

$$\begin{cases} \xi = y, \\ \eta = 2x - 3y). \end{cases}$$

Задачи для самостоятельного решения.

Привести к каноническому виду уравнения

1. $u_{xx} + u_{xy} - 2u_{yy} - 3u_x - 15u_y + 27x = 0.$

2. $9u_{xx} - 6u_{xy} + u_{yy} + 10u_x - 15u_y - 50u + x - 2y = 0.$

3. $u_{xx} + 4u_{xy} + 10u_{yy} - 24u_x + 42u_y + 2(x + y) = 0.$

4. $u_{xx} + 4u_{xy} + 13u_{yy} + 3u_x + 24u_y - 9u + 9(x + y) = 0.$

5. $u_{xx} - 4u_{xy} + 5u_{yy} - 3u_x + u_y + u = 0.$

6. $u_{xx} - 6u_{xy} + 9u_{yy} - u_x + 2u_y = 0.$

1.2 Приведение к каноническому виду уравнений в частных производных 2-го порядка с 2-мя независимыми переменными

Рассмотрим линейное уравнений в частных производных 2-го порядка с 2-мя независимыми переменными

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + F_2(x, y, u, u_x, u_y) = 0. \tag{1.12}$$

Коэффициенты уравнения могут быть как постоянными, так и функциями от переменных x и y. Чтобы привести уравнение (1.12) к каноническому виду составляем характеристическое уравнение

$$a_{11}dy^2 - 2a_{12}dxdy + a_{22}dx^2 = 0. \tag{1.13}$$

Классификацию исходного уравнения (1.12) будем проводить по значениям дискриминанта характеристического уравнения (1.13)

$$\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22}. \tag{1.14}$$

В зависимости от величины дискриминанта Δ уравнение (1.12) будет

а) гиперболическое, если $\Delta > 0$,

б) параболическое, если $\Delta = 0$ и

в) эллиптическое, если $\Delta < 0$.

Изучим все случаи подробнее.

а) Рассмотрим случай гиперболического уравнения. Запишем характеристическое уравнение (1.13) в виде

$$a_{11}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2a_{12}\frac{dy}{dx} + a_{22} = 0. \tag{1.15}$$

Это уравнение квадратное и при $\Delta > 0$ оно имеет два различных решения

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} + \sqrt{\Delta}}{a_{11}}, \frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} - \sqrt{\Delta}}{a_{11}}.$$

Это обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка. Интегрируем эти уравнения, получим два общих интеграла

$$\varphi(x, y) = C, \psi(x, y) = C.$$

В качестве новых переменных для исходного уравнения (1.12) выбираем

$$\begin{cases} \xi = \varphi(x, y), \\ \eta = \psi(x, y). \end{cases}$$

б) В случае параболического уравнения($\Delta = 0$) имеет одно решение характеристического уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12}}{a_{11}}.$$

Интегрируя его получим общий интеграл

$$\varphi(x, y) = C.$$

В качестве переменных для приведения исходного уравнения к каноническому типу выберем $\xi = \varphi(x, y)$, в качестве η можно взять любую функцию $\psi(x, y)$, но с учетом того что Якобиан преобразования

$$\begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix} \neq 0. \tag{1.16}$$

в) В случае эллиптического уравнения, когда $\Delta < 0$, получаем решения характеристического уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} + i\sqrt{-\Delta}}{a_{11}}, \frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} - i\sqrt{-\Delta}}{a_{11}}.$$

После интегрирования получим два комплексно сопряженных общих интеграла

$$\varphi(x, y) \pm i\psi(x, y) = C.$$

В качестве новых переменных в этом случае выбираем действительную и мнимую части, т.е.

$$\begin{cases} \xi = \varphi(x, y), \\ \eta = \psi(x, y). \end{cases}$$

Если в исходном уравнении (1.12) коэффициенты переменные, то надо проанализировать, в какой части плоскости уравнение имеет гиперболический, эллиптический, и параболический типы и приводить его к каноническому виду в каждой из этих частей, в соответствии с вышеизложенными случаями.

Примеры. Следующие уравнения привести к каноническому виду в каждой из областей, где сохраняется тип рассматриваемого уравнения:

Пример 1.

$$u_{xx} - 2\sin x u_{xy} - \cos^2 x u_{yy} - \cos x u_y = 0.$$

Найдем его дискриминант по формуле (1.14), учитываем что $a_{11} = 1, a_{12} = -\sin x, a_{22} = -\cos^2 x$

$$\Delta = \sin^2 x + \cos^2 > 0.$$

Так как $\Delta > 0$, то это уравнение гиперболическое во всей двумерной плоскости. Составим характеристическое уравнение

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2\sin x \frac{dy}{dx} - \cos^2 x = 0.$$

Решим это уравнение

$$\frac{dy}{dx} = -\sin x \pm \sqrt{\Delta} = -\sin x \pm 1.$$

$$dy = (-\sin x \pm 1)dx.$$

Найдем общее решение этого дифференциального уравнения

$$y = \cos x \pm x + c.$$

$$y - \cos x \pm x = c.$$

Тогда, согласно теории, новые переменные для приведения к каноническому виду уравнения данного примера

$$\begin{cases} \xi = y + x - \cos x, \\ \eta = y - x - \cos x. \end{cases}$$

Найдем частные производные из уравнения данного примера (см. (1.10))

$$\left.\begin{aligned} u_y &= v_\xi + v_\eta, \\ u_{xx} &= (1+\sin x)^2 v_{\xi\xi} + 2(\sin^2 x - 1)v_{\xi\eta} + (\sin x - 1)^2 v_{\eta\eta} + \cos x(v_\xi + v_\eta), \\ u_{yy} &= v_{\xi\xi} + 2v_{\xi\eta} + v_{\eta\eta}, \\ u_{xy} &= v_{\xi\xi}(1+\sin x) + 2\sin x v_{\xi\eta} + v_{\eta\eta}(\sin x - 1). \end{aligned}\right\}$$

Подставим производные в исходное уравнение

$$(1+\sin x)^2 v_{\xi\xi} + 2(\sin^2 x - 1)v_{\xi\eta} + (\sin x - 1)^2 v_{\eta\eta} + \cos x(v_\xi + v_\eta) - 2\sin x(1+\sin x)v_{\xi\xi} - 4\sin^2 x v_{\xi\eta} -$$
$$-2\sin x(\sin x - 1)v_{\eta\eta} - \cos^2 x v_{\xi\xi} - 2\cos^2 x v_{\xi\eta} - \cos^2 x v_{\eta\eta} - \cos x(v_\xi + v_\eta) = 0.$$

Соберем подобные члены при $v_{\xi\xi}, v_{\xi\eta}, v_{\eta\eta}$

при $v_{\xi\xi}$**:** $1 + 2\sin x + \sin^2 x - 2\sin x - 2\sin^2 x - \cos^2 x = 0,$

при $v_{\eta\eta}$**:** $\sin^2 x - 2\sin x + 1 - 2\sin^2 x + 2\sin x - \cos^2 x = 0,$

при $v_{\xi\eta}$**:** $2\sin^2 x - 2 - 4\sin^2 x - 2\cos^2 x = -4.$

Тогда

$$-4v_{\xi\eta} = 0.$$

И можно записать

Ответ: Канонический вид уравнения на всей области R^2 имеет гиперболический тип

$$v_{\xi\eta} = 0.$$

При этом

$$\begin{cases} \xi = y + x - \cos x, \\ \eta = y - x - \cos x. \end{cases}$$

Пример 2. Рассмотрим уравнение в частных производных

$$x^2 u_{xx} + 2xyu_{xy} + y^2 u_{yy} - 2yu_x + ye^{\frac{y}{x}} = 0.$$

Найдем его дискриминант по формуле (1.14), учитываем что $a_{11} = x^2, a_{12} = xy, a_{22} = y^2$

$$\Delta = x^2y^2 - x^2y^2 = 0.$$

Так как $\Delta = 0$, то это уравнение параболическое во всей двумерной плоскости. Составим характеристическое уравнение

$$x^2 \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2xy\frac{dy}{dx} + y^2 = 0.$$

$$(x\frac{dy}{dx} - y)^2 = 0.$$

Отсюда $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$. Значит имеет одно дифференциальное уравнение. Найдем его общее решение $\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$, $\ln y = \ln x + \ln C$, после потенцирования, получим $\frac{y}{x} = c$. За новую переменную ξ возьмем $\xi = \frac{y}{x}$. η выберем сами так, чтобы Якобиан преобразования был ненулевой, например, $\eta = y$.

Найдем частные производные из уравнения данного примера (см. (1.10))

$$\left.\begin{aligned} u_x &= -\frac{y}{x^2}v_\xi, \\ u_{xx} &= \frac{y^2}{x^4}v_{\xi\xi} + \frac{2y}{x^3}v_\xi, \\ u_{yy} &= \frac{1}{x^2}v_{\xi\xi} + \frac{2}{x}v_{\xi\eta} + v_{\eta\eta}, \\ u_{xy} &= -\frac{y}{x^3}v_{\xi\xi} - \frac{y}{x^2}v_{\xi\eta} - \frac{1}{x^2}v_\xi. \end{aligned}\right\}$$

Подставим производные в исходное уравнение

$$x^2\left(\frac{y^2}{x^4}v_{\xi\xi} + \frac{2y}{x^3}v_\xi\right) + 2xy\left(-\frac{y}{x^3}v_{\xi\xi} - \frac{y}{x^2}v_{\xi\eta} - \frac{1}{x^2}v_\xi\right) + y^2\left(\frac{1}{x^2}v_{\xi\xi} + \frac{2}{x}v_{\xi\eta} + v_{\eta\eta}\right) + 2y\frac{y}{x^2}v_\xi + ye^{\frac{y}{x}} =$$

$$= y^2 v_{\eta\eta} + \frac{2y^2}{x^2}v_\xi + ye^{\frac{y}{x}} = 0.$$

Поделим это уравнение на y^2 , получим

$$v_{\eta\eta} + \frac{2}{x^2}v_\xi + \frac{1}{y}e^{\frac{y}{x}} = 0.$$

Заменим x и y на ξ и η, учитывая, что $\xi = \frac{y}{x}$, $\eta = y$, тогда $x = \frac{y}{\xi} = \frac{\eta}{\xi}$ и можно записать

Ответ: Канонический вид уравнения на всей области R^2 имеет параболический тип

$$v_{\eta\eta} + 2\frac{\xi^2}{\eta^2}v_\xi + \frac{1}{\eta}e^\xi = 0.$$

При этом

$$\begin{cases} \xi = \dfrac{y}{x}, \\ \eta = y. \end{cases}$$

Пример 3.

