

Министерство науки и высшего образования Российской
Федерации

Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего профессионального образования
Казанский (Приволжский) федеральный университет

Введение в векторный анализ

Учебное пособие

Казань — 2024

Рекомендовано к изданию Учебно-методическим центром
ИГиНГТ КФУ (протокол № ... от ... мая 2024 г.)

Рецензенты:

кандидат физ.-мат. наук, доцент Гусев А. В

кандидат геол.-мин. наук, доцент Латыпов А. И.

Введение в векторный анализ: учебное пособие / А. А. Галеев, А. Н. Калимуллина, Д. И. Хасанов, Б. Г. Червигов. — Казань: КФУ, 2024. — 95 с.

Пособие составлено в соответствии с требованиями ФГОС ВО по подготовке бакалавров по направлению 05.03.01 «Геология». Изложенный в данном пособии материал является составной частью курсов "Высшая математика" "Математическое моделирование и обработка данных", "Численное моделирование геофильтрационных процессов", "Теория поля", "Электроразведка", "Магниторазведка", "Гравиразведка", которые читается студентам 1-4 курсов специальностей "Гидрогеология и инженерная геология" и "Геофизика" в Институте геологии и нефтегазовых технологий КФУ.

В учебном пособии последовательно вводятся основные понятия и определения математического аппарата векторного исчисления, используемого при исследовании физических полей.

Набор и верстка выполнены в пакете Texlive-2021.

© Галеев А. А., 2024

© Казанский университет, 2024

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	3
1 ОРТОГОНАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ КООРДИНАТ	4
1.1 Прямоугольная система координат	5
1.2 Криволинейные системы координат	8
1.2.1 Цилиндрическая система координат	10
1.2.2 Сферическая система координат	15
2 СКАЛЯРНЫЕ И ВЕКТОРНЫЕ ПОЛЯ	23
2.1 ПОЛЕ ФИЗИЧЕСКОЙ ВЕЛИЧИНЫ	23
2.2 СКАЛЯРНОЕ ПОЛЕ	26
2.2.1 Поверхности и линии уровня	27
2.2.2 Производная по направлению. Градиент	29
2.2.3 Символические операторы векторного анализа	33
2.3 ВЕКТОРНОЕ ПОЛЕ	37
2.3.1 Векторные линии. Векторная трубка	38
2.3.2 Поток векторного поля через поверхность	41
2.3.3 Поток векторного поля через замкнутую по- верхность	46
2.3.4 Теорема Остроградского-Гаусса	48
2.3.5 Ротор векторного поля. Циркуляция	58
2.3.6 Формула Стокса	63

3	ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ В КРИВОЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ КООРДИНАТ	73
3.1	Градиент в криволинейных системах координат . .	73
3.2	Дивергенция в криволинейных системах координат	77
3.3	Ротор в криволинейных системах координат	80
	ЗАКЛЮЧЕНИЕ	92
	ЛИТЕРАТУРА	93

ВВЕДЕНИЕ

Векторный анализ является математическим аппаратом, обеспечивающим общий подход к изучению полей различной физической природы, свойства которых задаются скалярными или векторными величинами в каждой точке трехмерного пространства. Изменения этих свойств в пространстве и времени описываются с применением операций дифференцирования и интегрирования функций координат и времени. Достаточно вспомнить определение мгновенной скорости как первой производной от радиус-вектора по времени $\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt}$, или работы силы \vec{F} по перемещению материальной точки вдоль дуги кривой L от точки A до точки B по заданной траектории, которая вычисляется с помощью криволинейного интеграла второго рода $A = \int_{AB} \vec{F} d\vec{\ell}$.

В данном учебном пособии последовательно вводятся понятия и определения математического аппарата векторного исчисления, используемого при исследовании физических полей. Доказательства теорем и вывод основных формул сопровождаются иллюстрациями, дающими наглядное представление об условиях их применения и служат упражнениями для формирования математических абстракций на основе используемых физических понятий.

Глава 1

ОРТОГОНАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ КООРДИНАТ

Положение точки в пространстве задается упорядоченным набором чисел, называемых координатами точки. Для описания физических полей используются непрерывные математические функции нескольких аргументов: трех пространственных координат и времени.

Требование непрерывности к используемым функциям призвано отразить сплошность проявления физических свойств в выделенной области пространства. Кроме того, значения скалярных величин, таких как температура, плотность вещества и др., вычисленные с помощью этих функций, а также метрические и симметрические свойства, характеризующие взаимное расположение точек изучаемой области пространства, не должны изменяться при переходе из одной системы координат к другой. Последнее требование связано с инвариантностью физических величин, т. е. с независимостью от применяемой для их описания системы координат.

1.1. Прямоугольная система координат

Прямоугольная система координат изобретена математиком Рене Декартом, ее еще называют "декартова система координат". Она представляет собой три взаимно перпендикулярные координатные оси (числовые прямые) с общим началом, как показано на рисунке 1.1. Первая ось Ox называется осью абсцисс, вторая ось Oy — осью ординат, третья ось Oz — осью аппликат.

Если задана единица длины и введен ортонормированный базис из трех единичных ортогональных векторов $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, то любой вектор $\vec{a}(a_x, a_y, a_z)$ выражается в виде линейной комбинации базисных векторов с помощью своих координат a_x, a_y и a_z :

$$\vec{a} = \vec{a}(a_x, a_y, a_z) = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}.$$

Положение точки M определяется тремя числами x, y, z или радиус-вектором $\vec{r}(M)$:

$$\vec{r}(M) = \vec{r}(x, y, z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

Для любых двух векторов $\vec{a}(a_x, a_y, a_z)$ и $\vec{b}(b_x, b_y, b_z)$ определено скалярное произведение:

$$(\vec{a}, \vec{b}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z. \quad (1.1)$$

В частности, квадрат длины вектора определяется как скалярное произведение вектора на самого себя:

$$|\vec{a}|^2 = (\vec{a}, \vec{a}) = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2. \quad (1.2)$$

Два вектора \vec{a} и \vec{b} коллинеарны, т. е. $\vec{a} \parallel \vec{b}$, если их координаты пропорциональны:

$$a_x = \alpha b_x, \quad a_y = \alpha b_y, \quad a_z = \alpha b_z, \quad (1.3)$$

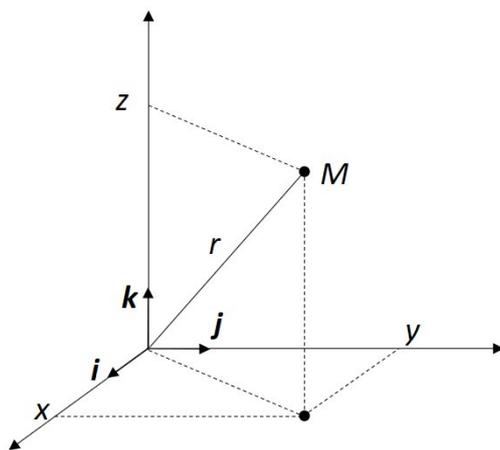


Рис. 1.1 – Декартовы координаты x, y, z точки M в пространстве

где α — любое действительное число.

Два вектора \vec{a} и \vec{b} ортогональны, т. е. $\vec{a} \perp \vec{b}$, если их скалярное произведение равно нулю:

$$(\vec{a}, \vec{b}) = 0. \quad (1.4)$$

Из определений (1.1 – 1.4) следует, что вектор нулевой длины $\vec{0}$ (нуль-вектор), все координаты которого равны нулю, является единственным вектором пространства, который не имеет направления, коллинеарен и ортогонален всем векторам в пространстве.

