ФГАОУ ВО «Казанский (Приволжский) федеральный университет»
Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского
Кафедра компьютерной математики и информатики

Д.И. МАХМУТОВА, Н.А. ОПОКИНА

Практикум по решению профессионально ориентированных задач математического анализа

для студентов высших учебных заведений, обучающихся по экономическим специальностям

Учебно-методическое пособие

Казань – 2024

УДК 330.4

Печатается по решению
Редакционно-издательского совета ФГАОУ ВО
«Казанский (Приволжский) федеральный университет»
методической комиссии Института математики и механики им. Н.И. Лобачевского
Протокол № 7 от 16.05.2024 г.

Рецензенты:
к.тех.н., доц. КФУ А.Г. Багоутдинова

Махмутова Д.И., Опокина Н.А.
Практикум по решению профессионально ориентированных задач математического анализа для студентов высших учебных заведений, обучающихся по экономическим специальностям**.** Учебно-методическое пособие / Махмутова Д.И., Опокина Н.А. **-** Казань: Казанский федеральный университет, 2024 г. – 100 с.

Данное учебно-методическое пособие предназначено для студентов, обучающихся по направлениям подготовки 38.03.01 «Экономика», 38.05.01 «Экономическая безопасность» и 38.03.02 «Менеджмент».
Пособие включает необходимые теоретические сведения, используемые при решении задач, подробно разобранные решения типовых задач, а также профессионально ориентированные практические задания с экономическим содержанием и задания для самостоятельного решения, которые могут быть использованы в качестве аудиторной и внеаудиторной работы студентов.
Для усвоения материала данного пособия достаточно владения основными понятиями дисциплины «Математический анализ». Данное пособие будет полезно всем желающим овладеть методикой решения задач математического анализа с экономическим содержанием.

© Казанский федеральный университет, 2024
© Махмутова Д.И., Опокина Н.А., 2024

Содержание

Введение

В настоящем пособии дается краткое изложение некоторых разделов математического анализа и основ дифференциальных уравнений, изучаемых в рамках курса «Математика», читаемого авторами пособия в Институте управления, экономики и финансов Казанского федерального университета, применительно к экономике.

Каждый параграф данного учебно-методического пособия содержит краткие теоретические сведения, примеры решения к изложенному теоретическому материалу, примеры приложения рассматриваемой темы в экономике, задания для самостоятельной работы. В пособии приведены только математические задачи, имеющие экономическое содержание. В конце пособия приводится контрольная работа, содержащая 10 вариантов.

Учебно-методическое пособие может быть использовано при проведении аудиторной и самостоятельной работы студентов экономических специальностей университета.

В тексте далее приняты следующие экономические обозначения:

D, q^D (demand) – спрос, величина спроса

S, q^S (supply) – предложение, величина предложения

Q, q (quantity) – количество

P, p (price) – цена

C (cost) – стоимость

R (revenue) – доход

Π (profit) – прибыль

I (income) – доход

U (utility) – полезность

M (marginal) – маргинальный (предельный)

T (total) – общая

F (fixed) – постоянный

V (variable) – переменный

A (average) – средний

FC (fixed cost) – постоянные издержки

VC (variable cost) – переменные издержки

TC (total cost) – общие издержки

AC (average cost) – средние издержки

MC (marginal cost) – предельные издержки

TR (total revenue) – общий доход

AR (average revenue) – средний доход

MR (marginal revenue) – предельный доход

TU (total utility) – общая полезность

MU (marginal utility) – предельная полезность

P (product) – объем производства

L (labour) – труд

K (kapital, нем.) – капитал

Литература

1. Высшая математика для экономического бакалавриата: учебник и практикум / Н. Ш. Кремер, Б.А. Путко, И.М. Тришин, М.Н. Фридман – М.: ИД Юрайт, 2016 – 909 с.
2. Задачи по математике для экономистов: Методические указания / сост.: Н. Г. Дементьева, В. Ф. Казак, И. Э. Симонова – Волгоград, 2007. – 35 с.
3. Ильин В.А. Основы математического анализа./ Ильин В.А., Позняк Э.Г. – М.: Наука, 1982 – 616 с.
4. Кремер Н.Ш. Математика для экономистов: от Арифметики до Эконометрики: Учебно-справочное пособие / Н.Ш. Кремер, Б.А. Путко, И.М. Тришин – М.: ИД Юрайт, 2014. – 724 с.
5. Красс, М.С. Математика для экономистов / М.С. Красс, Б.П. Чупрынов. – СПб.: Питер, 2010. – 464 с.
6. Математика в экономике / А.С. Солодовников и др. – М.: Финансы и статистика, 2013. – 560 с.
7. Монако Т.П. Задачи экономического содержания и математический анализ./ Т.П. Монако – Ульяновск: Зебра, 2016. – 99 с.

§1. ПРЕДЕЛ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ. ФУНКЦИИ, ПРИМЕНЯЕМЫЕ В ЭКОНОМИКЕ

Определение. Если каждому числу n из натурального ряда чисел $1, 2, 3, \ldots, n$ поставлено в соответствие вещественное число x_n, то множество занумерованных вещественных чисел

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots \tag{1.1}$$

называется – ***числовой последовательностью*** или просто последовательностью. Числа $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$ называются ***элементами*** или ***членами последовательности*** (1.1), символ x_n – ***общим элементом*** или ***общим членом последовательности***, а число n – его ***номером***. Сокращенно последовательность (1.1) будем обозначать символом $\{x_n\}$.

Определение. Число а называется ***пределом последовательности*** $\{x_n\}$, если для любого положительного числа ε существует такой номер N, что при всех $n > N$ выполняется неравенство

$$|x_n - a| < \varepsilon. \tag{1.2}$$

Последовательность, имеющая предел, называется ***сходящейся***. Если последовательность имеет своим пределом число a, то это записывается так: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ или $x_n \to a$ при $n \to \infty$. Последовательность, не имеющая предела, называется ***расходящейся***.

Определение. Последовательность $\{x_n\}$ называется ***бесконечно большой***, если для любого положительного числа А можно указать номер N такой, что при $n \geq N$ все элементы x_n этой последовательности удовлетворяют неравенству $|x_n| > A$.

Рассмотрим последовательность $\{x_n\}$, общий член которой выражается формулой

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

В курсе математического анализа доказывается, что эта последовательность монотонно возрастает и имеет предел. Этот предел называют числом e. Следовательно, по определению

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \tfrac{1}{n}\right)^n. \tag{1.3}$$

Определение. Пусть X и $У$ – некоторые числовые множества и пусть каждому элементу $x \in X$ по какому-либо закону f поставлен в соответствие один элемент $y \in У$. Тогда будем говорить, что определена ***функциональная зависимость*** y от x по закону $y = f(x)$. При этом x называют ***независимой переменной*** (или ***аргументом***), y – ***зависимой***

переменной, множество X – ***областью определения*** (существования) функции, множество $У$– ***областью значений (изменения) функции***.

Определение. Число a называется ***пределом функции*** $y = f(x)$ в точке x_0 (или пределом функции при $x \to x_0$), если для любой сходящейся к x_0 последовательности $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$ значений аргумента x, отличных от x_0, соответствующая последовательность $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), \dots$ значений функции $f\,(x)$ сходится к a.

Это записывают так:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a \text{ или } f(x) \to a \text{ при } x \to x_0.$$

Определение. Число a называется ***пределом функции*** $y = f(x)$ при $x \to +\infty$ ($x \to -\infty$), если для любой бесконечно большой последовательности значений аргумента, элементы которой, начиная с некоторого номера, положительны (отрицательны), соответствующая последовательность значений функции сходиться к a. И записывают так:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = a \quad \left(\lim_{x \to -\infty} f(x) = a\right).$$

Если при $x \to +\infty$ и при $x \to -\infty$ функция стремится к одному и тому же числу a, то для всех значений x, достаточно больших по абсолютной величине, соответствующие значения $f(x)$ как угодно мало отличаются от числа a. Это записывают так:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = a.$$

Определение. Число a называется ***правым* (*левым*) *пределом функции*** $y = f(x)$ в точке x_0, если для любой сходящейся к x_0 последовательности $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$ значений аргумента x, элементы x_n которой больше (меньше) x_0, соответствующая последовательность $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), \dots$ значений функций сходится к a.

Для правого предела функции используется обозначение

$$\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = a,$$

для левого предела функции –

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = a.$$

Определение. Функция $y = f(x)$ называется ***непрерывной*** в точке x_0, если предельное значение этой функции в точке x_0 существует и равно значению $f(x_0)$.

Определение. Прямая $x = a$ является ***вертикальной асимптотой*** графика функции $y = f(x)$, если хотя бы одно из предельных значений $\lim_{x \to a+0} f(x)$ или $\lim_{x \to a-0} f(x)$ равно $+\infty$ или $-\infty$.

Определение. Прямая $y = kx + b$ называется наклонной асимптотой графика функции $y = f(x)$ при $x \to \pm\infty$, если функция $f(x)$ представима в виде

$$f(x) = kx + b + \alpha(x),$$

где $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \alpha(x) = 0$.

Определение. ***Производственной функцией*** называется экономико-математическое количественная зависимость, связывающее результаты производственной деятельности с влияющими на эти результаты показателями.

Определение. Функция, устанавливающая зависимость спроса q на данный товар от его цены p, называется ***функцией спроса***.

Определение. Функция, устанавливающая зависимость цены товара p от спроса на данный товар q, называется ***функцией цен спроса***.

Определение. Зависимость предложения какого-либо товара q от его цены p называют ***функцией предложения***.

Определение. Функция, устанавливающая зависимость цены товара p от предложения на данный товар q называют ***функцией цен предложения***.

Для обозначения функций спроса и предложения, введем верхние индексы «*D*» (от англ. «Demand» – спрос) и «*S*» (от англ. «Supply» – предложение). То есть функцию спроса будем обозначать через $q^D = q^D(p)$, функцию предложения – $q^S = q^S(p)$. Аналогичное обозначение введем и для функции цен спроса – $p^D = p^D(q)$, и функции цен предложения – $p^S = p^S(q)$.

Пример. Пусть функция спроса на товар имеет вид: $q^D(p) = 9 - p$. Найти область определения этой функции.

Решение. В функции спроса цена p и спрос на данный товар принимают неотрицательные значения. Отсюда

$$\begin{cases} p \ge 0, \\ q^D(p) \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p \ge 0, \\ 9 - p \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p \ge 0, \\ 9 \ge p \end{cases} \Leftrightarrow p \in [0; 9].$$

Кривые, которые задаются функциями спроса и предложения, называются ***кривыми спроса и предложения***, соответственно. При постоянной покупательской способности чем меньше цена, тем больше спрос. В свою очередь предложение растет с увеличением цены на товар.

Для экономики представляет интерес условие равновесия, т.е. когда спрос равен предложению; это условие задается уравнением

$$q^D(p) = q^S(p) \tag{1.4}$$

и соответствует точке пересечения кривых q^D и q^S – это так называемая ***точка рыночного равновесия*** (рис.1). Цена p^*, при которой выполнено условие (1.4), называется ***равновесной***, а значение q^* ***равновесным количеством***.

При увеличении благосостояния населения кривая спроса D поднимается вверх и получается кривая спроса D'. В этом случае точка равновесия смещается вправо, при этом равновесная цена p^* на товар возрастает ($p^{*\prime}$) при неизменной кривой предложения S.

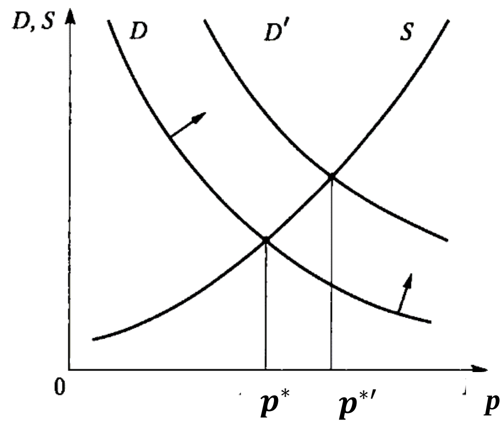


Рис.1

Пример. Пусть $q^D(p) = 10 - p$ функция спроса, $q^S(p) = 2p - 5$ функция предложения. Найти равновесную цену и равновесное количество.

Решение. Условие равновесия: $q^D(p) = q^S(p)$. Найдем равновесную цену:

$$10 - p = 2p - 5,$$

$$3p = 15,$$

$$p^* = 5.$$

Теперь равновесное количество спроса и предложения: $q^* = q^D(5) = 5$. Итак, $p^* = 5, q^* = 5$.

Определение. Функция, определяющая зависимость между издержками производства определенного товара и объемом производства, называется функцией ***полных издержек (затрат)***. Если через TC обозначить полные издержки производства q единиц продукции, то функцию полных издержек можно записать в виде: $TC = TC(q), q \in [0; +\infty)$.

Определение. Издержки, которые не зависят от объема производства q, называются ***постоянными издержками*** и обозначаются через FC. Издержки, которые зависят от объема производства q, называются ***переменными издержками*** и обозначаются через VC.

То есть функция полных издержек равна $TC(q) = FC + VC(q)$.

Определение. ***Средние затраты*** (или издержки на единицу продукции) определяются как

$$AC(q) = \frac{TC(q)}{q} \qquad (1.5)$$

Заметим, что с помощью формулы (1.5) можно находить среднее значение любой производственной функции. В этом случае заменяем функцию полных издержек на нужную. Например, средние постоянные издержки находятся, как

$$AFC(q) = \frac{FC}{q} ;$$

а средние переменные

$$AVC(q) = \frac{VC(q)}{q}.$$

Пример. Пусть зависимость полных издержек производства от объема производимой продукции выражается формулой $TC(q) = 30e^{1,8q} + 6q + 550$. Найти постоянные, переменные и средние издержки.

Решение. Найдем постоянные издержки:

$FC = TC(0) = 30 \cdot e^{1,8\cdot 0} + 6 \cdot 0 + 550 = 30 \cdot e^0 + 0 + 550 = 30 + 550 = 580.$

Переменные издержки:

$VC(q) = TC(q) - FC = 30e^{1,8q} + 6q + 550 - 580 = 30e^{1,8q} + 6q - 30.$

Средние издержки

$$AC(q) = \frac{TC(q)}{q} = \frac{30e^{1,8q} + 6q + 550}{q} = 30 \cdot \frac{e^{1,8q}}{q} + 6 + \frac{550}{q}.$$

Определение. Пусть задана функция спроса $q^D = q^D(p)$. Тогда ***суммарная (полная) выручка*** продавца или же суммарные расходы покупателя равны $TR(p) = q^D(p) \cdot p$.

В случае, если задана функция цен спроса $p^D = p^D(q)$, то функция выручки будет иметь вид: $TR(q) = p^D(q) \cdot q$.

Определение. Пусть q – количество произведенной продукции, $TR = TR(q)$ - функция выручки, $TC = TC(q)$ – функция полных издержек. ***Прибыль предприятия*** $\Pi(q)$

определяется как разность между полной выручкой $TR(q)$, полученной от реализации произведенной продукции, и полными издержками $TC(q)$, затрачиваемые на производство этой продукции:

$$\Pi(q) = TR(q) - TC(q).$$

Прибыль предприятия может также обозначаться, как $\pi = \pi(q)$.

Условие получения прибыли: $TR(q) > TC(q)$.

Определение. ***Точка безубыточности*** – это объём производства и реализации продукции, при котором расходы будут компенсированы доходами, а при производстве и реализации каждой последующей единицы продукции предприятие начинает получать прибыль.

Точка безубыточности находится из условий: $TR(q) = TC(q)$ или $\Pi(q) = 0$.

Применение пределов в экономике

Пример 1. Формула сложных процентов имеет вид

$$Q_n = Q_0\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n, \tag{1.6}$$

где Q_0 – первоначальная сумма вклада в банк, p – процент начисления за определенный период времени (месяц, год), n – количество периодов времени хранения вклада, Q_n – сумма вклада по истечении n периодов времени. Формулы типа (1.6) используются также в демографических расчетах (прирост народонаселения) и в прогнозах экономики (увеличение валового национального продукта).

Пусть первоначальный депозит Q_0 помещен в банк под p = 100% годовых, тогда через год сумма депозита составит $2Q_0$. Предположим, что через полгода счет закроется с результатом

$$Q_1 = Q_0\left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}Q_0$$

и эта сумма будет вновь помещена в качестве депозита в том же банке. В конце года депозит будет составлять

$$Q_2 = Q_0\left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = 2{,}25Q_0.$$

Будем уменьшать срок размещения депозита в банке при условии его последующего размещения после изъятия. При ежеквартальном повторении этих операций депозит в конце года составит

$$Q_4 = Q_0 \left(1 + \frac{1}{4}\right)^4 = 2{,}44 Q_0.$$

Если повторять операцию изъятие-размещение в течение года сколько угодно раз, то при ежемесячном манипулировании сумма за год составит

$$Q_{12} = Q_0 \left(1 + \frac{1}{12}\right)^{12} \approx 2{,}61 Q_0;$$

при ежедневном посещении банка

$$Q_{365} = Q_0 \left(1 + \frac{1}{365}\right)^{365} \approx 2{,}714 Q_0;$$

при ежечасном –

$$Q_{8720} = Q_0 \left(1 + \frac{1}{8720}\right)^{8720} \approx 2{,}718 Q_0$$

и т.д. Нетрудно видеть, что последовательность значений возрастания первоначального вклада $\{q_n\} = \{Q_n/Q_0\}$ как раз совпадает с последовательностью, пределом которой является число *e* при $n \to \infty$ согласно (1.3). Таким образом, доход, который можно получить при непрерывном начислении процентов, может составить за год не более чем

$$\lim_{n\to\infty}(Q_n - Q_0) \cdot 100\% / \, Q_0 = (e-1)100\% \approx 172\%.$$

В общем случае, если *p* – процент начисления и год разбит на *n* частей, то через *t* лет сумма депозита достигнет величины

$$Q_{nt} = Q_0 \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt},$$

где *r* = *p*/100. Это выражение можно преобразовать:

$$Q_{nt} = Q_0 \left[\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{\frac{n}{r}}\right]^{rt}.$$

Мы можем ввести новую переменную $m = \frac{n}{r}$ при $n \to \infty$ получим $m \to \infty$, или

$$Q_t = Q_0 \lim_{n\to\infty} Q_{nt} = \lim_{m\to\infty} Q_0 \left[\left(1 + \frac{1}{m}\right)^{m}\right]^{rt} = Q_0 e^{rt}.$$

Расчеты, выполненные по этой формуле, называют ***вычислениями по непрерывным процентам.***

Пример 2. Паутинная модель рынка. Рассмотрим простейшую задачу поиска равновесной цены. Это одна из основных проблем рынка, означающая фактически торг между производителем и покупателем (рис. 2).

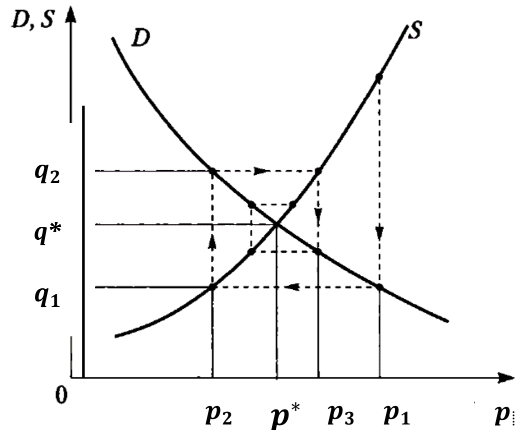


Рис. 2

Пусть сначала цену p_1 называет производитель (в простейшей схеме он же и продавец). Цена p_1 на самом деле выше равновесной (естественно, всякий производитель стремится получить максимум выгоды из своего производства). Покупатель оценивает спрос q_1 при этой цене и определяет свою цену p_2, при которой этот спрос q_1 равен предложению. Цена p_2 ниже равновесной (всякий покупатель стремится купить подешевле). В свою очередь производитель оценивает спрос q_2, соответствующий цене p_2, и определяет свою цену p_3, при которой спрос равен предложению; эта цена выше равновесной. Процесс торга продолжается и при определенных условиях приводит к устойчивому приближению к равновесной цене, т.е. к ***"скручиванию"*** спирали. Если рассматривать последовательность чисел, состоящую из называемых в процессе торга цен, то она имеет своим пределом равновесную цену p^*:

$$\lim_{n\to\infty} p_n = p^* .$$

Пример. В паутинной модели рынка даны функции спроса $q^D(p) = 18 - \frac{3}{2}p$, функция предложения $q^S(p) = p - 2$ и начальная цена $p_0 = 10$. Найти координаты точки рыночного равновесия и несколько первых узлов ломаной $\{(q_n, p_n), (q_{n+1}, p_n)\}$. Получить общую формулу для $p_n, n = 0, 1, 2, \ldots$ Найти $\lim\limits_{n\to\infty} p_n$.

Решение. Для нахождения точки рыночного равновесия приравняем $q^D(p)$ и $q^S(p)$:

$$18 - \frac{3}{2}p = p - 2.$$

Тогда $p^* = 8, q^* = 6$.

Начальное количество товара находим из функции спроса $q_0 = q^D(10) = 18 - \frac{3}{2} \cdot 10 = 3$. Текущая цена p_n определяется текущим спросом q_n: $q_n = 18 - \frac{3}{2} p_n$, откуда $p_n = 12 - \frac{2}{3} q_n$. Количество товара q_{n+1}, которое будет выпущено в следующем году, определяется функцией предложения, зависящей от текущей цены: $q_{n+1} = p_n - 2$.

Теперь последовательно находим точки ломаной:

$$q_1 = p_0 - 2 = 8, p_1 = 12 - \frac{2}{3} q_1 = \frac{20}{3},\ q_2 = p_1 - 2 = \frac{14}{3}, p_2 = 12 - \frac{2}{3} q_2 = \frac{80}{9},$$

$$q_3 = p_2 - 2 = \frac{62}{9}, p_3 = 12 - \frac{2}{3} q_3 = \frac{200}{27}.$$

Итого мы получили следующие точки ломаной:

$$(3, 10), (8, 10), \left(8, \frac{20}{3}\right), \left(\frac{14}{3}, \frac{20}{3}\right), \left(\frac{14}{3}, \frac{80}{9}\right), \left(\frac{62}{9}, \frac{80}{9}\right), \left(\frac{62}{9}, \frac{200}{27}\right).$$

Получим общую формулу для p_n:

$$p_n = 12 - \frac{2}{3} q_n = 12 - \frac{2}{3}(p_{n-1} - 2) = \frac{40}{3} - \frac{2}{3} p_{n-1} = \frac{40}{3} - \frac{2}{3}\left(\frac{40}{3} - \frac{2}{3} p_{n-2}\right) =$$

$$= \frac{40}{3} + \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \frac{40}{3} + \left(-\frac{2}{3}\right)^2 \cdot p_{n-2} = \frac{40}{3} + \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \frac{40}{3} + \left(-\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{40}{3} - \frac{2}{3} p_{n-3}\right) =$$

$$= \frac{40}{3} + \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \frac{40}{3} + \left(-\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \frac{40}{3} + \left(-\frac{2}{3}\right)^3 \cdot p_{n-3} = \cdots$$

$$= \frac{40}{3} + \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \frac{40}{3} + \left(-\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \frac{40}{3} + \cdots + \left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1} \cdot \frac{40}{3} + \left(-\frac{2}{3}\right)^n \cdot p_0 =$$

$$= \frac{40}{3}\left(1 + \left(-\frac{2}{3}\right) + \left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \cdots + \left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right) + \left(-\frac{2}{3}\right)^n \cdot p_0 =$$

$$= \frac{40}{3} \cdot \left(\frac{1 - \left(-\frac{2}{3}\right)^n}{1 + \frac{2}{3}}\right) + \left(-\frac{2}{3}\right)^n \cdot 10 = 8 \cdot \left(1 - \left(-\frac{2}{3}\right)^n\right) + \left(-\frac{2}{3}\right)^n \cdot 10 = 8 + \left(-\frac{2}{3}\right)^n \cdot 2.$$

Аналогично можно получить общую формулу для q_n:

$$q_n = 6 - \left(-\frac{2}{3}\right)^n \cdot 3.$$

Из полученных формул видно, что

$$\lim_{n \to \infty} p_n = \lim_{n \to \infty} \left(8 + \left(-\frac{2}{3}\right)^n \cdot 2\right) = 8 = p^*,$$

$$\lim_{n \to \infty} q_n = \lim_{n \to \infty} \left(6 - \left(-\frac{2}{3}\right)^n \cdot 3\right) = 6 = q^*.$$

Задания для самостоятельной работы

1.1. Зависимость уровня потребления некоторого товара первой необходимости от доходов семьи выражается формулой:

$$y = 22{,}4 - \frac{169}{x + 15}.$$

Установите уровень насыщения[1] при потреблении указанного товара с неограниченным ростом доходов.

1.2. Исследовать поведение функции спроса

$$q^D(p) = \frac{100}{3p + 5}$$

при увеличении цены.

1.3. Имея сумму 50000 руб., вкладчик обратился в банк, выплачивающий 5,8% годовых при непрерывном начислении процентов. Найти размер вклада через 5 лет.

1.4. Найти асимптоты для производственной функции

$$y(x) = \left(1 + \frac{5}{x^3}\right)^{-\frac{1}{3}},$$

где $x > 0$.

1.5. Даны функции спроса на некоторые товары в зависимости от дохода:

1) $q^D(p) = \dfrac{3p}{p + 4}$;

2) $q^D(p) = \dfrac{12p^2 - 6p}{p + 1}$;

3) $q^D(p) = \dfrac{8p^2 + 16p}{p^2 + 2}$;

4) $q^D(p) = \dfrac{2p - 4}{p + 3}$.

Найти асимптоты этих функций. Указать точки насыщения.

1.6. Функция спроса на товар имеет вид:

1) $q^D(p) = \dfrac{7 - p}{2}$;

---

[1] О насыщении потребности говорят, если потребление данного товара перестает увеличиваться при любом увеличении дохода. Графически насыщение можно изобразить в виде кривой спроса, которая с ростом доходов стремится к некоторому пределу, называемому ***уровнем*** или ***точкой насыщения***.