$$(1 + x^2)^2 u_{xx} + u_{yy} + 2x(1 + x^2)u_x = 0.$$

Найдем его дискриминант по формуле (1.14), учитываем что $a_{11} = (1 + x^2)^2, a_{12} = 0, a_{22} = 1$

$$\Delta = 0 - (1 + x^2)^2 < 0.$$

Так как $\Delta < 0$, то это уравнение 'эллиптического типа во всей двумерной плоскости. Составим характеристическое уравнение

$$(1 + x^2)^2 \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1 = 0,$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = -\frac{1}{(1 + x^2)^2},$$

$$\frac{dy}{dx} = \pm i\frac{1}{1 + x^2}.$$

Найдем общее решение дифференциальных уравнений

$$dy = \pm i\frac{1}{1 + x^2}dx.$$

Получим

$$y = \pm i \arctan x + c, y \pm i \arctan x = c.$$

Выберем новые переменные

$$\begin{cases} \xi = y, \\ \eta = \arctan x. \end{cases}$$

Перейдем в исходном уравнении к новым переменным. Найдем частные производные из уравнения данного примера (см. (1.10))

$$\left.\begin{aligned} u_x &= \frac{1}{1 + x^2}v_\eta, \\ u_{xx} &= \frac{1}{(1 + x^2)^2}v_{\eta\eta} - \frac{2x}{(1 + x^2)^2}v_\eta, \\ u_{yy} &= v_{\xi\xi}. \end{aligned}\right\}$$

Подставим производные в исходное уравнение

$$(1 + x^2)^2 \left(\frac{1}{(1 + x^2)^2}v_{\eta\eta} - \frac{2x}{(1 + x^2)^2}v_\eta\right) + v_{\xi\xi} + 2x(1 + x^2)\frac{1}{1 + x^2}v_\eta =$$

$$= v_{\eta\eta} - 2xv_\eta + v_{\xi\xi} + 2xv_\eta = 0.$$

Можно записать

Ответ: Канонический вид уравнения на всей области R^2 имеет эллиптический тип

$$v_{\eta\eta} + v_{\xi\xi} = 0.$$

При этом

$$\begin{cases} \xi = y, \\ \eta = \arctan x. \end{cases}$$

Пример 4. Рассмотрим уравнение

$$5xu_{xx} - 4yu_{yy} = 0.$$

Найдем его дискриминант по формуле (1.14), учитываем что $a_{11} = 5x$,$a_{12} = 0$, $a_{22} = -4y$

$$\Delta = 0 + 20xy.$$

В зависимости от x и y знак и величина дискриминанта изменяются в разных частях плоскости.

Рассмотрим разные случаи.

1. $\Delta = 20xy > 0$.

   В этом случае знаки x и y одинаковые:

   а) $x > 0$, $y > 0$,

   б) $x < 0$, $y < 0$,

   и мы имеем уравнение гиперболического типа.

2. $\Delta = 20xy = 0$.

   В этом случае

   а) $x = 0$, $y \neq 0$,

   б) $x \neq 0$, $y = 0$,

   в) $x = 0$, $y = 0$,

   и мы имеем уравнение параболического типа.

   При $x = 0$, $y = 0$ уравнение вырождается.

3. $\Delta = 20xy < 0$.

   В этом случае знаки x и y имеют разные знаки:

   а) $x > 0$, $y < 0$,

б) $x < 0$, $y > 0$,

и мы имеем уравнение эллиптического типа.

То есть можно всю плоскость разбить на части, в каждой из которых уравнение не меняет свой тип.

Рассмотри 1. случай, выберем а).

Составим характеристическое уравнение

$$5x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 4y = 0.$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{4y}{5x},$$

$$\frac{dy}{dx} = \pm\frac{2\sqrt{y}}{\sqrt{5}\sqrt{x}}.$$

Найдем общее решение дифференциальных уравнений

$$\frac{dy}{2\sqrt{y}} = \pm\frac{dx}{\sqrt{5}\sqrt{x}}.$$

Проинтегрировав, получим

$$\sqrt{y} \pm \frac{2}{\sqrt{5}}\sqrt{x} = c.$$

Выберем новые переменные

$$\begin{cases} \xi = \sqrt{y} + \dfrac{2}{\sqrt{5}}\sqrt{x}, \\ \eta = \sqrt{y} - \dfrac{2}{\sqrt{5}}\sqrt{x}. \end{cases}$$

Перейдем в исходном уравнении к новым переменным. Найдем частные производные из уравнения данного примера (см. (1.10))

$$\left.\begin{aligned} u_{xx} &= \frac{1}{5}x^{-1}v_{\xi\xi} - \frac{2}{5}x^{-1}v_{\xi\eta} + \frac{1}{5}x^{-1}v_{\eta\eta} - \frac{1}{2\sqrt{5}}x^{-\frac{3}{2}}(v_\xi - v_\eta), \\ u_{yy} &= \frac{1}{4}y^{-1}v_{\xi\xi} + \frac{1}{2}y^{-1}v_{\xi\eta} + \frac{1}{4}y^{-1}v_{\eta\eta} - \frac{1}{4}y^{-\frac{3}{2}}(v_\xi + v_\eta). \end{aligned}\right\}$$

Подставим производные в исходное уравнение

$$5x\frac{1}{5}x^{-1}\left(v_{\xi\xi} - 2v_{\xi\eta} + v_{\eta\eta}\right) - \frac{\sqrt{5}}{2}x^{-\frac{1}{2}}(v_\xi - v_\eta) - 4y\frac{1}{4}y^{-1}\left(v_{\xi\xi} + 2v_{\xi\eta} + v_{\eta\eta}\right) - y^{-\frac{1}{2}}(v_\xi + v_\eta) = 0.$$

После преобразований получим

$$v_{\xi\eta} + \frac{\sqrt{5}}{8}x^{-\frac{1}{2}}(v_\xi - v_\eta) + \frac{1}{4}y^{-\frac{1}{2}}(v_\xi + v_\eta) = 0.$$

Выразим $x^{\frac{1}{2}}$ и $y^{\frac{1}{2}}$ через ξ и η

$$x^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{5}}{4}(\xi - \eta),\ x^{-\frac{1}{2}} = \frac{4}{\sqrt{5}(\xi - \eta)},$$

$$y^{\frac{1}{2}} = \frac{\xi+\eta}{2},\ y^{-\frac{1}{2}} = \frac{2}{\xi+\eta}.$$

Окончательно

$$v_{\xi\eta} + \frac{2}{\xi-\eta}(v_\xi - v_\eta) + \frac{2}{2(\xi+\eta)}(v_\xi + v_\eta) = 0 -$$

Канонический вид гиперболического уравнения.

В случае б) получим тоже самое.

Рассмотрим случай 2.

а) $x = 0$, $y \neq 0$, подставляя x и y в исходное уравнение, получим канонический вид $4yu_{yy} = 0$ или $u_{yy} = 0$.

б) $x \neq 0$, $y = 0$, из уравнения сразу получим канонический вид $5xu_{xx} = 0$ или $u_{xx} = 0$.

в) $x = 0$, $y = 0$, Получим $0 = 0$ и уравнения в частных производных нет. В этом случае говорят, что уравнение в точке (0,0) вырождается.

Рассмотрим случай 3, возьмем вариант а).

Составим характеристическое уравнение

$$5x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 4y = 0.$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{4y}{5x} = -\frac{4(-y)}{5x},$$

$$\frac{dy}{dx} = \pm i\frac{2\sqrt{-y}}{\sqrt{5}\sqrt{x}}.$$

Найдем общее решение дифференциальных уравнений

$$\frac{dy}{2\sqrt{-y}} = \pm i\frac{dx}{\sqrt{5}\sqrt{x}}.$$

Проинтегрировав, получим

$$-\sqrt{-y} \pm i\frac{2}{\sqrt{5}}\sqrt{x} = c.$$

В качестве новых переменных в этом случае выбираем действительную и мнимую части

$$\begin{cases} \xi = -\sqrt{-y}, \\ \eta = \dfrac{dx}{\sqrt{5}\sqrt{x}}. \end{cases}$$

Заметим, что под знаком квадратного корня должен стоять $-y$, так как под корнем должна стоять функция больше 0, а $y < 0$. Это надо учитывать при интегрировании и дифференцировании. Перейдем в исходном уравнении к новым переменным.

Найдем частные производные из уравнения данного примера (см. (1.10))

$$\left.\begin{aligned} u_{xx} &= \frac{1}{5}x^{-1}v_{\eta\eta} - \frac{1}{2\sqrt{5}}x^{-\frac{3}{2}}v_{\eta}, \\ u_{yy} &= \frac{1}{4}(-y)^{-1}v_{\xi\xi} - \frac{1}{4}(-y)^{-\frac{3}{2}}v_{\xi}. \end{aligned}\right\}$$

Подставим производные в исходное уравнение

$$5x\frac{1}{5}x^{-1}v_{\eta\eta} - \frac{5x}{2\sqrt{5}}x^{-\frac{3}{2}}v_{\eta} - 4y\frac{1}{4}(-y)^{-1}v_{\xi\xi} - \frac{4y}{4}(-y)^{-\frac{3}{2}}v_{\xi} = 0.$$

После преобразований получим

$$v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta} - \frac{\sqrt{5}}{2}x^{-\frac{1}{2}}v_{\eta} - (-y)^{-\frac{1}{2}}v_{\xi} = 0.$$

Выразим $x^{\frac{1}{2}}$ и $(-y)^{\frac{1}{2}}$ через ξ и η

$$x^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{5}}{4}\eta,\ (-y)^{\frac{1}{2}} = -\xi.$$

Подставим, получим канонический вид эллиптического уравнения

$$v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta} - \frac{1}{\eta}v_{\eta} - \frac{1}{\xi}v_{\xi} = 0.$$

Ответ:

$$\begin{cases} v_{\xi\eta} + \dfrac{2}{\xi-\eta}(v_{\xi} - v_{\eta}) + \dfrac{2}{2(\xi+\eta)}(v_{\xi} + v_{\eta}) = 0 & \text{в области} \quad 1.а) \text{ или } 1.б) \quad \text{гиперболический тип;} \\ v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta} - \dfrac{1}{\eta}v_{\eta} - \dfrac{1}{\xi}v_{\xi} = 0. & \text{в области} \quad 3.а) \text{ или } 3.б) \quad \text{эллиптический тип;} \\ v_{yy} = 0 & \text{в области} \quad x = 0, y \neq 0 \quad \text{параболический тип;} \\ v_{xx} = 0 & \text{в области} \quad x \neq 0, y = 0 \quad \text{параболический тип;} \\ \text{Уравнение} & \text{в точке} \quad x = 0, y = 0 \quad \text{вырождается.} \end{cases}$$

При этом

$$\begin{cases} \xi = \sqrt{y} + \dfrac{2}{\sqrt{5}}\sqrt{x},\ \eta = \sqrt{y} - \dfrac{2}{\sqrt{5}}\sqrt{x} & \text{в области} \quad 1.а) \text{ или } 1.б); \\ \xi = -\sqrt{-y},\ \eta = \dfrac{dx}{\sqrt{5}\sqrt{x}}. & \text{в области} \quad 3.а) \text{ или } 3.б). \end{cases}$$

Пример 5. Привести к каноническому виду в каждой области, где сохраняется тип, уравнение

$$yu_{xx} + u_{yy} = 0.$$

Ищем дискриминант. Так как в нашем случае $a_{11} = y$, $a_{12} = 0$, $a_{22} = 1$, то

$$\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = -y.$$

Поэтому

а) в полуплоскости $y < 0$ дискриминант $\Delta > 0 \Rightarrow$ гиперболический тип;

б) в полуплоскости $y > 0$ дискриминант $\Delta < 0 \Rightarrow$ эллиптический тип;

в) на прямой $y = 0$ дискриминант $\Delta = 0 \Rightarrow$ параболический тип.