Кривую линию L в общем случае рассматривают как траекторию движения точки $M(t)$ при изменении параметра t (обычно, t — момент времени) и записывают *уравнение кривой L в параметрическом виде*:

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}.$$

При изменении параметра t вектор $\vec{r}(t)$ может изменяться по величине и направлению (рис. 1.2). Полагая, что функции $x(t)$, $y(t)$ и $z(t)$ дифференцируемы при заданных значениях t , введем

определение *производной вектора по скалярному аргументу*:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j} + z'(t)\vec{k}.$$

Из курса математического анализа известно, что вектор $\frac{d\vec{r}}{dt}$ направлен по касательной к кривой $\vec{r}(t)$ в точке $M(t)$, а квадрат его длины определяется формулой:

$$\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)^2 = (x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2.$$

Как и в случае скалярных функций дифференцируемость векто-

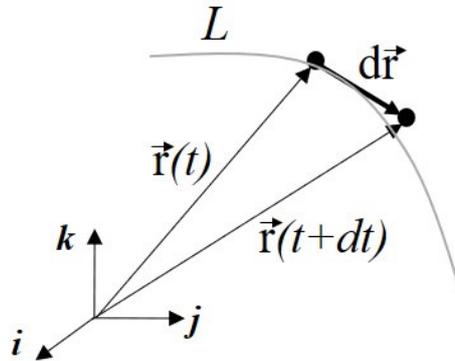


Рис. 1.2 – Дифференциал радиус-вектора

ра в точке позволяет определить дифференциал любого вектора в следующем виде:

$$d\vec{r}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt}dt = x'(t)dt\vec{i} + y'(t)dt\vec{j} + z'(t)dt\vec{k}.$$

Правую часть этого равенства можно выразить через дифференциалы векторов, совпадающих по направлению с координатными осями:

$$\begin{aligned} d\vec{x} &= dx\vec{i} = x'(t)dt\vec{i}, \\ d\vec{y} &= dy\vec{j} = y'(t)dt\vec{j}, \\ d\vec{z} &= dz\vec{k} = z'(t)dt\vec{k}; \end{aligned}$$

и после суммирования записать дифференциал вектора в компактном виде:

$$d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}. \quad (1.5)$$

Здесь и далее для сокращения записи мы часто будем использовать свойство *инвариантности формы первого дифференциала* скалярной функции при замене переменных: если функция $f(x)$ представляет собой сложную функцию переменной ξ , т. е. $f(x) = f[x(\xi)]$, тогда справедливо:

$$df = f'_\xi d\xi = f'_x x'_\xi d\xi = f'_x dx, \quad (1.6)$$

т. к. $dx = x'_\xi d\xi$.

Модуль вектора $|d\vec{r}|$ называют дифференциалом длины дуги кривой $d\ell = d\ell(t)$, или *элементом длины дуги*, который соответствует расстоянию между двумя бесконечно близкими точками вдоль кривой $\vec{r}(t)$:

$$d\ell = |d\vec{r}| = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}. \quad (1.7)$$

Квадрат дифференциала дуги $d\ell^2$ определяется как скалярное произведение вектора $d\vec{r}$ на самого себя:

$$\begin{aligned} d\ell^2 &= |d\vec{r}|^2 = (d\vec{r}, d\vec{r}) = (dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}, dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}) \\ &= dx^2 + dy^2 + dz^2. \end{aligned} \quad (1.8)$$

1.2. Криволинейные системы координат

Наряду с декартовыми координатами в пространстве могут быть введены любые другие, в общем случае, *криволинейные координаты*. Более того, декартова система координат является

только частным случаем криволинейных систем координат. Выбор той или иной системы координат определяется симметрией изучаемых явлений, используется для упрощения записи математических выражений, решения дифференциальных и интегральных уравнений.

Координатная линия — это линия, вдоль которой изменяется только одна координата, а остальные координаты остаются неизменными. Частные производные радиус-вектора по координатам в каждой точке $M(t)$ определяют касательные линии и совпадают по направлению с соответствующими ортами. Например для декартовой системы координат частные производные радиус-вектора по координатам совпадают по длине и направлению с соответствующими единичными ортами:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{r}}{\partial x} &= \vec{i}, & \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial x} \right| &= |\vec{i}| = 1, \\ \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} &= \vec{j}, & \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} \right| &= |\vec{j}| = 1, \\ \frac{\partial \vec{r}}{\partial z} &= \vec{k}, & \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial z} \right| &= |\vec{k}| = 1. \end{aligned} \tag{1.9}$$

Криволинейная ортогональная система координат — в каждой точке пространства координатные линии пересекаются под прямыми углами. В частности, в декартовой системе координат ортогональны друг другу координатные оси Ox , Oy и Oz .

Кроме декартовой системы прямоугольных координат в пространстве наиболее употребительными являются цилиндрическая (рис. 1.3) и сферическая (рис. 1.4) системы координат, которые тоже относятся к ортогональным системам координат.

Прикладные задачи теории поля для систем, имеющих осевую симметрию, часто удобнее решать в цилиндрической системе координат, а для систем, имеющих центральную симметрию относительно некоторой точки, удобно использовать сферическую систему координат.

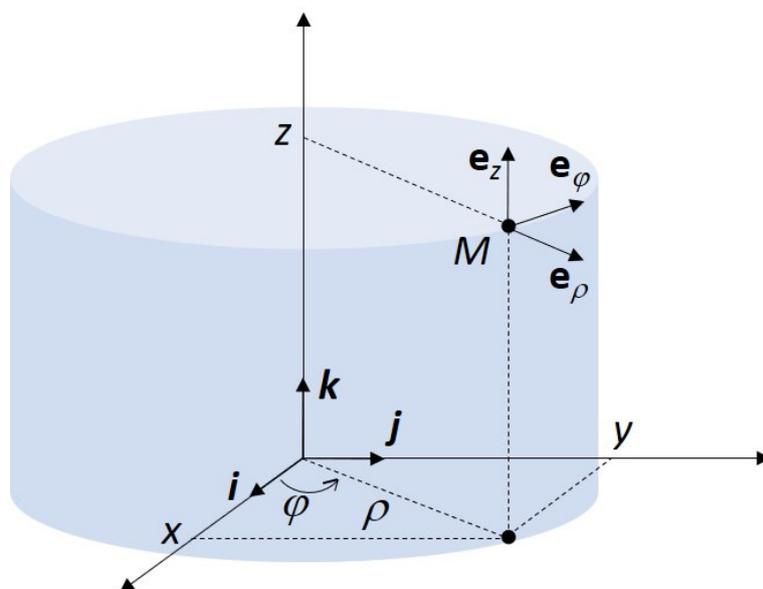


Рис. 1.3 – Цилиндрическая система координат и согласованная с ней декартова система координат $Oxyz$

1.2.1. Цилиндрическая система координат

Положение точки M в цилиндрической системе координат определяется тройкой чисел ρ , φ и z :

$$\vec{r}(\rho, \varphi, z) = \rho \vec{e}_\rho + \varphi \vec{e}_\varphi + z \vec{e}_z, \quad (1.10)$$

где ρ — расстояние от точки M до оси Oz ($0 \leq \rho < \infty$); φ — угол, образованный проекцией радиус-вектора точки M на плоскость Oxy с положительным направлением оси Ox ($0 \leq \varphi < 2\pi$); z — проекция точки M на ось Oz ($-\infty < z < +\infty$); \vec{e}_ρ , \vec{e}_φ и \vec{e}_z — орты цилиндрической системы координат.

Координаты вектора в декартовой и цилиндрической системах координат связаны известными соотношениями:

$$\begin{aligned}x &= \rho \cos \varphi, \\y &= \rho \sin \varphi, \\z &= z.\end{aligned}\tag{1.11}$$

Обратный переход выполняется по формулам:

$$\begin{aligned}\rho &= \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \varphi &= \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, \\ z &= z.\end{aligned}\tag{1.12}$$

Радиус-вектор $\vec{r}(x, y, z)$ можно выразить через новые переменные как

$$\vec{r}(x, y, z) = \rho \cos \varphi \vec{i} + \rho \sin \varphi \vec{j} + z \vec{k}.\tag{1.13}$$

Для установления связи между элементами длин координатных осей в цилиндрической и декартовой системах координат продифференцируем радиус-вектор (1.13) по цилиндрическим координатам:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho} &= \cos \varphi \vec{i} + \sin \varphi \vec{j}, & L_\rho &= \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho} \right| = 1, \\ \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} &= -\rho \sin \varphi \vec{i} + \rho \cos \varphi \vec{j}, & L_\varphi &= \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} \right| = \rho, \\ \frac{\partial \vec{r}}{\partial z} &= \vec{k}, & L_z &= \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial z} \right| = 1.\end{aligned}\tag{1.14}$$

Здесь мы ввели обозначения L_ρ , L_φ и L_z для масштабных коэффициентов (*коэффициентов Ламе*) по каждой из координатных

осей:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho} &= \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho} \right| \vec{e}_\rho = L_\rho \vec{e}_\rho = \vec{e}_\rho, \\
 \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} &= \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} \right| \vec{e}_\varphi = L_\varphi \vec{e}_\varphi = \rho \vec{e}_\varphi, \\
 \frac{\partial \vec{r}}{\partial z} &= \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial z} \right| \vec{e}_z = L_z \vec{e}_z = \vec{e}_z.
 \end{aligned} \tag{1.15}$$

Отметим, что для декартовых координат все масштабные коэффициенты равны 1, как показано в (1.9). С учетом (1.15) запишем дифференциал радиус-вектора (1.10) в цилиндрической системе координат:

$$d\vec{r} = d\rho \vec{e}_\rho + \rho d\varphi \vec{e}_\varphi + dz \vec{e}_z. \tag{1.16}$$

Используя свойства скалярного произведения, можно убедиться в том, что касательные координатных осей и орты цилиндрической системы координат (1.14) попарно ортогональны:

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} \right) &= (\cos \varphi \vec{i} + \sin \varphi \vec{j}, -\rho \sin \varphi \vec{i} + \rho \cos \varphi \vec{j}) \\
 &= -\rho \sin \varphi \cdot \cos \varphi + \rho \sin \varphi \cdot \cos \varphi = 0, \\
 \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial z} \right) &= (\cos \varphi \vec{i} + \sin \varphi \vec{j}, \vec{k}) = 0, \\
 \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial z} \right) &= (-\rho \sin \varphi \vec{i} + \rho \cos \varphi \vec{j}, \vec{k}) = 0.
 \end{aligned} \tag{1.17}$$

Переход из одной системы координат в другую при описании одного и того же физического явления сопровождается изменением вида функций и геометрическими искажениями фигур. Рассмотрим этот аспект на примере вычисления длины дуги кривой L между точками A и B с помощью криволинейного интеграла первого рода:

$$L_{AB} = \int_{AB} dl.$$

Как видно из определения длины произвольной дуги, для того, чтобы линейные размеры объектов не зависели от выбора системы координат, необходимо, чтобы дифференциал длины дуги $d\ell$ (1.7) был инвариантом при переходе от одной системы координат к другой.