2) $q^D(p) = \dfrac{100}{p+8} - 3$;

3) $q^D(p) = 5p^{-2} + 10$;

4) $q^D(p) = 20e^{-3p^2}$.

Изобразить области определения этих функций

1.7. Найти постоянные, переменные, средние издержки для полных издержек производства от объема производимой продукции, которые выражаются следующими формулами:

1) $TC(q) = 5000 + 240q - 4{,}5q^2 + 0{,}5q^3$;

2) $TC(q) = 5q^2 + ln(\,q^2 + 3q + 5) + 75$;

3) $TC(q) = 8q + \dfrac{48}{(q+1)^2} + 225$.

1.8. Функция полных издержек производства некоторого товара имеет вид:

1) $TC(q) = 1200 + 80q + 0{,}03q^3, \quad q = 10$;

2) $TC(q) = 25 \cdot 2^q - 20q + 45, \quad q = 2$;

3) $TC(q) = \frac{4000}{q+1} + q^2, \quad q = 19$.

Написать соответствующие значения $FC, VC(q), AC(q), AFC, AVC(q)$ в заданных объемах производства.

1.9. Зависимость переменных издержек от объема произведенной продукции задается функцией:

1) $VC(q) = 40q + 5q^2 + 7q^3$;

2) $VC(q) = 15q + \ln(\,q^2 + 2)$;

3) $VC(q) = 25(q + 44)^{\frac{3}{2}} - 80q$.

Найти средние переменные издержки производства при объеме выпуска продукции q = 20 единиц.

1.10. При спросе, определяемом формулой

$$q^D(p) = \frac{150}{p+4},$$

исследовать поведение выручки при неограниченном росте цены на товар.

1.11. Функция полных издержек производителя имеет вид: $TC(q) = q^3 - 18q^2 + 120q + 64$, где q – объем производимой продукции. Весь товар реализуется по фиксированной цене 8 у.е. Найти функцию прибыли производителя.

1.12. Даны функции спроса и предложения:

1) $q^D(p) = 1100 - 2p, \quad q^S(p) = 400 + 8p$;

2) $q^D(p) = \dfrac{p+13}{p+2}, \quad q^S(p) = 0{,}5p + 2{,}75$;

3) $q^D(p) = 500 - 50\sqrt{p}, \quad q^S(p) = p + 36$;

4) $q^D(p) = 10 - p + 2\sqrt{p}, \quad q^S(p) = 4p - 6$;

5) $q^D(p) = 20 - 2p, \quad q^S(p) = \frac{2}{3}p - 4$.

Найти точку рыночного равновесия.

1.13. Функция цен спроса и функция цен предложения заданы следующим образом:

$$p^D(q) = 4 - q - q^2 \text{ и } p^S(q) = 1 + 4q + q^2.$$

Построить графики этих функций на одной координатной плоскости. Найти равновесную цену и равновесное количество.

1.14. Найти точку безубыточности, если функция полных издержек задана выражением $TC(q) = 2 + 5q + q^2$, а функция дохода – $TR(q) = 12 + 8q$, где q – количество товара.

1.15. Функция предложения на некоторую продукцию задана, как $q^S(p) = p - 4$, а уравнение спроса $p(q+2) = 24$. Найти равновесную цену и равновесное количество.

1.16. Уравнения предложения и спроса на некоторый товар заданы, как $q - p + 4 = 0$ и $q(p+3) = 8$ соответственно. Найти равновесную цену и равновесное количество.

1.17. Неустановившаяся[2] равновесная цена определяется функцией:

1) $p(t) = 4 + ae^{-2t} + be^{-t}$;

2) $p(t) = 4 + e^{-2t}(A\cos 3t + B\sin 3t)$.

Установившаяся равновесная цена равна 4. Определить, является ли рынок стабильным.

1.18. Пусть рыночная цена ежегодно изменяется по закону $p_{n+1} = 600 + \frac{2}{3}p_n$, причем в начальный год цена равна 1200. Найти равновесную цену и общую формулу изменения цены по годам. Выписать несколько первых членов последовательности $\{p_n\}$.

1.19. В паутинной модели рынка даны функции спроса, предложения и начальная цена:

1) $q^D(p) = 40 - 5p, \; q^S(p) = p - 2, \; p_0 = 3$;

---

[2] В динамической модели рынка значение равновесной цены p меняется в зависимости от времени t и потому называется ***неустановившейся***. По поведению неустановившейся равновесной цены $p(t)$ по отношению к установившейся равновесной цене p можно судить о состоянии рынка: стабильном или неустойчивом. Если $\lim\limits_{t\to\infty}|p(t) - p|$ существует и равен нулю или не существует, но $|p(t) - p|$ – периодическая функция, то состояние рынка стабильное, если предел бесконечен или не существует и $|p(t) - p|$ не является периодической, то состояние паники.

2) $q^D(p) = 10 - \frac{1}{2}p,\ q^S(p) = 2p - \frac{5}{2},\ p_0 = 7.$

Построить графики этих функций, найти координаты точки рыночного равновесия и несколько первых узлов ломаной $\{(p_n, q_n,), (p_n, q_{n+1},)\}$, где q_n – равновесный объем спроса и предложения, соответствующий цене p_n. Получить общую формулу для $p_n,\ n = 0,1,2,\ldots$ Найти $\lim_{n\to\infty} p_n$.

1.20. Законы спроса и предложения на некоторый товар определяются уравнениями $q^D(p) = 24 - 3p,\quad q^S(p) = 4 + 2p$. Найти: а) точку рыночного равновесия; б) точку равновесия после введения налога, равного 10%; в) субсидию, которая приведет к увеличению объема продаж на 2 единицы?

1.21. Законы спроса и предложения на некоторый товар определяются уравнениями $q^D(p) = 22 - 3p,\quad q^S(p) = 10 + 5p$. Как изменится равновесная цена при уменьшении предложения на рынке на 20%?

1.22. Пусть имеется запас некоторого сырья, составляющий 30 тонн, которого должно хватить на 20 дней. Расход материала должен быть равномерным, т. е. ежедневно расходуется одинаковое количество сырья. Составить уравнение, выражающее зависимость неизрасходованного сырья y от количества прошедших дней x.

1.23. Издержки на изготовление партии деталей (годовой программы) определяются по формуле $TC(q) = aq + b$, где q – объем партии. Причем параметры a и b различны для двух вариантов технологического процесса: для первого варианта $TC(q) = 1{,}5q + 25$, а для второго варианта при q = 100 (дет), ТC = 155 (руб), при q = 300 (дет), ТC = 315 (руб). Требуется:

1) провести оценку двух вариантов, т. е. определить, какой из них выгоднее в зависимости от объема партии;

2) построить графики функций издержек, полученные в обоих вариантах;

3) найти себестоимость продукции для обоих вариантов при q = 200 (дет).

1.24. Издержки перевозки двумя видами транспорта выражаются функциями C = 125x + 40 и C = 25x + 600, где x – расстояние в сотнях километров, C – транспортные расходы. Начиная с какого расстояния более экономичен второй вид транспорта?

1.25. Постоянные издержки при производстве некоторого продукта составляют 18 тыс. руб. в месяц, а переменные – 600 руб. за единицу продукции. Продукция продается по цене 1100 руб. за единицу. Составить функцию прибыли. Определить: а) точку безубыточности; б) сколько единиц продукции нужно произвести, чтобы прибыль составила 182 тыс. руб. в месяц.

1.26. Оборудование было куплено за 6000 руб. Амортизация начисляется линейно и составляет 12% в год от первоначальной стоимости. Найти: а) стоимость оборудования через t лет; б) стоимость оборудования через 6 лет после начала эксплуатации; в) срок службы этого оборудования.

1.27. Зависимость объема выпуска Y от количества используемых трудовых ресурсов L определяется функцией $Y = f(L)$ как

$$Y = f(L) = \begin{cases} 0, \quad L = 0, \\ 30, \quad L = 1, \\ 30 + \dfrac{3}{5} f(L-1), \ L > 1. \end{cases}$$

Найти: а) формулу для вычисления объема выпуска $Y(n)$ при $L = n$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} Y(n)$.

1.28. Компания сдает в аренду 80 квартир. При ренте в 110 у.е. в месяц все квартиры заняты. Статистика показывает, что каждое повышение стоимости ренты на 3 у.е. приводит к освобождению одной квартиры. Стоимость обслуживания сдаваемой квартиры равна 32 у.е. в месяц. Найти: а) прибыль компании, если компания сдает квартиры за 140 у.е. в месяц; б) аналитические выражения дохода, издержек и прибыли компании в зависимости от x – количества свободных квартир.

§2. ПРОИЗВОДНАЯ

Рассмотрим функцию $y = f(x)$, непрерывную в точке x_0 и в некоторой ее окрестности. Пусть функция определена в точке x_1, принадлежащей окрестности точки x_0. Разность $\Delta x = x_1 - x_0$ называется ***приращением аргумента***, а разность $\Delta y = f(x_1) - f(x_0)$ – ***приращением функции***.

Определение. Если существует конечный предел отношения приращения функции к приращению аргумента при произвольном стремлении $\Delta x \to 0$, то этот предел называется ***производной функции в точке x_0*** и обозначается $f'(x_0)$:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Если функция имеет производную в точке x_0, то она называется ***дифференцируемой*** в точке x_0, а операция нахождения производной называется ***дифференцированием*** функции.

Правила дифференцирования

1. $(C)' = 0$;
2. $(u \pm v)' = u' \pm v'$;
3. $(Cu)' = Cu'$;
4. $(uv)' = u'v + uv'$;
5. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \quad (v \neq 0)$;
6. $\left(\frac{C}{v}\right)' = -\frac{Cv'}{v^2} \quad (v \neq 0)$,

где $u = u(x), v = v(x)$ - функции, $C = const$.

Формулы дифференцирования

1. $(x^n)' = nx^{n-1}$;
2. $(\sin x)' = \cos x$;
3. $(\cos x)' = \sin x$;
4. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$;
5. $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$;
6. $(a^x)' = a^x \ln a$; $(e^x)' = e^x$;
7. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$; $(\ln x)' = \frac{1}{x}$;
8. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$;
9. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$;
10. $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1 + x^2}$;
11. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1 + x^2}$.

Теорема (о непрерывности дифференцируемой функции). Если функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то она непрерывна в этой точке.

Заметим, что непрерывность функции в точке является лишь необходимым условием дифференцируемости ее в этой точке, но не достаточным. То есть функция может быть **непрерывна в точке**, но **не иметь в ней производную**. Например, функция $y = |x|$ непрерывна, но не дифференцируема в точке $x = 0$.

Необходимое и достаточное условия возрастания, убывания функции

Теорема. Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в интервале $(a; b)$. Для того чтобы функция была возрастающей на интервале $(a; b)$ достаточно, чтобы для всех $x \in (a; b)$ производная ее была положительна: $f'(x) > 0$. Для того, чтобы функция была убывающей в интервале $(a; b)$ достаточно, чтобы для всех $x \in (a; b)$ производная ее была отрицательна: $f'(x) < 0$.

Определение. Точка x_0 называется точкой ***локального минимума (максимума)*** функции $y = f(x)$, если для любого $x \neq x_0$ в некоторой окрестности точки x_0 справедливо неравенство $f(x) > f(x_0)$ ($f(x) < f(x_0)$). Точки максимума и минимума называют ***точками экстремума*** функции.

Необходимое условие существования локального экстремума функции

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна в некотором промежутке $(a; b)$. Если в точке x_0 функция имеет локальный экстремум, то в этой точке $f'(x_0) = 0$ или $f'(x_0)$ не существует.

Точки, в которых для функции $y = f(x)$ выполняется необходимое условие существования экстремума, называются ***критическими точками***.

Достаточные условия существования локального экстремума

Теорема (первое достаточное условие локального экстремума). Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна в некотором интервале, содержащем критическую точку $x = x_0$, и дифференцируема во всех точках этого интервала (кроме, может быть, самой точки x_0). Если $f'(x)$ при $x < x_0$ положительна, а при $x > x_0$ отрицательна, то в точке x_0 данная функция имеет ***локальный максимум***. Если же $f'(x)$ при $x < x_0$ отрицательна, а при $x > x_0$ положительна, то в точке x_0 данная функция имеет ***локальный минимум***.

Теорема (второе достаточное условие локального экстремума функции). Пусть функция $y = f(x)$ дважды дифференцируема в точке x_0 и $f'(x_0) = 0$. Тогда в точке $x = x_0$

функция имеет ***локальный максимум***, если $f''(x_0) < 0$ и ***локальный минимум***, если $f''(x_0) > 0$.

В случае, когда $f''(x_0) = 0$, точка $x = x_0$ может и не являться точкой экстремума.

Определение. График функции $y = f(x)$, называется ***выпуклым (вогнутым)*** на интервале $(a; b)$ если он расположен не ниже (не выше) любой касательной к графику функции на $(a; b)$.

Теорема (достаточное условие выпуклости (вогнутости) графика функции). Если во всех точках интервала (a, b) вторая производная функции $y = f(x)$ отрицательна (положительна), т.е. $f''(x) \leq 0$ ($f''(x) \geq 0$), то кривая в этом интервале выпукла (вогнута).

Определение. Точка кривой $M(x_0, f(x_0))$ называется ***точкой перегиба*** графика функции $y = f(x)$, если в точке M график имеет касательную и существует такая окрестность точки x_0, в пределах которой график функции $f(x)$ имеет разные направления выпуклости.

Теорема (необходимое условие существования точки перегиба). Пусть график функция $y = f(x)$ имеет перегиб в точке $M(x_0, f(x_0))$ и функция $f(x)$ имеет в точке x_0 непрерывную вторую производную. Тогда $f''(x) = 0$.

Теорема (достаточный признак существования точки перегиба). Пусть в некоторой окрестности точки x_0 вторая производная функции $y = f(x)$ имеет разные знаки слева и справа от x_0. Тогда график $y = f(x)$ имеет перегиб в точке $M(x_0, f(x_0))$.

По знакам первой и второй производной функции можно определить темпы возрастания и убывания, то есть возрастает или убывает функция все быстрее или все медленнее. Говорят, что функция $y = f(x)$ ***возрастает все медленнее*** в некотором интервале, если $f'(x) > 0, f''(x) < 0$. Функция $y = f(x)$ ***возрастает все быстрее*** в некотором интервале, если $f'(x) > 0, f''(x) > 0$. Функция $y = f(x)$ ***убывает все медленнее*** в некотором интервале, если $f'(x) < 0, f''(x) > 0$. Функция $y = f(x)$ ***убывает все быстрее*** в некотором интервале, если $f'(x) < 0, f''(x) < 0$.

Определение. ***Предельными издержками*** производства называется

$$MC(q) = TC'(q) = \lim_{\Delta q \to 0} \frac{\Delta TC}{\Delta q}.$$

Предельные издержки производства *MC* показывают дополнительные или добавочные издержки, связанные с производством еще одной единицы продукции.

Пример. Дана функция полных издержек $TC(q) = \frac{1}{3}q^3 - 4q^2 + 20q + 15$, q – объём производства товара.

1. Исследовать динамику полных издержек.

2. При каком объеме производства предельные издержки минимальны?

3. При каком объеме производства переменные средние издержки минимальны?

4. Провести экономический анализ.

Решение. Полные издержки производства q единиц продукции равны сумме переменных издержек $VC(q) = \frac{1}{3}q^3 - 4q^2 + 20q$ и постоянных издержек $FC = 15$.

1. Исследуем динамику полных издержек и построим кривую.

1) Объем производства и издержки принимают неотрицательные значения. Отсюда

$$\begin{cases} q \geq 0, \\ TC(q) \geq 0. \end{cases}$$

Кроме этого, функция издержек непрерывна при всех $q \geq 0$.

2) Найдем интервалы возрастания и убывания, точки экстремума функции $TC(q)$. Для этого находим $TC'(q) = q^2 - 8q + 20$. Из $TC'(q) = 0$ имеем $q^2 - 8q + 20 = 0$. Так как дискриминант $D < 0$, то действительных корней нет. Следовательно, критических точек нет, а значит, нет и точек экстремума. Проверив знак $TC'(q)$ в какой-либо точке из промежутка $q > 0$, убеждаемся, что $TC'(q) > 0$. Таким образом, функция полных издержек при всех $q > 0$ возрастает.

3) Найдем интервалы выпуклости и вогнутости, точки перегиба. Находим $TC''(q) = 2q - 8$. Из $TC''(q) = 0$ имеем $q = 4$ – критическая точка на точку перегиба. При $q < 4$ кривая является выпуклой ($TC''(q) < 0$); при $q > 4$ кривая вогнутая ($TC''(q) > 0$), $q = 4$ – абсцисса точки перегиба: $TC(4) = 52\frac{1}{3}$.

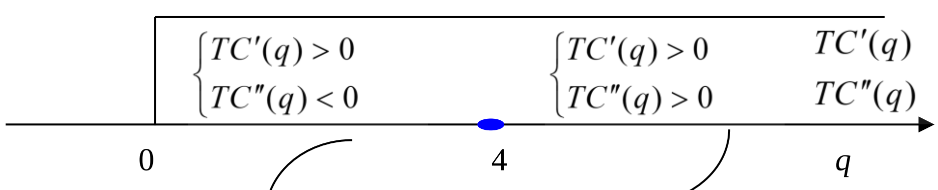


рис. 3

4) Определим темпы изменения функции $TC(q)$.

На промежутке $(0; 4)$ функция $TC(q)$ возрастает все медленнее; на $(4; +\infty)$ возрастает все быстрее.

5) При $q = 0, TC(0) = 15$. С осью абсцисс кривая не пересекается при $q > 0$.

2. Определим, при каком объеме производства q предельные издержки будут минимальны. Предельные издержки равны $MC(q) = q^2 - 8q + 20$. Для определения критической точки этой функции находим $MC'(q) = 2q - 8$ и составляем уравнение $MC'(q) = 0$. Откуда $q = 4$. Легко проверить, что при $q \in (0; 4)$ $MC'(q) < 0$ (предельные издержки убывают), а при всех $q \in (4; +\infty)$ $MC'(q) > 0$ (предельны издержки возрастают). Значит, при $q = 4$ предельные издержки $MC(q)$ минимальны: $MC_{\min} = MC(4) = 4$. Графиком функции предельных издержек будет парабола.

3. Определим, при каком объеме производства «q» переменные средние издержки

$$AVC(q) = \frac{VC(q)}{q} = \frac{1}{3}q^2 - 4q + 20$$

будут минимальны. Для этого найдем $AVC'(q) = \frac{2}{3}q - 4$. Из условия $AVC'(q) = 0$ имеем

$$\frac{2}{3}q - 4 = 0 \Rightarrow q = 6.$$

Легко убедиться, что при всех $q \in (0; 6)$ $AVC'(q) < 0$ (переменные средние издержки убывают), а при всех $q \in (6; +\infty)$ $AVC'(q) > 0$ (переменные средние издержки возрастают). Значит, при q = 6 переменные средние издержки $AVC(q)$минимальны: $AVC_{\min} = AVC(6) = 8$. Графиком функции переменных средних издержек будет парабола.

4. Экономический анализ.

1) Так как при изменении объема производства от 0 до 4 ед. полные издержки растут медленно, а после 4 ед. начинают расти быстро, то объем производства выгодно наращивать до 4 ед.

2) Тогда, при объеме производства до 4 ед. предельные издержки снижаются от 20 ед. до 4 ед.; дальнейшее увеличение объема выпускаемой продукции приводит к росту предельных издержек.

3) При изменении объема производства от 0 до 6 ед. переменные средние издержки снижаются от 20 ед. до 8 ед., а при дальнейшем увеличении объема производства переменные средние издержки начинают расти.

Определение. Предел

$$\lim_{\Delta q \to 0} \frac{\Delta TR}{\Delta q} = TR'(q) = MR(q)$$

называется ***предельной выручкой*** от продажи q единиц товара. Предельная выручка MR показывает дополнительную выручку от продажи еще одной единицы товара.

Определение. ***Эластичностью функции*** $y = f(x)$ относительно x называется предел отношения относительного приращения функции $\frac{\Delta y}{y}$ к относительному приращению аргумента $\frac{\Delta x}{x}$ при $\Delta x \to 0$ и обозначается

$$E_x(y) = \frac{x}{y} \cdot y'.$$

Эластичность функции показывает относительное изменение функции в процентах, соответствующее относительному приращению аргумента x на 1 процент. Таким образом, эластичность функции – это мера реакции функции на относительное изменение аргумента на 1 процент.

Свойства эластичности функции

1) Если $|E_x(y)| > 1$, то говорят, что функция эластична.

2) Если $0 < |E_x(y)| < 1$, то говорят, что функция неэластична.

3) Если $|E_x(y)| = 1$, то говорят, что функция нейтральна.

4) Если $E_x(y) = 0$, то функция $y = f(x)$ абсолютно неэластична.

5) Если $E_x(y) = \infty$, то функция $y = f(x)$ абсолютно эластична.

Пример. Рассчитать эластичность функции $y = x^2 + 3x + 1$ и найти значение показателя эластичности для $x = 3$.

Решение. По формуле эластичность функции:

$$E_x(y) = \frac{x}{y} \cdot y' = \frac{x}{x^2 + 3x + 1} \cdot (2x + 3) = \frac{x(2x + 3)}{x^2 + 3x + 1}.$$

Пусть $x = 3$, тогда $E_3(y) = 1{,}42$. Это означает, что если значение x возрастёт на 1%, то значение y увеличится на 1,42 %.

Функция спроса есть убывающая функция цены, то есть $(q^D)' < 0$, так как с увеличением цены на товар спрос на него понижается. Поэтому в формуле эластичности спроса впереди ставится знак минус:

$$E_p(q^D) = -\frac{p}{q^D} \cdot (q^D(p))' = -\frac{p}{q^D} \cdot \frac{dq^D}{dp} \qquad (2.1)$$

Эластичность спроса относительно цены показывает изменение спроса на данный товар, если его цена возрастет на 1 процент.

Пример. Пусть функция спроса относительно цены имеет вид $q^D(p) = a \cdot e^{-2p}$, где a- постоянный коэффициент. Найти значение показателя эластичности функции спроса при цене p = 3 ден. ед.

Решение. Рассчитаем эластичность функции спроса по формуле

$$E_p(q^D) = -\frac{p}{q} \cdot \ q^{D'} = -\frac{p}{ae^{-2p}} \cdot (-2ae^{-2p}) = 2p.$$

Полагая p = 3 ден. ед., получим $E_3(q^D) = 6$. Это означает, что при цене p = 3 ден. ед. повышение цены на 1% вызовет снижение спроса на 6%, т.е. спрос эластичен.

Так как функция предложения $q^S = q^S(p)$ – возрастающая относительно цены функция, то формула эластичности предложения относительно цены имеет вид:

$$E_p(q^S) = \frac{p}{q^S} \cdot (q^S(p))' = \frac{p}{q^S} \cdot \frac{dq^S}{dp}.$$

Исследование динамики полной выручки в зависимости от эластичности спроса

Предположим, что функция спроса на товар есть $q^D = q^D(p)$. Выручка от продажи данного товара составляет $TR(p) = q^D(p) \cdot p$. Тогда предельная выручка будет равняться:

$$MR(p) = TR'(p) = (q^D(p) \cdot p)'_p = q^{D'}(p) \cdot p + q^D(p) = q^D(p) \cdot \left(\frac{p}{q^D(p)} \cdot q^{D'}(p) + 1\right).$$

С учетом формулы (2.1) получим

$$MR(p) = q^D(p) \cdot (1 - E_p(q^D)). \qquad (2.2)$$

Это выражение определяет зависимость между выручкой от продажи товара и спросом. Из уравнения (2.2) можно сделать следующие выводы:

1) Если $|E_p(q^D)| > 1$, то $MR(q) < 0$, то есть если спрос эластичен, то с повышением цены товара выручка от его продажи снижается. Следовательно, при **эластичном** спросе на данный товар цены повышать **нецелесообразно**.

2) Если $|E_p(q^D)| = 1$, то $MR(q) = 0$, то есть $TR(q)$ – постоянная; это означает, что при нейтральном спросе выручка от продажи данного товара не зависит от изменения цены. Значение цены, при котором спрос нейтрален является критической точкой полной выручки на экстремум, причем полная выручка достигает при этом значении максимума, так как знак производной $MR(q)$ меняется с плюса на минус. Для коммерсанта оптимальным является такое значение цены на данный товар, при котором **спрос нейтрален**, так как при этом значении цены полная выручка от продажи этого товара будет максимальной.

3) Если $0 < \left|E_p(q^D)\right| < 1$, то $MR(q) > 0$, то есть если спрос неэластичен, то с повышением цены выручка возрастает.

Условия получения максимальной прибыли

Предположим, что предприятие производит q единиц некоторой продукции и собирается реализовать ее на рынке с максимальной прибылью. Тогда цена спроса q единиц товара определяется функцией $p^D = p^D(q)$. Суммарные издержки производства q единиц продукции составляют $TC(q)$, а выручка от реализации произведенного товара по цене p:

$$TR(q) = q \cdot p^D(q).$$

Тогда прибыль предприятия определяется функцией

$$\Pi(q) = (TR(q) - TC(q)) = q \cdot p^D(q) - TC(q).$$

Условие получения прибыли:

$$TR(q) > TC(q).$$

Найдем критическую точку функции прибыли. Используя необходимое условие существования экстремума функции одной переменной, получаем:

$$\Pi'(q) = (TR'(q) - TC'(q)) = 0,$$

$$\text{или} \quad TR'(q) = TC'(q) \quad (MR(q) = MC(q)).$$

Итак, если предприятие при некотором объеме производства q получает максимальную прибыль, то предельная выручка равна предельным издержкам (или скорость изменения полных издержек должна равняться скорости изменения полной выручки).