Составим характеристические уравнения. Так как $a_{22} = 1 \neq 0$, характеристические уравнения имеют вид:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{a_{12} \pm \sqrt{\Delta}}{a_{22}}, \text{ то есть } \frac{dx}{dy} = \pm\sqrt{-y}.$$

Это уравнения с разделяющимися переменными. Решаем их:

а) в полуплоскости $y < 0$

$$dx = \pm\sqrt{-y}dy \;\Rightarrow\; x + c = \mp\frac{2}{3}(-y)^{\frac{3}{2}}.$$

Поэтому первые интегралы имеют вид:

$$\varphi(x, y) = x + \frac{2}{3}(-y)^{\frac{3}{2}} = c,\; \psi = x - \frac{2}{3}(-y)^{\frac{3}{2}} = c.$$

Замена переменных. В соответствии с алгоритмом, необходимо произвести замену:

$$\begin{cases} \xi = x + \dfrac{2}{3}(-y)^{\frac{3}{2}} \\ \eta = x - \dfrac{2}{3}(-y)^{\frac{3}{2}}; \end{cases}$$

Тогда, введя функцию $v(\xi, \eta)$, получаем:

$$u_x = v_\xi + v_\eta, u_y = (-v_\xi + v_\eta)\sqrt{-y},$$

$$u_{xx} = v_{\xi\xi} + 2v_{\xi\eta} + v_{\eta\eta}, u_{yy} = -y(v_{\xi\xi} - 2v_{\xi\eta} + v_{\eta\eta}) - \frac{1}{2\sqrt{-y}}(-v_\xi + v_\eta).$$

Подставив найденные производные в исходное уравнение, получаем:

$$yu_{xx} + u_{yy} = y(v_{\xi\xi} + 2v_{\xi\eta} + v_{\eta\eta}) - y(v_{\xi\xi} - 2v_{\xi\eta} + v_{\eta\eta}) - \frac{1}{2\sqrt{-y}}(-v_\xi + v_\eta) =$$

$$= y\left[4v_{\xi\eta} - \frac{1}{2(-y)^{\frac{2}{3}}}(-v_\xi + v_\eta)\right] = 0.$$

Поделив на $4y$ и выразив $2(-y)^{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}(\xi - \eta)$, получаем канонический вид

$$v_{\xi\eta} - \frac{1}{6(\xi - \eta)}(-v_\xi + v_\eta) = 0.$$

б) в полуплоскости $y > 0$

$$dx = \pm i\sqrt{-y}dy \;\Rightarrow\; x + c = \mp i\frac{2}{3}(-y)^{\frac{3}{2}}$$

Поэтому первые интегралы имеют вид:

$$\alpha(x,y) \pm i\beta(x,y) = c, \text{ где } \alpha(x,y) = x,\; \beta(x,y) = \frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}.$$

Замена переменных. В соответствии с алгоритмом, необходимо произвести замену:

$$\begin{cases} \xi = x; \\ \eta = \frac{2}{3}(-y)^{\frac{3}{2}}. \end{cases}$$

Тогда, введя функцию $v(\xi, \eta)$, получаем:

$$u_x = v_\xi, u_y = v_\eta\sqrt{y},$$

$$u_{xx} = v_{\xi\xi}, u_{yy} = yv_{\eta\eta}) + \frac{1}{2\sqrt{y}}v_\eta.$$

Подставив найденные производные в исходное уравнение, получаем:

$$yu_{xx} + u_{yy} = y(v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta}) + \frac{1}{2\sqrt{y}}v_\eta = y\left(v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta} + \frac{1}{2(y)^{\frac{3}{2}}}v_\eta\right) =$$

$$\left[2(y)^{\frac{3}{2}} = 3\eta\right] = y\left(v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta} + \frac{1}{3\eta}v_\eta\right) = 0$$

Поделив на y, получаем канонический вид:

$$v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta} + \frac{1}{3\eta}v_\eta = 0.$$

в) на прямой $y = 0$

$$dx = 0 \Rightarrow x = c.$$

Поэтому первый интеграл (единственный линейно независимый) имеет вид:

$$\delta(x,y) = x.$$

Замена переменных. В соответствии с алгоритмом, необходимо произвести замену:

$$\begin{cases} \xi = x; \\ \eta = y. \end{cases}$$

(Нам надо было произвольным образом выбрать $\eta(x,y)$ так, чтобы функции ξ, η образовывали линейно независимую пару, см. (1.16))

Введя функцию $v(\xi,\eta)$, получаем:

$$u_x = v_\xi,\ u_y = v_\eta,\ u_{xx} = v_{\xi\xi},\ u_{yy} = v_{\eta\eta}$$

Подставив найденные производные в исходное уравнение при $y=0$, получаем:

$$u_{yy} = v_{\eta\eta} = 0.$$

Итак, канонический вид исходного уравнения на прямой $y=0$:

$$v_{\eta\eta} = 0\,\text{или, тоже самое,}\, u_{yy} = 0.$$

Ответ:

$$\begin{cases} v_{\xi\eta} - \dfrac{1}{6(\xi-\eta)}(-v_\xi + v_\eta) = 0 & \text{в области} \quad y<0, \quad \text{гиперболический тип;} \\ v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta} + \dfrac{1}{3\eta}v_\eta = 0 & \text{в области} \quad y>0, \quad \text{эллиптический тип;} \\ v_{yy} = 0 & \text{в области} \quad y=0, \quad \text{параболический тип.} \end{cases}$$

При этом

$$\begin{cases} \xi = x + \dfrac{2}{3}(-y)^{\frac{3}{2}},\ \eta = x - \dfrac{2}{3}(-y)^{\frac{3}{2}} & \text{в области} \quad y<0; \\ \xi = x,\ \eta = \dfrac{2}{3}(-y)^{\frac{3}{2}} & \text{в области} \quad y>0; \\ \xi = x,\ \eta = y. & \text{в области} \quad y=0. \end{cases}$$

Задачи для самостоятельного решения.

Следующие уравнения привести к каноническому виду в каждой из областей, где сохраняется тип рассматриваемого уравнения:

1. $y^2u_{xx} + 2xyu_{xy} + x^2u_{yy} = 0.$

2. $u_{xx} - (1+y^2)^2u_{yy} - 2y(1+y^2)u_y = 0.$

3. $(1+x^2)u_{xx} + (1+y^2)u_{yy} + xu_x + yu_y - 2u = 0.$

4. $xy^2u_{xx} - 2x^2yu_{xy} + x^3u_{yy} - y^2u_x = 0.$

5. $u_{xx} - 2xu_{xy} = 0.$

6. $xu_{xx} + 2xu_{xy} + (x-1)u_{yy} = 0.$

Глава 2

Общая схема метода разделения переменных для уравнений гиперболического типа

Метод разделения переменных используется при построении решений смешанных задач для широкого класса уравнений с частными производными.

Рассмотрим смешанную задачу для гиперболического уравнения с переменными коэффициентами.

Пусть требуется найти решение уравнения

$$\rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left[p(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right] - q(x)u,\ 0 < x < l,\ t > 0, \tag{2.1}$$

удовлетворяющее граничным условиям

$$\begin{cases} \alpha u(0,t) + \beta \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0, \\ \gamma u(l,t) + \delta \dfrac{\partial u}{\partial x}(l,t) = 0, \end{cases} \tag{2.2}$$

и начальным условиям

$$\begin{cases} u(x,0) = \phi(x), \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \psi(x), \end{cases} \tag{2.3}$$

Здесь $\rho(x), p(x), q(x)$ — заданные функции и $\rho(x) > 0, p(x) > 0, q(x) \geqslant 0,\ \alpha, \beta, \gamma, \delta$ — заданные постоянные, $\phi(x), \psi(x)$ — заданные функции.

Найдем нетривиальные частные решения уравнений (2.1), удовлетворяющие граничным условиям (2.2). Эти решения будем искать в виде

$$u(x,t) = T(t) \cdot X(x). \tag{2.4}$$

Подставляя (2.4) в уравнение (2.1), получим

$$\rho(x)\frac{d^2T(t)}{dt^2}X(x) = T(t)\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dX(x)}{dx}\right] - q(x)T(t)X(x).$$

После деления этого равенства на $\rho(x)T(t)X(x)$ получим

$$\frac{\dfrac{d}{dx}\left[p(x)\dfrac{dX}{dx}\right]-q(x)X}{\rho(x)X}=\frac{\dfrac{d^2T}{dt^2}}{T}.$$

Это равенство должно выполняться тождественно, то есть для всех $0<x<l, t>0$.

Правая часть равенства является функцией аргумента t, а левая — аргумента x, равенство выполняется при любых значениях x и t, это означает, что правая и левая части равны одной и той же константе

$$\frac{\dfrac{d}{dx}\left[p(x)\dfrac{dX}{dx}\right]-q(x)X}{\rho(x)X}=\frac{\dfrac{d^2T}{dt^2}}{T}=-\lambda, \tag{2.5}$$

где λ — постоянная.

Из соотношения (2.5) получим два обыкновенных дифференциальных уравнения для определения функций $X(t)$ и $T(t)$

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dX}{dx}\right]-q(x)X(x)+\lambda\rho(x)X(x)=0, \tag{2.6}$$

$$\frac{d^2T}{dt^2}+\lambda T=0. \tag{2.7}$$

Подставим (2.4) в граничные условия (2.2)

$$\alpha X(0)\,T(t)+\beta X'(0)\,T(t)=0,$$

$$\gamma X(l)\,T(t)+\delta X'(l)\,T(t)=0.$$

Так как $T(t)\not\equiv 0$, сокращая $T(t)$, получим

$$\begin{cases}\alpha X(0)+\beta X'(0)=0\\ \gamma X(l)+\delta X'(l)=0.\end{cases} \tag{2.8}$$

Таким образом, для определения $X(x)$ получаем граничную задачу (2.6),(2.8).

В задаче (2.6),(2.8) необходимо определить числа λ, при которых существуют нетривиальные решения $X(x)$ и найти эти решения. То есть пришли к задаче на собственные значения:

Найти те значения параметра λ, при которых существуют нетривиальные решения уравнения (2.6) с условиями (2.8), а также найти эти решения.

Значения параметра λ называют *собственными значениями*, а соответствующие им нетривиальные решения — *собственными функциями*.

Сформулируем основные свойства собственных функций и собственных значений задачи (2.6),(2.8).

1. Существует счетное множество собственных значений $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n < \ldots$, которым соответствуют собственные функции
   $X_1(x),\ X_2(x), \ldots X_n(x), \ldots$

2. При $q(x) \geqslant 0$ все собственные значения λ_n положительны.

3. Собственные функции на отрезке $[0, l]$ образуют ортогональную систему с весом $\rho(x)$, то есть

$$\int\limits_0^l \rho(x) X_m(x) X_n(x) dx = 0,\ m \neq n$$

4. **Теорема разложимости.** Всякая функция $f(x)$, удовлетворяющая граничным условиям (2.8) и имеющая непрерывную первую призводную и кусочно-непрерывную вторую производную, разлагается в абсолютно и равномерно сходящийся ряд по собственным функциям $X_k(x)$.