Рассмотрим координаты x , y и z как функции $x(\rho, \varphi, z)$, $y(\rho, \varphi, z)$ и $z(\rho, \varphi, z)$ и запишем дифференциалы векторов $d\vec{x}$, $d\vec{y}$ и $d\vec{z}$ в цилиндрической системе координат:

$$\begin{aligned} d\vec{x} &= \frac{\partial x}{\partial \rho} d\rho \vec{e}_\rho + \frac{\partial x}{\partial \varphi} d\varphi \vec{e}_\varphi + \frac{\partial x}{\partial z} dz \vec{e}_z = \cos \varphi d\rho \vec{e}_\rho - \rho \sin \varphi d\varphi \vec{e}_\varphi, \\ d\vec{y} &= \frac{\partial y}{\partial \rho} d\rho \vec{e}_\rho + \frac{\partial y}{\partial \varphi} d\varphi \vec{e}_\varphi + \frac{\partial y}{\partial z} dz \vec{e}_z = \sin \varphi d\rho \vec{e}_\rho + \rho \cos \varphi d\varphi \vec{e}_\varphi, \\ d\vec{z} &= \frac{\partial z}{\partial \rho} d\rho \vec{e}_\rho + \frac{\partial z}{\partial \varphi} d\varphi \vec{e}_\varphi + \frac{\partial z}{\partial z} dz \vec{e}_z = dz \vec{e}_z, \end{aligned} \tag{1.18}$$

Квадрат дифференциала длины дуги (1.8) в цилиндрической системе координат примет следующий вид:

$$\begin{aligned} d\ell^2 &= [dx(\rho, \varphi, z)]^2 + [dy(\rho, \varphi, z)]^2 + [dz(\rho, \varphi, z)]^2 \\ &= \left(\frac{\partial x}{\partial \rho} d\rho \right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi} d\varphi \right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial z} dz \right)^2 \\ &+ \left(\frac{\partial y}{\partial \rho} d\rho \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi} d\varphi \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z} dz \right)^2 \\ &+ \left(\frac{\partial z}{\partial \rho} d\rho \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi} d\varphi \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial z} dz \right)^2 \\ &= (\cos \varphi)^2 d\rho^2 + \rho^2 (-\sin \varphi)^2 d\varphi^2 + 0 dz^2 \\ &+ (\sin \varphi)^2 d\rho^2 + \rho^2 (\cos \varphi)^2 d\varphi^2 + 0 dz^2 \\ &+ 0 d\rho^2 + 0 d\varphi^2 + 1 dz^2 \\ &= (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) d\rho^2 + \rho^2 (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) d\varphi^2 + dz^2 \\ &= d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2 + dz^2. \end{aligned} \tag{1.19}$$

При выводе формулы (1.19) мы не использовали общий подход на основе коэффициентов Ламе (1.14), однако приведем здесь запись формул (1.8) и (1.19) с использованием этих коэффициентов для общего случая связи между криволинейными координатами (q_1, q_2, q_3) в трехмерном пространстве и в применении к переходу из декартовой системы в цилиндрическую:

$$\begin{aligned}
 d\ell^2 &= \sum_{n=1}^3 L_n^2 dq_n^2 \\
 &= dx^2 + dy^2 + dz^2 = L_1^2 dq_1^2 + L_2^2 dq_2^2 + L_3^2 dq_3^2 \\
 &= d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2 + dz^2.
 \end{aligned} \tag{1.20}$$

где L_n — коэффициенты Ламе для перехода из декартовой системы координат в криволинейную с ортогональным базисом $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$.

Извлечем квадратный корень из обеих частей уравнения (1.20) и запишем формулы для элемента длины дуги в декартовой (1.7) и цилиндрической системах координат:

$$d\ell = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \sqrt{d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2 + dz^2}. \tag{1.21}$$

С учетом (1.21) получим формулы для элемента площади поверхности, выраженной через площади нормальных проекций на координатные плоскости:

$$\begin{aligned}
 dS &= \sqrt{(dydz)^2 + (dxdz)^2 + (xdy)^2} \\
 &= \sqrt{\rho^2(d\varphi dz)^2 + (d\rho dz)^2 + \rho^2(d\rho d\varphi)^2},
 \end{aligned} \tag{1.22}$$

и для элемента объема:

$$dV = dx dy dz = \rho d\rho d\varphi dz. \tag{1.23}$$

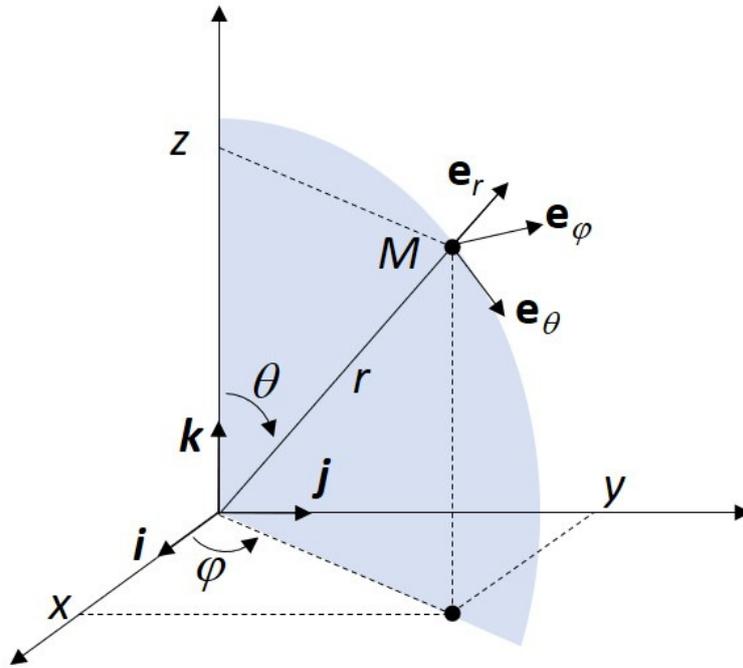


Рис. 1.4 – Сферическая система координат и согласованная с ней декартова система координат $Oxyz$

1.2.2. Сферическая система координат

Положение точки M в сферической системе координат определяется тройкой чисел r , φ и θ :

$$\vec{r}(r, \varphi, \theta) = r\vec{e}_r + \theta\vec{e}_\theta + \varphi\vec{e}_\varphi, \quad (1.24)$$

где r — расстояние от начала координат до точки M ($0 \leq r < \infty$); θ — угол, образованный радиус-вектором точки M с положительным направлением оси Oz ($0 \leq \theta \leq \pi$); φ — угол, образованный проекцией радиус-вектора точки M на плоскость с положительным направлением оси Ox ($0 \leq \varphi < 2\pi$); \vec{e}_r , \vec{e}_θ и \vec{e}_φ — орты локальной сферической системы координат.