Проверим критическую точку на экстремум. Используя второе достаточное условие существования экстремума функции одной переменной, имеем:

$$\Pi''(x) = (TR'(q) - TC'(q))' = TR''(q) - TC''(q) < 0,$$

$$\text{или} \;\; TR''(q) < TC''(q).$$

Следовательно, если темп роста суммарной выручки меньше темпа роста суммарных (полных) издержек, то при таком объеме производства q прибыль предприятия будет **максимальной**. Для достижения **максимальной прибыли** предприятие должно производить такое количество продукции q_0, при котором выполнялась бы система:

$$\begin{cases} TR(q_0) > TC(q_0), \\ TR'(q_0) = TC'(q_0), \\ TR''(q_0) < TC''(q_0). \end{cases}$$

Задания для самостоятельной работы

2.1. Издержки компании при производстве некоторого товара заданы следующей функцией: $TC(q) = 50000 + 25q + 0{,}001q^2$. Найти постоянные издержки FC и предельные издержки MC. Каковы предельные издержки при объеме производства 100? Каковы предельные издержки при объеме производства 10000?

2.2. Функция спроса имеет уравнение $q^{D}(p) = 2 - p$. Найти эластичность спроса по цене. Определить при какой цене спрос будет эластичен, неэластичен, нейтрален.

2.3. Функция спроса задана уравнением $q^D(p) = 5/p^2$. Найти эластичность спроса по цене. Дать экономическую интерпретацию.

2.4. Пусть зависимость полных издержек производства от объема производимой продукции выражается формулой

1) $TC(q) = 5000 + 240q - 4{,}5q^2 + 0{,}5q^3$;

2) $TC(q) = 5q^2 + \ln(q^2 + 3q + 5) + 75$;

3) $TC(q) = 30e^{1{,}8q} + 6q + 550$;

4) $TC(q) = 8q + \dfrac{48}{q^2} + 225$.

Найти предельные издержки.

2.5. Функция полных издержек производства некоторого товара имеет вид:

1) $TC(q) = 1200 + 80q + 0{,}03q^3, \quad q = 10$;

2) $TC(q) = 25 \cdot 2^q - 20q + 45, \quad q = 2$;

3) $TC(q) = \dfrac{4000}{q+1} + q^2, \quad q = 19$.

Найти предельные издержки для заданного объема производства. Прокомментировать ситуацию.

2.6. Известны функции полных издержек при производстве товара:

1) $TC(q) = 200 + 90q + 0{,}04q^3$;

2) $TC(q) = 4q^2 + \ln(2q + 5)$;

3) $TC(q) = \dfrac{700}{q+4} + 3{,}5q^2$.

Найти предельные средние издержки.

2.7. Функция средних затрат имеет вид $AC(q) = 2q^2 + 30q + 850$. Найти предельные затраты при выпуске 3 единиц продукции.

2.8. Средние затраты предприятия при производстве продукции в зависимости от объема выпуска определяются формулой:

1)$AC(q) = 3e^q + 2q$;

2) $AC(q) = \ln(q^2 + 3) + 4q$;

Определить скорость изменения средних затрат и предельные затраты производства при объеме выпуска продукции $q = 2$ ед.

2.9. Выручка от реализации цветных карандашей задается функцией $TR(q) = 450q - q^2$. Вычислить предельную выручку, если реализовано 40 карандашей.

2.10. Известна функция спроса на некоторый товар:

1) $q^D(p) = 3 - 1{,}5p, \quad p_1 = 1, \quad p_2 = 2;$

2) $q^D(p) = \dfrac{200}{p^2 + 6}, \quad p_1 = 2, \quad p_2 = 3.$

Найти предельную выручку, получаемую при реализации товара по указанной цене.

2.11. Производственная функция, связывающая объем выпуска данного товара с размером основных производственных фондов, имеет вид $f(x) = 5x^2$. Определить предельную производительность основных производственных фондов.

2.12. Зависимость полных издержек производства от объема производимого продукта имеет вид:

1) $TC = 500 + 24q + 0{,}5q^2;$

2) $TC = 0{,}2q^{\frac{7}{2}} + 0{,}3q^{\frac{13}{3}} + 70;$

3) $TC = 0{,}06 \cdot 7^{0{,}5q^2} + 900.$

Найти предельную прибыль, если цена на данный товар равна 64 ден. ед.

2.13. Дана производственная функция, выражающая зависимость объема выпускаемой продукции от затрат некоторого ресурса x:

1) $f(x) = 180x - 5x^2, \quad x_1 = 2, \quad x_2 = 5;$

2) $f(x) = 60x + \dfrac{32}{x}, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 2;$

3) $f(x) = e^{3x} - 1, \quad x_1 = 2, \quad x_2 = 3.$

Найти предельную производительность для заданных значений ресурса.

2.14. Зависимость между спросом и ценой на некоторую продукцию задается равенствами:

1) $p + 2q = 95, \quad q_1 = 3, \quad q_2 = 10;$

2) $p + q^{\frac{5}{2}} - 200 = 0, \quad q_1 = 1, \quad q_2 = 4;$

3) $\ln(q+2)+4p=15, \quad q_1=1, \quad q_2=3.$

Найти функцию предельной выручки, получаемой при реализации данной продукции и вычислить ее значения для указанных объемов спроса.

2.15. Указать предельную производительность труда при производстве шоколадных конфет, если зависимость дневного объема выпуска продукции от численности рабочих L имеет вид $f(L)=250\sqrt{L}$.

2.16. Пусть C (consume) – потребление, S (save) – сбережение. Размеры, как потребления, так и сбережения зависят от получаемого дохода. Зависимость потребляемой и сберегаемой частей дохода от его общей величины принято называть функциями потребления и сбережения. $S=S\,(Y), C=C(Y), Y=C+S$, где Y – доход. Предельная склонность к потреблению (marginal propensity consumption – MPC) выражает отношение любого изменения в потреблении к тому изменению величины дохода, которое вызвало изменение потребление: $MPC = C'(Y)$. Предельная склонность к сбережению (marginal propensity saving – MPS) определяется как предел отношения изменения сберегаемой части к изменению дохода: $MPS = S'(Y)$. Пусть функция потребления имеет вид $C(Y)=400+0{,}7Y$. Определить предельную склонность к потреблению (MPC) и предельную склонность к сбережению (MPS).

2.17. Зависимость прибыли некоторой фирмы от себестоимости выпускаемой продукции выражается формулой

$$П(q)=\frac{80q+3}{q^2}.$$

Найти скорость изменения прибыли.

2.18. Себестоимость производства некоторого товара описывается функцией

$$y(x)=0{,}3x^2-1{,}5x+21 \text{ при } 10 \le x \le 100,$$

где x – объем выпускаемой за месяц продукции (тыс. ед.). Определить скорость и темп изменения себестоимости при выпуске 25 тыс. ед. и 60 тыс. ед. продукции.

2.19. Функция полезности потребления пирожков для студента имеет вид:

$$U(x)=18x-0{,}75x^2.$$

Начиная с какого момента полезность потребления пирожков будет уменьшаться?

2.20. Функция совокупного спроса на деньги как имущество задается формулой

$$L(i)=\log_{\frac{1}{2}}\frac{i+14}{30},$$

где i – величина ставки банковского процента. Исследовать поведение этой функции в зависимости от величины ставки процента и построить ее график.

2.21. Финансовые накопления предприятия в зависимости от произведенной продукции выражаются формулой $f(x) = -0{,}01x^3 + 600x + 1000$. Исследовать функцию накоплений и объяснить экономическую ситуацию.

2.22. Функция спроса на товар в модели изолированного однопродуктового конкурентного рынка имеет вид:

1) $q^D(p) = \dfrac{7-p}{2}$;

2) $q^D(p) = \dfrac{100}{p+8} - 3$;

3) $q^D(p) = 5p^{-2} + 10$;

4) $q^D(p) = 20e^{-3p}$.

Доказать монотонное убывание функций спроса.

2.23. Производительность труда рабочих некоторой фирмы определяется функцией

$$f(t) = 11{,}3te^{-0{,}4t}.$$

Исследовать функцию производительности труда в течение рабочего дня, $t \in [0; 8]$, где t – время.

2.24. Функция полезности $U(x)$ от потребления блага x некоторым потребителем имеет вид $U(x) = 18x^2 - 0{,}75x^4$. Определить оптимальный объем потребления данного блага.

2.25. Найти предельную производительность ресурса, если функция выпуска имеет вид

$$f(x) = 10x - x^2 + 22,$$

а затраты ресурсов составляют: а) 3 усл. ед.; б) 7 усл. ед. Укажите, начиная с какого момента увеличение затрат данного ресурса становится экономически невыгодным.

2.26. Зависимость объема выпуска продукции y от капитальных затрат x определяется формулой

$$y = \frac{1}{2}\ln(2 + x^2).$$

Найти интервал значений x, на котором увеличение капитальных затрат неэффективно.

2.27. В краткосрочном периоде производственная функция фирмы зависит только от численности персонала L и имеет вид $f(L) = 9L^2 - 0{,}4L^3$. Определить численность персонала, при которой выпуск продукции достигает максимального значения.

2.28. Функция средних издержек при производстве некоторого товара имеет вид:

$$AC(q) = 108 + q^3.$$

Исследовать поведение функции полных издержек в зависимости от объема выпускаемого товара. Построить график функции. Прокомментировать ситуацию.

2.29. Используя свойства эластичности, найти эластичность следующих функций:

1) $f(x) = x^4 e^x$;

2) $f(x) = x^2 \ln x$;

3) $f(x) = x^5 e^{-2x}$;

4) $f(x) = 3^x \ln x$.

2.30. Найти эластичность функции $y = x^3 \sqrt{100 - x^2}$ в точке $x = 6$.

2.31. Докажите, что эластичность степенной функции постоянна и равна показателю степени.

2.32. Функция цен спроса имеет вид $p^D(q) = 600 - 2q$. Выразите функцию эластичности спроса q по цене. При какой цене на товар ценовая эластичность равна 1 %?

2.33. Эластичность спроса по цене равна 0,6 при цене товара 100 ден. ед. и объеме спроса 10. Кривая спроса линейна. Какой цене соответствует эластичность спроса, равная 1 %?

2.34. Зависимость между объемом спроса и ценой на некоторый товар задается функцией $q^D(p) = -2p + 3$. При каких ценах спрос эластичен, неэластичен, абсолютно эластичен, абсолютно неэластичен, нейтрален?

2.35. Вычислить эластичность следующих функций предложения по цене при заданном значении цены на товар:

1) $q^S(p) = p^3 - 3p^2 + 30p, \quad p_1 = 3,\ p_2 = 4,\ p_3 = 10;$

2) $q^S(p) = \dfrac{p^2 + 3}{p + 4}, \quad p_1 = 1,\ p_2 = 3,\ p_3 = 10.$

2.36. Объем спроса на некоторый товар можно задать формулой

$$q^D(p) = \frac{p}{200 + p^2}.$$

Используя эластичность, охарактеризовать реакцию производителя и потребителя на изменение цены.

2.37. Законы спроса и предложения на некоторый товар определяются уравнениями $q^D(p) = 26 - 3p, \quad q^S(p) = 10 + 5p$. Найти эластичность спроса и предложения в точке равновесной цены.

2.38. Дана зависимость спроса q^D от цены p: $q^D(p) = 90 - 3p$. Найти цену, при которой выручка максимальна и саму эту максимальную выручку.

2.39. Зависимость потребления y от дохода x задается функцией

$$y = \frac{ax}{x+10}.$$

Показать, что коэффициент эластичности потребления от дохода не зависит от параметра a и стремится к нулю при неограниченном возрастании дохода.

2.40. Задана функция $TC = TC(q)$ полных затрат предприятия на производство q единиц продукции. Как связаны между собой коэффициенты эластичности полных и средних затрат?

2.41. Пусть $A(t)$ – стоимость некоторого актива A в момент времени t, r – доходность от вложения денег в другие активы. Для простоты будем считать, что r не зависит от времени. Когда выгодно покупать или продавать актив A? Для этого необходимо найти интервал времени, в течение которого мгновенная доходность актива A будет больше r. Так как мгновенная доходность актива A совпадает с логарифмической производной стоимости актива, то искомый интервал времени задается неравенством $(\ln A\,(t))' > r$. Если данное неравенство задает интервал (t_1, t_2), то актив A следует купить в момент t_1 и продать в момент t_2. Пусть $r = 20\%$ годовых, $A(t) = 94{,}5e^{-x^3+18x^2-59{,}8x+3{,}4}$. В какой момент времени выгоднее купить (продать) актив A?

2.42. Функция полезности потребления товара x некоторым индивидом выражается формулой:

1) $U(x) = 4\sqrt{x}, \quad x_1 = 9, \quad x_2 = 25;$

2) $U(x) = -2x^2 + 28x + 45, \quad x_1 = 6, \quad x_2 = 8;$

3) $U(x) = \ln(x-4)^2, \quad x_1 = 5, \quad x_2 = 7;$

4) $U(x) = 100x^{\frac{2}{3}}, \quad x_1 = 27, \quad x_2 = 125.$

Найти предельную полезность товара для указанных объемов потребления. Проверить выполнение первого закона Госсена[3].

2.43. Общие издержки при производстве цифровых фотоаппаратов описываются формулой $TC(q) = q^4 - 2000q + 12000$. Найти оптимальный для производителя объем выпускаемой

[3] Начиная с некоторого момента (точка насыщения) дополнительная полезность от потребления одного дополнительного блага уменьшается по мере того, как возрастает объем потребления данного блага. Эта закономерность носит универсальный характер и называется *первым законом Госсена* или *законом убывания предельной полезности*. Математически это означает, что вторая производная общей полезности по количеству данного блага является отрицательной величиной.

продукции и соответствующую прибыль, если на рынке цена одного фотоаппарата равна 30 000 рублей.

2.44. Функция издержек имеет вид $TC(q) = 10 + \frac{q^2}{10}$. На начальном этапе фирма организует производство так, чтобы минимизировать средние издержки $AC(q)$. В дальнейшем на товар устанавливается цена, равная 4 ден. ед. На сколько единиц товара фирме следует увеличить выпуск?

2.45. В целях улучшения качества товара стратегия фирмы в краткосрочном периоде описывается формулами $p^D(q) = 0{,}5q^2 - 12, \quad TC(q) = 15q^2 - 300q + 16$. Исследовать поведение функции прибыли. Дать экономическое объяснение.

2.46. Функция издержек при изготовлении продукции имеет вид $TC(q) = \frac{1}{3}q^3 + 1{,}5q^2 + 100$. Каков оптимальный объем выпуска фирмы, если рыночная цена установилась на уровне 10 ден. ед.?

2.47. Зависимость дохода и издержек от объема производства продукции задается функциями следующего вида: $TR(q) = q^2 + 20q, \quad TC(q) = q^3 - 35q^2 + 260q$. Производственные мощности позволяют производить до 25 единиц продукции. При каком объеме производства прибыль будет максимальна? Как изменится оптимальный объем производства, если максимальная загрузка производственных мощностей составит 18 единиц продукции?

2.48. Средние совокупные издержки производства изменяются в зависимости от объема годового выпуска (в тоннах) по следующему закону

$$AC(q) = \frac{4q + 700}{q + 120}.$$

Связь между годовым объемом продаж и ценой продукта (в тыс. руб. за тонну) описывается формулой

$$Q(p) = \frac{2400 - 120p}{p + 2}.$$

Реализовав по фиксированной цене всю произведенную за год продукцию, фирма получила максимально возможную прибыль. Какова была при этом выручка фирмы?

2.49. Доход от реализации q единиц товара некоторой фирмы выражается следующей формулой $TR(q) = 176 + 44q - q^2$. В свою очередь затраты на производство товара определяются формулой $TC(q) = q^2 + 4$. Определить прибыль и оптимальный уровень выпуска товара данной фирмы.

2.50. Функция издержек имеет вид:

$$TC(q) = \begin{cases} 3q, & q \leq 50, \\ 150 + \alpha^2 (q - 50)^3, & q > 50. \end{cases}$$

В настоящий момент уровень выпуска продукции q=100. При каком условии на параметр α фирме выгодно уменьшить выпуск продукции, если доход от реализации единицы продукции равен 75?

2.51. Доход от производства продукции с использованием q единиц ресурсов составляет величину $TR(q) = 50\sqrt{q} + 35$. Стоимость единицы ресурсов – 5 ден. ед. Какое количество ресурсов следует приобрести, чтобы прибыль была наибольшей?

2.52. Найти функцию предложений конкурентной фирмы $q^S(p)$, если ее функция издержек имеет вид $TC(q) = q^2 + 8q + 9$. Проанализировать положение фирмы при цене $p = 12$.

2.53. Фирма имеет следующую функцию издержек $TC(q) = q + 0{,}02q^2$. Уравнение спроса на некоторый продукт, производимый этой фирмой, имеет следующий вид: $q + 20p = 300$. Найти:

а) функцию цен спроса;

б) функцию прибыли;

в) оптимальное значение q_m и максимальную прибыль;

г) соответствующую цену.

2.54. Предположим, что функция цен спроса на некоторый товар задана как $p^D(q) = 10 - 0{,}005q$, где p - цена ($) за единицу товара, а q – спрос товара в единицу времени. Также предположим, что постоянные издержки составляют 100 долларов, а средние переменные издержки равны $4 + 0{,}01q$.

а) Какую максимальную прибыль можно получить от реализации этого товара?

б) Какой уровень производства необходим для того, чтобы производство данного товара было безубыточным?

в) Каковы функции предельных издержек и предельного дохода?

2.55. Функция цен спроса, связывающая цену p и количество товара q для конкретного продукта, определяется как $p^D\,(q) = 5e^{-q\,/\,2}$. Найдите объем производства q, при котором достигается максимальный доход от продажи товара, и укажите величину полученного дохода.

2.56. Функция средних издержек фирмы определяется как

$$AC(q) = \frac{300}{q} - 10 + q,$$

а уравнение спроса задается, как $q + 5p = 850$, где p и q – цена и количество товара, соответственно. Найдите функции дохода и прибыли, как функций от q. Определите значение q, при котором достигается максимум дохода, и значение q, при котором достигается максимум прибыли.

§3. ИНТЕГРАЛЫ

Определение. Пусть на интервале $(a;b)$ задана функция $f(x)$. Если $F'(x)=f(x)$ или $dF(x)=f(x)dx$, где $x\in(a;b)$, то функция $F(x)$ называется ***первообразной функцией*** для функции $f(x)$ на интервале $(a;b)$.

Определение. Совокупность первообразных $F(x)+C$ (где C – произвольная постоянная) функции $f(x), x\in(a;b)$, называется ***неопределенным интегралом*** функции $f(x)$:

$$\int f(x)dx=F(x)+C.$$

Функция $f(x)$ называется ***подынтегральной функцией***, $f(x)dx$ – ***подынтегральным выражением.*** Нахождение неопределенного интеграла называется ***интегрированием*** функции. Функция $f(x)$ называется ***интегрируемой*** в интервале, если в этом интервале для нее существует $\int f(x)\,dx$.

Основные правила интегрирования

1) $\left(\int f(x)dx\right)'=f(x)$;

2) $d\int f(x)dx=d(F(x)+C)=f(x)dx$;

3) $\int dz(x)=z(x)+C$;

4) $\int af(x)dx=a\int f(x)dx\ (a=const)$;

5) $\int[f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_n(x)]dx=\int f_1(x)\,dx+\int f_2(x)\,dx+\ldots+\int f_n(x)\,dx$.

Таблица формул интегрирования

1. $\int x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C, n\neq-1.$
2. $\int\frac{dx}{x}=\ln|x|+C.$
3. $\int\cos(x)dx=\sin(x)+C.$
4. $\int\sin(x)dx=-\cos(x)+C.$
5. $\int\frac{dx}{\cos^2(x)}=\mathrm{tg}(x)+C.$
6. $\int\frac{dx}{\sin^2(x)}=-\mathrm{ctg}(x)+C.$
7. $\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin(x)+C.$
8. $\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=-\arccos(x)+C.$
9. $\int\frac{dx}{1+x^2}=\mathrm{arctg}(x)+C.$
10. $\int\frac{dx}{1+x^2}=-\mathrm{arcctg}(x)+C.$
11. $\int a^x dx=\frac{a^x}{\ln a}+C.$
12. $\int e^x dx=e^x+C.$
13. $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}=\ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|+C.$
14. $\int\frac{dx}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C.$
15. $\int\frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{1}{a}\mathrm{arctg}\frac{x}{a}+C.$
16. $\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{a}+C.$

Определение. Пусть функция $y=f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a;b]$. Разобьем отрезок $[a;b]$ на n произвольных частей точками $a<x_0<x_1<\cdots<x_i<\cdots<x_n=b$, выберем на каждом частичном отрезке $[x_{i-1};x_i]$ произвольную точку c_i и обозначим через

Δx_i длину каждого такого отрезка. ***Интегральной суммой*** для функции $y = f(x)$ на отрезке $[a; b]$ называется сумма вида

$$f(c_1)\Delta x_1 + f(c_2)\Delta x_2 + \cdots + f(c_i)\Delta x_i + \cdots + f(c_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$$

Определение. ***Определенным интегралом*** от функции $y = f(x)$ на отрезке $[a; b]$ называется предел интегральных сумм при условии, что длина наибольшего из частичных отрезков стремится к нулю:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\max\limits_i \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i.$$

Теорема. Любая непрерывная на интервале $(a;\ b)$ функция $f(x)$ имеет на этом интервале первообразную.

Определение. Пусть функция $F(x)$ – первообразная функция для функции $f(x)$, непрерывной на отрезке $[a; b]$. Тогда

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a). \qquad (3.1)$$

Формула (3.1) называется ***формулой Ньютона – Лейбница.***

Применение интегралов в экономике

I. Пусть задана функция предельных издержек $MC(q)$, которая является производной функции общих издержек $TC(q)$. Функция общих издержек находится по функции предельных издержек следующим образом:

$$TC(q) = \int MC(q)dq.$$

Однако при нахождении неопределенного интеграла возникает произвольная постоянная, которую необходимо определить. Для этого необходимо некоторое дополнительное условие. Часто таким условием является $FC = TC(0)$.

Аналогично определяется функция дохода $TR(q)$ по функции предельного дохода $MR(q)$:

$$TR(q) = \int MR(q)dq.$$

Здесь для нахождения произвольной постоянной используется условие $TR(0) = 0$.

Пример. Предположим, что функция предельных издержек задана, как $MC(q) = 2e^{0,5q}$ и что постоянные издержки равны 20. Найти полные издержки.

Решение.

$$TC(q) = \int 2e^{0,5q}dq = 4e^{0,5q} + C$$

для некоторой константы C. Для определения C мы используем тот факт, что при $q = 0$ издержки $TC(0)$ должны быть равны 20; таким образом,

$$4e^0 + C = 20; \quad 4 + C = 20 \Rightarrow C = 16$$
$$TC(q) = 4e^{0,5q} + 16.$$

II. Пусть функция $z = f\,(t)$ описывает ***изменение производительности*** некоторого производства с течением времени. Тогда объем выпускаемой продукции u, произведенной за промежуток времени $[0; T]$, определяется следующим образом:

$$u = \int_0^T f(t)dt.$$

Пример. Пусть задана функция $f(t) = -3t^2 + 18t$ – производительность труда рабочего. Определить выработку рабочего: а) за весь день; б) за третий час работы; в) за последний час работы, если продолжительность рабочего дня 6 часов; г) провести экономический анализ задачи.

Решение. а) Найдем общую выработку за весь день:

$$Q = \int_0^T f(t)dt = \int_0^6 (-3t^2 + 18t)dt = (-t^3 + 9t^2)|_0^6 = 108(\text{у. е.})$$

б) Определим выработку рабочего за третий час работы:

$$Q = \int_2^3 f(t)dt = \int_2^3 (-3t^2 + 18t)dt = (-t^3 + 9t^2)|_2^3 = 26(\text{у. е.})$$

в) Определим выработку рабочего за последний час работы:

$$Q = \int_5^6 f(t)dt = \int_5^6 (-3t^2 + 18t)dt = (-t^3 + 9t^2)|_5^6 = 8(\text{у. е.})$$

г) Производительность труда к концу дня падает, вследствие утомляемости.

III. Определение начальной суммы по ее конечной величине, полученной через время t (лет) при годовом проценте (процентной ставке) r, называется ***дисконтированием***. Задачи такого рода встречаются при определении экономической эффективности капитальных вложений.

Пусть поступающий ежегодно доход изменяется во времени и описывается функцией $f(t)$, процент начисляется непрерывно. Тогда дисконтированный доход K за время T вычисляется по формуле:

$$K = \int_0^T f(t) e^{-it} dt,$$

где $i = r/100$ – удельная процентная ставка.

Пример. Определить дисконтированный доход за три года при процентной ставке 8%, если первоначальные (базовые) капиталовложения составили 10 млн. руб., и намечается ежегодно увеличивать капиталовложения на 1 млн. руб.

Решение. Очевидно, что капиталовложения задаются функцией $f(t) = 10+1\cdot t = 10+t$. Тогда дисконтированная сумма капиталовложений

$$K = \int_0^3 (10 + t) e^{-0{,}08t} dt.$$

Интегрируя, получим $K = 30{,}5$ млн. руб.

IV. Излишки потребителя и производителя

Излишек потребителя — это разница между той суммой денег, которую потребитель был бы согласен уплатить, и той суммой, которую он реально уплатил. Излишек потребителя определяется по формуле:

$$CS = \int_0^{q^*} p^D(q) dq - p^* q^*,$$

где p^*- равновесная цена, q^*- равновесное количество.

Альтернативная формула нахождения излишка потребителя:

$$CS = \int_{p^*}^{p^D(0)} q^D(p) dp.$$

Излишек производителя – дополнительные доходы, извлекаемые производителями в результате того, что цена на его благо превышает цену, по которой они готовы продавать это благо на рынке. Излишек производителя определяется по формуле:

$$PS = p^* q^* - \int_0^{q^*} p^S(q) dq.$$

Альтернативная формула нахождения излишка производителя:

$$PS = \int_{p^S(0)}^{p^*} q^S(p)dp\,.$$

Пример. Функции цен спроса и цен предложения заданы, как $p^D(q) = 116 - q^2$ и $p^S(q) = \frac{5q}{3} + 20$ соответственно, где q – количество товара, p – цена. Определить производственные и потребительские излишки.