То-есть,

$$\begin{cases} f(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k X_k(x), \\ f_k = \dfrac{1}{\|X_k\|^2} \int\limits_0^l \rho(x) f(x) X_k(x) dx, \\ \|X_k\|^2 = \int\limits_0^l \rho(x) X_k^2(x) dx. \end{cases} \tag{2.9}$$

Решение задач на собственные значения рассмотрим далее на примерах.

Найденные λ_n используем дальше для нахождения функция $T_n(x)$ из уравнения (2.7):

$$T_n''(t) + \lambda_n T_n(t) = 0.$$

Это обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Его общее решение имеет вид

$$T_n(t) = A_n \overline{T}_n(t) + B_n \widetilde{T}_n(t), \tag{2.10}$$

где $\overline{T}_n, \widetilde{T}_n$ — любые линейно независимые частные решения уравнения (2.7), A_n, B_n — произвольные постоянные.

Таким образом, зная $X_n(x)$ и $T_n(t)$, получили счетное множество частных решений уравнения (2.1)

$$u_n(x,t) = X_n(x)\, T_n(t) = \Big(A_n\, \overline{T}_n(t) + B_n\, \widetilde{T}_n(t)\Big)\, X_n(x), \tag{2.11}$$

которые удовлетворяют граничным условиям (2.2).

Из частных решений (2.11) составим ряд

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_n \overline{T}_n(t) + B_n \widetilde{T}_n(t) \right) X_n(x). \tag{2.12}$$

Если ряд (2.12), а также ряды, полученные из него двукратным почленным дифференцированием по x и t, сходятся равномерно, то решение (2.12) будет удовлетворять уравнению (2.1) и граничным условиям (2.2).

Выберем произвольные постоянные A_n и B_n так, чтобы решение (2.12) удовлетворяло и начальным условиям (2.3).

Если функции $\phi(x)$ и $\psi(x)$ удовлетворяют условиям теоремы разложимости, то, согласно формулам (2.9), их можно разложить в ряд по собственным функциям $X_n(x)$.

Получим

$$\phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n X_n(x),$$

$$\phi_n = \frac{1}{\|X_n\|^2} \int_0^l \rho(x)\phi(x)X_n(x)dx,$$

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n X_n(x),$$

$$\psi_n = \frac{1}{\|X_n\|^2} \int_0^l \rho(x)\psi(x)X_n(x)dx.$$

Потребуем для решения (2.12) выполнения начальных условий (2.3)

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \overline{T}_n(0) + B_n \widetilde{T}_n(0) \right) X_n(x) = \phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n X_n(x), \tag{2.13}$$

$$u_t(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \overline{T}'_n(0) + B_n \widetilde{T}'_n(0) \right) X_n(x) = \psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n X_n(x), \tag{2.14}$$

Из равенств (2.13), (2.12) в силу линейной независимости системы собственных функций $X_n(x)$ получим

$$A_n \overline{T}_n(0) + B_n \widetilde{T}_n(0) = \phi_n, \tag{2.15}$$

$$A_n \overline{T}'_n(0) + B_n \widetilde{T}'_n(0) = \psi_n. \tag{2.16}$$

Система уравнений (2.15), (2.16) имеет единственное решение, так как ее определитель, как определитель Вронского для линейно-независимых решений $\overline{T}_n(t), \widetilde{T}_n(t)$, не равен нулю.

Подставляя найденные из системы (2.15), (2.16) A_n и B_n в ряд (2.12), получаем решение исходной задачи (2.1)-(2.3).

2.1 Метод разделения переменных решения задач для однородных гиперболических уравнений

Рассмотрим задачу о колебаниях тонкой однородной струны с жестко закрепленными концами. Эта задача описывается однородным уравнением второго порядка

$$u_{tt} = a^2 u_{xx},\ 0 < x < l,\ t > 0, \tag{2.17}$$

с граничными условиями

$$u(0,t) = 0,\ u(l,t) = 0 \tag{2.18}$$

и начальными условиями

$$u(x,0) = \phi(x),\ u_t(x,0) = \psi(x). \tag{2.19}$$

Будем искать частные нетривиальные решения уравнения (2.17) в виде

$$u(x,t) = X(x) \cdot T(t).$$

Подставим это решение в уравнение (2.17)

$$X(x)T''(t) = a^2 X''(x)T(t)$$

Поделим это равенство на $a^2 XT$, получим

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda$$

где λ — константа. Отсюда приходим к уравениям для $X(x)$ и $T(t)$:

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \tag{2.20}$$

$$T''(t) + \lambda a^2 T(t) = 0. \tag{2.21}$$

Подставляя $u(x,t)$ в граничные условия (2.18), получим

$$X(0)\,T(t) = 0,\ X(l)\,T(t) = 0.$$

Отсюда получаем $X(0) = 0, X(l) = 0$.

Таким образом приходим к задаче на собственные значения

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, \\ X(0) = 0, \\ X(l) = 0 \end{cases} \tag{2.22}$$

Рассмотрим отдельно случаи, когда параметр λ отрицателен, равен нулю и положителен.

а) Предположим, что $\lambda < 0$. Построим общее решение уравнения (2.22). Соответствующее характеристическое уравнение

$$k^2 + \lambda = 0$$

имеет корни $k_{1,2} = \pm\sqrt{-\lambda}$. При $\lambda < 0$ корни вещественны и различны, следовательно общее решение уравнения (2.22)

$$X(x) = C_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}.$$

Потребуем выполнение граничных условий

$$\begin{cases} X(0) = C_1 + C_2 = 0, \\ X(l) = C_1 e^{\sqrt{-\lambda}\,l} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}\,l} = 0, \end{cases}$$

$C_1 = -C_2$, значит $C_1(e^{-\sqrt{-\lambda}\,l} - e^{\sqrt{-\lambda}\,l}) = 0$.

Здесь $C_1 \neq 0$, так как тогда имеем $X(x) \equiv 0$, а мы ищем нетривиальные решения. Следовательно $e^{\sqrt{-\lambda}\,l} - e^{-\sqrt{-\lambda}\,l} = 0$ или $e^{2\sqrt{-\lambda}\,l} = 1$, это возможно только при $\lambda = 0$. В нашем случае $\lambda < 0$, и мы имеем только тривиальное решение.

б) Пусть $\lambda = 0$, тогда $X''(x) = 0$ и общее решение имеет вид $X(x) = C_1 x + C_2$.

Из граничных условий получаем

$$\begin{aligned} X(0) &= C_2 = 0, \\ X(l) &= C_1 l = 0, \end{aligned}$$

следовательно $C_1 = C_2 = 0$ и опять получаем тривиальное решение.

в) Пусть $\lambda > 0$, в этом случае корни характеристического уравнения $k_{1,2} = \pm i\sqrt{\lambda}$ — комплексные.

В этом случае общее решение имеет вид

$$X(x) = C_1 \cos\sqrt{\lambda}\,x + C_2 \sin\sqrt{\lambda}\,x.$$

Из граничных условий получим

$$\begin{aligned} X(0) &= C_1 = 0, \\ X(l) &= C_2 \sin\sqrt{\lambda}\,l = 0. \end{aligned}$$

$C_2 \neq 0$, так как мы ищем только нетривиальные решения, следовательно, для определения λ получаем уравнение$\sin\sqrt{\lambda}\,l = 0$, откуда

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2, \ n = 1, 2, \ldots \qquad \text{— собственные значения.}$$

Собственные функции

$$X_n(x) = C_n \sin\frac{\pi n}{l}x,$$

где C_k — произвольные постоянные. Возьмем $C_k = 1$, тогда

$$X_n(x) = \sin\frac{\pi n}{l}x, \ n = 1, 2, \ldots$$

Обратимся теперь к решению уравнения (2.21) при $\lambda = \lambda_k$:

$$T''_n(t) + \lambda_n a^2 T_n(t) = 0.$$

Корни соответствующего характеристического уравнения $k_{1,2} = \pm ia\sqrt{\lambda_n} = \pm\frac{a\pi n}{l}$, $n = 1, 2, \ldots$ В этом случае общее решение

$$T_n(t) = A_n \cos\frac{a\pi n}{l}t + B_n \sin\frac{a\pi n}{l}t,$$

A_n, B_n — произвольные постоянные.

Таким образом, частные решения уравнения (2.17) удовлетворяющие граничным условиям (2.18), имеют вид

$$u_n(x,t) = T_n(t)\,X_n(x) = \Big(A_n \cos\frac{a\pi n}{l}t + B_n \sin\frac{a\pi n}{l}t\Big)\sin\frac{\pi n}{l}x.$$

Общее решение задачи (2.17)-(2.19) представим в виде

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\Big(A_n \cos\frac{a\pi n}{l}t + B_n \sin\frac{a\pi n}{l}t\Big)\sin\frac{\pi n}{l}x. \tag{2.23}$$

Представим функции $\phi(x)$ и $\psi(x)$ в виде разложения в ряды по собственным функциям $X_n(x) = \sin\frac{\pi n}{l}x$

$$\phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\phi_n \sin\frac{\pi n}{l}x, \qquad \text{где}$$

$$\phi_n = \frac{1}{\|\sin\frac{\pi n}{l}x\|^2}\int_0^l \phi(x)\sin\frac{\pi n}{l}x\,dx,$$

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\psi_n \sin\frac{\pi n}{l}x, \qquad \text{где}$$

$$\psi_n = \frac{1}{\|\sin\frac{\pi n}{l}x\|^2}\int_0^l \psi(x)\sin\frac{\pi n}{l}x\,dx,$$

$$\|\sin\frac{\pi n}{l}x\|^2 = \int_0^l \sin^2\frac{\pi n}{l}x\,dx$$

Легко вычислить $\|\sin\frac{\pi n}{l}x\|^2 = \frac{l}{2}$

Запишем начальные условия (2.19) для функции (2.23):

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{\pi n}{l}x = \phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\phi_n \sin\frac{\pi n}{l}x.$$

Это равенство выполняется, если $A_n = \phi_n,\ n = 1, 2, \ldots$

$$u_t(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\Big(-\frac{a\pi n}{l}A_n \sin\frac{a\pi n}{l}t + \frac{a\pi n}{l}B_n \cos\frac{a\pi n}{l}t\Big)\sin\frac{\pi n}{l}x.$$

При $t = 0$ получаем

$$u_t(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a\pi n}{l} B_n \sin \frac{\pi n}{l} x = \psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n \sin \frac{\pi n}{l} x.$$

Это равенство выполняется при $B_n = \dfrac{l}{a\pi n}\psi_n,\ n = 1, 2, \ldots$

Учитывая найденные произвольные постоянные A_n и B_n, запишем решение задачи (2.17)-(2.19)

$$u_t(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\phi_n \cos \frac{a\pi n}{l} t + \frac{l}{a\pi n} \psi_n \sin \frac{a\pi n}{l} t \right) \sin \frac{\pi n}{l} x. \tag{2.24}$$

При условии абсолютной и равномерной сходимости ряда (2.24) и рядов, полученных из (2.24) почленным дифференцированием дважды по x и t в области $0 \leqslant x \leqslant l,\ t \geqslant 0$, формула (2.24) дает решение задачи (2.17)-(2.19).

Посмотрим, как изменится решение задачи о колебаниях струны при различных способах закрепления концов струны, то есть при различных граничных условиях.