Координаты вектора в декартовой и сферической системах

координат связаны известными соотношениями:

$$\begin{aligned}x &= r \sin \theta \cos \varphi, \\y &= r \sin \theta \sin \varphi, \\z &= r \cos \theta.\end{aligned}\tag{1.25}$$

Обратный переход выполняется по формулам:

$$\begin{aligned}r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \\ \theta &= \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}, \\ \varphi &= \operatorname{arctg} \frac{y}{x}.\end{aligned}\tag{1.26}$$

Радиус-вектор $\vec{r}(x, y, z)$ можно выразить через новые переменные как

$$\vec{r}(x, y, z) = r \sin \theta \cos \varphi \vec{i} + r \sin \theta \sin \varphi \vec{j} + r \cos \theta \vec{k}.\tag{1.27}$$

Для установления связи между элементами длин координатных осей в сферической и декартовой системах координат продифференцируем радиус-вектор (1.27) по сферическим координатам:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \vec{r}}{\partial r} &= \sin \theta \cos \varphi \vec{i} + \sin \theta \sin \varphi \vec{j} + \cos \theta \vec{k}, & L_r &= \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} \right| = 1; \\ \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} &= r \cos \theta \cos \varphi \vec{i} + r \cos \theta \sin \varphi \vec{j} - r \sin \theta \vec{k}, & L_\theta &= \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \right| = r; \\ \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} &= -r \sin \theta \sin \varphi \vec{i} + r \sin \theta \cos \varphi \vec{j}, & L_\varphi &= \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} \right| = r \sin \theta;\end{aligned}\tag{1.28}$$

где L_r , L_θ и L_φ — масштабные коэффициенты по каждой из координатных осей (коэффициенты Ламе). С учетом (1.28) запишем

дифференциал радиус-вектора в сферической системе координат:

$$d\vec{r} = dr\vec{e}_r + r \sin \theta d\varphi \vec{e}_\varphi + r\vec{e}_\theta. \quad (1.29)$$

Используя свойства скалярного произведения, можно убедиться в том, что касательные координатных осей так же как и орты сферической системы координат (1.28) попарно ортогональны:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial r}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} \right) &= (\sin \theta \cos \varphi \vec{i} + \sin \theta \sin \varphi \vec{j} + \cos \theta \vec{k}, -r \sin \varphi \vec{i} + r \cos \varphi \vec{j}) \\ &= (-\sin \varphi \cdot \cos \varphi + \sin \varphi \cdot \cos \varphi) r \sin \theta = 0, \\ \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial r}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \right) &= (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) r \sin \theta \cos \theta - r \sin \theta \cos \theta = 0, \\ \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} \right) &= (-\cos \theta \sin \theta \cos \varphi \sin \varphi + \cos \theta \sin \theta \cos \varphi \sin \varphi) r^2 = 0. \end{aligned} \quad (1.30)$$

Студентам предлагается самостоятельно проверить ортонормированность базисных векторов сферической системы координат!

Рассмотрим координаты x , y и z как функции $x(r, \theta, \varphi)$, $y(r, \theta, \varphi)$ и $z(r, \theta, \varphi)$ и запишем дифференциалы векторов $d\vec{x}$, $d\vec{y}$ и $d\vec{z}$ в сферической системе координат:

$$\begin{aligned} d\vec{x} &= \frac{\partial x}{\partial r} dr \vec{e}_r + \frac{\partial x}{\partial \theta} d\theta \vec{e}_\theta + \frac{\partial x}{\partial \varphi} d\varphi \vec{e}_\varphi \\ &= \sin \theta \cos \varphi dr \vec{e}_r - r \sin \theta \sin \varphi d\varphi \vec{e}_\varphi + r \cos \varphi \cos \theta d\theta \vec{e}_\theta, \\ d\vec{y} &= \frac{\partial y}{\partial r} dr \vec{e}_r + \frac{\partial y}{\partial \theta} d\theta \vec{e}_\theta + \frac{\partial y}{\partial \varphi} d\varphi \vec{e}_\varphi \\ &= \sin \theta \sin \varphi dr \vec{e}_r + r \sin \theta \cos \varphi d\varphi \vec{e}_\varphi + r \sin \varphi \cos \theta d\theta \vec{e}_\theta, \\ d\vec{z} &= \frac{\partial z}{\partial r} dr \vec{e}_r + \frac{\partial z}{\partial \theta} d\theta \vec{e}_\theta + \frac{\partial z}{\partial \varphi} d\varphi \vec{e}_\varphi = \cos \theta \vec{e}_r - r \sin \theta d\theta \vec{e}_\theta + 0 \vec{e}_\varphi, \end{aligned}$$

Квадрат дифференциала длины дуги (1.8) в сферической системе координат примет следующий вид:

$$\begin{aligned}
d\ell^2 &= [dx(r, \theta, \varphi)]^2 + [dz(r, \theta, \varphi)]^2 + [dy(r, \theta, \varphi)]^2 \\
&= \left(\frac{\partial x}{\partial r}dr\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial \theta}d\theta\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}d\varphi\right)^2 \\
&+ \left(\frac{\partial y}{\partial r}dr\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \theta}d\theta\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}d\varphi\right)^2 \\
&+ \left(\frac{\partial z}{\partial r}dr\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \theta}d\theta\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}d\varphi\right)^2 \\
&= \cos^2 \varphi \sin^2 \theta dr^2 + r^2 \sin^2 \varphi \sin^2 \theta d\varphi^2 + r^2 \cos^2 \varphi \cos^2 \theta d\theta^2 \\
&+ \sin^2 \varphi \sin^2 \theta dr^2 + r^2 \cos^2 \varphi \sin^2 \theta d\varphi^2 + r^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \theta d\theta^2 \\
&+ \cos^2 \theta dr^2 + 0d\varphi^2 + r^2 \sin^2 \theta d\theta^2 \\
&= dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2.
\end{aligned} \tag{1.31}$$

Мы получили формулу (1.31), непосредственно используя формулы дифференциала дуги кривой в двух системах координат, и можем убедиться в том, что она совпадает с результатом применения общей формулы (1.20) для перехода из декартовой системы координат в сферическую с использованием масштабных коэффициентов Ламе (1.28):

$$\begin{aligned}
d\ell^2 &= \sum_{n=1}^3 L_n^2 dq_n^2 \\
&= dx^2 + dy^2 + dz^2 = L_1^2 dq_1^2 + L_2^2 dq_2^2 + L_3^2 dq_3^2 \\
&= L_r^2 dr^2 + L_\theta^2 d\theta^2 + L_\varphi^2 d\varphi^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2.
\end{aligned} \tag{1.32}$$

Теперь мы можем записать соотношения для метрических характеристик в декартовой и сферической системах координат:

$$\begin{aligned}
 d\ell &= \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2}, \\
 dS &= \sqrt{(dydz)^2 + (dxdz)^2 + (dxdy)^2} \\
 &= \sqrt{r^4 \sin^2 \theta (d\theta d\varphi)^2 + r^2 (dr d\theta)^2 + r^2 \sin^2 \theta (dr d\varphi)^2},
 \end{aligned} \tag{1.33}$$

$$dV = dxdydz = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi.$$

В общем случае указанные метрические характеристики в ортогональной криволинейной системе координат $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ записываются в точке $M(q_1, q_2, q_3)$ с использованием масштабных коэффициентов Ламе в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 d\ell &= \sqrt{L_1^2 dq_1^2 + L_2^2 dq_2^2 + L_3^2 dq_3^2}, \\
 dS &= \sqrt{(L_1 L_2 dq_1 dq_2)^2 + (L_1 L_3 dq_1 dq_3)^2 + (L_2 L_3 dq_2 dq_3)^2},
 \end{aligned} \tag{1.34}$$

$$dV = L_1 L_2 L_3 dq_1 dq_2 dq_3.$$

Примеры.

1. Найти объем области пространства Ω , заданной в сферической системе координат тремя неравенствами: $3 \leq r \leq 5$, $0 \leq \vartheta \leq \pi/2$, $\pi/8 \leq \varphi \leq \pi/4$.

Решение:

$$\begin{aligned} V &= \iiint_{\Omega} dV = \iiint_{\Omega} r^2 \sin \vartheta dr d\vartheta d\varphi \\ &= \int_3^5 r^2 dr \int_0^{\pi/2} \sin \vartheta d\vartheta \int_{\pi/8}^{\pi/4} d\varphi \\ &= \left(\frac{r^3}{3} \Big|_3^5 \right) \left(-\cos \vartheta \Big|_0^{\pi/2} \right) \left(\varphi \Big|_{\pi/8}^{\pi/4} \right) \\ &= \frac{1}{3} (5^3 - 3^3) (\cos 0 - \cos \pi/2) (\pi/4 - \pi/8) \\ &= \frac{49\pi}{12} = 12,82. \end{aligned}$$

Ответ: $V = 12,82$.

2. Записать уравнение $x^2 + y^2 = z^2$ в сферической системе координат.

Решение:

$$\begin{aligned} x &= r \sin \vartheta \cos \varphi, & x^2 &= r^2 \sin^2 \vartheta \cos^2 \varphi, \\ y &= r \sin \vartheta \sin \varphi, & y^2 &= r^2 \sin^2 \vartheta \sin^2 \varphi, \\ & & x^2 + y^2 &= r^2 \sin^2 \vartheta (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = r^2 \sin^2 \vartheta, \\ z &= r \cos \vartheta, & z^2 &= r^2 \cos^2 \vartheta. \end{aligned}$$

Подставим в уравнение:

$$x^2 + y^2 = z^2$$

$$r^2 \sin^2 \vartheta = r^2 \cos^2 \vartheta$$

$$\tan^2 \vartheta = 1.$$

Ответ: Уравнение $x^2 + y^2 = z^2$ в сферической системе координат имеет вид $\tan^2 \vartheta = 1$.