Решение. Найдем точку рыночного равновесия:

$$116 - q^2 = \frac{5q}{3} + 20,$$
$$3q^2 + 5q - 288 = 0.$$

Решив уравнение и отбросив отрицательный корень, получим $q^* = 9$. При этом равновесная цена составит $p^* = 116 - 9^2 = 35$.

$$CS = \int_0^{q^*} p^D(q)dq - p^*q^* = \int_0^9 (116 - q^2)dq - 35 \cdot 9 = \left(116q - \frac{q^3}{3}\right)\Big|_0^9 - 315 = 486.$$

$$PS = p^*q^* - \int_0^{q^*} p^S(q)dq = 315 - \int_0^9 \left(\frac{5q}{3} + 20\right)dq = 315 - \left(\frac{5q^2}{6} + 20q\right)\Big|_0^9 = 67{,}5.$$

V. Коэффициент Джини

Коэффициент Джини (индекс концентрации доходов) характеризует степень отклонения линии фактического распределения общего объема доходов, задаваемого кривой Лоренца (кривая В на рис. 4), от линии их равномерного распределения (на рис. 4: отношение площади фигуры ОАВ к площади треугольника ОАС). Кривая Лоренца отражает кумулятивные (накопленные) доли дохода населения в зависимости от накопленной доли численности населения.

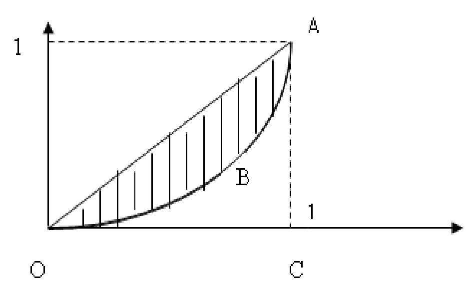


Рис. 4

Величина коэффициента Джини может варьироваться от 0 до 1, при этом, чем выше значение показателя, тем более неравномерно распределены доходы. Коэффициент Джини вычисляется по формуле $k = \frac{S_{OAB}}{S_{OAC}}$.

Пример. Распределение дохода в некоторой стране определяется кривой Лоренца

$$y = 1 - \sqrt{1 - x^2},$$

где y – доля совокупного дохода, получаемая частью x низко оплачиваемого населения. Вычислить коэффициент Джини.

Решение. Заданная кривая изображена на рис.4.

Коэффициент Джини вычисляется по формуле

$$k = \frac{S_{OAB}}{S_{OAC}}.$$

$$S_{OAC} = \frac{1}{2} OC \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{2}.$$

$$S_{OAB} = \int_0^1 (x - (1 - \sqrt{1 - x^2}))\, dx = \left(\frac{x^2}{2} - x\right)\Big|_0^1 + \int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\, dx = (*)$$

$$I = \int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\, dx = \left| \begin{matrix} u = \sqrt{1 - x^2} \Rightarrow du = -\dfrac{x}{\sqrt{1 - x^2}} dx \\ dv = dx \Rightarrow v = x \end{matrix} \right| = x\sqrt{1 - x^2}\Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1 - x^2}} dx =$$

$$= 0 + \int_0^1 \frac{x^2 - 1 + 1}{\sqrt{1 - x^2}} dx = \int_0^1 -\sqrt{1 - x^2} + \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} dx = -I + \arcsin x|_0^1 =$$

$$= -I + \arcsin 1 - \arcsin 0 = -I + \frac{\pi}{2};\ I = -I + \frac{\pi}{2} \Rightarrow 2I = \frac{\pi}{2} \Rightarrow I = \frac{\pi}{4};$$

$$(*) = \frac{1}{2} - 1 + \frac{\pi}{4} = -\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}. \quad k = \frac{-\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}}{\frac{1}{2}} = -1 + \frac{\pi}{2} \approx 0{,}57.$$

Высокое значение коэффициента показывает существенное неравномерное распределение доходов среди населения в данной стране.

VI. Если в производственной функции Кобба–Дугласа считать, что затраты труда есть линейная зависимость от времени, а затраты капитала неизменны, то эта функция может быть представлена в виде $g(t) = (\alpha t + \beta)e^{\gamma t}$. Тогда объем выпускаемой продукции за T лет составит:

$$Q = \int_0^T (\alpha t + \beta)e^{\gamma t} dt.$$

Пример. Найти объем продукции, произведенной за 4 года, если функция Кобба – Дугласа имеет вид $g(t) = (1 + t)e^{3t}$.

Решение. Объем произведенной продукции равен:

$$Q = \int_0^4 (1 + t)e^{3t} dt.$$

Используем метод интегрирования по частям. Пусть $u = t + 1$, $dv = e^{3t}dt$. Тогда $du = dt$, $v = \int e^{3t}dt = \frac{1}{3}e^{3t}$.

Следовательно,

$$Q = (t + 1)\frac{1}{3}e^{3t}\Big|_0^4 - \int_0^4 \frac{1}{3}e^{3t}dt = \frac{1}{3}(5e^{12} - 1) - \frac{1}{9}e^{3t}\Big|_0^4 = \frac{1}{9}(14e^{12} - 2) \approx 2{,}53 \cdot 10^5.$$

VII. Пусть известна функция $t = t(x)$, описывающая изменение затрат времени t на изготовление изделия в зависимости от степени освоения производства, где x – порядковый номер изделия в партии. Тогда среднее время $t_{\text{ср}}$, затраченное на изготовление одного изделия в период освоения от x_1 до x_2 изделий вычисляется по теореме о среднем:

$$t_{\text{ср}} = \frac{1}{x_2 - x_1}\int_{x_1}^{x_2} t(x)\, dx.$$

Что касается функции изменения затрат времени на изготовление изделий $t = t(x)$, то часто она имеет вид $t = ax^{-b}$, где a – затраты времени на первое изделие, b – показатель производственного процесса.

Пример. Найти среднее время, затраченное на освоение одного изделия в период освоения от 50 до 75 изделия, если функция изменения затрат времени $t(x) = 100x^{-\frac{1}{2}}$ (ч).

Решение. Среднее время t_{cp} вычисляется по теореме о среднем:

$$t_{\text{ср}} = \frac{1}{x_2 - x_1}\int_{x_1}^{x_2} t(x)dx = \frac{1}{75 - 50}\int_{50}^{75} 100x^{-\frac{1}{2}}dx = \frac{100}{25}\int_{50}^{75} x^{-\frac{1}{2}}dx = 8x^{\frac{1}{2}}\Big|_{50}^{75} \approx 12{,}7.$$

Задания для самостоятельной работы

3.1. Известна скорость изменения объема продаж некоторого товара с течением времени:

1) $Q'(t) = 14t - 4t^3$;

2) $Q'(t) = -240t + 480$.

Определить функцию объема продаж, если в начальный момент времени было реализовано 800 единиц товара.

3.2. Скорость изменения полезности потребления верхней одежды с течением времени описывается формулой

$$U'(t) = -\frac{100}{(t+2)^2}.$$

Найти функцию полезности, если в момент покупки полезность верхней одежды равнялась 40 единицам.

3.3. Скорость изменения полезности приобретенной компьютерной техники в зависимости от времени задается формулой $U'(t) = -6(t-4)^2$. Какой вид имеет функция полезности, если в момент покупки полезность компьютерной техники оценивалась покупателем в 120 единиц?

3.4. Можно ли определить функцию полных издержек производства некоторого товара, если известна только функция предельных издержек?

3.5. Известно, что постоянные издержки фирмы равны 55 ден. ед., а функция предельных издержек имеет вид:

1) $MC(q) = 6 - 4q + 3q^2$;

2) $MC(q) = 150 - 18q + 0{,}3q^2$;

3) $MC(q) = \dfrac{q}{q+4}$.

Написать функцию полных издержек фирмы.

3.6. Найти функцию полных издержек, если предельные издержки равны $q + 5q^2 + e^q$, а постоянные издержки 10.

3.7. Предельные издержки фирмы равны

$$\frac{20}{\sqrt{q}}e^{\sqrt{q}} + q^3 + \frac{1}{q+1},$$

а постоянные издержки составляют 20 ед. Определить функцию полных издержек фирмы.

3.8. Зависимость предельного дохода фирмы от объема реализованной за месяц продукции задается формулой $MR(q) = 100 + q$. Найти общий доход фирмы за месяц.

3.9. Предельная выручка от реализации некоторого товара записывается формулой:

1) $MR(p) = 12p^2 + 4$;

2) $MR(p) = \dfrac{400p}{p^2 + 16}$.

Написать уравнение функции спроса на данный товар.

3.10. Предельная склонность к потреблению описывается формулой

$$MPC = 0{,}1 + \frac{0{,}4}{\sqrt{Y}}.$$

где Y – величина национального дохода. Определить совокупное потребление, если при национальном доходе 64 ден. ед. потребление составляет 50 ден. ед.

3.11. Пусть производственная функция $q = f(L)$ определяет зависимость выпуска продукции q от размера прикладываемого труда L (labour). Производительность труда определяется тем, сколько единиц произведенного выпуска приходится на единицу использованного фактора производства. Предельной производительностью труда (MP_L) называется то увеличение объема выпуска продукции, которое вызвано применением дополнительной единицы этого фактора. MP_L определяется формулой: $MP_L = \lim\limits_{\Delta L \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta L} = q'$.

Предельная производительность труда при производстве школьных тетрадей задается формулой $MP_L = \frac{250}{\sqrt{L}}$. Найти функцию, описывающую объем выпуска школьных тетрадей, если девять рабочих могут выпустить 1 400 тетрадей.

3.12. Известна предельная выручка при реализации некоторого товара $MR(q) = 6q^2$. Найти общую выручку.

3.13. Предельная полезность потребления некоторого товара задается формулой

$$MU(x) = 4\left(\tfrac{1}{2}\right)^x.$$

Известно, что полезность потребления двух единиц товара равна пяти. Написать функцию полезности потребления данного товара.

3.14. Функция предельной полезности потребления минеральной воды имеет вид $MU(x) = \frac{1}{x+6}$. Найти функцию общей полезности потребления минеральной воды, если потребление трех литров воды дает полезность, равную ln 3.

3.15. Скорость изменения спроса на некоторый товар выражается формулой

$$v(t) = 2 + \sqrt{t} + \frac{25}{(t+1)\,ln\,5}.$$

Найти объем товара реализованного за 4 дня.

3.16. В соответствии с проведенными исследованиями распределения доходов в одной из стран кривая Лоренца задается уравнением $y = x^2$, где x – доля населения, y – доля доходов населения. Вычислить коэффициент Джини.

3.17. Изучение распределения общего объема денежных доходов населения некоторой страны показало, что кривая Лоренца задается уравнением:

1) $y^3 - x^5 = 0$;

2) $y^6 - x^7 = 0$.

Здесь x – доля населения, y – доля доходов населения. Вычислить коэффициент Джини и прокомментировать ситуацию.

3.18. Найти излишки потребителей и поставщиков, если законы цен спроса и цен предложения имеют вид:

1) $p^D(q) = 186 - q^2, \quad p^S(q) = 20 + \frac{11}{6}q$;

2) $p^D(q) = 250 - q^2, \quad p^S(q) = 20 + \frac{1}{3}q$;

3) $p^D(q) = 240 - q^2,\ p^S(q) = q^2 + 2q + 20$.

3.19. Функция изменения затрат времени на изготовление автомобилей имеет вид

$$t(x) = 500x^{-\frac{1}{3}}.$$

Найти среднее время, затраченное на изготовление одного автомобиля в период от 27 до 125 машин.

3.20. Объем выпуска кондитерских изделий с течением времени изменяется по формуле $q(t) = 15t^4 - 9t^2 + 10$. Найти средний выпуск кондитерских изделий, соответствующий периоду с третьего по пятый год работы.

3.21. Найти объем продукции, произведенной за 4 дня, если функция Кобба – Дугласа имеет вид $f(t) = (2t+3)e^t$.

3.22. Объем продукции, выпускаемой фирмой в зависимости от времени, описывается формулой $q(t) = (1+t)e^{2t}$. Найти объем продукции, произведенной фирмой за 6 лет.

3.23. Под строительство больничного комплекса задан непрерывный денежный поток со скоростью $I(t) = -t^2 + 10t + 4$ (млрд. руб/год) в течение 8 лет с годовой процентной ставкой $p = 7{,}5\%$. Найти дисконтированную стоимость этого потока.

3.24. Производительность труда в течение дня изменяется по эмпирической формуле $y(t) = -0{,}6t^2 + 8t + 4$. Найти объем продукции, произведенной за 5 часов.

3.25. Найти дневную выработку за рабочий день продолжительностью 8 часов, если производительность труда в течение дня меняется по эмпирической формуле

$$y(t) = -0{,}3t^2 + 0{,}8t + 10.$$

3.26. Производительность труда рабочего описывается формулой

$$y(x) = -\frac{x^2}{300} - \frac{x}{12} + 21,$$

где x – выпуск продукции за один час. Вычислить объем выпуска продукции рабочим за год, если в году 227 рабочих дней.

3.27. Компания производит некоторый продукт. При производстве q единиц продукции предельные издержки компании составляют

$$MC(q) = 1 - \frac{1}{(q+1)^2}.$$

Найти издержки при производстве 5 ед. продукции, если средние издержки равны 3,05 единицам при производстве 4 единиц продукции.

3.28. Предельные издержки компании заданы функцией $MC(q) = 32 + 18q - 12q^2$, а постоянные издержки равны 43. Определить общие издержки, средние и переменные издержки.

3.29. Предельный доход компании составляют $MR(q) = 10 - 2q^2$, а общие издержки $TC(q) = q^2 + 6q + 2$, где q – объем производства. Найти функцию дохода и определить максимальную возможную прибыль компании.

3.30. Для некоторой компании предельные издержки составляют $MC(q) = 10 - q + q^2$. Определить издержки компании, если объем производства увеличится с 2 ед. до 4 ед.

3.31. Уравнения спроса и предложения заданы следующим образом: $p(q+1) = 231$ и $p - q = 11$ соответственно. Вычислить равновесную цену, равновесное количество, а также производственные и потребительские излишки.

3.32. Уравнения цен спроса и цен предложения заданы, как

$$p^D(q) = \frac{50}{q+5} \quad \text{и} \quad p^S(q) = \frac{q}{10} + \frac{9}{2}$$

соответственно, где q – количество товара, p – цена за единицу товара. Определить производственные и потребительские излишки.

§4. ФУНКЦИИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

Определение. Множество точек называется ***плоским***, если все его точки принадлежат одной плоскости.

Определение. Если каждой точке $M(x; y)$ плоского множества E по некоторому закону можно поставить в соответствие вполне определенное число z из множества Z, то z называется ***функцией двух независимых переменных x и y***

$$z = f(x; y). \qquad (4.1)$$

Определение. ***Областью определения*** функции двух переменных называется множество всех допустимых упорядоченных пар чисел x и y, при которых функция z принимает действительные значения.

Рассмотрим произвольные точки $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$. Расстояние между ними определяется по формуле:

$$\rho(M_1, M_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Определение. Последовательность точек $\{M_n(x_n; y_n)\}_{n=1}^{\infty}$ называется ***сходящейся,*** если существует такая точка M_0, что для любого положительного числа ε можно указать номер N такой, что при $n \geq N$ выполняется неравенство $\rho(M_n, M_0) < \varepsilon$. При этом точка M_0 называется ***пределом последовательности*** $\{M_n(x_n; y_n)\}_{n=1}^{\infty}$ и обозначается следующим образом:

$$\lim_{n\to\infty} M_n = M_0, \text{ или } M_n \to M_0 \text{ при } n \to \infty.$$

Определение. Число А называется ***пределом функции*** $f(x; y)$ в точке $M_0(x_0; y_0)$, если для любой последовательности точек $\{M_n(x_n; y_n)\}_{n=1}^{\infty}$ сходящейся к точке $M_0(x_0; y_0)$, последовательность соответствующих значений функции ***функций*** $\{f(x_n; y_n)\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к числу А. Предел функции $f(x; y)$ в точке $M_0(x_0; y_0)$обозначается так:

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x; y) = A.$$

Пусть функция $z = f(x; y)$ определена в точке $M_0(x_0; y_0)$и в ее окрестности.

Определение. Функция $z = f(x; y)$ называется ***непрерывной*** в точке $M_0(x_0; y_0)$, если существует предел функции в точке $M_0(x_0; y_0)$, равный ее значению в этой точке:

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x; y) = f(x_0; y_0).$$

Если функция не является непрерывной в точке $M_0(x_0; y_0)$, то точка $M_0(x_0; y_0)$ называется ***точкой разрыва*** функции $f(x; y)$.

Рассмотрим функцию $z = f(x;y)$, определенную на плоском множестве E и внутреннюю точку $M_0(x_0;y_0)$ этого множества. Вычислим значение функции в точке $M_0(x_0;y_0)$. Если аргумент y оставить без изменения, а аргументу x дать приращение Δx, так чтобы новая точка $M_1(x_0+\Delta x;y_0)$ также была внутренней точкой множества E, то функция $z = f(x;y)$ получит ***частное приращение по x***:

$$\Delta_x z = f(x_0+\Delta x;y_0) - f(x_0;y_0).$$

Если, оставив аргумент x без изменения, аргументу y дать приращение Δy, то функция $z = f(x;y)$ получит ***частное приращение по y***:

$$\Delta_y z = f(x_0;y_0+\Delta y) - f(x_0;y_0).$$

Пусть теперь оба аргумента x и y получат соответственно приращения Δx и Δy. Тогда функция z получит ***полное приращение***:

$$\Delta z = f(x_0+\Delta x;y_0+\Delta y) - f(x_0;y_0).$$

Отметим, что, вообще говоря, полное приращение Δz не равно сумме частных приращений:

$$\Delta z \neq \Delta_x z + \Delta_y z.$$

Теперь определение ***непрерывности функции*** двух переменных в точке можно сформулировать так: функция $z = f(x;y)$ называется ***непрерывной*** в точке $M_0(x_0;y_0)$, если бесконечно малым приращениям независимых переменных Δx и Δy соответствует бесконечно малое приращение функции:

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \Delta z = 0.$$

Определение. Пусть функция $z = f(x;y)$ непрерывна в точке $M_0(x_0;y_0)$. Если существует конечный предел отношения частного приращения $\Delta_x z$ функции к приращению Δx, когда последнее стремится к 0, то этот предел называется ***частной производной*** функции $z = f(x;y)$ ***по переменной x*** и обозначается одним из символов z'_x, $f'_x(x;y)$, $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial x}$:

$$f'_x(x_0;y_0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x;y_0) - f(x_0;y_0)}{\Delta x}.$$

Из определения вытекает **правило дифференцирования функции двух переменных** $z = f(x;y)$ **по переменной x**, чтобы найти частную производную функции двух переменных по переменной x, надо другую переменную y считать постоянной величиной и дифференцировать $f(x;y)$ по x как функцию одной переменной.

Определение. Пусть функция $z = f(x;y)$ непрерывна в точке $M_0(x_0;y_0)$. Если существует конечный предел вида $\lim\limits_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y}$, то этот предел называется ***частной производной*** функции $z = f(x;y)$ по ***переменной*** $\boldsymbol{y}$ и обозначается одним из символов z'_y, $f'_y(x;y)$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$:

$$f'_y(x_0;y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0;y_0+\Delta y) - f(x_0;y_0)}{\Delta y}.$$

Правило дифференцирования по переменной $\boldsymbol{y}$: чтобы найти частную производную функции двух переменных по переменной y, надо другую переменную x считать величиной постоянной и дифференцировать $f(x;y)$ по y как функцию одной переменной.

Пример. Пусть производственная функция $q = f(K,L)$ определяет зависимость выпуска продукции q от объёма вложенного капитала K и размера прикладываемого труда L. Производительность каждого из факторов производства (капитала или труда) определяется тем, сколько единиц произведенного выпуска приходится на единицу использованного фактора производства. Предельной производительностью фактора производства называется то увеличение объема выпуска продукции, которое вызвано применением дополнительной единицы этого фактора и определяется как частная производная от функции выпуска по соответствующему фактору. Предельная производительность труда MP_L определяется формулой:

$$MP_L = \lim_{\Delta L \to 0} \frac{\Delta_L q}{\Delta L} = \frac{\partial f}{\partial L}.$$

Предельная производительность капитала MPK определяется формулой:

$$MP_K = \lim_{\Delta K \to 0} \frac{\Delta_K q}{\Delta K} = \frac{\partial f}{\partial K}.$$

Фирма работает по технологии, описываемой производственной функцией: $f(K,L) = K^{0,5}L^{0,5}$. Найти предельную производительность труда и предельную производительность капитала.

Решение. Определим предельную производительность труда:

$$MP_L = \frac{\partial f}{\partial L} = 0,5K^{0,5}L^{-0,5} = 0,5\left(\frac{K}{L}\right)^{0,5}.$$

Предельная производительность капитала:

$$MP_K = \frac{\partial f}{\partial K} = 0,5K^{-0,5}L^{0,5} = 0,5\left(\frac{L}{K}\right)^{0,5}.$$

Теорема. Если в окрестности точке $M_0(x_0; y_0)$ существуют непрерывные частные производные $f_x'(x; y)$ и $f_y'(x; y)$, то функция $z = f(x; y)$ дифференцируема в точке M_0, и полное приращение ее представимо в виде:

$$\Delta z = f_x'(x_0; y_0)\Delta x + f_y'(x_0; y_0)\Delta y + \alpha(\Delta x)\Delta x + \beta(\Delta y)\Delta y,$$

где $\alpha(\Delta x)$ и $\beta(\Delta y)$ – бесконечно малые функции в точке $M_0(x_0; y_0)$.

Определение. Главная линейная часть полного приращения дифференцируемой функции двух переменных называется ее ***полным дифференциалом*** и обозначается dz.

$$dz = f_x'(x_0; y_0)dx + f_y'(x_0; y_0)dy \text{ или } dz = z_x'dx + z_y'dy.$$

Пусть функция $z = f(x; y)$ дифференцируема в точке $M(x; y)$, то есть в этой точке существуют непрерывные частные производные $z_x' = f_x'(x;\ y), z_y' = f_y'(x;\ y)$.

Определение. Частная производная по x от z_x' и частная производная по y от z_y' называются ***частными производными второго порядка*** от функции $z = f(x; y)$ и обозначаются:

$$z_{xx}'' = (z_x')_x' = \left(f_x'(x; y)\right)_x' = f_{xx}''(x; y);$$

$$z_{yy}'' = \left(z_y'\right)_y' = \left(f_y'(x; y)\right)_y' = f_{yy}''(x; y).$$

Определение. Частная производная по y от z_x' и частная производная по x от z_y' называются ***смешанными производными функции второго порядка*** и обозначаются:

$$z_{xy}'' = (z_x')_y' = \left(f_x'(x; y)\right)_y' = f_{xy}''(x; y),$$

$$z_{yx}'' = \left(z_y'\right)_x' = \left(f_y'(x; y)\right)_x' = f_{yx}''(x; y).$$

Смешанные производные второго порядка z_{xy}'' и z_{yx}'' равны между собой в каждой точке, где они непрерывны.

Определение. Полный дифференциал от полного дифференциала функции двух переменных называется ***полным дифференциалом второго порядка*** и обозначается

$$d^2z = z_{xx}''dx^2 + 2z_{xy}''dxdy + z_{yy}''dy^2.$$

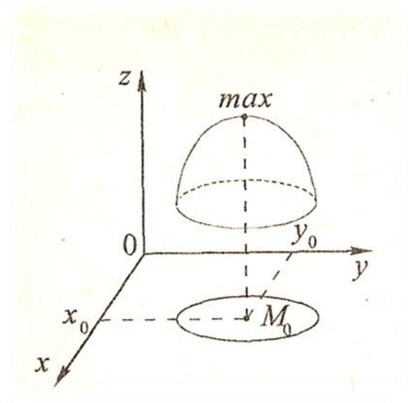
Пусть функция $z = f(x; y)$непрерывна в точке $M_0(x_0; y_0)$ и в ее δ -окрестности.

Определение. Функция $z = f(x; y)$ имеет в точке $M_0(x_0; y_0)$ ***максимум*** (сокращенно «max») (рис. 5), если для всех точек $M(x; y)$ окрестности точки $M_0(x_0; y_0)$:

$$f(x; y) \leq f(x_0; y_0) \text{ или } \Delta z = f(x; y) - f(x_0; y_0) \leq 0. \qquad (4.2)$$

Определение. Функция $z = f(x; y)$ имеет в точке $M_0(x_0; y_0)$ ***минимум*** (сокращенно «min») (рис. 6), если для всех точек $M(x; y)$ окрестности точки $M(x_0; y_0)$

$$f(x; y) \geq f(x_0; y_0) \text{ или } \Delta z = f(x; y) - f(x_0; y_0) \geq 0. \qquad (4.3)$$



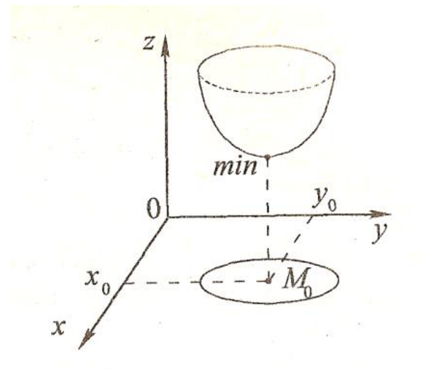


Рис. 5

Рис. 6.

Максимум и минимум функции двух переменных называются ее ***экстремумами*** и являются локальными понятиями, то есть связанными с конкретной точкой и ее сколь угодно малой окрестностью.

Таким образом, если в точке $M_0(x_0; y_0)$ функция $z = f(x; y)$ имеет экстремум, то в окрестности точки $M_0(x_0; y_0)$ полное приращение Δz имеет постоянный знак, причем

$\Delta z \leq 0$, если в точке M_0функция имеет максимум;

$\Delta z \geq 0$, если в точке M_0функция имеет минимум.

Необходимые условия существования экстремума функции двух переменных

Пусть функция $z = f(x; y)$ непрерывна в области E и $M_0(x_0; y_0)$– внутренняя точка области E.

Теорема. Если функция $z = f(x; y)$ дифференцируема в точке $M_0(x_0; y_0)$ и имеет в этой точке экстремум, то обе частные производные ее в точке M_0 равны нулю:

$$\begin{cases} f_x'(x_0; y_0) = 0, \\ f_y'(x_0, y_0) = 0. \end{cases} \tag{4.4}$$

Определение. Точки, в которых выполняются условия (4.4), называются ***критическими точками*** функции.