Рассмотрим задачу о колебаниях однородной струны, левый конец которой закреплен жестко, а правый — свободен.

$$u_{tt} = a^2 u_{xx},\ 0 < x < l,\ t > 0 \tag{2.25}$$

$$\begin{cases} u(0,t) = 0, \\ u_x(l,t) = 0 \qquad \text{— граничные условия,} \end{cases} \tag{2.26}$$

$$\begin{cases} u(x,0) = \phi(x), \\ u_t(x,0) = \psi(x) \qquad \text{— начальные условия.} \end{cases} \tag{2.27}$$

Решение будем искать в виде

$$u(x,t) = X(x)\,T(t).$$

Подставим $u(x,t)$ в уравнение (2.25) и разделим переменные. Получим задачу на собственные значения и уравнение для определения $T(t)$:

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda,$$

$$X(0)\,T(t) = 0,$$
$$X'(l)\,T(t) = 0.$$

Задача на собственные значения приобретает вид:

$$X'' + \lambda X = 0 \tag{2.28}$$

$$\begin{cases} X(0) = 0, \\ X'(l) = 0. \end{cases} \tag{2.29}$$

Решим эту задачу.

Легко убедиться, что при $\lambda \leqslant 0$ задача (2.28), (2.29) не имеет нетривиальных решений.

При $\lambda > 0$ решение уравнения (2.28) имеет вид

$$X(x) = C_1 \cos\sqrt{\lambda}\,x + C_2 \sin\sqrt{\lambda}\,x.$$

Подставив $X(x)$ в граничные условия (2.29), получим

$$\begin{aligned} &X(0) = C_1 = 0, \\ &X'(l) = C_2\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}\,l = 0. \end{aligned}$$

Так как мы ищем нетривиальные решения $C_2 \neq 0$, следовательно $\sin\sqrt{\lambda}\,l = 0$. Решая это тригонометрическое уравнение, получим

$$\sqrt{\lambda}\,l = (2n+1)\frac{\pi}{2},$$

$$\lambda_n = \left(\frac{(2n+1)\pi}{2l}\right)^2, \; n = 1, 2, \ldots$$

— собственные значения,

$$X_n(x) = \sin\frac{(2n+1)\pi}{2l}x$$

— собственные функции.

Видим, что решение задачи на собственные значения зависит от граничных условий исходной дифференциальной задачи.

Для определения $T(t)$ имеем уравнение

$$T_n''(t) + \lambda_n a^2 T_n(t) = 0.$$

Общее решение этого уравнения при найденных λ_n имеет вид

$$T_n(t) = A_n \cos\frac{(2n+1)a\pi}{2l}t + B_n \sin\frac{(2n+1)a\pi}{2l}t,$$

тогда

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n \cos\frac{(2n+1)a\pi}{2l}t + B_n \sin\frac{(2n+1)a\pi}{2l}t\right)\sin\frac{(2n+1)\pi}{2l}x.$$

Потребовав от решения $u(x,t)$ выполнения начальных условий (2.27), получим

$$A_n = \phi_n, \; B_n = \frac{2l}{(2n+1)a\pi}\psi_n,$$

где ϕ_n и ψ_n — коэффициенты разложения в ряд по собственным функциям $X_n(x) = \sin\dfrac{(2n+1)\pi}{2l}x$ функций $\phi(x)$ и $\psi(x)$.

Задачи для самостоятельной работы можно найти [6], [7], [8], [9]. Рассмотрим некоторые из них.

Примеры. Найти методом разделения переменных решение задач.

1.

$$\begin{aligned} &u_{tt} = a^2 u_{xx},\ 0 < x < l,\ t > 0,\\ &u(0,t) = u(l,t) = 0,\\ &u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = 7\sin\frac{5\pi}{l}x. \end{aligned}$$

Ответ:

$$u(x,t) = \frac{7l}{5\pi a}\sin\frac{5\pi a}{l}t\,\sin\frac{5\pi}{l}x.$$

2.

$$\begin{aligned} &u_{tt} = a^2 u_{xx},\ 0 < x < l,\ t > 0,\\ &u_x(0,t) = 0,\ u(l,t) = 0,\\ &u(x,0) = 7\cos\frac{\pi}{2l}x,\ u_t = 10\cos\frac{3\pi}{2l}x + 8\cos\frac{5\pi}{2l}x. \end{aligned}$$

Ответ:

$$u(x,t) = 7\cos\frac{a\pi}{2l}t\cos\frac{\pi}{2l}x + \frac{20l}{3\pi a}\sin\frac{3\pi a}{2l}t\cos\frac{3\pi}{2l}x + {} + \frac{16l}{5\pi a}\sin\frac{5\pi a}{2l}t\cos\frac{5\pi}{2l}x.$$

3.

$$\begin{aligned} &u_{tt} = a^2 u_{xx},\ 0 < x < l,\ t > 0,\\ &u_x(0,t) = 0,\ u_x(l,t) = 0,\\ &u(x,0) = \phi(x),\ u_t(x,0) = \psi(x). \end{aligned}$$

Замечание. В данном случае необходимо учесть, что $\lambda = 0$ будет являться собственным значением, ему соответствует собственная функция $X_0(x) = 1$. Частное решение $X_0(x)\cdot T_0(t)$ надо включить в состав общего решения отдельно.

Ответ:

$$u(x,t) = \frac{1}{l}\int\limits_0^l (\phi(x) + t\,\psi(x))dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\frac{a\pi n}{l}t + B_n\sin\frac{a\pi n}{l}t\right)\cos\frac{n\pi}{l}x,$$

где

$$A_n = \frac{2}{l}\int\limits_0^l \phi(x)\cos\frac{n\pi}{l}x\,dx,\ B_n = \frac{2}{n\pi a}\int\limits_0^l \psi(x)\cos\frac{n\pi}{l}x\,dx.$$

4.

$$\begin{aligned} &u_{tt} = a^2 u_{xx},\ 0 < x < l,\ t > 0,\\ &u(0,t) = 0,\ u_x(l,t) = 0,\\ &u(x,0) = x,\ u_t(x,0) = \sin\frac{\pi}{2l}x + \sin\frac{3\pi}{2l}x. \end{aligned}$$

Ответ:

$$u(x,t)=\frac{2l}{3a\pi}\sin\frac{3a\pi}{2l}x\sin\frac{3\pi}{2l}x+\frac{2l}{a\pi}\sin\frac{a\pi}{2l}t\sin\frac{\pi}{2l}x+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 8l}{(2n+1)^2\pi^2}\cos\frac{(2n+1)a\pi}{2l}t\sin\frac{(2n+1)\pi}{2l}x.$$

5.

$$\begin{aligned}&u_{tt}=a^2u_{xx},\ 0<x<l,\ t>0,\\&u(0,t)=0,\ u(l,t)=0,\\&u(x,0)=\frac{4h}{l^2}x(l-x),\ u_t(x,0)=0.\end{aligned}$$

Ответ:

$$u(x,t)=\frac{32h}{\pi^3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^3}\cos\frac{(2n+1)a\pi}{l}t\sin\frac{(2n+1)\pi}{l}x.$$

6.

$$\begin{aligned}&u_{tt}=a^2u_{xx},\ 0<x<l,\ t>0,\\&u(0,t)=0,\ u(l,t)=0,\\&u(x,0)=0,\ u_t(x,0)=\upsilon_0.\end{aligned}$$

Ответ:

$$u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4l\upsilon_0}{a\pi^2(2n+1)^2}\sin\frac{(2n+1)a\pi}{l}t\sin\frac{(2n+1)\pi}{l}x.$$

7.

$$\begin{aligned}&u_{tt}=a^2u_{xx},\ 0<x<l,\ t>0,\\&u_x(0,t)=0,\ u_x(l,t)=0,\\&u(x,0)=x,\ u_t(x,0)=1.\end{aligned}$$

Ответ:

$$u(x,t)=\frac{l}{2}+t-\frac{4l}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}\cos\frac{(2n+1)a\pi}{l}t\cos\frac{(2n+1)\pi}{l}x.$$

Во всех вышеприведенных примерах рассматривается однородное уравнение колебаний без младших членов. Рассмотрим гиперболическое уравнение, содержащее младшие члены.

$$u_{tt}=a^2u_{xx}-R\,u,\ 0<x<l,\ t>0,\tag{2.30}$$

$$u(0,t)=0,\ u(l,t)=0,\tag{2.31}$$

$$u(x,0)=x,\ u_t(x,0)=0,\tag{2.32}$$

R — заданная постоянная. При разделении переменных младшие члены добавим в уравнение для определения $T(t)$.

Рассмотрим $u(x,t)=X(x)\,T(x)$. Подставим $u(x,t)$ в уравнение (2.30), получим

$$T''(t)\,X(x) + R\,T(t)\,X(x) = a^2 X''(x)\,T(t).$$

Поделим данное равенство на $a^2 X\,T$, получим

$$\frac{T''(t) + R\,T(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda.$$

Получили задачу на собственные значения

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, \\ X(0) = 0, \\ X(l) = 0, \end{cases} \tag{2.33}$$

и уравнение для определения $T(t)$:

$$T''(t) + (a^2\lambda + R)\,T(t) = 0. \tag{2.34}$$

Как было показано выше, решение задачи (2.33) имеет вид

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2, \;\; X_n(x) = \sin\frac{\pi n}{l}x, \;\; n = 1, 2, \ldots$$

Найдем $T_n(t)$. Общее решение уравнения (2.34) имеет вид

$$T_n(t) = A_n \cos\sqrt{a^2\lambda_n + R}\,t + B_n \sin\sqrt{a^2\lambda_n + R}\,t.$$

Введем обозначение $p_n = \sqrt{a^2\lambda_n + R}$, тогда

$$T_n(t) = A_n \cos p_n t + B_n \sin p_n t.$$

Общее решение исходного уравнения

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos p_n t + B_n \sin p_n t)\sin\frac{\pi n}{l}x. \tag{2.35}$$

Потребуем для $u(x,t)$ выполнения начальных условий (2.32). Разложим функции $\phi(x) = x$ и $\psi(x) = 0$ в ряды по собственным функциям $X_n(x) = \sin\dfrac{\pi n}{l}x$, получим

$$\phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n \sin\frac{\pi n}{l}x,$$

$$\phi_k(x) = \frac{2}{l}\int\limits_0^l x \sin\frac{n\pi}{l}x\,dx = \frac{2l}{n\pi}(-1)^{n+1}, \;\; n = 1, 2, \ldots,$$

$\psi(x) = 0$, следовательно $\psi_k(x) = 0, \;\; n = 1, 2, \ldots$

Тогда

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{n\pi}{l}x = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n \sin\frac{n\pi}{l}x,$$

отсюда получаем

$$A_n = \phi_n = \frac{2l}{n\pi}(-1)^{n+1}, \;\; B_n = \frac{\psi_n}{p_n} = 0.$$

Таким образом, решение исходной задачи (2.30)-(2.32) имеет вид

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2l}{n\pi}(-1)^{k+1} \cos\sqrt{\left(\frac{an\pi}{l}\right)^2 + R}\;t \sin\frac{n\pi}{l}x.$$

Пример

$$\begin{aligned}
&u_{tt} + 2u_t = u_{xx} - u,\ 0 < x < \pi,\ t > 0,\\
&u_x(0,t) = 0,\ u(\pi,t) = 0,\\
&u(x,0) = 0, u_t(x,0) = x.
\end{aligned}$$

Ответ:

$$u(x,t) = 8e^{-t}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}\left((-1)^n - \frac{2}{\pi(2n+1)}\right)\sin\frac{2n+1}{2}t\cos\frac{2n+1}{2}x.$$

2.2 Решение методом разделения переменных неоднородных гиперболических уравнений

Метод разделения переменных может быть применен и для решения неоднородных гиперболических уравнений.