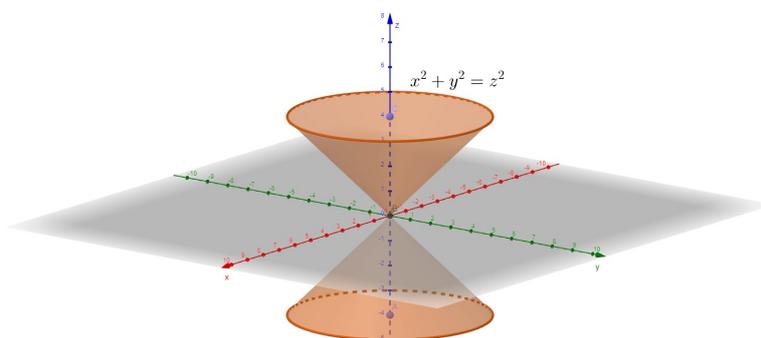


Рис. 1.5 – Фрагмент поверхности, описываемой уравнением $x^2 + y^2 = z^2$

3. Найти координаты x и z в декартовой системе координат для точки M , заданной сферическими координатами $M(r = 10, \vartheta = 120^\circ, \varphi = 30^\circ)$.

Решение:

$$x = r \sin \vartheta \cos \varphi = 10 \cdot \sin 120^\circ \cdot \cos 30^\circ = 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 7,5$$

$$z = r \cos \vartheta = 10 \cdot \cos 120^\circ = 10 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -5.$$

Ответ: $x = 7,5, z = -5$.

4. Найти расстояние MN между точками, одна из которых задана в декартовой системе координат $M(-3, 2, 1)$, а вторая

в сферической системе $N(5, 16^\circ, -82^\circ)$.

Решение:

$$x_N = r \sin \vartheta \cos \varphi = 5 \cdot \sin 16^\circ \cdot \cos(-82^\circ) = 0,19,$$

$$y_N = r \sin \vartheta \sin \varphi = 5 \cdot \sin 16^\circ \cdot \sin(-82^\circ) = -1,36,$$

$$z_N = r \cos \vartheta = 5 \cdot \cos 16^\circ = 4,81.$$

$$\begin{aligned} MN &= \sqrt{(x_M - x_N)^2 + (y_M - y_N)^2 + (z_M - z_N)^2} \\ &= \sqrt{(-3 - 0,19)^2 + (2 + 1,36)^2 + (1 - 4,81)^2} \\ &= \sqrt{3,19^2 + 3,36^2 + 3,81^2} = 6,00. \end{aligned}$$

Ответ: $MN = 6,00$.

Глава 2

СКАЛЯРНЫЕ И ВЕКТОРНЫЕ ПОЛЯ

В отличие от математического понятия *алгебраическое поле*, в векторном анализе понятие *поле* тождественно понятию *поле физической величины*. При этом функции многих переменных рассматриваются как функции координат и времени в физическом пространстве с заданными свойствами. В данном разделе все формулы и теоремы приводятся для декартовой системы координат.

2.1. ПОЛЕ ФИЗИЧЕСКОЙ ВЕЛИЧИНЫ

Если в каждой точке некоторой области пространства однозначно определена скалярная или векторная величина, изменяющаяся в пространстве и времени по физическим законам, то говорят, что в данной области задано **поле физической величины**. Поле в некоторой области пространства называют *однородным*, если эти величины постоянны, и *неоднородным* в противном случае. Поля, не зависящие от времени, называют *стационарными*, в противном случае – *нестационарными*.

Примерами скалярных полей являются атмосферные поля давления, температуры, влажности воздуха, распределение плотности в неоднородном теле, геохимические поля рассеяния и концентрирования того или иного элемента, поле электрических потенциалов, поле гравитационных потенциалов и т.п.

Примерами векторных полей могут служить поле скоростей ветра или движущейся жидкости, силы тяжести, индукции магнитного поля, напряженности электрического поля и т.д.

Пример.

Пусть данное тело массы M расположено в начале координат. Опытным путем установлено, что любое другое тело массой

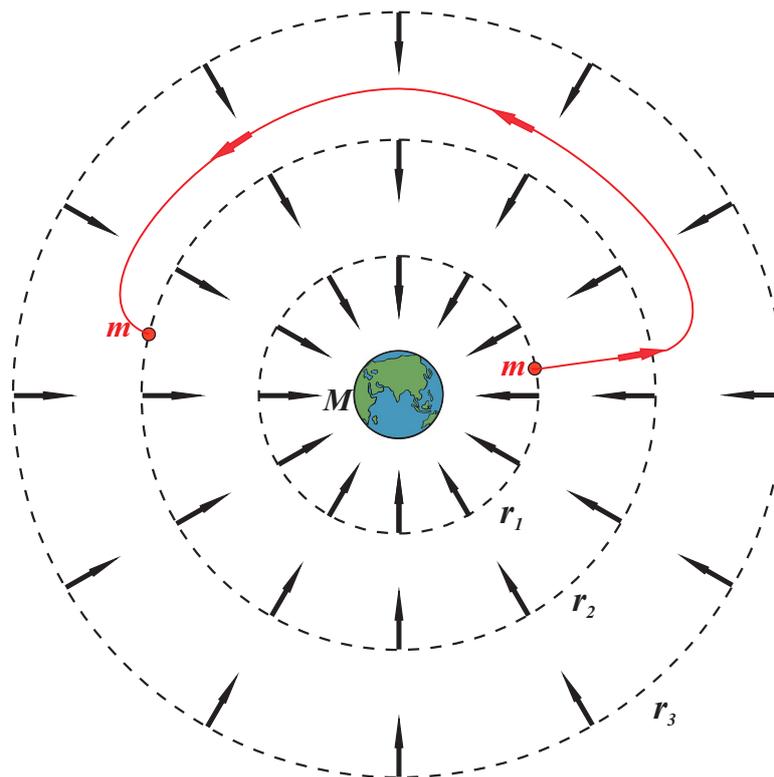


Рис. 2.1 – Скалярное поле гравитационного потенциала и векторное поле силы гравитации

m , помещаемое на разных расстояниях r_i от тела M , будет испытывать силу притяжения \vec{F}_i направленную вдоль прямой \vec{r}_i ,

соединяющей эти два тела:

$$\vec{F}_i = -G \frac{Mm}{r_i^2} \cdot \frac{\vec{r}_i}{r_i} = -G \frac{Mm}{r_i^2} \cdot \vec{n}_i, \quad (2.1)$$

где G – гравитационная постоянная, $\vec{n}_i = \frac{\vec{r}_i}{r_i}$ – вектор единичной длины, направленный вдоль радиус-вектора \vec{r}_i . Поделив обе части равенства на m , заметим, что величина вектора напряженности гравитационного поля $\vec{E}_i = \frac{\vec{F}_i}{m}$ не зависит от \vec{F}_i и m , а определяется только расстоянием ($\propto \frac{1}{r_i^2}$). Таким образом, в пространстве вокруг данного тела существует непрерывное векторное поле напряженности и его свойства определяются только массой тела M .

Кроме векторного поля напряженности вокруг тела массы M существует также и скалярное поле гравитационного потенциала $U = U(r)$. Гравитационным потенциалом называется работа, которую нужно совершить, чтобы переместить тело с массой, равной единице, из заданной точки в бесконечность. В нашем случае

$$U_i = \int_{r_i}^{\infty} F_i dr = -GM \int_{r_i}^{\infty} \frac{1}{r^2} dr = -GM \left(-\frac{1}{r} \right) \Big|_{r_i}^{\infty} = -\frac{GM}{r_i}. \quad (2.2)$$

В таком поле работа A по перемещению единичной массы из точки 1 в точку 2 (рис. 2.1) не зависит от пути, а определяется только координатами начальной r_1 и конечной r_2 точек пути:

$$A = U_2 - U_1 = -GM \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right). \quad (2.3)$$

2.2. СКАЛЯРНОЕ ПОЛЕ

Говорят, что в некоторой области Ω пространства задано скалярное поле $U = U(M, t)$, если в определенный момент времени t каждой точке поставлено в соответствие одно определенное число U . Введением декартовой системы координат положение точки M в пространстве определяется тройкой чисел (x, y, z) , или соответствующим радиус-вектором $\vec{r}(x, y, z)$ и задание скалярного поля формально совпадает с определением функции $U = U(x, y, z, t) = U(\vec{r}, t)$ в некоторой области.

Если поле U стационарное, т. е. не меняется во времени, то $U = U(x, y, z)$. Часто время t рассматривается как параметр, тогда при задании траектории движения материальной точки в виде $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$ последовательное перемещение по траектории соответствует увеличению значений параметра t (рис. 2.2).