Замечание. Отметим, что критическими точками на экстремум функции $f(x; y)$ являются также точки, в которых частные производные $f_x'(x; y)$, $f_y'(x; y)$ не существуют.

Необходимые условия существования экстремума функции двух переменных можно сформулировать так: если функция $z = f(x; y)$ в точке $M_0(x_0; y_0)$имеет экстремум, то в этой точке частные производные по x и y функции $f(x; y)$ равны нулю или не существуют.

Достаточные условия существования экстремума функции двух переменных

Пусть функция $z = f(x; y)$ дважды дифференцируема в точке $M_0(x_0; y_0)$, то есть существуют непрерывные частные производные первого порядка $f_x'(x; y), f_y'(x; y)$, и все производные второго порядка $f_{xx}''(x; y), f_{xy}''(x; y), f_{yy}''(x; y)$, а $M_0(x_0; y_0)$– критическая точка функции, в которой $\begin{cases} f_x'(x_0; y_0) = 0, \\ f_y'(x_0; y_0) = 0. \end{cases}$

Если в окрестности критической точки $M_0(x_0; y_0)$ дифференциал второго порядка $d^2 f(x_0; y_0)$ имеет постоянный знак, то в точке $M_0(x_0; y_0)$функция имеет экстремум, причем при $d^2 f(x_0; y_0) < 0$– максимум; при $d^2 f(x_0; y_0) > 0$ – минимум.

Введем обозначения:

$A = f_{xx}''(x_0; y_0);\ B = f_{xy}''(x_0; y_0); C = f_{yy}''(x_0; y_0)$.

Если $D = \mathrm{B}^2 - \mathrm{AC} < 0$, то:

при $A < 0$ в точке M_0 функция имеет **максимум**,

при $A > 0$ в точке M_0 функция имеет **минимум**.

Если $D = \mathrm{B}^2 - \mathrm{AC} > 0$, то в этом случае экстремума в критической точке $M_0(x_0; y_0)$ не существует.

Если $D = \mathrm{B}^2 - \mathrm{AC} = 0$, то необходимы дополнительные исследования либо непосредственно по условиям

$$\Delta z = f(x; y) - f(x_0; y_0) \leq 0, \tag{4.5}$$

$$\Delta z = f(x; y) - f(x_0; y_0) \geq 0, \tag{4.6}$$

либо с помощью дифференциала третьего порядка $d^3 f(x_0, y_0)$.

Замечание. Если в критической точке $M_0(x_0; y_0)$ функция $z = f(x; y)$ недифференцируема, то есть частные производные $f_x'(x_0; y_0)$ и $f_y'(x_0; y_0)$ не существуют, то в этой точке не существует и дифференциал второго порядка $d^2 f(x_0; y_0)$. Поэтому для недифференцируемой функции применять достаточные условия существования экстремума нельзя. В этом случае следует воспользоваться непосредственно условиями (4.5) и (4.6).

Пример. В компании по обработке данных работают как старшие, так и младшие программисты. Конкретный крупный проект будет стоить

$$TC(x, y) = 2000 + 2x^3 - 12xy + y^2$$

долларов, где x и y представляют количество младших и старших программистов, используемых соответственно.

Сколько сотрудников каждого вида должно быть назначено на проект, чтобы минимизировать его стоимость? Какова эта минимальная стоимость?

Решение. Чтобы минимизировать стоимость, мы устанавливаем, что частные производные должны быть равны 0, получая

$$\begin{cases} TC'_x = 6x^2 - 12y = 0; \\ TC'_y = -12x + 2y = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 2y = 0; \\ y = 6x. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 12x = 0; \\ y = 6x. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x(x-12) = 0; \\ y = 6x. \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 0; \\ y = 0. \end{cases} \\ \begin{cases} x = 12; \\ y = 72. \end{cases} \end{array} \right.$$

Отбросим случай (0; 0), который означает, что нет работающих над проектом программистов, и проверим характер критической точки $x = 12;\ \text{y} = 72$. Для этого найдем частные производные второго порядка:

$$TC''_{xx} = (TC'_x)_x{}' = (6x^2 - 12y)'_x = 12x;$$
$$TC''_{xy} = (TC'_x)_y{}' = (6x^2 - 12y)'_y = -12;$$
$$TC''_{yy} = \left(TC'_y\right)_y{}' = (-12x + 2y)'_y = 2;$$

$$A = TC''_{xx}(12; 72) = 12x|_{x=12} = 144;$$

$$B = TC''_{xy}(12; 72) = -12;$$

$$C = TC''_{xy}(12; 72) = 2.$$

$$B^2 - AC = (-12)^2 - 144 \cdot 2 = -144 < 0, \quad A > 0, C > 0.$$

Следовательно, у нас есть минимум при $x = 12;\ \text{y} = 72$. Когда $x = 12, \text{y} = 72$, стоимость $TC(x, y) = 2000 + 3456 - 10368 + 5184 = 272$.

Условный экстремум функции двух переменных

Пусть функция $z = f(x; y)$ определена в области D и в некоторой точке области D имеет экстремум. Если независимые переменные x и y при этом не связаны между собой никакими соотношениями, то этот экстремум называется ***безусловным экстремумом***.

Предположим теперь, что в области *D* дана линия *Г*, уравнение которой

$$\phi(x; y) = 0, \tag{4.7}$$

и требуется найти только те экстремумы функции $z = f(x; y)$, которые достигаются в точках, принадлежащих линии *Г*. Такие экстремумы называются ***условными экстремумами функции*** $z = f(x; y)$ на линии *Г*.

Определение. Функция $z = f(x;y)$ имеет в точке $M_0(x_0;y_0)$ ***условный максимум***, если для всех точек $M(x;y)$ из окрестности точки $M_0(x_0;y_0)$ выполняется неравенство $f(x;y) \leq f(x_0;y_0)$ при условии, что $\phi(x;y) = 0$.

Определение. Функция $z = f(x;y)$ имеет в точке $M_0(x_0;y_0)$ ***условный минимум***, если для всех точек $M(x;y)$ из окрестности точки $M_0(x_0;y_0)$ выполняется неравенство $f(x;y) \geq f(x_0;y_0)$ при условии, что $\phi(x;y) = 0$.

Уравнение (4.7) определяет y как неявную функцию от x и называется ***уравнением связи***. Оно показывает, что x и y не являются независимыми переменными, а связаны условием (4.7).

Пример. На расширение производства фирма выделила 2 млн. руб. Если на приобретение нового оборудования потратить x млн. руб., а на повышение заработной платы y млн. руб., то прирост объема продукции составит: $z = 0{,}01x^{\frac{3}{5}}y^{\frac{2}{5}}$.

Как следует распределить выделенные денежные средства, чтобы прирост объема производства был максимальным?

Решение.

Постановка задачи

$z = 0{,}01x^{\frac{3}{5}}y^{\frac{2}{5}}$;
$x + y = 2000$;
$x \geq 0,\ y \geq 0$.

Из первого условия: $y = 2000 - x$.

Тогда $z = 0{,}01x^{\frac{3}{5}}(2000 - x)^{\frac{2}{5}}$.

Найдем при каких x функция z достигает максимума:

$$z' = \left(0{,}01x^{\frac{3}{5}}(2000 - x)^{\frac{2}{5}}\right)' = \left(0{,}01x^{\frac{3}{5}}\right)'(2000 - x)^{\frac{2}{5}} + 0{,}01x^{\frac{3}{5}}\left((2000 - x)^{\frac{2}{5}}\right)' =$$

$$= 0{,}01 \cdot 0{,}6x^{-\frac{2}{5}}(2000 - x)^{\frac{2}{5}} + 0{,}01x^{\frac{3}{5}} \cdot 0{,}4(2000 - x)^{-\frac{3}{5}} =$$

$$= 0{,}006\left(\frac{2000 - x}{x}\right)^{\frac{2}{5}} - 0{,}004\left(\frac{x}{2000 - x}\right)^{\frac{3}{5}}.$$

$$0{,}006\left(\frac{2000 - x}{x}\right)^{\frac{2}{5}} - 0{,}004\left(\frac{x}{2000 - x}\right)^{\frac{3}{5}} = 0.$$

Сделаем замену

$$a = \frac{x}{2000 - x}.$$

Тогда последнее уравнение примет вид $0{,}006a^{-\frac{2}{5}} - 0{,}004a^{\frac{3}{5}} = 0$.

$$\frac{6-4a}{a^{\frac{2}{5}}} = 0;$$

$$a = \frac{3}{2};$$

$$\frac{x}{2000-x} = \frac{3}{2};$$

$$2x = 6000 - 3x;$$

$$5x = 6000;$$

$$x = 1200 \Rightarrow y = 2000 - x = 800;$$

$$z = 0{,}01 \cdot 1200^{\frac{3}{5}} \cdot 800^{\frac{2}{5}} = 10{,}2034.$$

Выделенные денежные средства следует распределить $x = 1200$ тыс. руб, на новое оборудование и $y = 800$ тыс. руб. на повышение заработной платы, чтобы прирост объема производства был максимальным и составил 10,2034 тыс. руб.

Необходимые и достаточные условия существования условного экстремума

Условия

$$\begin{cases} f'_x + \lambda\phi'_x = 0, \\ f'_y + \lambda\phi'_y = 0, \\ \phi(x;y) = 0. \end{cases} \tag{4.8}$$

совпадают с необходимыми условиями существования безусловного экстремума функции трех независимых переменных, которая называется ***функцией Лагранжа:***

$$L(x;y;\lambda) = f(x;y) + \lambda\phi(x;y). \tag{4.9}$$

Решая систему (4.8) относительно x, y, λ, определяют координаты критических точек на экстремум x_0, y_0 и значение неизвестного множителя Лагранжа λ_0. Подставляя найденное значение λ_0в функцию (4.9), получим функцию двух независимых переменных x и y:

$$L(x;y) = f(x;y) + \lambda_0\phi(x;y). \tag{4.10}$$

Достаточным условием существования безусловного экстремума функции (4.10) является постоянство знака дифференциала второго порядка в точке $M_0(x_0;y_0)$:

$$d^2L(x_0;y_0) = L''_{xx}(x_0;y_0)dx^2 + 2L''_{xy}(x_0;y_0)dxdy + L''_{yy}(x_0;y_0)dy^2 =$$

$$= dx^2\left[L''_{xx}(x_0;y_0) + 2L''_{xy}(x_0;y_0)\frac{dy}{dx} + L''_{yy}(x_0;y_0)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right].$$

Значение $\frac{dy}{dx} = y'(x_0; y_0)$ вычисляется как значение производной неявной функции, определяемой уравнением связи (4.7). Так как $dx^2 > 0$, то знак $d^2L(x_0;\ y_0)$ совпадает со знаком выражения в квадратных скобках.

Если $d^2L(x_0;\ y_0) < 0$, то функция Лагранжа $L(x;\ y)$ имеет в точке $M_0(x_0; y_0)$ максимум, а функция $z = f(x; y)$ – условный максимум.

Если $d^2L(x_0;\ y_0) > 0$, то функция Лагранжа $L(x;\ y)$ имеет в точке $M_0(x_0; y_0)$ минимум, а функция $z = f(x; y)$ – условный минимум.

Определив точки условного экстремума, вычисляют значения функции в этих точках, то есть $z_{\min\text{ усл}}$ и $z_{\max\text{ усл}}$.

Замечание. Метод множителей Лагранжа можно применить и для функций любого числа n независимых переменных.

Пример. Фирма производит товар двух видов в количествах x и y. Функция полных издержек определена соотношением $C(x, y) = 25x^2 + 26xy + 16y^2 + 800$. Цены этих товаров на рынке равны $p_1 = 356$ и $p_2 = 296$. Определить, при каких объемах выпуска достигается максимальная прибыль на множестве производственных возможностей, ограниченном издержками производства в объеме $C_0 = 1200$. Найти эту прибыль.

Решение. Функция прибыли имеет вид

$$\Pi(x, y) = p_1x + p_2y - C(x, y) = 356x + 296y - 25x^2 - 26xy - 16y^2 - 800.$$

Надо найти максимум этой функции для неотрицательных x и y, удовлетворяющих условию $C(x, y) \le C_0$, т.е. в области D, заданной неравенствами:

$$D = \{x \ge 0,\ y \ge 0,\ 25x^2 + 26xy + 16y^2 \le 400\}.$$

1) Находим координаты стационарной точки из системы:

$$\begin{cases} \Pi'_x = 0, \\ \Pi'_y = 0, \end{cases}$$

имеющей для данной задачи вид:

$$\begin{cases} 356 - 50x - 26y = 0, \\ 296 - 26x - 32y = 0. \end{cases}$$

Решив систему, найдем стационарную точку $M_0(4{,}6)$. Полные издержки при таких объемах выпуска равны $C(4, 6) = 2400 > 1200$, поэтому точка M_0 не принадлежит множеству производственных возможностей D.

2) Максимум прибыли достигается, следовательно, на границе области D. Легко

проверить, что при $x = 0$ и $y = 0$ критических точек нет. Найдем критическую точку на дуге $C(x, y) = C_0$. Составим функцию Лагранжа:

$$L(x, y, \lambda) = \Pi(x, y) + \lambda(C(x, y) - C_0) =$$
$$= 356x + 296y - 25x^2 - 26xy - 16y^2 - 800 - \lambda(25x^2 + 26xy + 16y^2 - 400).$$

Система уравнений для определения координат экстремальной точки имеет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 356 - 50x - 26y - 50\lambda x - 26\lambda y = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 296 - 26x - 32y - 26\lambda x - 32\lambda y = 0, \\ 25x^2 + 26xy + 16y^2 = 400. \end{cases}$$

Исключив λ, получим систему:

$$\begin{cases} \dfrac{356 - 50x - 26y}{50x + 26y} = \dfrac{296 - 26x - 32y}{26x + 32y}, \\ 25x^2 + 26xy + 16y^2 = 400. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 356(26x + 32y) = 296(50x + 26y), \\ 25x^2 + 26xy + 16y^2 = 400. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 2y, \\ 25x^2 + 26xy + 16y^2 = 400. \end{cases}$$

Решая систему, найдем экстремальную точку $M_1(2; 3)$.

3) Найдем угловые точки области D.

$$\begin{cases} x = 0, \\ y = 0. \end{cases} \Rightarrow O(0;\ 0).$$

$$\begin{cases} y = 0, \\ 25x^2 + 26xy + 16y^2 = 400, \\ x \geq 0. \end{cases} \Rightarrow A(4, 0). \quad \begin{cases} x = 0, \\ 25x^2 + 26xy + 16y^2 = 400, \\ y \geq 0. \end{cases} \Rightarrow B(0; 5).$$

Значения функции прибыли в угловых точках области D: $O(0;\ 0)$; $A(4; 0)$ и $B(0; 5)$ меньше чем в точке $M_1(2; 3)$, следовательно, при объемах выпуска $x = 2, y = 3$ достигается максимальная прибыль $\Pi_{max} = \Pi(2,3) = 400$.

Функция Кобба – Дугласа

Свойства производственных функций

Основными видами производственных функций являются следующие два:

1) Линейная (или аддитивная) производственная функция. В случае двух факторов имеет форму:

$$y = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 \ (a_i > 0,\ i = 0, 1, 2); \tag{4.11}$$

2) Мультипликативная производственная функция. В случае двух факторов имеет форму:

$$y = a_0 \cdot x_1^{a_1} \cdot x_2^{a_2}. \tag{4.12}$$

В формулах (4.11) и (4.12) $a_i > 0$ $(i = 0, 1, 2)$ – параметры производственной функции, x_i $(i = 1, 2)$ – независимые переменные (ресурсы).

Функция Кобба–Дугласа относится к мультипликативным двухфакторным производственным функциям. Она имеет вид:

$$y = a_0 \cdot K^{a_1} \cdot L^{a_2},$$

где y – объём выпуска продукции, K – объем используемого основного капитала, L – объем используемых трудовых ресурсов, $a_i > 0$ $(i = 0, 1, 2)$ – параметры производственной функции.

Эластичность функции двух переменных

Пусть дана функция двух переменных $z = f(x; y)$, ее частными приращениями будут:

$$\Delta_x z = f(x_0 + \Delta x; y_0) - f(x_0; y_0),$$

$$\Delta_y z = f(x_0; y_0 + \Delta y) - f(x_0; y_0).$$

Эластичностью функции $z = f(x; y)$ в точке $M_0(x_0,\ y_0)$ по x называется предел

$$E_{zx}(x_0; y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta_x z}{z} : \frac{\Delta x}{x} \right).$$

Эластичностью функции $z = f(x; y)$ в той же точке $M_0(x_0,\ y_0)$ по y называется предел

$$E_{zy}(x_0; y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta_x z}{z} : \frac{\Delta y}{y} \right).$$

Из определения вытекают следующие формулы для нахождения коэффициентов эластичности z по x и по y :

$$E_{zx}(x_0; y_0) = \frac{x}{z} \cdot z_x' = x \cdot (\ln z)_x', \quad E_{zy}(x_0; y_0) = \frac{y}{z} \cdot z_y' = y \cdot (\ln z)_y'.$$

Предельная полезность и предельная норма замещения

Определение. ***Функцией полезности*** $U = U(x; y)$ называется функция, которая выражает меру полезности набора $(x; y)$, где x – количество товара X, а y – количество товара Y.

Определение. ***Предельной полезностью*** X называется чувствительность набора $(x; y)$ к незначительному изменению x при фиксированном y и определяется как частная производная U_x'.

Определение. ***Предельной полезностью*** Y называется чувствительность набора $(x; y)$ к незначительному изменению y при фиксированном x и определяется как частная производная U_y'.

Линией уровня функции полезности будет график функции $U(x;\ y) = c$. Чаще всего эта линия (её ещё называют *кривой безразличия*) является графиком убывающей функции. Это означает, что для точек $M_0(x_0; y_0)$ и $M_0(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y)$ расположенных на одной линии уровня, приращения Δx и Δy имеют разные знаки. Пусть, для определенности, $\Delta x > 0$, а $\Delta y < 0$. В этом случае говорят, что Δx единиц первого товара замещается на Δy единиц второго товара (имеется в виду переход из M в M_0 (рис. 7)).

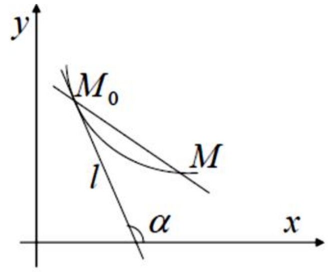


Рис. 7

Определение. ***Предельной нормой замещения X на Y в точкеM_0*** называется предел отношения $\frac{-\Delta y}{\Delta x}$, когда точка M стремится к M_0, оставаясь на одной с M_0 линии уровня функции $U(x; y)$ и обозначается MRS_{xy} или MRS_{xy}, если необходимо явно указать ее зависимость от точки M_0. Итак,

$$MRS_{xy}(M_0) = \lim_{M \to M_0} \left(\frac{-\Delta y}{\Delta x} \right).$$

Утверждение. Предельная норма замещения одного товара другим равна отношению их предельных полезностей, т.е.

$$MRS_{xy}(M_0) = \frac{U'_x(M_0)}{U'_y(M_0)}.$$

Определение. ***Изоклинами (изоклиналями)*** производственных функций называются линии постоянной предельной нормы замещения ресурсов, т.е. $MRS_{xy} = const$.

Свойства производственных функций

Приведём свойства производственных функций на примере двухфакторной функции $z = f(x, y)$.

1. $f(0, y) = f(x, 0) = 0$. При отсутствии хотя бы одного ресурса нет выпуска продукции.

2. При $x_1 > x_2$ $f(x_1, y) > f(x_2, y)$; при $y_1 > y_2$ $f(x, y_1) > f(x, y_2)$. С увеличением объёма использования любого ресурса объём выпуска растёт. Это свойство ещё можно записать в виде: $z'_x > 0, z'_y > 0$.

3. $z''_{xx} \leq 0$, $z''_{yy} \leq 0$. С ростом использования ресурсов скорость роста выпуска замедляется.

4. Мультипликативная производственная функция является однородной функцией k-го порядка. То есть, если затраты каждого ресурса изменятся в t раз, объём выпуска изменится в t^k раз.

5. При $x > 0, y > 0$ $z''_{xy} \leq 0$. С ростом затрат одного из ресурсов предельная эффективность другого ресурса возрастает.

Понятие перекрёстной эластичности

Пусть $z = z(x_1, x_2, \dots, x_т)$ – производственная функция многих переменных**.** Частная эластичность функции нескольких переменных по переменной x_i:

$$E_{x_i}(z) = \frac{x_i}{z} \cdot z'_{x_i}.$$

В производственной функции Кобба – Дугласа $E_K(Y) = a_1, E_L(Y) = a_2$, т.е. показатели a_1 и a_2 приближенно показывают, на сколько процентов изменится выпуск продукции при изменении только объема производственных фондов K или только затрат труда L на 1% соответственно.

Пример. Найти коэффициенты эластичности z по x и по y функции $z = x^y$ в точке (2; 3).

Решение.

$$E_{zx}(x; y) = x \cdot (\ln z)'_x = x \cdot (y \ln x)'_x = y,$$

$$E_{zy}(x; y) = \frac{y}{z} \cdot z'_y = y \cdot (\ln z)'_y = y \cdot (y \ln x)'_y = y \cdot \ln x\,.$$

Следовательно, $E_{zx}(2; 3) = 3, \quad E_{zy}(2; 3) = 3 \cdot \ln 2\,.$

Пример. По данной производственной функции $y = 10\ln\,(x_1^{0,5}) \cdot x_2^{0,6}$ найти средние и предельные производительности каждого фактора производства, частные эластичности выпуска по каждому фактору, эластичность производства и предельную технологическую норму замещения фактора x_1 на фактор x_2.

Решение.

Средняя производительность – это отношение объема продукции к количеству используемого фактора производства:

$$Ax_1 = \frac{y}{x_1} = \frac{10\ln\,(x_1^{0,5}) \cdot x_2^{0,6}}{x_1},$$

$$Ax_2 = \frac{y}{x_2} = \frac{10\ln\,(x_1^{0,5}) \cdot x_2^{0,6}}{x_2} = 10\ln\left(x_1^{0,5}\right) \cdot x_2^{-0,4}.$$

Предельные производительности равны:

$$MPx_1 = y'_{x_1} = 10x_2^{0,6} \cdot \frac{1}{x_1^{0,5}} \cdot 0{,}5x_1^{-0,5} = \frac{5x_2^{0,6}}{x_1},$$

$$MPx_2 = y'_{x_2} = 10\ln\left(x_1^{0,5}\right) \cdot 0{,}6x_2^{-0,4} = 6\ln\left(x_1^{0,5}\right) \cdot x_2^{-0,4}.$$

Частные эластичности равны:

$$E_{yx_1}(x_1; x_2) = \frac{x_1}{y} y'_{x_1} = \frac{MPx_1}{Ax_1} = \frac{\frac{5x_2^{0,6}}{x_1}}{\frac{10\ln\,(x_1^{0,5}) \cdot x_2^{0,6}}{x_1}} = \frac{1}{2\ln\,(x_1^{0,5})},$$

$$E_{yx_2}(x_1; x_2) = \frac{x_2}{y} y'_{x_2} = \frac{MPx_2}{Ax_2} = \frac{6\ln\left(x_1^{0,5}\right) \cdot x_2^{-0,4}}{10\ln\left(x_1^{0,5}\right) \cdot x_2^{-0,4}} = 0{,}6.$$

Эластичность производства:

$$E_y(x_1; x_2) = E_{yx_1}(x_1; x_2) + E_{yx_2}(x_1; x_2) = \frac{1}{2\ln\,(x_1^{0,5})} + 0{,}6.$$

Предельная технологическая норма замещения (marginal rate of technical substitution, или $MRTS$) одного ресурса на другой показывает степень замещения одного фактора производства на другой, при котором объем выпуска остается неизменным.

Пусть функция $y = y(x_1, x_2, \dots, x_n)$ определяет зависимость выпуска продукции от набора факторов производства $x_1, x_2, \dots, x_n$. Тогда для двух факторов производства x_i, x_j предельная норма замещения фактора x_i фактором x_j определяется как:

$$MRTS_{x_i x_j} = -\left.\frac{dx_i}{dx_j}\right|_{y=const}.$$

Предельная технологическая норма замещения x_1 на x_2 есть:

$$MRTS_{x_1 x_2} = -\frac{dx_1}{dx_2} = \frac{y'_{x_1}}{y'_{x_2}} = \frac{MPx_1}{MPx_2} = \frac{E_{yx_1}(x_1; x_2) \cdot x_2}{E_{yx_2}(x_1; x_2) \cdot x_1} = \frac{x_2}{1{,}2\ln\left(x_1^{0,5}\right) \cdot x_1}.$$

Рассмотрим двухфакторную функцию спроса $q^D = q^D(p_1, p_2)$ зависящую от двух переменных: p_1 - цены какого-либо товара (собственная цена) и p_2 – цены альтернативного товара. Тогда эластичность спроса от собственной цены будет равна:

$$E_{p_1}(q^D) = \frac{p_1}{q^D} \cdot (q^D)'_{p_1}.$$

Эластичность спроса от собственной цены показывает, на сколько процентов изменится спрос на товар при изменении его собственной цены на 1%.

Аналогично, эластичность спроса от цены альтернативного товара будет определяться формулой:

$$E_{p_2}(q^D) = \frac{p_2}{q^D} \cdot (q^D)'_{p_2}. \qquad (4.14)$$

Коэффициент эластичности, определяемый формулой (4.14), называется ***перекрёстным коэффициентом эластичности*** спроса. Он показывает на сколько процентов изменится спрос на товар при изменении цены альтернативного товара на 1%.

Товары, которые служат одним и тем же целям, называются ***взаимозаменяемыми.*** Товары, которые в совокупности удовлетворяют одну и ту же потребность, называются ***взаимодополняющими.***

Если альтернативный товар является взаимозаменяемым, то с ростом p_2 растёт спрос D на наш товар, т.к. при прочих равных условиях потребитель предпочтёт менее дорогой товар. Следовательно, $E_{p_2}(q^D) > 0$.