Рассмотрим задачу

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t),\ 0 < x < l, t > 0 \tag{2.36}$$

$$\begin{cases} \alpha_1 u(0,t) + \beta_1 u_x(0,t) = 0, \\ \alpha_2 u(l,t) + \beta_2 u_x(l,t) = 0 \qquad \text{— граничные условия,} \end{cases} \tag{2.37}$$

$$\begin{cases} u(x,0) = \phi(x), \\ u_t(x,0) = \psi(x) \qquad \text{— начальные условия.} \end{cases} \tag{2.38}$$

Решение задачи (2.36)-(2.38) будем искать в виде

$$u(x,t) = u_1(x,t) + u_2(x,t), \tag{2.39}$$

где $u_1(x,t)$ — решение неоднородного уравнения (2.36) с нулевыми начальными условиями:

$$u_{1\,tt} = a^2 u_{1\,xx} + f(x,t), \tag{2.40}$$

$$\begin{cases} \alpha_1 u_1(0,t) + \beta_1 u_{1\,x}(0,t) = 0, \\ \alpha_2 u_1(l,t) + \beta_2 u_{1\,x}(l,t) = 0, \end{cases} \tag{2.41}$$

$$u_1(x,0) = 0,\ u_{1\,t}(x,0) = 0. \tag{2.42}$$

$u_2(x,t)$ — решение однородного уравнения с исходными начальными условиями:

$$u_{2\,tt} = a^2 u_{2\,xx}, \tag{2.43}$$

$$\begin{cases} \alpha_1 u_2(0,t) + \beta_1 u_{2\,x}(0,t) = 0, \\ \alpha_2 u_2(l,t) + \beta_2 u_{2\,x}(l,t) = 0, \end{cases} \tag{2.44}$$

$$u_2(x,0) = \phi(x),\ u_{2\,t}(x,0) = \psi(x). \tag{2.45}$$

Решение задачи (2.43)-(2.45) построено выше и имеет вид

$$u_2(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos a\sqrt{\lambda_n}\, t + B_n \sin \sqrt{\lambda_n}\, t \right) X_n(x),$$

где $\lambda_n,\ X_n(x)$ — решение соответствующей задачи на собственные значения,

$$A_n = \phi_n,\ B_n = \frac{\psi_n}{a\sqrt{\lambda_n}},$$

где ϕ_n и ψ_n — коэффициенты разложения функций $\phi(x)$ и $\psi(x)$ по собственным функциям $X_n(x)$.

Для отыскания решения задачи (2.40)-(2.42) функцию $u_1(x,t)$ будем искать в виде

$$u_1(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\, X_n(x).$$

Подставим $u_1(x,t)$ в уравнение (2.40), получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_n''(t) X_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a^2 T_n(t) X_n''(x) + f(x,t). \tag{2.46}$$

Функцию $f(x,t)$ предствим в виде ряда

$$f(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) X_n(x), \tag{2.47}$$

где

$$f_n(t) = \frac{\int\limits_0^l f(x,t) X_n(x) dx}{\int\limits_0^l X_n^2(x) dx}.$$

Заменяя в равенстве (3.11) $X_n''(x) = -\lambda_n X_n(x)$, получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(T_n''(t) + a^2 \lambda_n T_n(t)\right) X_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) X_n(x).$$

В силу ортогональности системы собственных функций $X_n(x)$ получим уравнение для определения функций $T_n(t)$

$$T_n''(t) + a^2 \lambda_n T_n(t) = f_n(t),\ n = 1, 2, \ldots \tag{2.48}$$

Воспользуемся начальным условиями (2.42):

$$\begin{cases} u_1(x,0) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} T_n(0) X_n(x) = 0, \\ u_{1\,t}(x,0) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} T_n'(0) X_n(x) = 0, \end{cases}$$

откуда получим

$$T_n(0) = 0,\ T_n'(0) = 0,\ n = 1, 2, \ldots \tag{2.49}$$

Таким образом, каждая функция $T_n(t)$ определяется как решение задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения (2.48) с начальными условиями (2.49).

Решение задачи (2.48), (2.49) имеет вид

$$T_n(t) = \int\limits_0^t f_n(\tau) g_n(t-\tau)d\tau, \tag{2.50}$$

где $g_n(t)$ — решение задачи

$$\begin{cases} g_n'' + a^2\lambda_n g_n = 0, \\ g_n(0) = 0, \ g_n'(0) = 1, \ n = 1, 2, \dots \end{cases} \tag{2.51}$$

Функцию $g_n(t)$ легко построить в явном виде. Запишем общее решение задачи (2.51)

$$g_n(t) = c_n \cos a\sqrt{\lambda_n}\, t + d_n \sin a\sqrt{\lambda_n}\, t,$$

затем, для нахождения постоянных c_n, d_n воспользуемся начальными условиями задачи (2.51), получим

$$g_n(0) = c_n = 0,$$

$$g_n'(t) = d_n a\sqrt{\lambda_n} \cos a\sqrt{\lambda_n}\, t, \qquad \text{откуда}$$

$$g_n'(0) = d_n a\sqrt{\lambda_n} = 1, \qquad \text{отсюда}$$

$$d_n = \frac{1}{a\sqrt{\lambda_n}} \qquad \text{и}$$

$$g_n(t) = \frac{1}{a\sqrt{\lambda_n}} \sin a\sqrt{\lambda_n}\, t.$$

Таким образом, получаем

$$T_n(t) = \int\limits_0^t \frac{1}{a\sqrt{\lambda_n}} \sin a\sqrt{\lambda_n}(t-\tau) f_n(\tau)d\tau. \tag{2.52}$$

Подставим выражение (2.52) в функцию $u_1(x,t)$, получим

$$u_1(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int\limits_0^t \frac{1}{a\sqrt{\lambda_n}} \sin a\sqrt{\lambda_n}(t-\tau) f_n(\tau)d\tau \right) X_n(x). \tag{2.53}$$

Чтобы убедиться, что функция $u_1(x,t)$ является решением задачи (2.40)- (2.41), достаточно подставить выражение (2.53) в уравнение (2.40) и условия (2.41), (2.42).

Рассмотрим примеры решения неоднородных уравнений.

Пример 1.

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + e^{-t} \sin \frac{10\pi}{l} x, \ 0 < x < l, \ t > 0$$

$$u(0,t) = 0, \ u(l,t) = 0,$$
$$u(x,0) = 0, \ u_t(x,0) = 0.$$

Согласно изложенной выше общей схеме решения неоднородной задачи, получаем

$$u(x,t) = u_1(x,t) + u_2(x,t),$$

где $u_1(x,t)$— решение задачи

$$
\begin{aligned}
&u_{1\,tt} = a^2 u_{1\,xx} + e^{-t}\sin\frac{10\pi}{l}x,\\
&u_1(0,t)=0,\ u_1(l,t)=0,\\
&u_1(x,0)=0,\ u_{1\,t}(x,0)=0.
\end{aligned}
$$

$u_2(x,t)$ является решением задачи

$$
\begin{aligned}
&u_{2\,tt} = a^2 u_{2\,xx},\\
&u_2(0,t)=0,\ u_2(l,t)=0,\\
&u_2(x,0)=0,\ u_{2\,t}(x,0)=0.
\end{aligned}
$$

Рассмотрим соответствующую задачу на собственные значения для функции $u_2(x,t)$:

$$
\begin{cases}
X''(x)+\lambda X(x)=0,\\
X(0)=X(l)=0.
\end{cases}
$$

Эта задача имеет нетривиальные решения $X_n(x)=\sin\dfrac{n\pi}{l}x$ при $\lambda_n=\left(\dfrac{n\pi}{l}\right)^2$, $n=1,2,\ldots$

Тогда

$$
u_2(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\frac{an\pi}{l}t+B_n\sin\frac{an\pi}{l}t\right)\sin\frac{n\pi}{l}x
$$

и $A_n=\phi_n=0$, так как $\phi(x)=0$, а $B_n=\dfrac{l}{an\pi}\psi_n=0$, так как $\psi(x)=0$.

Таким образом $u_2(x,t)\equiv 0$.

Найдем $u_1(x,t)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}T_n(t)\sin\dfrac{n\pi}{l}x$.

Для отыскания $T_n(t)$ решим задачу

$$
\begin{cases}
T_n''(t)+\left(\dfrac{an\pi}{l}\right)^2 T_n(t)=f_n(t),\\
T_n(0)=0,\ T_n'(0)=0,\ n=1,2,\ldots
\end{cases}
$$

Вычислим коэффициенты разложения функции $f(x,t)$ по собственным функциям $X_n(x)=\sin\dfrac{n\pi}{l}x$.

$$
f(x,t)=e^{-t}\sin\frac{10\pi}{l}x=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(t)\sin\frac{n\pi}{l}x,\qquad \text{отсюда}
$$

$$
f_n(t)=\begin{cases}
e^{-t}, & n=10\\
0, & n\neq 10.
\end{cases}
$$

Таким образом, из всех уравнений для определения $T_n(t)$ остается одно при $n=10$:

$$
\begin{cases}
T_{10}''(t)+\left(\dfrac{10a\pi}{l}\right)^2 T_{10}(t)=e^{-t},\\
T_{10}(0)=0,\ T_{10}'(0)=0.
\end{cases}
$$

Решением этой задачи является функция

$$T_{10}(t) = \int\limits_0^t e^{-\tau} g_{10}(t-\tau)d\tau, \qquad \text{где}$$

$$\begin{cases} g_{10}'' + \left(\dfrac{10a\pi}{l}\right)^2 g_{10} = 0, \\ g_{10}(0) = 0,\ g_{10}'(0) = 1. \end{cases}$$

Решая задачу Коши для $g_{10}(t)$, получим

$$g_{10}(t) = \frac{l}{10a\pi} \sin \frac{10a\pi}{l} t,$$

тогда

$$T_{10}(t) = \frac{l}{10a\pi} \int\limits_0^t \sin \frac{10a\pi}{l}(t-\tau)\, e^{-\tau} d\tau =$$
$$= \frac{l^2}{100a^2\pi^2 + l^2}\left(e^{-t} - \cos\frac{10a\pi}{l}t + \frac{l}{10a\pi}\sin\frac{10a\pi}{l}t\right).$$

Тогда

$$u(x,t) = T_{10}(t)\sin\frac{10\pi x}{l} =$$
$$= \frac{l^2}{100a^2\pi^2 + l^2}\left(e^{-t} - \cos\frac{10a\pi}{l}t + \frac{l}{10a\pi}\sin\frac{10a\pi}{l}t\right)\sin\frac{10\pi}{l}x.$$

Пример 2. Рассмотрим задачу

$$\begin{aligned} &u_{tt} = u_{xx} + x,\ 0 < x < \pi,\ t > 0, \\ &u(0,t) = 0,\ u(\pi,t) = 0, \\ &u(x,0) = \sin 2x, \\ &u_t(x,0) = 0, \end{aligned}$$

Построим соответствующую задачу на собственные значения:

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, \\ X(0) = X(\pi) = 0. \end{cases}$$

Эта задача имеет решение

$$\lambda_n = n^2,\ X_n(x) = \sin nx,\ n = 1, 2, \ldots$$

Решение исходной задачи представим в виде

$$u(x,t) = u_1(x,t) + u_2(x,t),$$

где $u_1(x,t)$ является решением задачи

$$\begin{aligned}
&u_{1\,tt} = u_{1\,xx} + x,\ 0 < x < \pi,\ t > 0,\\
&u_1(0,t) = 0,\ u_1(\pi,t) = 0,\\
&u_1(x,0) = 0,\ u_{1\,t}(x,0) = 0,
\end{aligned}$$

а $u_2(x,t)$ является решением задачи

$$\begin{aligned}
&u_{2\,tt} = u_{2\,xx} + x,\ 0 < x < \pi,\ t > 0,\\
&u_2(0,t) = 0,\ u_2(\pi,t) = 0,\\
&u_2(x,0) = 0,\\
&u_{2\,t}(x,0) = \sin 2x,
\end{aligned}$$

Согласно изложенному выше,

$$u_2(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos nt + B_n \sin nt) \sin nx,$$

где $A_n = \phi_n, B_n = \dfrac{\psi_n}{n}$.