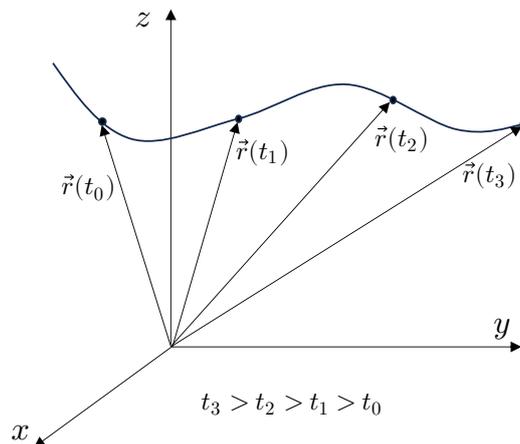


Рис. 2.2 – Параметрическое задание траектории материальной точки

Учитывая, что функция $U(x, y, z, t)$ является моделью конкретной физической реальности, на нее накладываются опреде-

ленные ограничения. Например, в данный момент времени для малой окрестности каждой точки M газовой или жидкой среды можно поставить в соответствие численные значения таких величин, как температура, плотность, давление, концентрация определенного вещества и т.д. Однако эти величины теряют смысл при уменьшении окрестности точки до размера одной молекулы. Таким образом, непрерывное (кусочно-непрерывное) распределение изучаемых физических полей является моделью, игнорирующей их дискретное строение.

В дальнейшем предполагаем функцию $U(x, y, z, t)$ однозначной и непрерывной вместе со своими частными производными (гладкой или кусочно-гладкой) в некоторой области пространства Ω и во времени, за исключением может быть некоторых особых точек. В случае скалярного поля концентрации некоторого компонента в растворе, эти особые точки могут соответствовать локальным областям растворения (*источники* растворенного компонента) или образования частиц твердой фазы (*стоки* растворенного компонента) в результате химической реакции. В случае электрического поля источниками и стоками являются, соответственно, положительные и отрицательные заряды (электроды).

2.2.1. Поверхности и линии уровня

Рассмотрим точки области Ω , в которой функция $U(x, y, z)$ принимает постоянные значения: $U(x, y, z) = C$, ($C = Const$). Геометрические места точек $M(x, y, z)$, где скалярное поле принимает одно и то же значение $U(x, y, z) = C_i$, называются *поверхностями уровня*. Они образуют семейство непересекающихся поверхностей, т. к. в силу однозначности функции $U = U(x, y, z)$

поверхности уровня, соответствующие различным значениям C_i , не пересекаются между собой. Совокупность этих поверхностей, различающихся постоянным шагом изменения значений C_i , например, $C_1 = 1$, $C_2 = 2$, $C_3 = 3$ и т.д., даёт наглядное представление об изменении поля при переходе от одной точки к другой, например поле горизонталей на карте изогипс (рис. 2.3). Поле меняется быстрее там, где эти поверхности расположены теснее. Очевидно, что изменение поля при любых перемещениях по самой поверхности уровня равно нулю: $dU = 0$.

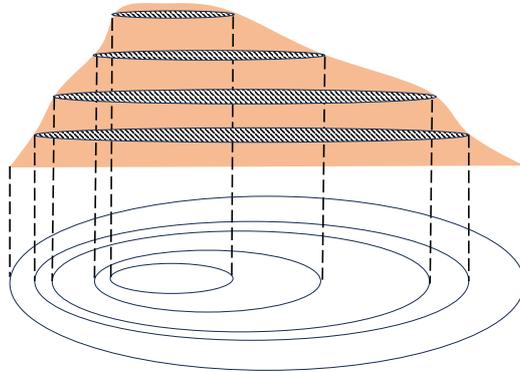


Рис. 2.3 – Поле высот рельефа (изогипсы), отображаемых линиями уровней в плоскости проекции

По карте гидроизогипс можно определить направление грунтового потока в любой точке (рис. 2.4). Грунтовые воды перемещаются из областей более высоких уровней в области более низких, а по линии гидроизогипс движения не происходит, поскольку вдоль этих линий напоры одинаковы. Движение подземных вод происходит по линиям, перпендикулярным к гидроизогипсам. Колодцы 1 и 2 (рис. 2.4) расположены верно, не перехватывают друг у друга поступающую к ним воду, т. к. находятся на одной гидроизогипсе. в то время как колодцы 1 и 3 расположены неверно.

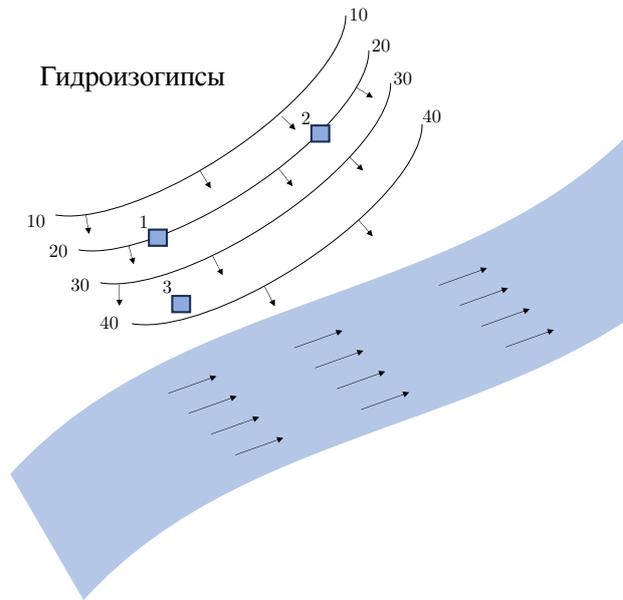


Рис. 2.4 – Гидроизоги́псы уровней грунтовых вод.

Задание

1. Построить линии уровня скалярного поля, описываемого функцией:

а) $U(x, y) = x^2 + y$;

б) $U(x, y) = \frac{y}{5x}$.

2. Найти поверхности уровня скалярного поля, описываемого функцией:

а) $U(x, y, z) = x + 2y - z$;

б) $U(x, y, z) = x^2 + y$.

2.2.2. Производная по направлению. Градиент

Производная скалярного поля $U(x, y, z)$ по направлению, заданному вектором $\vec{l} = l_x \vec{i} + l_y \vec{j} + l_z \vec{k}$, вычисляется по формуле

$$\frac{dU}{dl} = \frac{\partial U}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial U}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial U}{\partial z} \cos \gamma, \quad (2.4)$$

где $\cos \alpha = \frac{l_x}{|\vec{l}|}$, $\cos \beta = \frac{l_y}{|\vec{l}|}$, $\cos \gamma = \frac{l_z}{|\vec{l}|}$, – направляющие косинусы вектора \vec{l} .

Вектор единичной длины $\vec{l}_0 = \frac{\vec{l}}{|\vec{l}|}$, совпадающий по направлению с вектором \vec{l} имеет следующие координаты: $\vec{l}_0 = \vec{i} \cos \alpha + \vec{j} \cos \beta + \vec{k} \cos \gamma$.

Абсолютная величина $|\frac{dU}{dl}|$ определяет скорость изменения скалярного поля в точке M , а знак производной – характер его изменения. Если $\frac{dU}{dl} > 0$, то поле $U(x, y, z)$ возрастает в данном направлении, если $\frac{dU}{dl} < 0$ то поле $U(x, y, z)$ убывает в данном направлении.

Градиент является обобщением понятия первой производной функции одной переменной на случай функции многих переменных. Полный дифференциал функции трех переменных $U(x, y, z)$ выражается через частные производные по переменным x, y и z в следующем виде:

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz.$$

В декартовой системе координат формула для вычисления градиента имеет вид:

$$\text{grad}U = \frac{\partial U}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{k}. \quad (2.5)$$

Полный дифференциал dU в каждой точке поля можно выразить в виде скалярного произведения градиента и дифферен-

циала радиус-вектора (1.5):

$$\begin{aligned} dU &= \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz \\ &= \left(\frac{\partial U}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{k}, dx \vec{i} + dy \vec{j} + dz \vec{k} \right) \\ &= (\text{grad}U, d\vec{r}). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Пусть на поверхности уровня задана произвольная кривая L , проходящая через точку M , в которой вычисляется градиент $\text{grad}U$ (рис. 2.5). Тогда из определения поверхности уровня $U = \text{Const}$ и $dU = 0$ следует:

$$\frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz = (\text{grad}U, d\vec{r}) = 0,$$

что определяет взаимную перпендикулярность вектора малого смещения из точки M вдоль кривой L на поверхности уровня и градиента в этой точке:

$$\text{grad}U \perp d\vec{r}. \quad (2.7)$$

Из произвольности выбора кривой L следует, что градиент в точке M ортогонален к любой кривой, лежащей на поверхности уровня и содержащей эту точку M , а значит, и к самой поверхности уровня.