Если альтернативный товар является взаимодополняющим, то с ростом p_2 уменьшается спрос на наш товар, так как увеличиваются совокупные затраты на приобретение других видов товаров и $E_{p_2}(q^D) < 0$.

Если $E_{p_2}(q^D) = 0$, то такие товары характеризуются как ***независимые***.

Если рассматривать спрос как функцию нескольких переменных, например двух – цены товара p и доходов потребителей I, т.е. $q^D = q^D(p, I)$, то можно говорить о частных эластичностях спроса от цены

$$E_p(q^D) = \frac{p}{q^D} \cdot (q^D)'_p$$

и спроса от доходов

$$E_I(q^D) = \frac{I}{q^D} \cdot (q^D)'_I.$$

Например, можно установить, что $E_I(q^D) > 0$ для качественных товаров и $E_I(q^D) < 0$ для низкосортных, так как с ростом доходов спрос на качественные товары увеличивается, а на низкосортные – уменьшается. Если при исследовании спроса на данный товар рассматривать влияние другого, альтернативного товара ценой p_1, т.е. рассматривать спрос как функцию трех переменных $q^D = q^D(p, p_1, I)$, то можно ввести перекрестный коэффициент эластичности спроса, определяемый по формуле:

$$E_{p_1}(q^D) = \frac{p_1}{q^D} \cdot (q^D)'_{p_1}.$$

Он показывает приближенно процентное изменение спроса на данный товар при изменении цены альтернативного товара на 1%. Очевидно, что для взаимозаменяемых товаров $E_{p_1}(q^D) > 0$, так как увеличение цены одного товара приводит к увеличению спроса на другой. В то же время для взаимодополняющих товаров $E_{p_1}(q^D) < 0$, ибо в этом случае рост цены любого товара приводит к снижению спроса.

Прибыль от производства разных видов товара

Пусть $x_1, x_2, \dots, x_m$– количества производимых m разновидностей товара, а их цены – соответственно $p_1,\ p_2, \dots,\ p_m$ (все p_i – постоянные величины). Пусть затраты на производство этих товаров задаются функцией:

$$TC = TC(x_1, x_2, \dots, x_m).$$

Тогда функция прибыли имеет вид

$$\Pi = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_m x_m - TC(x_1, x_2, \dots, x_m). \qquad (4.15)$$

Максимум прибыли, естественно, искать как условие локального экстремума функции многих переменных (4.15) при $x_i \geq 0$ (при отсутствии других ограничений)

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1,2, \dots, m.$$

Это условие приводит к системе алгебраических уравнений относительно переменных x_i

$$p_i - \frac{\partial TC}{\partial x_i} = 0, \qquad i = 1,2, \dots, m. \qquad (4.16)$$

Система уравнений (4.16) реализует известное правило экономики: предельная стоимость (цена) товара равна предельным издержкам на производство этого товара. Решениями этой системы уравнений являются наборы, состоящие из m значений каждый. Нужно заметить, что сам процесс нахождения решения системы уравнений (4.16) зависит от вида функции издержек и может быть достаточно сложным.

Пример. Фирма производит два вида мячей для гольфа. Первый вид мячей продается по 3 доллара за штуку, а другой – по 2 доллара. Общий доход в тысячах долларов от продажи x тысяч мячей по 3 доллара США и y тысяч по 2 доллара США определяется как

$$TR\,(x; y) = 3x + 2y.$$

Компания определяет, что общая стоимость производства мячей по 3 доллара за тысячу долларов и тысячи долларов за 2 доллара составляет

$$TC(x, y) = 2x^2 - 2xy + y^2 - 9x + 6y + 7$$

в тысячах долларов. Сколько мячей каждого типа должно быть произведено и продано, чтобы максимизировать прибыль?

Решение.

$$\Pi(x, y) = TR(x, y) - TC(x, y) = 3x + 2y - (2x^2 - 2xy - 9x + 6y + 7) =$$
$$= -2x^2 + 2xy - y^2 + 12x - 4y - 7.$$

$\Pi'_x = -4x + 2y + 12;$

$\Pi'_y = 2x - 2y - 4.$

$\begin{cases} -4x + 2y + 12 = 0; \\ 2x - 2y - 4 = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2x - 6; \\ x - y - 2 = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2x - 6: \\ x - (2x - 6) - 2 = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2: \\ x = 4. \end{cases}$

$(4, 2)$ – критическая точка.

$A = \Pi''_{xx} = -4;$

$B = \Pi''_{xy} = 2;$

$C = \Pi''_{xy}(12; 72) = -2;$

$B^2 - AC = 2^2 - (-4) \cdot (-2) = -4 < 0, A < 0, C < 0.$

Следовательно, $(4, 2)$ точка локального максимума.

$\Pi_{\max}(4{,}2) = -32 + 16 - 4 + 48 - 8 - 7 = 13.$

Для того чтобы получить максимальную прибыль 13 тысяч долларов, мячей первого типа должно быть произведено 4 тысячи и мячей второго типа – 2 тысячи штук.

Задания для самостоятельной работы

4.1. Технология производства одного из товаров характеризуется производственной функцией Кобба – Дугласа $f(K, L) = 70K^{0{,}35}L^{0{,}65}$. Найти предельную производительность труда и предельную производительность капитала.

4.2. Пусть производственная функция имеет вид

1) $f(K, L) = 6\sqrt{KL}$; 2) $f(K, L) = \sqrt[3]{KL^2}$; 3) $f(K, L) = 25K^{0{,}25}L^{0{,}75}$,

где K – объем фондов в стоимостном выражении, L – объем трудовых ресурсов. Изобразить графически изокванты (геометрическое место точек в пространстве ресурсов, в которых различные сочетания производственных ресурсов дают одно и то же количество выпускаемой продукции), представляющие разные уровни выпуска. Найти среднюю производительность труда, среднюю фондоотдачу, предельную производительность труда и предельную фондоотдачу.

4.3. Полезность потребления двух товаров для некоторого потребителя описывается формулой:

1) $U(x,y) = \sqrt{xy}$; 2) $U(x,y) = 2x + 3y$; 3) $U(x,y) = \ln x + \ln y$.

Требуется: а) изобразить графически кривые безразличия потребителя; б) определить предельную полезность каждого товара; в) определить предельную норму замещения для каждого товара; г) прокомментировать ситуации.

4.4. Полезность потребления x мороженого и y яблок для студента определяется формулой $U(x,y) = 2x^2\sqrt{y}$. Определите предельную полезность яблок в наборе, состоящем из двух мороженных и трех яблок, и предельную норму замещения яблок мороженым. Какому из двух следующих наборов студент отдаст предпочтение: два мороженых и три яблока или три мороженых и два яблока?

4.5. Потребитель приобретает на рынке три товара. Полезность от приобретенного набора товаров может быть выражена следующей функцией полезности:

1) $U(x,y,z) = \sqrt{xy^3z^5}$; 2) $U(x,y,z) = \sqrt{x} \cdot y + \sqrt{yz}$.

Найти предельную полезность каждого товара, если известно, что приобретенный набор содержит 16 единиц первого товара, 9 единиц второго товара и 4 единицы третьего товара. Определить предельную норму замещения первого товара третьим для указанного набора товаров.

4.6. Функция полезности набора из двух товаров для некоторого потребителя имеет вид:

1) $U(x,y) = 2x + y$; 2) $U(x,y) = 5x$; 3) $U(x,y) = 3x^2y$; 4) $U(x,y) = 2y^2$.

Нарисовать кривые безразличия. Найти предельные полезности каждого из товаров, если приобретенный набор содержит 5 единиц первого товара и 7 единиц второго товара.

4.7. Для каждой из следующих функций полезности найти предельную полезность каждого товара и предельную норму замещения первого товара вторым в заданных точках:

1) $U(x,y) = 0{,}3\ln(x-1) + 0{,}4\ln(y-2),\ x = 2,\ y = 3$;

2) $U(x,y) = x^2y(x+1)^{-3},\ x = 1,\ y = 4$.

4.8. Технологический процесс некоторой фирмы характеризуется следующей производственной функцией $f(K,L) = 200K^{0,5}L^{0,3}$. Найти эластичность выпуска продукции по труду и эластичность выпуска продукции по фондам.

4.9. Потребитель приобретает на рынке три товара. Полезность от приобретенного набора товаров выражается функцией полезности:

1) $U(x,y,z) = \sqrt{xy^3z^5}$;

2) $U(x,y,z) = \sqrt{x} \cdot y + \sqrt{yz}$.

Найти эластичность полезности по каждому товару.

4.10. Пусть технология производства характеризуется производственной функцией Кобба–Дугласа $f(K,L) = AK^{\alpha}L^{1-\alpha}$. Найти эластичность выпуска продукции по труду и эластичность выпуска продукции по фондам.

4.11. Производственная функция, описывающая деятельность фирмы, задается формулой

$$F(K,L) = \frac{K^2 + L^2}{2K^2 + L^2}.$$

Найти эластичность выпуска по ресурсам в точке $K = 1, L = 1$.

4.12. Пусть p_x – цена на товар x, а p_y – цена на товар y. Функция спроса на эти товары имеет вид:

1) $q^D(p_x, p_y) = 8p_x + 4\ln(p_x p_y)$;

2) $q^D(p_x, p_y) = e^{p_x p_y} - 2^{p_x}$.

Найти прямую эластичность спроса по цене и перекрестную эластичность спроса на товар x по цене на товар y.

4.13. Функция спроса на товар X имеет вид $q_X^D(p_X, p_Y) = 100 - 2p_X + 0{,}8p_Y$. Цена товара X равна 10 ден. ед., цена товара Y – 5 ден. ед. Определите коэффициенты прямой и перекрестной эластичности спроса по цене на товар X и сделайте выводы.

4.14. Функция спроса на товар X имеет вид $q_X^D(p_X, p_Y) = 2 - p_X + 0{,}8p_Y$. Цена товара X равна 1 ден. ед., цена товара Y – 2 ден. ед. Определите коэффициенты прямой и перекрестной эластичности спроса по цене на товар X и сделайте выводы.

4.15. Пусть функция спроса на некоторый товар A имеет вид

$$q_A^D(p_1, p_2, p_3, I) = 20I^{0,3}p_1^{-0,5}p_2^{0,2}p_3^{-0,1},$$

где I –доход потребителя, p_1 – цена товара A, p_2 – цена товара B, p_3 – цена товара C.

а) Поясните смысл параметров 0,3 и -0,5 этой функции.

б) Являются ли товары A и B взаимозаменяемыми или взаимодополняемыми? Ответ обоснуйте.

в) Являются ли товары A и C взаимозаменяемыми или взаимодополняемыми? Ответ обоснуйте.

4.16. Фермерское хозяйство занимается выращиванием культур двух видов. Доход от выращивания x тонн первой культуры составляет $4x(1 + 0{,}02x)$, а доход от выращивания x тонн второй культуры $6x(1+0{,}1x)$. Определите максимально возможный доход фермерского хозяйства от выращивания этих культур, если ресурсы хозяйства позволяют вырастить не более 25 тонн продукции, а каждой из культур в отдельности может быть выращено не более 15 тонн.

4.17. Фирма производит два вида товаров. Функция ее суммарных затрат имеет вид $TC(x,y)=10x+xy+10y$. Спрос на каждый вид товара определяются соответственно уравнениями $p_1(x,y)=50-x+y,\ p_2(x,y)=30+2x-y$. Найти максимальную прибыль фирмы, если имеются следующие ограничения на объем производимой продукции: $x+y=15$.

4.18. Фирма, занимающаяся производством двух видов бытовой техники, реализует ее на рынке по ценам $p(q_1)=2q_1+800, \quad p(q_2)=4q_2+800$. Суммарные затраты на производство продукции определяются следующей формулой $TC(q_1,q_2)=4q_1^2+5q_2^2-20$. Какой объем выпуска продукции желает произвести фирма?

4.19. Приобретая на рынке два товара, потребитель рассчитывает полезность покупки с помощью формулы $U(x,y)=8x^{0,5}y^{0,25}$. Какой набор товаров будет приобретен потребителем, если его доход равен 360 рублей? Кроме того, известно, что цены на товары равны 12 и 18 рублей, соответственно.

4.20. Полезность от приобретения набора ручек и тетрадей для студента выражается формулой $U(x,y)=2\sqrt{xy}$. Какова максимальная полезность этих благ для студента, если цены на ручки и карандаши соответственно равны 10 и 5 рублей, а бюджет студента составляет 105 рублей?

4.21. Функция полезности имеет вид $U(x,y)=12\ln(x-1)+3\ln(y-1)$. Цена первого блага равна 8 ден. ед., а второго – 16 ден. ед. На приобретение этих благ была затрачена сумма в 1000 ден. ед. Как следует распределить эту сумму между двумя благами, чтобы полезность от их потребления была наибольшей?

4.22. Изучая свои вкусы и предпочтения, студент пришел к выводу о том, что полезность от потребления трех различных товаров хорошо описывается следующей функцией $U(x,y,z)=x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{3}}z^{\frac{1}{4}}$. Какой набор надо выбрать студенту, если он имеет 650 рублей? Цены на рассматриваемые товары таковы 5, 10 и 15 рублей, соответственно.

4.23. Опытным путем установлено, что для некоторой фирмы функция затрат при производстве двух видов товаров имеет вид $TC(x,y)=x^2+xy+y^2$. При какой объеме выпуска прибыль фирмы будет максимальной, если на рынке товары продаются по ценам 160 и 200 рублей соответственно?

4.24. Фирма производит продукцию и реализует ее на рынке. Зависимость объема производства от факторов капитала и труда может быть представлена как $f(K,L)=K^{0,5}L^{0,8}$. Цены, уплачиваемые за факторы, соответственно равны 7 и 8 ден. ед. Цена реализации продукции – 14 ден. ед. При каком соотношении факторов производства фирма будет получать максимальную прибыль?

4.25. Предприниматель решил открыть небольшое автотранспортное предприятие по оказанию услуг населению. Ознакомившись со статистикой, он установил, что примерная зависимость ежедневной выручки от числа автомашин A и числа рабочих N выражается формулой $Y=800A^{0,5}N^{0,25}$. Амортизационные и другие ежедневные расходы на одну машину равны 400 руб., ежедневная заработная плата рабочего 100 руб. Найдите оптимальную численность рабочих и автомашин.

4.26. Функция затрат фирмы по производству двух товаров имеет вид $TC(x,y)=x^2+2xy+3y^2$. Ситуация на рынке такова, что данные товары реализуются по ценам 100 и 180 рублей соответственно. Какое решение по выпуску товаров будет принято руководством фирмы?

4.27. По результатам работы фирмы рассчитана ее производственная функция $f(K,L)=36K^{0,75}L^{0,25}$. Какой объем производства будет планировать фирма, располагающая капиталом 20 000 при ценах на ресурсы $p_K=2,\ p_L=3$?

4.28. Часть производимого товара фирма-монополист реализует на внутреннем рынке, а оставшуюся часть поставляет на экспорт соответственно по ценам p_1 и p_2. Цена и количество продаваемого товара на внутреннем рынке связаны соотношением $4p_1+3x=720$. Для экспортных поставок связь между ценой и количеством продаваемого товара задается следующим уравнением: $p_2+y=500$. Функция затрат фирмы имеет вид $TC(x,y)=400+20x+30y$. Какую ценовую политику должна проводить фирма для получения наибольшей прибыли?

4.29. Производственная функция имеет вид $f(x,y)=30x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{3}}$. Стоимость единицы первого ресурса равна 5 ден. ед., а второго – 10 ден. ед. В силу бюджетных ограничений на ресурсы может быть потрачено не более 600 ден. ед. В этих условиях найти оптимальное для производителя значение количества используемых ресурсов.

4.30. Еженедельный выпуск фирмы определяется производственной функцией $q(k,l) = k^{\frac{3}{4}} l^{\frac{1}{4}}$, а удельные затраты израсходованные за 1 ед. капитал и 1 ед. рабочую силу в неделю составляют $v = 1$ и $w = 5$. Следовательно, общие затраты при использовании k единиц капитала и l единиц труда, составляют $k + 5l$. Найдите минимальную стоимость производства и соответствующие значения k и l, если выпуск еженедельной продукции составляет 5000.

4.31. Компания производит продукцию, используя два вида сырья. Пусть $q(x,y) = x^{1/4} y^{3/4}$ количество продукции, которое производится из x единиц первого вида сырья и y единиц второго вида сырья. Если фирма тратит не более 1280 долларов в неделю на материалы, каково его максимально возможное еженедельное производство, учитывая, что одна единица первого вида сырья стоит \$ 16, а одна единица второго вида сырья стоит \$1.

4.32. Монополия производит два вида товара X и Y, со соответствующими функциями спроса $x = 12 - p_X$ и $y = 18 - p_Y$, где x – количество товара X, y - количество товара Y, p_X и p_Y – цены за единицу товара X и Y, соответственно. Функция издержек фирмы имеет вид $TC(x,y) = x^2 + y^2 + 2xy$. Найти максимум прибыли и количество продукции каждого из товаров X и Y, при котором достигается максимум прибыли.

4.33. Компания производит два продукта X и Y, и продает их на смежных рынках. Предположим, что фирма является единственным производителем продуктов X и Y и их функции цен спроса для X и Y

$$p_X = 13 - 2x - y \text{ и } p_Y = 13 - x - 2y,$$

где x – количество товара X, y - количество товара Y, p_X и p_Y – цены за единицу товара X и Y, соответственно. Определите уровни производства, при котором достигается максимум прибыли, учитывая, что функция полных издержек $TC(x,y) = x + y$.

4.34. Компания производит продукцию, используя два вида сырья. Пусть $q(x,y) = (\sqrt{x} + 2\sqrt{y})^2$ количество продукции, которое производится из x единиц 1 вида сырья и y единиц 2 вида сырья. Каждая единица сырья первого вида стоит 2 доллара, а каждая единица сырья второго вида стоит 1 доллар. Найти минимальные затраты на сырьё при производстве 100 единиц продукции.

4.35. Фирма имеет производственную функцию $q(k,l) = 50k^{2/3} l^{1/3}$, а удельный капитал и затраты на оплату труда составляют \$6 и \$4 соответственно, так что общая стоимость, затраченная при использовании k единиц капитала и l единиц труда, составит $6k + 4l$. Какова максимальная недельная выработка, при условии, что затраты на капитал и труд составят не более $ 1000 в неделю?

4.36. Студентка работает неполный рабочий день в ресторане. За это ей платят $8 в час. Функция полезности $u(I,S) = I^{1/4}S^{3/4}$, $\$I$ – заработок в неделю, а S - количество часов, затрачиваемых на обучение. Общее количество времени, которое она тратит в неделю, работая в ресторане и на учебу составляет 100 часов. Как она должна распределить свое время, чтобы максимизировать полезность?

4.37. Некоторая монополия имеет функцию полных издержек $TC(q) = 20q + 20$, где q – это количество товара, требуемое на рынке. Монополия знает о возможности разделения своих клиентов на два отдельных рынки со следующими уравнениями спроса:

Рынок 1: $q_1 = 9 - 0{,}05p_1$;

Рынок 2: $p_2 = 80 - 5q_2$;

где $q_1 + q_2 = q$ и p_i - цена на рынке i $(i = 1;\ 2)$. Монополия хочет определите цены на двух рынках, чтобы получить максимальную общую прибыль для двух рынков. Для этого ей необходимо рассмотреть две следующие возможные ситуации:

1) если она установит разные цены для двух рынков,

2) если она установит одинаковую цену для двух рынков.

4.38. Предположим, что функции цен спроса на внутреннем и внешнем рынках фирмы определяются $p_1 = 30 - 4q_1$, $p_2 = 50 - 5q_2$ соответственно. Функция общих затрат имеет вид $TC(q) = 10 + 10q$, где $q = q_1 + q_2$. Определить цены, при которых прибыль будет максимальной, в случаях

1) если она установит разные цены для двух рынков,

2) если она установит одинаковую цену для двух рынков.

§5. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Определение. ***Дифференциальным уравнением*** называется уравнение, связывающее искомую функцию одной или нескольких переменных, эти переменные и производные различных порядков данной функции.

Если искомая функция зависит от одной переменной, то дифференциальное уравнение называется ***обыкновенным***, если от нескольких – то ***уравнением в частных производных***.

В общем случае обыкновенное дифференциальное уравнение можно записать в виде

$$\Phi(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0, \tag{5.1}$$

где $\Phi(x, y, y', \ldots, y^{(n)})$ – некоторая функция от $n+2$ переменных, $n \geq 1$, при этом порядок n старшей производной, входящей в запись уравнения, называется ***порядком*** дифференциального уравнения.

Дифференциальное уравнение n -го порядка называется ***разрешенным относительно старшей производной,*** если оно имеет вид

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}), \tag{5.2}$$

где $f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$– некоторая функция от $n+1$ переменной.

Решением дифференциального уравнения (5.1) называется такая функция $y = y(x)$, которая при подстановке ее в это уравнение обращает его в тождество. Например, функция $y = sin\, x$ является решением уравнения $y'' + y = 0$, так как $(sin\, x)'' + sin\, x = 0$ для любых x.

Задача о нахождении решения некоторого дифференциального уравнения называется ***задачей интегрирования*** данного дифференциального уравнения. График решения дифференциального уравнения называется ***интегральной кривой***.

Определение. ***Общим решением дифференциального уравнения (5.1) или (5.2)*** называется функция вида $y = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$ или короче $y = \varphi(x, C_i)$, где C_i $(i = 1, \ldots, n)$ — произвольные постоянные, удовлетворяющая следующим двум условиям:

1) она является решением дифференциального уравнения (5.1) или (5.2) при любых значениях C_i;

2) для любых начальных данных $x_0, y,\ y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}$, при которых дифференциальное уравнение имеет решение, можно указать значения постоянных $C_i = C_{i0}$, такие, что будут выполнены начальные условия

$$\varphi(x_0, C_{i0}) = y_0, \varphi'(x_0, C_{i0}) = y_0', \ldots, \varphi^{(n-1)}(x_0, C_{i0}) = y_0^{(n-1)}.$$

Определение. Общее решение, полученное в неявном виде: $\Phi(x, y\,, C_i) = 0$, **называется** ***общим интегралом дифференциального уравнения.***

Определение. Решение или интеграл, полученные из общего решения или общего интеграла при фиксированных значениях произвольных постоянных C_i, называется соответственно ***частным решением* или *частным интегралом дифференциального уравнения.***

Задача Коши для дифференциального уравнения первого порядка имеет следующую формулировку. Найти решение $y = \varphi(x)$ (интеграл $\Phi(x, y) = 0$) дифференциального уравнения (5.1) или (5.2), удовлетворяющее начальному условию $\varphi(x_0) = y_0$ ($\Phi(x_0, y_0) = 0$).

С геометрической точки зрения это означает, что среди всех интегральных линий данного уравнения необходимо найти ту, которая проходит через заданную точку $M(x_0,\ y_0)$.

Теорема 1 (Коши). Если правая часть уравнения (5.2) является непрерывной функцией в окрестности значений

$$x_0, y,\ y_0', \dots, y_0^{(n-1)}, \tag{5.3}$$

то уравнение (5.2) имеет решение $y = y(x)$ в некотором интервале $(a;\ b)$, содержащем x_0, такое, что

$$y(\mathrm{x}_0) \ = \ y_0, y'(\mathrm{x}_0) \ = \ y_0', \dots,\ y^{(n-1)}(x_0) \ = \ y_0^{(n-1)}\ . \tag{5.4}$$

Если в указанной окрестности непрерывны еще и частные производные этой функции по аргументам $y,\ y', \dots,\ y^{(n-1)}$,то решение $y = y(x)$– единственное.

Числа из совокупности (5.3) называются ***начальными данными***, а равенства (5.4) – ***начальными условиями***.

Задача Коши для дифференциального уравнения n-го порядка формулируется следующим образом. Найти решение $y = y(x)$ дифференциального уравнения (5.1) или (5.2), удовлетворяющее начальным данным (5.3), т. е. такое решение, чтобы выполнялись начальные условия (5.4).

Дифференциальные уравнения первого порядка

В общем случае обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка может быть записано в виде

$$F(x, y, y') = 0.$$

или, если разрешить его относительно y', в нормальной форме

$$y' \ = \ f(x, y). \tag{5.5}$$

Теорема 2 (Коши). Если функция $f(x, y)$ непрерывна в точке $M(x_0,\ y_0)$ и в ее окрестности, то существует решение $y = y(x)$ уравнения (5.5), такое, что $y(x_0) = y_0$. Если непрерывна также частная производная $\frac{\partial f}{\partial y}$ данной функции, то это решение единственно.

Отметим, что иногда дифференциальное уравнение первого порядка удобно, записывать в так называемой ***дифференциальной форме:***

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0.$$

Определение. Дифференциальное уравнение первого порядка называется уравнением с ***разделяющимися переменными***, если оно может быть представлено в виде $\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$ или в виде $M(x)P(y)dx + N(x)Q(y)dy = 0$, где $f(x), M(x), N(x)$ – некоторые функции переменной x, $g(y), P(y), Q(y)$ – функции переменной y.

Для решения такого уравнения его следует преобразовать к виду, в котором дифференциал и функции переменной x окажутся в одной части равенства, а переменной y – в другой. Затем проинтегрировать обе части полученного равенства

Определение. Дифференциальное уравнение первого порядка называется ***однородным***, если оно может быть представлено в виде

$$y' = f(y/x),$$

где f – некоторая функция (одной переменной).

Понятие однородного дифференциального уравнения связано с однородными функциями. Функция $y = f(x,y)$ называется ***однородной степени k*** (по переменным x и y), если для произвольного числа t выполняется равенство

$$f(tx,ty) = t^k f(x,y).$$

Замена переменной $u = y/x$ позволяет свести однородное уравнение к уравнению с разделяющимися переменными. Так как из замены следует, что $y = ux$, то $y' = u'x + u$, поэтому однородное уравнение приобретает следующий вид

$$u'x + u = f(u).$$

Откуда получим, что

$$\frac{du}{f(u) - u} = \frac{dx}{x}.$$

Определение. Дифференциальное уравнение первого порядка называется ***линейным***, если оно имеет вид

$$y' + f(x)y = g(x), \tag{5.6}$$

где $f(x)$ и $g(x)$ – некоторые (непрерывные) функции переменной x. В случае, когда функция $g(x)$ тождественно равна нулю, уравнение называется однородным, в противном случае – неоднородным.