Получим ϕ_n и ψ_n — коэффициенты разложения функций $\phi(x)$ и $\psi(x)$ по $\sin nx$.

В нашем примере $\phi(x) = \sin 2x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \phi_n \sin nx$.

Отсюда получаем

$$\phi_n = \begin{cases} 1, & n = 2,\\ 0, & n \neq 2, \end{cases}$$

$$\psi(x) = 0 = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n \sin nx, \qquad \text{отсюда}$$

$$\psi_n = 0,\ n = 1, 2, \ldots$$

Таким образом, $u_2(x,t) = \cos 2t \sin 2x$.

Найдем $u_1(x,t)$. Для этого разложим функцию $f(x,t) = x$ в ряд по собственным функциям $\sin nx$:

$$f(x,t) = x = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin nx, \qquad \text{где}$$

$$f_n(t) = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\pi} x \sin nx\, dx = \frac{2}{\pi} (-1)^{n+1},\ n = 1, 2, \ldots$$

Тогда $u_1(x,t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin nx$, где $T_n(t)$ — решение задачи

$$\begin{cases} T_n''(t) + nT_n(t) = \dfrac{2}{n}(-1)^{n+1},\\ T_n(0) = 0,\ T_n'(0) = 0,\ n = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

Согласно формуле (3.15)

$$T_n(t) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^t (-1)^{n+1} g_n(t-\tau)d\tau,$$

где $g_n(t)$ — решение задачи

$$\begin{cases} g_n'' + k^2 g_n = 0, \\ g_n(0) = 0,\ g_n'(0) = 1,\ n = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

Общее решение этой задачи

$$g_n(t) = c_n \cos nt + d_n \sin nt,$$
$$g_n(0) = c_n = 0,\ g_n'(0) = d_n n = 1.$$

Следовательно, $g_n(t) = \dfrac{1}{n}\sin nt$.
Тогда

$$T_n(t) = (-1)^{n+1}\frac{2}{n^2}\int\limits_0^t \sin n(t-\tau)d\tau =$$
$$(-1)^{n+1}\frac{2}{n^3}(1-\cos nt),\ n = 1, 2, \ldots$$

Тогда

$$u_1(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2}{n^3}(1-\cos nt)\sin nx.$$

Окончательно

$$u(x,t) = \cos 2t \sin 2x + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2}{n^3}(1-\cos nt)\sin nx.$$

2.3 Метод разделения переменных решения смешанных задач для гиперболических уравнений

Метод разделения переменных позволяет строить решения задач и в случаях, когда неоднородными являются уравнение и граничные условия.

Рассмотрим такую задачу:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t),\ 0 < x < l,\ t > 0, \tag{2.54}$$

$$\begin{cases} \alpha_1 u(0,t) + \beta_1 u_x(0,t) = p(t), \\ \alpha_2 u(l,t) + \beta_2 u_x(l,t) = r(t), \end{cases} \tag{2.55}$$

$$u(x,0) = \phi(x),\ u_t(x,0) = \psi(x). \tag{2.56}$$

Решение задачи (2.54)-(2.56) представим в виде

$$u(x,t) = v(x,t) + w(x,t). \tag{2.57}$$

Функцию $w(x,t)$ выберем так, чтобы для нее выполнялись граничные условия (2.55). В общем случае $w(x,t)$ будем искать в виде

$$w(x,t) = (\gamma_1 x^2 + \gamma_2 x + \gamma_3)\, p(t) + (\delta_1 x^2 + \delta_2 x + \delta_3)\, r(t), \tag{2.58}$$

где $\gamma_1,\ \gamma_2,\ \gamma_3,\ \delta_1,\ \delta_2,\ \delta_3$ — постоянные.

Приведем примеры нахождения функции $w(x,t)$. Рассмотрим граничные условия первого рода:

$$u(0,t) = p(t),$$
$$u(l,t) = r(t).$$

В этом случае $w(x,t)$ можно искать в виде $w(x,t) = (\gamma_1 x + \gamma_2)\, p(t) + (\delta_1 x + \delta_2)\, r(t)$.

$$w(0,t) = \gamma_2 p(t) + \delta_2 r(t) = p(t),$$

отсюда ясно, что $\gamma_2 = 1,\ \delta_2 = 0$.

Из граничного условия при $x = l$ получаем

$$w(l,t) = (\gamma_1 l + 1)\, p(t) + \delta_1 l\, r(t) = r(t),$$

отсюда $\gamma_1 l + 1 = 0$, то есть $\gamma_1 = -\dfrac{1}{l},\ \delta_1 l = 1$, то есть $\delta_1 = \dfrac{1}{l}$.

Окончательно получим

$$w(x,t) = \left(1 - \frac{x}{l}\right) p(t) + \frac{x}{l} r(t).$$

В следующием примере рассмотрим граничные условия второго рода:

$$u_x(0,t) = p(t),\ u_x(l,t) = r(t).$$

В этом случае $w(x,t)$ будем искать в виде

$$w(x,t) = (\gamma_1 x^2 + \gamma_2 x)\, p(t) + (\delta_1 x^2 + \delta_2 x)\, r(t).$$

Найдем $w_x(x,t)$:

$$w_x(x,t) = (2\gamma_1 x + \gamma_2)\, p(t) + (2\delta_1 x + \delta_2)\, r(t).$$

Потребуем выполнения граничных условий, то есть

$$\begin{aligned} &w_x(0,t) = \gamma_2 p(t) + \delta_2 r(t) = p(t), \\ &w_x(l,t) = (2\gamma_1 x + \gamma_2)\, p(t) + (2\delta_1 x + \delta_2)\, r(t) = r(t). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что $\gamma_2 = 1,\ \delta_2 = 0,\ \gamma_1 = -\dfrac{1}{2l},\ \delta_1 = \dfrac{1}{2l}$.

Окончательно

$$w(x,t) = \left(x - \frac{x^2}{2l}\right) p(t) + \left(\frac{x^2}{2l} + \frac{x}{2l}\right) r(t).$$

В случае, когда задают граничные условия третьего рода, $w(x,t)$ ищется в общем виде и для определения констант $\gamma_1,\ \gamma_2,\ \gamma_3,\ \delta_1,\ \delta_2,\ \delta_3$ составляется и решается система уравнений.

Получим задачу для определения функции $v(x,t)$. Для этого подставим функцию (2.57) в уравнение (2.54), граничные условия (2.55) и начальные условия (2.56).

$$v_{tt} + w_{tt} = a^2 v_{xx} + a^2 w_{xx} + f(x,t).$$

Так как функция $w(x,t)$ найдена, то w_{tt} и w_{xx} — известны.

Из граничных условий (2.55) получим

$$\alpha_1 v(0,t) + \beta_1 v_x(0,t) = p(t) - \alpha_1 w(0,t) - \beta_1 w_x(0,t) = 0,$$

так как $\alpha_1 w(0,t) + \beta_1 w_x(0,t) = p(t)$.

Аналогично

$$\alpha_2 v(l,t) + \beta_2 v_x(l,t) = r(t) - \alpha_2 w(l,t) - \beta_2 w_x(l,t) = 0,$$

так как $\alpha_2 w(l,t) + \beta_2 w_x(l,t) = r(t)$.

Получим начальные условия для функции $v(x,t)$:

$$\begin{aligned} &v(x,0) = \phi(x) - w(x,0), \\ &v_t(x,0) = \psi(x) - w_t(x,0). \end{aligned}$$

Введем обозначения:

$$\begin{aligned} &\tilde{f}(x,t) = f(x,t) + a^2 w_{xx} - w_{tt}, \\ &\tilde{\phi}(x,t) = \phi(x) - w(x,0), \\ &\tilde{\psi}(x,t) = \psi(x) - w_t(x,0). \end{aligned}$$

Тогда $v(x,t)$ определяется как решение задачи

$$v_{tt} = a^2 v_{xx} + \tilde{f}(x,t), \tag{2.59}$$

$$\begin{cases} \alpha_1 v(0,t) + \beta_1 v_x(0,t) = 0, \\ \alpha_2 v(l,t) + \beta_2 v_x(l,t) = 0, \end{cases} \tag{2.60}$$

$$v(x,0) = \tilde{\phi}(x),\ v_t(x,0) = \tilde{\psi}(x). \tag{2.61}$$

Нахождение задачи (2.59)-(2.61) приведено в п. 3.

Рассмотрим примеры.

Пример 1. Решим задачу

$$u_{tt} = u_{xx},\ 0 < x < \pi,\ t > 0,$$

$$\begin{cases} u(0,t) = t, \\ u_x(\pi,t) = 1 \text{ — граничные условия,} \end{cases}$$

$$u(x,0) = \sin\frac{x}{2},\ u_t(x,0) = 1 \text{ — начальные условия.}$$

Решение задачи ищем в виде

$$u(x,t) = v(x,t) + w(x,t).$$

$w(x,t) = (\gamma_1 x + \gamma_2)\,t + (\delta_1 x + \delta_2)\cdot 1$ — функция, удовлетворяющая граничным условиям. $w(0,t) = \gamma_2 x + \delta_2 = t$, откуда получаем $\gamma_2 = 1,\ \delta_2 = 0$, то есть $w(x,t) = (\gamma_1 x + 1)\,t + \delta_1 x$.

Потребуем выполнения второго граничного условия. Найдем $w_x(x,t) = \gamma_1 t + \delta_1,\ w_x(\pi,t) = \gamma_1 t + \delta_1 = 1$, откуда $\gamma_1 = 0,\ \delta_1 = 1$.

Окончательно $w(x,t) = x + t$.