С помощью градиента можно записать производную по направлению единичного вектора \vec{l}_0 ($|\vec{l}_0| = 1$) в виде скалярного произведения векторов $\text{grad}U$ и \vec{l}_0 :

$$\frac{\partial U}{\partial l_0} = (\text{grad}U, \vec{l}_0) = |\text{grad}U| \cdot |\vec{l}_0| \cdot \cos \varphi = |\text{grad}U| \cdot \cos \varphi, \quad (2.8)$$

где φ – угол между векторами $\text{grad}U$ и \vec{l}_0 . Поскольку $|\cos \varphi| \leq 1$, то

$$\left| \frac{\partial U}{\partial l_0} \right| \leq |\text{grad}U|.$$

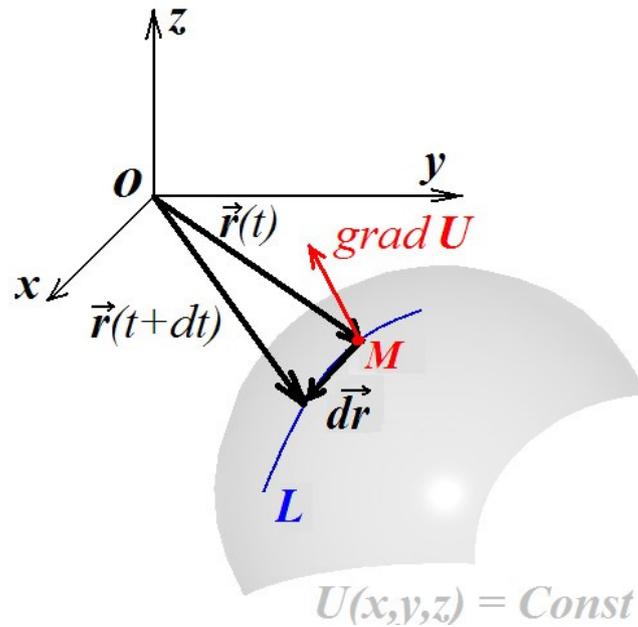


Рис. 2.5 – Градиент в точке поверхности уровня

Градиент в произвольной точке $M(x_0, y_0, z_0)$ совпадает по направлению ($\varphi = 0$) с нормалью к касательной плоскости, проведенной к поверхности уровня в этой же точке (рис. 2.6). Уравнение касательной плоскости в точке $M(x_0, y_0, z_0)$ можно

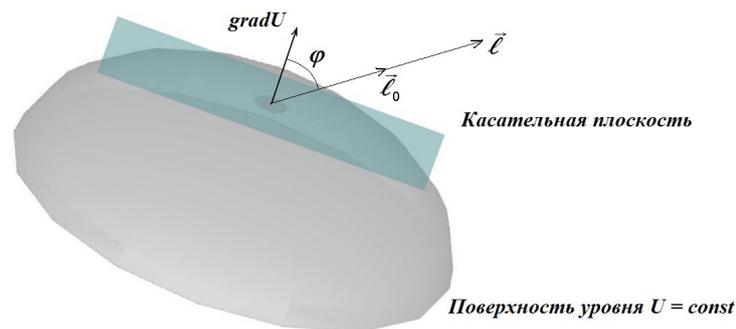


Рис. 2.6 – Градиент и касательная плоскость в точке поверхности уровня

получить из условия перпендикулярности градиента $\text{grad}U$ к векторам смещений из этой точки вдоль поверхности уровня

$$\overrightarrow{r - r_0} = \vec{r} - \vec{r}_0 = (x - x_0)\vec{i} + (y - y_0)\vec{j} + (z - z_0)\vec{k}:$$

$$(\text{grad}U, \overrightarrow{r - r_0}) = \frac{\partial U}{\partial x} \cdot (x - x_0) + \frac{\partial U}{\partial y} \cdot (y - y_0) + \frac{\partial U}{\partial z} \cdot (z - z_0) = 0. \quad (2.9)$$

С учетом свойств (2.7), (2.8) и (2.9) мы можем дать инвариантное определение градиента: *градиент скалярного поля $U(M)$ в точке $M(x, y, z)$ есть вектор, направленный по нормали к поверхности уровня в сторону максимальной скорости изменения поля и численно равный наибольшей по абсолютной величине производной по направлению.*

Пример

Найти градиент радиального поля $U(x, y, z) = r$, где $r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ – модуль радиус-вектора $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

Решение.

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{\partial x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{x}{r},$$

аналогично

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{\partial \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{\partial y} = \frac{y}{r},$$

$$\frac{\partial r}{\partial z} = \frac{\partial \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{\partial z} = \frac{z}{r}.$$

И окончательно

$$\text{grad}U(x, y, z) = \text{grad}r = \frac{x}{r}\vec{i} + \frac{y}{r}\vec{j} + \frac{z}{r}\vec{k} = \frac{1}{r} (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) = \frac{\vec{r}}{r}.$$

2.2.3. Символические операторы векторного анализа

Под оператором понимается некоторое правило или последовательность действий, в результате применения которых устанавли-

ливаются соответствие между элементами множеств, например A и B , которые могут быть числами, функциями, векторами и т.д.

Оператор "набла". "Набла" (в переводе с греческого — "арфа") — это перевёрнутая прописная буква "дельта", стоящая в греческом алфавите на четвёртом месте. Ввёл этот оператор и придумал для него символ ирландский математик В. Р. Гамильтон (William Rowan Hamilton, 1805-1865).

Оператор "набла" в декартовой системе координат. Векторный дифференциальный оператор ∇ в декартовой системе координат определяется в виде трехмерного вектора:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}. \quad (2.10)$$

Если формальное произведение $\frac{\partial}{\partial x} \cdot U$ понимать как вычисление частной производной $\frac{\partial U}{\partial x}$, тогда

$$\nabla U = \frac{\partial U}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{k}. \quad (2.11)$$

Таким образом действие оператора "набла" на скалярную функцию $U(x, y, z)$ даёт значение градиента функции в точке $M(x, y, z)$. Иначе говоря, действие оператора ∇ на скалярное поле генерирует векторное поле градиентов.

Пусть $U(x, y, z)$ и $V(x, y, z)$ — скалярные функции. Применяя известные правила дифференцирования, можно показать, что градиент поля имеет следующие дифференциальные свойства:

1. Линейность.

$$\text{grad}(\alpha U + \beta V) = \alpha \text{grad}U + \beta \text{grad}V,$$

или

$$\nabla(\alpha U + \beta V) = \alpha \nabla U + \beta \nabla V,$$

где α и β — произвольные числа.

2. Градиент произведения двух функций.

$$\text{grad}(UV) = V \text{grad}U + U \text{grad}V,$$

или

$$\nabla(UV) = V \nabla U + U \nabla V.$$

3. Градиент отношения двух функций.

$$\text{grad} \frac{U}{V} = \frac{V \text{grad}U - U \text{grad}V}{V^2},$$

или

$$\nabla \frac{U}{V} = \frac{V \nabla U - U \nabla V}{V^2},$$

4. Градиент сложной функции.

$$\text{grad}(f(U)) = f' \text{grad}U,$$

или

$$\nabla(f(U)) = f' \nabla U.$$

Оператор Лапласа. Дифференциальным оператором Лапласа называется оператор:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (2.12)$$

В декартовой системе координат его можно определить и как скалярный квадрат оператора "набла" (2.10):

$$\begin{aligned}\Delta = \nabla^2 = (\nabla, \nabla) &= \left(\frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}, \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \right) \\ &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.\end{aligned}$$

Оператор Лапласа – скалярный оператор, его применение к скалярному полю генерирует скаляр. Пусть для скалярной функции $U(x, y, z)$ определены частные производные второго порядка, тогда результат применения оператора Лапласа к этой функции записывается в следующем виде

$$\Delta U = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}.$$

Геометрический смысл действия оператора Лапласа аналогичен геометрическому смыслу второй производной для функции одной переменной, что связано с понятиями выпуклости и кривизны графика функции (рис. 2.7). Если $\Delta U < 0$, тогда функция имеет выпуклость и поле имеет тенденцию расходиться из этой области (например, жидкость будет растекаться из области с максимальным напором), если $\Delta U > 0$, то график функции имеет вогнутость и поле имеет тенденцию концентрироваться в этой области (например, жидкость будет стекаться к областям понижения рельефа).