Определение. Дифференциальное уравнение

$$y' + P(x)y = Q(x)y^n, \tag{5.7}$$

где $n = const \in R, n \neq 0, n \neq 1$, а также любое уравнение, с помощью алгебраических преобразований приводящееся к уравнению (5.7), называется ***уравнением Бернулли***.

Определение. ***Линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами*** имеет вид

$$y'' + py' + qy = r(x). \tag{5.8}$$

где p, q — некоторые действительные числа, $r(x)$ – некоторая функция. Если $r(x) = 0$, то уравнение

$$y'' + py' + qy = 0. \tag{5.9}$$

называется ***однородным***; в противном случае при $r(x) \neq 0$ уравнение (5.8) называется ***неоднородным***.

Определение. Уравнение $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ называется ***характеристическим уравнением*** исходного уравнения (5.9).

Теорема. Пусть характеристическое уравнение имеет действительные корни λ_1 и λ_2, причем $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Тогда общее решение уравнения (5.9) имеет вид

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x},$$

где C_1 и C_2– некоторые числа.

2. Если характеристическое уравнение имеет один корень λ (кратности 2), то общее решение уравнения (5.9) имеет вид

$$y = C_1 e^{\lambda x} + C_2 x e^{\lambda x},$$

где C_1 и C_2 – некоторые числа.

3. Если характеристическое уравнение не имеет действительных корней, то общее решение уравнения (5.9) имеет вид

$$y = C_1 e^{ax} \sin \beta x + C_2 e^{ax} \cos \beta x,$$

где $a = -p/2$, $\beta = \sqrt{q - p^2/4}$, C_1 и C_2— некоторые числа.

Пример. Пусть функции спроса q^D и предложения q^S имеют следующие зависимости от цены p и ее производных:

$$q^D(t) = 3p'' - p' - 2p + 18,$$

$$q^S(t) = 4p'' + p' + 3p + 3. \tag{5.10}$$

Принятые в (5.10) зависимости вполне реалистичны: поясним это на слагаемых с производными функции цены.

1. Спрос "подогревается" темпом изменения цены: если темп растет ($p" > 0$), то рынок увеличивает интерес к товару, и наоборот. Быстрый рост цены отпугивает покупателя, поэтому слагаемое с первой производной функции цены входит со знаком минус.

2. Предложение в еще большей мере усиливается темпом изменения цены, поэтому коэффициент при $p"$ в функции $q^S(t)$ больше, чем в $q^D(t)$. Рост цены также увеличивает предложение, потому слагаемое, содержащее p', входит в выражение для $q^S(t)$ со знаком плюс.

Требуется установить зависимость цены от времени.

Решение. Поскольку равновесное состояние рынка характеризуется равенством $q^D(t)$= $q^S(t)$, приравняем правые части уравнений (5.10). После приведения подобных слагаемых получаем

$$p" + 2p' + 5p = 15. \tag{5.11}$$

Соотношение (5.11) представляет линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка относительно функции $p(t)$. Общее решение такого уравнения состоит из суммы какого-либо его частного решения и общего решения соответствующего однородного уравнения

$$p" + 2p' + 5p = 0. \tag{5.12}$$

Характеристическое уравнение имеет вид

$$k^2 + 2k + 5 = 0.$$

Его корни – комплексно-сопряженные числа: $k_{1,2} = -1 \pm 2i$, и, следовательно, общее решение уравнения (5.12) дается формулой

$$\tilde{p}(t) = e^{-t}(C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t),$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные. В качестве частного решения неоднородного уравнения (5.12) возьмем решение $p = p_{st}$– постоянную величину как ***установившуюся цену.*** Подстановка в уравнение (5.12) дает значение p_{st}: $p_{st} = 3$. Таким образом, общее решение уравнения (5.12) имеет вид

$$p(t) = 3 + e^{-t}(C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t). \tag{5.13}$$

Нетрудно видеть, что $p(t) \to p_{st} = 3$ при $t \to \infty$, т.е. все интегральные кривые имеют горизонтальную асимптоту $p = 3$ и колеблются около нее. Это означает, что все цены стремятся к установившейся ценеp_{st} с колебаниями около нее, причем амплитуда этих колебаний затухает со временем.

Частные решения этой задачи.

1. Задача Коши. Пусть в начальный момент времени известна цена, а также тенденция ее изменения: $t = 0$; $p = 4, p' = 1$. Подставляя первое условие в формулу (5.13), получаем $p(0) = \mathrm{C}_1 + 3 = 4$, откуда $\mathrm{C}_1 = 1$, т.е. имеем

$$p(t) = 3 + e^{-t}(\cos 2t + C_2 \sin 2t). \tag{5.14}$$

Дифференцируя, имеем отсюда

$$p'(t) = e^{-t}[(2C_2 - 1)\cos 2t - (C_2 + 2)\sin 2t).$$

Теперь реализуем второе условие задачи Коши: $p'(0) = 2C_2 - 1 = 1$, откуда $C_2 = 1$. Окончательно получаем, что решение задачи Коши имеет вид

$$p(t) = 3 + e^{-t}(\cos 2t + \sin 2t).$$

2. Смешанная задача. Пусть в начальный момент времени $t = 0$ известны цена и спрос: $p = 4,\ q^D = 16$. Поскольку первое начальное условие такое же, как и в предыдущем случае, то имеем и здесь решение (5.14). Тогда производные функции $p(t)$ выражаются формулами

$$p'(t) = e^{-t}[(2C_2 - 1)\cos 2t - (C_2 + 2)\sin 2t),$$

$$p''(t) = -e^{-t}[(4C_2 + 3)\cos 2t - (3C_2 - 5)\sin 2t).$$

Отсюда $p'(0) = 2C_2 - 1$ и $p''(0) = -4C_2 - 3$. Подставляя эти равенства во второе условие задачи, т.е. $q^D(0) = 16$, имеем с учетом вида $q^D(t)$ из первой формулы (5.27):$C_2 = -1$. Итак, решение данной задачи имеет вид

$$p(t) = 3 + e^{-t}(\cos 2t - \sin 2t).$$

Интегральные кривые, соответствующие задачам 1 и 2, изображены на рисунке 8.

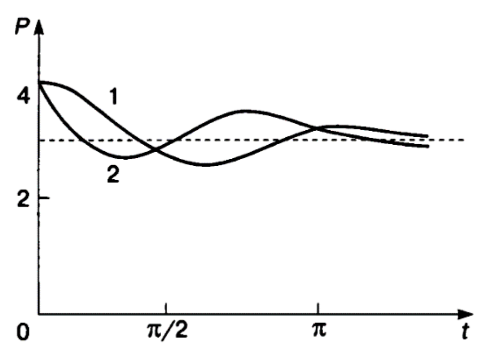


Рис. 8

Применение дифференциальных уравнений в экономике

I. Модель естественного роста выпуска. Пусть $q(t)$ – объем продукции некоторой отрасли, реализованной к моменту времени t. Будем полагать, что вся произведенная отраслью продукция реализуется по некоторой фиксированной цене p, т.е. выполнено условие не насыщаемости рынка. Тогда доход к моменту t составит $pq(t)$.

Обозначим через $I(t)$ величину инвестиций, направляемых на расширение производства, то есть

$$I(t) = mpq(t), \tag{5.15}$$

где m - норма инвестиций – постоянная величина, $0 < m < 1$. В модели естественного роста полагают, что скорость выпуска продукции (акселерация) пропорциональна величине инвестиций, т.е.

$$q' = l \cdot I(t), \tag{5.16}$$

где $1/l$ - норма акселерации. Здесь мы пренебрегаем временем между окончанием производства и ее реализацией, т.е. считаем, что инвестиционный лаг равен нулю. Подставляя (5.15) в (5.16), приходим к уравнению

$$q' = kq, \text{где } k = mpl. \tag{5.17}$$

Полученное дифференциальное уравнение – с разделяющимися переменными. Решим его.

$$\frac{dq}{dt} = k \cdot q; \tag{5.18}$$

$$\frac{dq}{q} = k \cdot dt;$$

$$\int \frac{dq}{q} = k \int dt;$$

$$\ln q + \ln c = kt;$$

$$\ln cq = kt; \quad e^{\ln cq} = e^{kt}; \; cq = e^{kt};$$

$$q(t) = q_0 e^{k(t-t_0)}, \text{где } q_0 = q(t_0).$$

Заметим, что уравнение (5.18) описывает также рост народонаселения, динамику роста цен при постоянной инфляции.

II. Пусть доход $Y(t)$, полученный к моменту времени t некоторой отраслью, является суммой инвестиций $I(t)$ и величины потребления $C(t)$, т.е.

$$Y(t) = I(t) + C(t). \tag{5.19}$$

Как и ранее в модели естественного роста, будем предполагать, что скорость увеличения дохода пропорциональна величине инвестиций, т.е.

$$bY'(t) = I(t), \tag{5.20}$$

где b – коэффициент капиталоемкости прироста дохода (что равносильно (5.15) при постоянной цене на продукцию p и $l = 1/(pb)$).

Рассмотрим поведение функции дохода $Y(t)$ в зависимости от функции $C(t)$. Пусть $C(t)$ представляет фиксированную часть получаемого дохода $C(t) = (1 - m)Y(t)$, где m – норма инвестиций. Тогда из (5.19) и (5.20) получаем

$$Y'(t) = \frac{m}{b}Y,$$

что равносильно уравнению (5.18) при $p = const$.

III. Динамическая модель Кейнса. Рассмотрим простейшую балансовую модель, включающую в себя основные компоненты динамики расходной и доходной частей экономики. Пусть $Y(t), E(t), S(t), I(t)$ – соответственно национальный доход, государственные расходы, потребление и инвестиции. Все эти величины рассматриваются как функции времени t. Тогда справедливы следующие соотношения:

$$\begin{cases} Y(t) = S(t) + I(t) + E(t), \\ S(t) = a(t)Y(t) + b(t), \\ I(t) = k(t)Y'(t), \end{cases} \tag{5.21}$$

где $a(t)$ – коэффициент склонности к потреблению $(0 < a(t) < 1), b(t)$ – автономное (конечное) потребление, $k(t)$ – норма акселерации. Все функции, входящие в уравнения (5.21), положительны.

Поясним смысл уравнений (5.21). Сумма всех расходов должна быть равной национальному доходу – этот баланс отражен в первом уравнении. Общее потребление состоит из внутреннего потребления некоторой части национального дохода в народном хозяйстве и конечного потребления – эти составляющие показаны во втором уравнении. Наконец, размер инвестиций не может быть произвольным: он определяется произведением нормы акселерации, величина которой характеризуется уровнем технологии и инфраструктуры данного государства, на предельный национальный доход.

Будем полагать, что функции $a(t), b(t), k(t)$ и $E(t)$ заданы – они являются характеристиками функционирования и эволюции данного государства. Требуется найти динамику национального дохода, или Y как функцию времени t.

Подставим выражения для $S(t)$ из второго уравнения и для $I(t)$ из третьего уравнения в первое уравнение. После приведения подобных получаем дифференциальное неоднородное линейное уравнение первого порядка для функции $Y(t)$:

$$Y' = \frac{1 - a(t)}{k(t)}Y - \frac{b(t) + E(t)}{k(t)}. \tag{5.22}$$

Для дифференциального уравнения (5.22) существует достаточно сложная формула общего решения. Мы рассмотрим более простой случай, полагая основные параметры задачи $a,\ b, k$ и E постоянными числами. Тогда уравнение (5.22) упрощается до линейного дифференциального уравнения первого порядка с постоянными коэффициентами:

$$Y' = \frac{1-a}{k}Y - \frac{b+E}{k}. \qquad (5.23)$$

Как известно, общее решение неоднородного уравнения есть сумма какого-либо его частного решения и общего решения соответствующего однородного уравнения. В качестве частного решения уравнения (5.23) возьмем так называемое равновесное решение, когда $Y' = 0$, т.е.

$$Y_p = \frac{b+E}{1-a}. \qquad (5.24)$$

Нетрудно видеть, что эта величина положительна. Общее решение однородного уравнения дается формулой $\tilde{y} = Ce^{\frac{1-a}{k}t}$, так что общее решение уравнения (5.23) имеет вид

$$Y(t) = \frac{b+E}{1-a} + Ce^{\frac{1-a}{k}t}. \qquad (5.25)$$

Интегральные кривые уравнения (5.23) показаны на рисунке 9. Если в начальный момент времени $Y_0 < Y_p$, то $C = Y_0 - Y_p < 0$ и кривые уходят вниз от равновесного решения (5.24), т.е. национальный доход со временем падает при заданных параметрах задачи а$, b, k$ и E, так как показатель экспоненты в (5.25) положителен. Если же $Y_0 > Y_p$, то $C > 0$ и национальный доход растет во времени – интегральные кривые уходят вверх от равновесной прямой $Y = Y_p$.

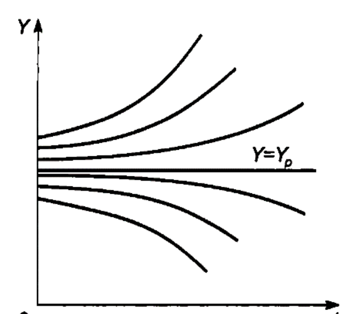


Рис. 9

Уравнение (5.23) является автономным, то есть его правая часть не зависит от времени; точка $Y = Y_p$ представляет собой точку неустойчивого равновесия.

IV. Эффективное ценообразование

Пусть цена товара постоянно изменяется во времени. Первоначально цена не равна равновесной цене. Мы можем предположить, что цена, возможно, сходится к равновесной цене во времени, но для того, чтобы это проверить нам нужна модель изменения цены во времени.

Предположим, что изначально цена p меньше равновесной цены. Поскольку потребители хотят купить больше единиц товара, чем предоставят поставщики, цена будет расти. Также предположим, что темпы роста в некоторой степени зависят от избытка спроса над предложением, $x(p) = q^D(p) - q^S(p)$.Это предположение означает, что производная p' равна некоторой заданной функции от p; другими словами, мы получаем некоторое дифференциальное уравнение для $p(t)$.

Пример. Пусть заданы уравнения спроса и предложения $3q + 2p = 10$ и $q - 2p = -6$ соответственно. Ценообразование характеризуется следующей зависимостью $p' = (3x(p))^3$. Пусть начальная цена равна 3, т.е. p_0= 3 при t = 0. Найти закон изменения цены на товар во времени.

Решение. Решим дифференциальное уравнение $p' = (3x(p))^3$. Это уравнение с разделяющимися переменными. Здесь $x(p) = q^D(p) - q^S(p)$. Уравнение спроса имеет вид $3q + 2p = 10$. Отсюда функция спроса равна $q^D(p) = \frac{10}{3} - \frac{2}{3}p$. Аналогично, из уравнения предложения найдем функцию предложения: $q^S(p) = -6 + 2p$. Тогда

$$\frac{dp}{dt} = (3x(p))^3;$$

$$\frac{dp}{dt} = 27\left(\left(\frac{10}{3} - \frac{2}{3}p\right) - (-6 + 2p)\right)^3;$$

$$\frac{dp}{dt} = (28 - 8p)^3;$$

$$\frac{dp}{(28 - 8p)^3} = dt;$$

$$\int \frac{dp}{(28 - 8p)^3} = \int dt;$$

$$\frac{1}{16(28 - 8p)^2} = t + C.$$

Найдем частное решение, используя условие, что $t = 0$ цена равна $p = 3$:

$$\frac{1}{16(28-24)^2} = C.$$

То есть $C = \frac{1}{256.}$. Подставим полученное значение в общее решение:

$$\frac{1}{16(28-8p)^2} = t + \frac{1}{256}.$$

Выразим из последнего равенства p:

$$p = \frac{7}{2} - \frac{1}{2\sqrt{256t+1}}.$$

Заметим, что из условия $q^D(p) = q^S(p)$, равновесная цена будет равна $\frac{7}{2}$. То есть цена

$$p = \frac{7}{2} - \frac{1}{2\sqrt{256t+1}}$$

сходится к равновесной цене $\frac{7}{2}$ во времени.

V. Определение спроса по эластичности

Эластичность спроса определяется как

$$E_p(q^D) = -\frac{p}{q} \cdot \frac{dq^D}{dp},$$

где $q^D = q^D(p)$- функция спроса. Предположим, что существует постоянная r такая, что эластичность спроса по цене $E_p(q^D) = r$ для всех p. То есть эластичность постоянна. Тогда

$$-\frac{p}{q} \cdot \frac{dq^D}{dp} = r;$$

$$\frac{dq^D}{dp} = -r\frac{q}{p};$$

$$\int \frac{1}{q} dq = \int -\frac{r}{p} dp;$$

$$\ln q = -r \ln p + \ln C;$$

$$q = Cp^{-r}.$$

Пример. Эластичность спроса для некоторого товара задана, как

$$E_p(q^D) = \frac{3p^2 + 5p}{p^2 + 3p + 2}.$$

Найдите функцию спроса на товар спроса $q^D(p)$, если $q^D(1) = 1$.

Решение. Эластичность спроса по цене находится по формуле

$$E_p(q^D) = -\frac{p}{q}\frac{dq^D}{dp}.$$

Подставляя в эту формулу заданную эластичность, получаем дифференциальное уравнение с разделяющими переменными

$$-\frac{p}{q}\frac{dq}{dp} = \frac{3p^2+5p}{p^2+3p+2};$$

$$\frac{dq}{q} = -\frac{3p^2+5p}{p(p^2+3p+2)}dp;$$

$$\int\frac{dq}{q} = -\int\frac{3p^2+5p}{p(p^2+3p+2)}dp;$$

$$\ln|q| = -\int\frac{3p+5}{(p^2+3p+2)}dp.$$

Вычисляя интеграл в правой части методом неопределенных коэффициентов, получим, что функция спроса равна

$$q^D(p) = \frac{C}{(p+2)(p+1)^2}.$$

Из условия $q^D(1) = 1$ следует, что $\mathrm{C} = 12$. Тогда

$$q^D(p) = \frac{12}{(p+2)(p+1)^2}.$$

Задания для самостоятельной работы

5.1. Темп изменения производительности труда прямо пропорционален величине $\sqrt{t}$ с коэффициентом пропорциональности $k, k < 0$. Найти закон изменения производительности труда, если при $t = 0$ производительность составляла 2 у.е.

5.2. Известно, что 10% выручки от реализации продукции предприятия по цене $p = 10$ усл. ден. ед. направляется на расширение производства; при этом скорость изменения выпуска продукции пропорциональна объему этих инвестиций с коэффициентом $k = 0{,}03$. Найти закон изменения выпуска продукции с течением времени. Каким будет выпуск продукции через 5 лет, если в начальный момент он составлял 1200 усл. ден. ед.

5.3. Известно, что в начальный момент времени цена на товар равнялась 1500 усл. ден. ед., а годовой темп инфляции τ постоянный и равен 2,5%. Описать динамику роста цен при постоянном темпе инфляции, если известно, что она задается дифференциальным уравнением $p'(t) = \tau p(t)$.

5.4. Коэффициент выбытия основных фондов равен 0,15. Инвестиции постоянны и составляют 60 усл. ден. ед. Описать процесс движения основных фондов, если известно, что скорость изменения основных фондов равна разности между инвестициями и выбытием основных фондов. В начальный момент времени основные фонды составляли 2000 усл. ден. ед. Через какой промежуток времени износ фондов составит 60% от первоначальной величины?

5.5. Известно, что рост числа $y = y(t)$ жителей некоторого района описывается уравнением

$$\frac{dy}{dt} = \frac{0{,}2y(m - y)}{m},$$

где m – максимально возможное число жителей для данного района. В начальный момент времени число жителей составляло 1% от максимального. Через какой промежуток времени оно составит 80% от максимального?

5.6. Найти объем реализованной продукции $q = q(t)$, если известно, что кривая спроса задается уравнением $p^D(q) = 4 - q$, норма акселерации $1/l = 3$, норма инвестиций $m = \frac{2}{3}$, $q(0) = \frac{1}{3}$.

5.7. Найти функцию дохода $Y = Y(t)$, если известно, что величина потребления задается функцией $C(t) = 1{,}5t$, коэффициент капиталоемкости дохода $b = 0{,}5$, $y(0) = 3$.

5.8. Фирма оказывает услуги населению. Пусть в начале открытия фирмы всегда есть 15 единиц посетителей, среди которых нет желающих получить услугу А. В каждую единицу времени непрерывно поступают 3 ед. посетителей, из которых 20% хотят получить услугу А. Вновь прибывшие перемешиваются с уже пришедшими посетителями. И эта смесь убывает с фирмы с той же скоростью (3 единицы посетителей в единицу времени). Сколько будет желающих получить услугу А через 4 единицы времени?

5.9. Доход $Y(t)$, полученный к моменту времени t некоторой отраслью является суммой инвестиций $I(t)$ и величины потребления $C(t)$. Скорость увеличения дохода пропорциональна величине инвестиций. Найти функцию дохода $Y(t)$, если известно, что величина потребления задается функцией: 1) $C(t) = 3e^{0{,}5t}$; 2) $C(t) = 2t$, коэффициент капиталоемкости дохода равен 0,5, $Y(0) = 2$.

5.10. Функция потребления определяется уравнением $S(t) = 70 + 0{,}3Y(t)$. Доход в начальный момент времени составлял 3000 усл. ден. ед. Норма акселерации $k(t)= 1$, государственные расходы постоянны и равны 630 усл. ден. ед ежемесячно. Определить равновесный доход. Найти доход потребление и инвестиции через 8 месяцев.

5.11. Остаток на сберегательном счете $S(t)$ непрерывно меняется во времени по следующему закону:

$$\frac{dS}{dt} = \frac{S(t)}{10} + 1.$$

Начальный баланс на счете равен P. Найти $S(t)$.

5.12. Стоимость актива $V(t)$ непрерывно меняется во времени по закону

$$\frac{dV}{dt} = \frac{V(t)}{5} + 4.$$

Начальная стоимость актива равна A. Найти $V(t)$.

5.13. Найти функцию спроса $q^D(p)$, если эластичность $E_p(q^D)$ постоянная и задана цена p при некотором значении спроса: 1) $E_p(q^D) = -12$, $p = 5$ при $q^D = 2$; 2) $E_p(q^D) = -33$, $p = 2$ при $q^D = 27$.

5.14. Эластичность спроса на товар задана, как

$$E_p(q^D) = \frac{2p^2}{p^2 + 1}.$$

Известно, что $q = 4$ при $p = 1$. Найдите функцию спроса $q^D(p)$.

5.15. Эластичность спроса для некоторого товара задана, как

$$E_p(q^D) = \frac{3p}{p^2 + 3p + 2}.$$

Найдите функцию спроса на товар спроса $q^D(p)$, если $q^D(1) = 27$.

5.16. Пусть функция предложения задана, как $q^S(p) = p + 1$. Учитывая, что равновесная цена равна 1, найдите равновесное количество. Если эластичность спроса равна

$$E_p(q^D) = \frac{p^2}{p^2 + 3p + 2},$$

найдите функцию спроса.

5.17. Эластичность спроса для некоторого товара задана, как

$$E_p(q^D) = \frac{3p^2 + 7p}{p^2 + 4p + 3}.$$

Найдите функцию спроса на товар спроса $q^D(p)$, если $q^D(1) = 1$.

5.18. Даны функции предложения $q^S(p) = \frac{2}{3}p - 4$ и спроса $q^D(p) = 20 - 2p$ на некоторый товар. Предположим, что начальная цена равна $p(0) = 6$, и цена с течением времени меняется по следующему закону $p^/ = x(p)^3$, где $x(p) = q^D(p) - q^S(p)$ – избыток спроса, найдите зависимость для цены $p(t)$.

5.19. Заданы функции предложения $q^S(p) = 2p$ и спроса $q^D(p) = 8 - 2p$ на некоторый товар заданы. Предположим, что начальная цена равна $p(0) = 1$, и цена с течением времени меняется по следующему закону

$$\frac{dp}{dt} = (q^D(p) - q^S(p))^2.$$

Найдите зависимость для цены $p(t)$.

5.20. Найти динамику равновесной цены p на товар, если прогноз спроса и предложения описываются следующими соотношениями:

1) $q^D(t) = p'' - p' + p + 9, \quad q^S(t) = 3p'' + 2p' + p + 3;$

2) $q^D(t) = 2p'' - p' + 2p + 40, \quad q^S(t) = 3p'' + 3p' + 7p + 10;$

3) $q^D(t) = p'' - 2p' - 5p + 50, \quad q^S(t) = 4p'' + 10p' + 7p + 20;$

4) $q^D(t) = 3p'' - 5p' - p + 12, \quad q^S(t) = 4p'' + p' + 4p + 10.$

Задания для контрольной работы

Вариант 1

1. Дана функция спроса: $q^D(p) = 12 + p - p^2$. Найти: а) экономически обусловленную область определения функции спроса относительно цены товара p; б) эластичность спроса при цене p = 2, дать экономическую оценку.

2. Издержки, связанные с выпуском q единиц продукции, определяются функцией $TC(q) = \ln(q^2 + q - 1{,}25)$. Найти: а) средние и предельные издержки при q = 2; б) объем производства, при котором прибыль максимальна, если цена единицы продукции p = 4.

3. Функция предельного дохода некоторого предприятия имеет вид $MR(q) = 80 - 0{,}04q - 0{,}018q^2$ – (усл. ед.), где q – объем выпуска продукции. Найти функцию дохода и уравнение спроса на продукцию.

4. По данной производственной функции $f(x, y) = \ln((x-2)^2(y-3))$ найти средние и предельные производительности каждого ресурса, частные эластичности выпуска по каждому ресурсу, эластичность производства и предельную технологическую норму замены.

5. Функция полезности потребителя имеет вид $u = \sqrt{xy}$. Цена на благо x равна 40, на благо y равна 10, доход потребителя равен 400. Найти оптимальный набор благ потребителя.