Построим задачу для нахождения функции $v(x,t)$:

$$v_{tt} = v_{xx} - w_{tt} + w_{xx}.$$

Так как $w_{xx} = w_{tt} = 0$, то уравнение для $v(x,t)$

$$v_{tt} = v_{xx},\ 0 < x < \pi,\ t > 0.$$

В силу выбора функции $w(x,t)$ граничные условия для $v(x,t)$:

$$\begin{aligned} &v(0,t) = 0, \\ &v_x(\pi,t) = 0. \end{aligned}$$

Получили начальные условия для $v(x,t)$.

$$\begin{aligned} &v(x,0) = \sin\frac{x}{2} - w(x,0) = \sin\frac{x}{2} - x, \\ &v_t(x,0) = 1 - w_t(x,0) = 0. \end{aligned}$$

Найдем $v(x,t) = X(x)\,T(t)$. При разделении пременных получаем задачу на собственные значения

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0, \\ X(0) = 0, \ X'(\pi) = 0. \end{cases}$$

Решение этой задачи $\lambda_n = \left(\dfrac{2n+1}{2}\right)^2, \ X_n(x) = \sin\dfrac{2n+1}{2}x, \ n = 0, 1, \ldots$

Для функции $T(t)$ получаем

$$\begin{aligned} &T_n(t) + \lambda_n T(t) = 0, \\ &T_n(0) = \phi_n, \\ &T_n'(0) = \psi_n, \end{aligned}$$

где $\phi(x) = \sin\dfrac{x}{2} - x = \phi_1(x) + \phi_2(x), \ \psi(x) = 0.$

Разложим функции $\phi(x)$ и $\psi(x)$ в ряды по собственным функциям $X_n(x) = \sin\dfrac{2n+1}{2}x$, получим

$$\phi_{1\,n} = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ 0, & n \neq 0, \end{cases}$$

$$\phi_{2\,n} = -\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi x\sin\frac{2n+1}{2}x\,dx = \frac{8(-1)^{n+1}}{\pi(2n+1)^2}.$$

$\psi(x) = 0$, следовательно $\psi_n = 0, \ n = 0, 1, \ldots$

Тогда

$$T_n(t) = A_n\cos\frac{2n+1}{2}t + B_n\sin\frac{2n+1}{2}t,$$

где

$$A_{1\,n} = \phi_n, \ A_{2\,n} = \frac{8(-1)^{n+1}}{\pi(2n+1)^2}, \ n = 0, 1, \ldots$$

Общее решение исходной задачи имеет вид

$$u(x,t) = x + t + \cos\frac{t}{2}\sin\frac{x}{2} + \frac{8}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)^2}\cos\frac{(2n+1)t}{2}\sin\frac{(2n+1)x}{2}.$$

Пример 2.

$$\begin{aligned} &u_{tt} = u_{xx}, \ 0 < x < l, \ t > 0, \\ &u_x(0,t) = t, \ u(l,t) = t^2, \\ &u(x,0) = x, \ u_t(x,0) = x. \end{aligned}$$

Найдем $w(x,t) = (\gamma_1 x + \gamma_2)\,t + (\delta_1 x + \delta_2)\,t^2, \ w_x(x,t) = \gamma_1 t + \delta_1 t^2.$

Из граничных условий получим $w_x(0,t) = \gamma_1 t + \delta_1 t^2 = t$, отсюда $\gamma_1 = 1, \ \delta_1 = 0$, тогда $w(x,t) = (x+\gamma_2)t + \delta_2 t^2, \ w(l,t) = (\gamma_2 + l)\,t + \delta_2 t^2 = t^2$, отсюда $\delta_2 = 1, \gamma_2 = -l$.

Окончательно $w(x,t) = (x-l)\,t + t^2$.

Перестроим задачу для $v(x,t)$:

$$\begin{aligned}
&v_{tt} = v_{xx} + w_{xx} - w_{tt} = v_{xx} - 2,\\
&v_x(0,t) = 0,\ v(l,t) = 0,\\
&v(x,0) = x - w_t(x,0) = x,\\
&v_t(x,0) = x - w_t(x,0) = l.
\end{aligned}$$

Найдем $v(x,t) = v_1(x,t) + v_2(x,t)$.
$v_1(x,t)$ — решение неоднородного уравнения с нулевыми начальными условиями

$$\begin{aligned}
&v_{1\,tt} = v_{1\,xx} - 2,\\
&v_{1\,x}(0,t) = 0,\ v_1(l,t) = 0,\\
&v_1(x,0) = 0,\ v_{1\,t}(x,0) = 0.
\end{aligned}$$

$v_2(x,t)$ — решение задачи

$$\begin{aligned}
&v_{2\,tt} = v_{2\,xx},\\
&v_{2\,x}(0,t) = 0,\ v_2(l,t) = 0,\\
&v_2(x,0) = x,\ v_{2\,t}(x,0) = l.
\end{aligned}$$

Для нахождения построим задачу на собственные значения

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0,\\ X'(0) = 0,\ X(l) = 0. \end{cases}$$

Решением этой задачи являются

$$\lambda_n = \left(\frac{(2n+1)\pi}{2l}\right)^2,\ \text{и}\ X_n(x) = \cos\frac{(2n+1)\pi}{2l}x,\ n = 0, 1, \ldots$$

Общее решение

$$v_2(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\frac{(2n+1)\pi}{2l}t + B_n\sin\frac{(2n+1)\pi}{2l}t\right)\cos\frac{(2n+1)\pi}{2l}x,$$

где

$$A_n = \phi_n, B_n = \frac{2l}{(2n+1)\pi}\,\psi_n.$$

Найдем ϕ_n и ψ_n.

$$\phi_n = \frac{2}{l}\int\limits_0^l x\cos\frac{(2n+1)\pi}{2l}x\,dx = 2\left((-1)^n - \frac{4l}{(2n+1)^2\pi^2}\right),\ n = 0, 1, \ldots$$

$$\psi_n = \frac{2}{l}\int\limits_0^l l\cos\frac{(2n+1)\pi}{2l}x\,dx = \frac{4l}{(2n+1)\pi}(-1)^n,\ n = 0, 1, \ldots$$

Функцию $v_1(x,t)$ ищем в виде

$$v_1(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t)\cos\frac{(2n+1)\pi}{2l}x.$$

$T_n(t)$ удовлетворяет уравнению

$$T_n'' + \frac{(2n+1)\pi}{2l} T_n = f_n(t), \ n = 0, 1, \dots$$

и начальным условиям

$$T_n(0) = 0, \ T_n'(0) = 0.$$

Найдем $f_n(t)$

$$f_n(t) = \frac{2}{l} \int\limits_0^l (-2) \cos \frac{(2n+1)\pi}{2l} x \, dx = \frac{8}{(2n+1)\pi} (-1)^{n+1}.$$

Тогда

$$T_n(t) = \int\limits_0^t g_n(t-\tau) \frac{8}{(2n+1)\pi} (-1)^{n+1} \tau \, d\tau.$$

Здесь $g_n(t) = \dfrac{2l}{(2n+1)\pi} \sin \dfrac{(2n+1)\pi}{2l} t.$

$$T_n(t) = \frac{16l}{(2n+1)^2\pi^2} (-1)^{n+1} \int\limits_0^t \sin \frac{(2n+1)\pi}{2l} (t-\tau) d\tau =$$

$$= \frac{32l^2}{(2n+1)^3\pi^3} (-1)^{n+1} \left(1 - \cos \frac{(2n+1)\pi}{2l} t\right).$$

Таким образом, решение исходной задачи принимает вид

$$u(x,t) = (x-l)\, t + t^2 +$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{32l^2}{(2n+1)^3\pi^3} \left(1 - \cos \frac{(2n+1)\pi}{2l} t\right) \cos \frac{(2n+1)\pi}{2l} x +$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} \left(\left(2(-1)^n - \frac{8l}{(2n+1)^2\pi^2} \right) \cos \frac{(2n+1)\pi}{2l} t \ + \right.$$

$$\left. + \ \frac{8l^2}{(2n+1)^2\pi^2} (-1)^n \sin \frac{(2n+1)\pi}{2l} t \right) \cos \frac{(2n+1)\pi}{2l} x.$$

Пример 3.

$$\begin{aligned} &u_{tt} = u_{xx}, \ 0 < x < \pi, \ t > 0, \\ &u(0,t) = t^2, \ u(\pi,t) = t^3, \\ &u(x,0) = \sin x, \ u_t(x,0) = 0. \end{aligned}$$

Ответ:

$$u(x,t) = \left(1 - \frac{x}{\pi}\right) t^2 + \frac{x}{\pi} t^3 + \sin x \cos x +$$

$$+ \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \left((-1)^n 3t - 1 + \cos nt - \frac{(-1)^n 3}{n} \sin nt \right) \sin nx.$$

Пример 4.

$$u_{tt} = u_{xx},\ 0 < x < \pi,\ t > 0,$$
$$u_x(0,t) = e^{-t},\ u(\pi,t) = t,$$
$$u(x,0) = \sin x \cos x,\ u_t(x,0) = 1.$$

Ответ:

$$u(x,t) = \left(1 - \frac{x}{\pi}\right) e^{-t} + \frac{xt}{\pi} + \frac{1}{2}\cos 2t \sin 2x -$$
$$- \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(1+n^2)} \left(e^{-t} + n^2 \cos nt - \left(2n + \frac{1}{n}\right)\sin nt\right) \sin nx.$$

Пример 5.

$$u_{tt} = u_{xx},\ 0 < x < 1,\ t > 0,$$
$$u(0,t) = t + 1,\ u(1,t) = t^3 + 2,$$
$$u(x,0) = x + 1,\ u_t(x,0) = 0.$$

Ответ:

$$u(x,t) = t + 1 + x(t^3 - t + 1) +$$
$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{\pi^2 n^2} \left(\frac{6(-1)^{n+1}}{\pi^2 n^2} - 1 \right) \sin \pi n t + \frac{(-1)^n 12t}{\pi^3 n^3} \right) \sin \pi n x.$$

Литература

[1] *Владимиров, В.С.* Уравнения математической физики : учебник для вузов / В.С. Владимиров, В.В. Жаринов. - 2-е изд., стер. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008. - 400 с.

[2] Курс математического анализа: в 3 т. / Л.Д. Кудрявцев. – М.: Дрофа, 2003. – Т.1: Дифференциальное и интегральное исчисление функций одной переменной. - 2003. - 702, с.

[3] *Карчевский, М.М.* Лекции по уравнениям математической физики / М.М. Карчевский. — 4-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2023. — 164 с.

[4] *Михайлов В.П.* Дифференциальные уравнения в частных производных/ В.П. Михайлов. — М.: Наука, 1983. - 424 с.

[5] *Тихонов А.Н.* Уравнения математической физики/ А.Н. Тихонов, А.А Самарский. - 5-е изд., стер. — М.: Наука, 1977. - 736 с.

[6] Сборник задач по уравнениям математической физики : учебное пособие / В.С. Владимиров, В.П. Михайлов, Т.В. Михайлова, М.И. Шабунин. — 4-е, изд. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2016. — 520 с.

[7] *Смирнов М.М.* Задачи по уравнениям математической физики/ М.М. Смирнов. - 6-е изд., доп. - М.: Наука, 1975. - 127 с.

[8] *Бицарзе А.В.* Сборник задач по уравнениям математической физики/А.В. Бицарзе, Д.Ф. Калиниченко. — М.: Наука, 1977. -224с.

[9] *Бадриев И.Б.* Метод разделения переменных решения краевых задач для гиперболических уравнений: учебное пособие/ И.Б. Бадриев, В.Л. Гнеденкова. — Казань: Казанский университет, 2018 - 35 с.