6. Изменение численности населения горнорудного поселка с течением времени описывается следующим уравнением:

$$y' = 0{,}3y(2 - 10 - 4 \cdot y),$$

где $y = y(t)$; t – время в годах. В начальный момент времени население поселка составляло 500 человек. Каким оно станет через три года?

Вариант 2

1. Функции долговременного спроса и предложения от цены p имеют соответственно вид: $q^D(p) = 700 - 0{,}6p$, $q^S(p) = 400 + 2{,}4p$. Найти: 1) состояние равновесия рынка; 2) эластичность спроса и предложения при равновесной цене; 3) найти изменение дохода при увеличении равновесной цены на 10%.

2. На рынке спрос на некоторый товар определяется функцией $p^D(q) = 1360 - q - q^2$, где q – число единиц товара, а средние издержки на производство этого товара составляют $AC(q) = 2q + 1000 + \frac{200}{q}$. Найти цену товара, при которой достигается максимальная прибыль и саму максимальную прибыль.

3. Дана функция предельной склонности к потреблению страны:

$$MC(Y) = \frac{1}{\sqrt{5Y+4,41}} + 0,5,$$

где Y – национальный доход. Найти функцию потребления, если потребление равно 7 млрд. руб., когда доход равен нулю.

4. По данной производственной функции $f(x,y) = 15x + 3y^{0,4}$ найти средние и предельные производительности каждого ресурса, частные эластичности выпуска по каждому ресурсу, эластичность производства и предельную технологическую норму замены.

5. Производится два вида товаров, цены которых соответственно равны 12 и 17 условных ден. ед. Функция затрат, связанных с производством этих товаров, имеет вид $TC(x,y) = 0,6x^2 + 1,2xy + 0,1y^2$, где x и y – количества производимых товаров первого и второго видов. Найти максимальную прибыль.

6. Найти функцию спроса, если $E_p(q^D) = -2 = const$ и $q^D(3) = \frac{1}{6}$.

Вариант 3

1. Найти: а) экономически обусловленную область определения функции спроса относительно цены товара p; б) эластичность спроса относительно цены товара. Определить показатель эластичности при заданной цене, дать экономическую оценку.

$$q^D(p) = \frac{2-p}{p+1}, \qquad p = 0,5.$$

2. В прокате 50 прогулочных велосипедов. При цене проката 300 руб./час бывает взято 42 велосипеда. Если цена снижается до 270 руб./час, то взято на прокат 47 велосипедов. Найти: 1) максимальную выручку, предполагая линейным закон спроса; 2) цену проката, при которой выручка наибольшая.

3. Распределение дохода в некоторой стране определяется кривой Лоренца $y = 0,8x^2 + 0,2x$, где y – доля совокупного дохода, получаемая частью x низко оплачиваемого населения. Какую часть дохода получают 9% наиболее низко оплачиваемого населения? Вычислить коэффициент Джини.

4. По данной производственной функции $f(x,y) = \left(0,6x^{\frac{1}{7}} + 0,4y^{\frac{1}{7}}\right)^7$ найти средние и предельные производительности каждого ресурса, частные эластичности выпуска по каждому ресурсу, эластичность производства и предельную технологическую норму замены.

5. Найти величины спроса x и y на два вида товара, цены которых соответственно равны 15 и 9 усл. ден. ед., если потребитель при ограниченном бюджете 480 усл. ден. ед. стремится максимизировать функцию полезности (функция Кобба – Дугласа)

$$f(x, y) = x^{0,6} y^{0,36}.$$

При найденном оптимальном спросе указать наибольшее значение функции полезности.

6. Функции спроса и предложения имеют соответственно вид:

$$q^D(p) = 25 - 2p + 3p'; \quad q^S(p) = 15 - p + 4p'.$$

Найти зависимость равновесной цены от времени, если в начальный момент p = 9.

Вариант 4

1. Функции долговременного спроса и предложения от цены p имеют соответственно вид: $q^D(p) = 100 - 1{,}2p$, $q^S(p) = 40 + 0{,}8p$. Найти: 1) состояние равновесия рынка; 2) эластичность спроса и предложения при равновесной цене; 3) точку равновесия после введения налога, равного 5%.

2. Производитель реализует свою продукцию по цене 220 у.е. за единицу, а издержки при этом задаются как $TC(q) = 167q + 0{,}5q^3$. Найти оптимальный для производителя объем выпуска продукции и соответствующую ему прибыль при налоге 5 у.е. на единицу продукции.

3. Законы спроса и предложения на товар соответственно имеют вид:

$$p^D(q) = 170 - q^2, \quad p^S(q) = 2q^2 + 3q + 44,$$

где q – количество товара. Найти выигрыш потребителей и поставщиков при установлении рыночного равновесия.

4. По данной производственной функции $f(x, y) = 140xy^{0,7}$ найти средние и предельные производительности каждого ресурса, частные эластичности выпуска по каждому ресурсу, эластичность производства и предельную технологическую норму замены.

5. Функция предпочтений для инвестора задается эмпирической зависимостью

$$u = r - 0{,}4\sigma - 0{,}21\sigma^2,$$

где r – ожидаемая доходность портфеля, σ – риск. Граница области D задается следующим уравнением $r = 0{,}12 + 2{,}5\sigma$. Определить наиболее предпочтительный для данного инвестора уровень риска.

6. Известно, что рост числа $y = y(t)$ жителей некоторого района описывается уравнением

$$y' = \frac{0{,}2y}{m}(m - y),$$

,

где m – максимально возможное число жителей для данного района. В начальный момент времени число жителей составляло 1 % от максимального. Через какой промежуток времени оно составит 80 % от максимального?

Вариант 5

1. Дана функция спроса $q^D(p) = 24 - 3p$, где p – цена товара. Построить (на одной координатной плоскости) кривые спроса, эластичности спроса относительно цены, выручки. Определить при каких ценах спрос эластичен, неэластичен, нейтрален, абсолютно неэластичен и абсолютно эластичен.

2. Функция издержек имеет вид $TC(q) = 50 + 0{,}25q^2$, а доход при производстве q единиц товара определяется следующим образом:

$$TR(q) = \begin{cases} 2000\ q, & \text{если } q < 100, \\ 2000(100 + \sqrt{q - 100}), & \text{если } q > 100. \end{cases}$$

Определить оптимальное для производителя значение выпуска.

3. Доход от инвестиций в некоторое производство равен нулю в течение первых двух лет, а затем изменяется по закону $R(t) = 45e^{-0{,}18(t-2)}$ (усл. ден. ед.), где t – время в годах. Найти среднее значение дохода от инвестиций в течение первых 6 лет.

4. По данной производственной функции $f(x, y) = 20x + 16\ln y$ найти средние и предельные производительности каждого ресурса, частные эластичности выпуска по каждому ресурсу, эластичность производства и предельную технологическую норму замены.

5. Установлены функция издержек $TC(q) = 10 + q^2$, а также функция количества реализованного товара

$$K(p, q) = \frac{q}{1 + \frac{p^2}{25}}$$

при установленной цене его единицы, равной p. Найти оптимальные значения q и p для монополиста-производителя.

6. В поселке с населением 3000 человек распространение рекламной новости описывается следующим уравнением:

$$y' = 0{,}001y(3000 - y),$$

где y – число узнавших о новом товаре; t – число недель. Сколько осведомленных будет в поселке через две недели, если в начальный момент было трое людей, знающих о новом продукте?

Вариант 6

1. Дана функция спроса: $q^D(p) = 28 + 3p - p^2$. Найти: а) экономически обусловленную область определения функции спроса относительно цены товара p; б) эластичность спроса при цене $p = 5$, дать экономическую оценку.

2. Издержки, связанные с выпуском q единиц продукции, определяются функцией $TC(q) = \ln(q^2 + 2q - 12)$. Найти: а) средние и предельные издержки при $q = 4$; б) объем производства, при котором прибыль максимальна, если цена единицы продукции $p = 5$.

3. Определить дисконтную сумму за t лет при процентной ставке 4%, если капиталовложения (инвестиции) изменяются по закону $K(t) = 80(1 + 0{,}09t)$. Дать пояснения полученному результату.

4. По данной производственной функции $f(x, y) = 18x^{0,5} + y^{0,75}$ найти средние и предельные производительности каждого ресурса, частные эластичности выпуска по каждому ресурсу, эластичность производства и предельную технологическую норму замены.

5. Предприниматель решил открыть новую производственную фирму. При этом он готов на развитие этой фирмы выделить 12 млн. руб. Известно, что если на аренду помещения и приобретение нового оборудования выделить x млн. руб., а на зарплату сотрудникам – y млн. руб., то прирост объема выпуска продукции составит $u(x, y) = 0{,}003x^{0,25}y^{0,75}$. Как следует распределить выделяемые денежные средства, чтобы прирост объема выпускаемой продукции был максимальным?

6. Найти функцию спроса, если известно, что $q^D(18) = 1$ и эластичность спроса относительно цены имеет следующий вид:

$$E_p(q^D) = \frac{p}{p - 20}.$$

Вариант 7

1. Функции долговременного спроса и предложения от цены p имеют соответственно вид: $q^D(p) = 110 - 2{,}3p, \quad q^S(p) = 30 + 1{,}7p$. Найти: 1) состояние равновесия рынка; 2) эластичность спроса и предложения при равновесной цене; 3) субсидию, которая приведет к увеличению объема продаж на 3 единицы?

2. На рынке спрос на некоторый товар определяется функцией $p^D(q) = 370 - 3q - 2q^2$, где q – число единиц товара, а средние издержки на производство этого товара составляют $AC(q) = 9q + 10 + \frac{510}{q}$. Найти цену товара, при которой достигается максимальная прибыль и саму максимальную прибыль.

3. Производительность труда рабочего в течение дня задается эмпирической функцией $-0{,}006t^2 + 0{,}18t + 0{,}25$ (ден. ед./час), где $t \in [0; 8]$ время в часах от начала работы. Найти дневную выработку.

4. По данной производственной функции $f(x, y) = 8\sqrt[3]{x} + 3\ln y$ найти средние и предельные производительности каждого ресурса, частные эластичности выпуска по каждому ресурсу, эластичность производства и предельную технологическую норму замены.

5. Производственная функция (в денежном выражении) имеет вид $f(x, y) = 120\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{y}$ (где x, y – количество единиц соответственно первого и второго ресурса). Стоимость единицы первого ресурса – 20, второго – 40 (усл. ден. ед.). Найти максимальную прибыль при использовании этих ресурсов.

6. Функции спроса и предложения на некоторый товар соответственно имеют вид:

$$q^D(p) = 50 - 2p - 4p'; \quad q^S(p) = 70 + 2p - 5p'.$$

Найти зависимость равновесной цены от времени, если $p(0) = 10$, и определить, является ли равновесная цена устойчивой.

Вариант 8

1. Найти: а) экономически обусловленную область определения функции спроса относительно цены товара p; б) эластичность спроса относительно цены товара. Определить показатель эластичности при заданной цене, дать экономическую оценку.

$$q^D(p) = \frac{3 - p}{p + 2}, \qquad p = 2{,}5.$$

2. В прокате 55 прогулочных велосипедов. При цене проката 275 руб./час бывает взято 43 велосипеда. Если цена снижается до 250 руб./час, то взято на прокат 48 велосипедов. Найти: 1) максимальную выручку, предполагая линейным закон спроса; 2) цену проката, при которой выручка наибольшая.

3. Найти объем выпускаемой продукции за пять лет, если в функции Кобба–Дугласа $A(t) = e^t$, $L(t) = (t + 1)^2$, $K(t) = (100 - 3t)^2$, $\alpha = \beta = 0{,}5$ (t – время в годах).

4. По данной производственной функции $f(x, y) = 26x^{0{,}25}\ln y$ найти средние и предельные производительности каждого ресурса, частные эластичности выпуска по каждому ресурсу, эластичность производства и предельную технологическую норму замены.

5. Фирма продает единственный товар на двух рынках. Функции спроса на этих рынках линейны и имеют вид соответственно

$$q_1{}^D(p_1) = 31{,}5 - 0{,}5p_1, \quad q_2{}^D(p_2) = 42 - 0{,}4p_2.$$

Функция затрат имеет вид $TC(q) = 40 + 30q$, где $q = q_1 + q_2$. Определить цены, при которых фирма получит максимальную прибыль.

6. Найти выражение объема реализованной продукции $y = y(t)$ и его значение при $t = 2$, если известно, что кривая спроса имеет вид $p(y) = 3 - 2y$, норма акселерации $\frac{1}{l} = \frac{3}{2}$, норма инвестиций $m = 0{,}6$, $y(0) = 1$.

Вариант 9

1. Функции долговременного спроса и предложения от цены p имеют соответственно вид: $q^D(p) = 230 - 1{,}4p$, $q^S(p) = 90 + 1{,}1p$. Найти: 1) состояние равновесия рынка; 2) эластичность спроса и предложения при равновесной цене; 3) как изменится равновесная цена при уменьшении предложения на рынке на 10%?

2. Производитель реализует свою продукцию по цене 400 у.е. за единицу, а издержки при этом задаются как $TC(q) = 250q + 0{,}2q^3$. Найти оптимальный для производителя объем выпуска продукции и соответствующую ему прибыль при налоге 15 у.е. на единицу продукции.

3. Распределение дохода в некоторой стране определяется кривой Лоренца
$$y = \frac{x}{3 - 2x},$$
где y– доля совокупного дохода, получаемая частью x низко оплачиваемого населения. Какую часть дохода получают 12% наиболее низко оплачиваемого населения? Вычислить коэффициент Джини.

4. По данной производственной функции $f(x, y) = 35\ln(4xy)$ найти средние и предельные производительности каждого ресурса, частные эластичности выпуска по каждому ресурсу, эластичность производства и предельную технологическую норму замены.

5. Функция полезности потребителя имеет вид $u = 18x + 16y - 3x^2 - xy - 5y^2$. Цена на благо x равна 1, на благо y равна 2, доход потребителя равен 10. Найти оптимальный набор благ потребителя.

6. Цена продукции и затраты на производство линейно зависят от объема q ее выпуска: $p^D(q) = 10 - q$, $TC(q) = 6q + 4$, а скорость изменения выпуска продукции пропорциональна прибыли с коэффициентом 0,2. Найти общий вид динамики выпуска продукции $q(t)$.

Вариант 10

1. Дана функция спроса $q^D(p) = 18 - 2p$, где p – цена товара. Построить (на одной координатной плоскости) кривые спроса, эластичности спроса относительно цены, выручки.

Определить при каких ценах спрос эластичен, неэластичен, нейтрален, абсолютно неэластичен и абсолютно эластичен.

2. При производстве монополией q единиц товара цена за единицу составляет $p(q)$. Определить оптимальное для монополии значение выпуска (предполагается, что весь производственный товар реализуется), если издержки $TC(q)$ имеют вид:

$$TC(q) = 10 + (q-1)^2, \quad p^D(q) = 1 - \frac{4\sqrt{q}}{3}.$$

3. Изменение производительности выпуска продукции с течением времени от начала внедрения нового технологического процесса задается функцией $f(t) = 16 - 2^{-0,5t+4}$, где t – время в месяцах. Найти объем продукции, произведенной: а) за первый месяц; б) четвертый месяц; в) последний месяц года, считая от начала внедрения рассматриваемого технологического процесса.

4. По данной производственной функции $f(x,y) = 60x^{0,12} + ln(10y)$ найти средние и предельные производительности каждого ресурса, частные эластичности выпуска по каждому ресурсу, эластичность производства и предельную технологическую норму замены.

5. Общие издержки производства заданы функцией:

$$TC(x,y) = x^2 + 1,2xy + 0,8y^2 + 1400x + 1200y + 3000,$$

где x и y – соответственно количество товаров А и В. Общее количество произведенной продукции должно быть равно 500 ед. Сколько единиц товара А и В нужно производить, чтобы издержки на их изготовление были минимальными.

6. Процесс освоения производственных мощностей завершается выходом на заданный размер мощности. Обозначим через $x = const$ – введенную производственную мощность, а через $y(t)$ – фактическое производство на базе этой мощности в момент времени t $(y(t) < x)$. Предполагая, что рост производства пропорционален недоиспользованной мощности, найти изменение производства в каждый момент времени. Через какой промежуток времени будет достигнут заданный размер мощности $x = 150$ усл. ден. ед., если в начале года производство определялось величиной 10 усл. ден. ед., а через год – 20 усл. ден. ед.?

Ответы

Глава 1

1.1. 22,4.

1.2. 0.

1.3. 66 821,37.

1.4. $y = a^{-\frac{1}{\rho}}$.

1.5. 1) y=3; 3; 2) y=12x-18; нет; 3) y=8; 8; 4) y=2; 2.

1.7. 1) FC = 5000, $VC(q) = 240q - 4{,}5q^2 + 0{,}5q^3$; $AC(q) = \frac{5000}{q} + 240 - 4{,}5q + 0{,}5q^2$;

2)$FC = 75 + \ln 5$; $VC(q) = 5q^2 + \ln(q^2 + 3q + 5) - 75 - \ln 5$; $AC(q) = \frac{5q^2 + \ln(q^2+3q+5)+75}{q}$;

3) $FC = 273$; $VC(q) = 8q + \frac{48}{(q+1)^2} - 48$; $AC(q) = 8 + \frac{48}{q(q+1)^2} + \frac{225}{q}$.

1.8. 1) FC = 1200, VC = 830, AC = 203: AFC = 120, AVC = 83;

2) FC = 45, VC = 60, AC = 52,5; AFC = 22,5, AVC = 30;

3) FC=0, $VC(q)$ = 561, AC = $\frac{561}{19}$; AFC = 0, AVC = $\frac{561}{19}$.

1.9. 1) 2940; 2) $\frac{300+\ln 402}{20}$; 3) 560.

1.11. $\pi(q) = -q^3 + 18q^2 - 112q - 64$.

1.12. 1) (70; 960) ; 2) (2; 3,75); 3) (64; 100); 4) (4; 10); 5) (9; 2).

1.13. 3,25; 0,5.

1.14. 5.

1.15. 6; 2.

1.16. 5; 1.

1.18. 1800; $p_n = 1800 - 600 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

1.19. 1) $p_n = 7 - 4 \cdot \left(-\frac{1}{5}\right)^n$, 7;   2) $p_n = 5 + 2 \cdot (-4)^n$, расходится.

1.20. а) (4; 12), б) $\left(\frac{220}{53}; \frac{612}{53}\right)$, в) $\frac{5}{3}$.

1.21. Увеличится на 0,5.

1.22. $y = -1{,}5x + 30$.

1.23. 3) 325 и 235.

1.24. 560 км.

1.25. а) 36; б) 400.

1.26. а) $y = 6000 - 720t$; б) 1680; в) 8 лет 4 месяца.

1.27. а) $Y_n = 75\left(1-\left(\frac{3}{3}\right)^n\right)$; б) 75.

1.28. а) 7560; б) $TR(x) = 8800 + 130x - 3x^2$; $TC(x)$= 2560-32x; $\pi(x) = -3x^2 + 162x + 6240$.

Глава 2

2.1. 25,2; 45.

2.2. При цене $p \in (0; 1)$ – спрос неэластичен, при p = 1 – спрос нейтрален, при $p \in (1; 2)$ – спрос эластичен.

2.3. $E_p(q^D) = 2$.

2.5. 1) 89; 2) 100ln2 – 20; 3) 28.

2.7. 1084.

2.8. 1) $3e^2 + 2$; $9e^2 + 8$; 2) $4\frac{4}{7}$; $\ln 7 + 17\frac{1}{7}$.

2.9. 370.

2.10. 1) 0; – 6; 2) 4; $-\frac{8}{3}$.

2.13. 1) 160; 130; 2) 28; 52; 3) $3e^6$; $3e^9$.

2.14. 1) 83; 55; 2) 196,5; 88; 3) $\frac{11}{3}-\frac{1}{4}\ln 3$; $\frac{18}{5}-\frac{1}{4}\ln 5$.

2.16. MPC = 0,7; MPS = 0,3.

2.18. $y'(25) = 13{,}5$; $y'(60) = 34{,}5$; $T_{25}(y) = 0{,}54$; $T_{60}(y) = 0{,}575$.

2.19. 12.

2.24. $\sqrt{12}$.

2.25. а) 4; б) – 4; 5 у.е.

2.26. $(\sqrt{2}; +\infty)$.

2.27. 15.

2.30. –1,5.

2.32. 300.

2.33. $\frac{400}{3}$.

2.34. При цене p = 0 спрос абсолютно неэластичен, при $p \in (0; 0{,}75)$ – неэластичен, при $\mathrm{p} = 0{,}75$ – нейтрален, при $p \in (0{,}75; 1{,}5)$ – эластичен, при p = 1,5 – абсолютно эластичен.

2.35. 1) 1,3; $\frac{27}{17}$; 2,7; 2) 0,3; $\frac{15}{14}$; $\frac{885}{721}$.

2.37. 0,3; 0,5.

2.38. 15; 675.

2.40. $E_q(AC) = E_q(TC) - 1$.

2.41. 2; 10.

2.42. 1) $\frac{2}{3}$; $\frac{2}{5}$; 2) 4; –4; 3) 2; $\frac{2}{3}$; 4) $\frac{200}{9}$; $\frac{40}{3}$.

2.43. 20.

2.44. 10.

2.46. 2.

2.47. 20; уменьшится до 18.

2.48. 1000.

2.49. 11; 414.

2.50. $|\alpha| > 1$.

2.51. 25.

2.52. $q^S(p) = \frac{p-8}{2}$.

2.53. в)100; 700; г) 10.

2.54. а) 500; б) $200 - \frac{100\sqrt{30}}{3}$.

2.55. 2; $10e^{-1}$.

2.56. 425; 75.

Глава 3

3.15. $38\frac{1}{3}$

3.16. $\frac{1}{3}$

3.17. 1) $\frac{1}{4}$

2) $\frac{1}{13}$

3.18. 1) *CS* = 1152, *PS* = 132

2) *CS* = 2250, *PS* = 37,5

3) *CS* = $\frac{2000}{3}$, *PS* = $\frac{2300}{3}$

3.19. $\frac{6000}{49}$

3.20. 4136

3.21. $9e^4 - 1$

3.22. $3{,}25e^{12} - 0{,}25$

3.23. 131,19

3.24. 95

3.25. 54,4

3.26.

3.27. $13\frac{1}{6}$

3.29. $\frac{1}{3}$

3.30. $32\frac{2}{3}$

3.31. 21; 10; $231\ln 11 - 210$; 50

3.32. $50\ln 2 - 25$; 1,25

Глава 4

4.4. $\frac{4}{\sqrt{3}}$; $\frac{1}{6}$

4.5. 1) 108; 576; 2160; $\frac{1}{20}$

2)1,125; $4\frac{1}{3}$; 0,75; $\frac{3}{2}$

4.6. 1) 2; 1

2) 5; 0

3) 210; 75

4) 0; 28

4.7. 1) 0,3; 0,4; $\frac{3}{4}$

2) $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{8}$; 2

4.8. 0,3; 0,5

4.11. $-\frac{1}{3}$; $\frac{1}{3}$

4.13. -5/21, 1/26

4.14. -5/13, 8/13

4.16. 273

4.17. 475

4.18. 200; 400

4.19. (20; $\frac{20}{3}$)

4.20. (5,25; 10,5)

4.21. (98,6; 13,2)

4.22. $(60;\ 20;\ 10)$

4.23. (40; 80)

4.24. $\frac{L}{K} = 1{,}4$

4.25. 6; 3

4.26. (30; 20)

4.27. L=$\frac{5000}{3}$; K=7500 ; 185379

4.28. ($\frac{320}{3}$; 235)

4.29. (72; 24)

4.30. $\frac{100000}{15^{0,75}}$

4.31. $40 \cdot 3^{\frac{3}{4}}$

4.32. 42; (1; 4)

4.33. (2; 2)

4.34. $\frac{200}{9}$

4.35. $\frac{12500}{7} \cdot 4^{\frac{2}{3}}$

4.36. На учебу 75 часов, на работу 25 часов

4.37. 1) (100; 50); 480; 2) $P = \frac{1180}{7}$; $\pi = \frac{13588}{7}$

4.38. При ценовой дискриминации P_1=20, P_2=30, $\Pi = 95$; при отсутствии ценовой дискриминации $P = \frac{200}{9}$, $\Pi = \frac{755}{9}$.

Глава 5

5.1. $2e^{\frac{2kt}{3}}$

5.2. $1200e^{0,3\alpha t}$

5.3. $1500e^{0,25t}$

5.4. 4,6

5.5. 29,91

5.6. $q^D(t) = \frac{4e^{\frac{8}{9}t}}{11+e^{\frac{8}{9}t}}$

5.7. $y(t) = 1{,}5t + 0{,}75 + 2{,}25e^{2t}$

5.8. $3 - 3e^{-0,8}$

5.9. 1) $Y(t) = 2{,}4e^{-0,5t} - 0{,}4e^{2t}$

2) $Y(t) = 2t + 1 + e^{2t}$

5.10. $1000, 1000 + 2000e^{5,6}, 1400e^{5,6}$

5.11. $S(t) = e^{\frac{t}{10}}(P + 10) - 10$

5.12. V(t)= $e^{\frac{t}{5}}(A + 20) - 20$

5.13. 1) $q^D(p) = \sqrt{\frac{20}{p}}$; 2) $q^D(p) = \frac{36}{p^2}$.

5.14. $q^D(p) = \frac{8}{p^2+1}$

5.15. $q^D(p) = \left(\frac{2p+4}{p+1}\right)^3$

5.16. $q^D(p) = \frac{9(p+1)}{(p+2)^2}$

5.17. $q^D(p) = \frac{16}{(p+1)^2(p+3)}$

5.18. $(24 - \frac{8}{3}p)^{-2} = \frac{16}{3}t + \frac{1}{64}$

5.19. $p(t) = 2 - \frac{1}{16t+1}$

5.20. 1) $p(t) = C_1 + C_2e^{-\frac{3}{2}t} + 2t$

2) $p(t) = e^{-2t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t) + 6$

3) $p(t) = (C_1 + C_2t)e^{-2t} + 2{,}5$

4) $p(t) = (C_1e^{-t} + C_2e^{-5t}) + 0{,}4$