Если $\Delta U < 0$, тогда скалярная функция поля (потенциал поля) не может достигать своих экстремальных значений ни в одной точке этой области. Уравнение $\Delta U = 0$ называется уравнением Лапласа. Оно используется при описании различных установившихся процессов, например установившегося движения

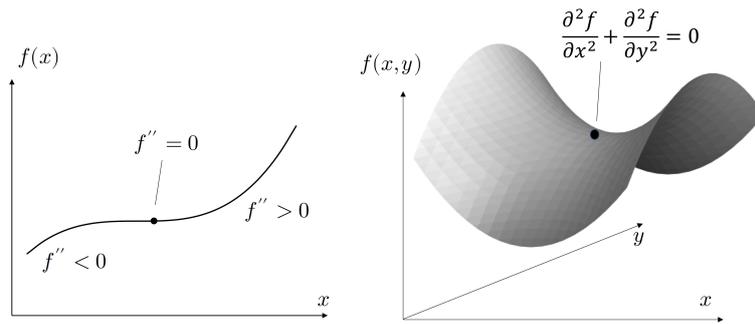


Рис. 2.7 – Геометрический смысл второй производной для функции $f(x)$ одной переменной и функции $f(x, y)$ двух переменных

несжимаемой жидкости и др. Скалярные поля $U(x, y, z)$, удовлетворяющие условию $\Delta U = 0$, называются гармоническими, к ним относятся различного рода потенциалы – потенциал поля тяготения, напорный потенциал водяного столба, потенциал электростатического поля, температура (тепловой потенциал), химический потенциал и др.

2.3. ВЕКТОРНОЕ ПОЛЕ

Если каждой точке некоторой области Ω пространства соответствует значение некоторой векторной величины, то говорят, что в области Ω задано векторное поле $\vec{a}(M)$. Поле называют потенциальным, если оно образовано векторами градиентов некоторого скалярного поля (потенциала).

Если в декартовой системе координат с базисом $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ векторное поле $\vec{a}(M)$ задано координатами $P(M)$, $Q(M)$ и $R(M)$, тогда

$$\vec{a}(M) = P(M)\vec{i} + Q(M)\vec{j} + R(M)\vec{k}.$$

Таким образом, задание векторной функции $\vec{a}(M) = \vec{a}(x, y, z)$ эквивалентно заданию трёх скалярных функций $P(M) = P(x, y, z)$, $Q(M) = Q(x, y, z)$ и $R(M) = R(x, y, z)$. Будем называть векторное поле *гладким*, если его координатные функции гладкие, т. е. имеют непрерывные производные. Кроме того, будем предполагать, что векторное поле не имеет особых точек, т. е. функции P , Q и R не равны нулю одновременно.

В *силовой интерпретации* вектор $\vec{a}(M) = \vec{F}(M)$ трактуется как сила приложенная к телу в точке M , вектор $\vec{a}(M) = \vec{E}(M)$ рассматривается как напряжённость электрического поля; в *гидродинамической интерпретации* $\vec{a}(M) = \vec{V}(M)$ рассматривается как скорость текущей жидкости или газа.

2.3.1. Векторные линии. Векторная трубка

Векторные линии. Для геометрического представления векторных полей вводится понятие векторных линий. Векторной линией данного поля $\vec{a}(M)$ называют такую линию L , в каждой точке которой вектор $\vec{a}(M)$ имеет направление касательной к этой линии. Такое представление аналогично визуализации действия магнитного поля с помощью железных опилок в школьных опытах.

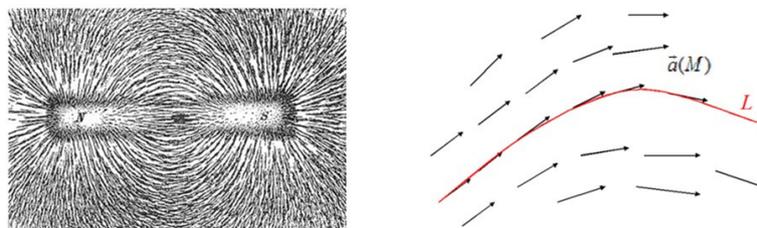


Рис. 2.8 – Векторные линии векторного поля

Поскольку всегда предполагается, что вектор $\vec{a}(M)$ опреде-

лен однозначно в каждой точке выделенной области, то векторные линии нигде не пересекаются в этой области, т. е. через каждую точку векторного поля проходит одна единственная векторная линия.

В силовой интерпретации поля векторными линиями являются силовые линии поля. В гидродинамической — векторные линии суть траектории, по которым движутся частицы жидкости (линии тока).

Используя данное определение, найдем уравнения векторных линий. Пусть координаты радиус-векторов точек искомой векторной линии L заданы в параметрическом виде

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}.$$

Тогда вектор $\vec{r}'(t) = x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j} + z'(t)\vec{k}$, касательный к этой линии в любой точке должен быть коллинеарным полю $\vec{a}(M) = P(M)\vec{i} + Q(M)\vec{j} + R(M)\vec{k}$. Коллинеарность двух векторов означает, что существует такое число λ , что справедливо равенство

$$\vec{r}'(t) = \lambda\vec{a}(M) : \quad x'(t) = \lambda P(M), \quad y'(t) = \lambda Q(M), \quad z'(t) = \lambda R(M).$$

Следовательно, имеем систему из трех дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\frac{dx}{P(x, y, z)} = \frac{dy}{Q(x, y, z)} = \frac{dz}{R(x, y, z)}, \quad (2.13)$$

решения которой и определяют семейство векторных линий. Единственность решения задачи Коши обеспечивается удовлетворением начальных условий, например:

$$x(t = 0) = x_0, \quad y(t = 0) = y_0, \quad z(t = 0) = z_0.$$

В случае плоского векторного поля $\vec{a}(M) = \vec{a}(x, y)$ семейство векторных линий определяется системой уравнений:

$$\frac{dx}{P(x, y)} = \frac{dy}{Q(x, y)}; \quad dz = 0.$$

Пример. Пусть в точке $M(1, 0, 0)$ требуется найти уравнение векторной линии поля $\vec{a}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$, где $P(x, y, z) = x$, $Q(x, y, z) = -x$, $R(x, y, z) = 2x^2$.

Решение. Составим пропорции (2.13)

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{-x} = \frac{dz}{2x^2}.$$

Решая систему уравнений, найдем общее решение

$$\begin{cases} \frac{dx}{x} = \frac{dy}{-x}, \\ \frac{dx}{x} = \frac{dz}{2x^2}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx = -dy, \\ 2xdx = dz, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -x + C_1, \\ z = x^2 + C_2. \end{cases}$$

Подставим в общее решение начальные условия в виде координат точки $M(1, 0, 0)$ и найдем окончательное решение:

$$\begin{cases} 0 = -1 + C_1, \\ z = 1 + C_2. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 1, \\ C_2 = -1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 1 - x, \\ z = x^2 - 1. \end{cases}$$

Искомая векторная линия (рис. 2.9) соответствует пересечению параболического цилиндра $z = x^2 - 1$ и плоскости $y = 1 - x$, параллельной оси z .

Векторная трубка. Возьмем в области Ω произвольный замкнутый контур L и через каждую его точку проведем векторную линию. Эти линии образуют векторную трубку. Любая другая

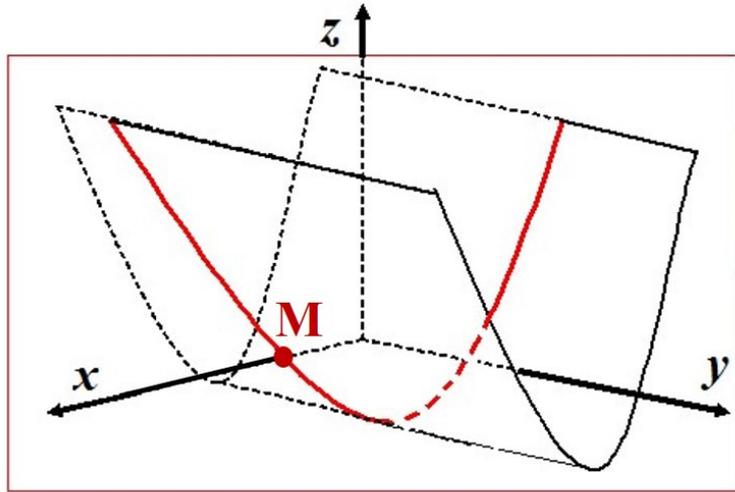


Рис. 2.9 – Векторная линия, проходящая через точку M в примере

векторная линия, не проходящая через точки контура L , либо целиком лежит внутри векторной трубки, либо находится вне трубки. Действительно, если бы векторная линия пересекла боковую поверхность векторной трубки, то через точку пересечения проходило бы две векторные линии, что противоречит однозначности задания векторного поля.

Из определения векторной трубки и общего определения нормали к поверхности следует, что нормаль к поверхности трубки в любой точке M ортогональна к векторной линии, проходящей через эту точку.

2.3.2. Поток векторного поля через поверхность

Пусть Σ — двусторонняя гладкая поверхность, расположенная в области Ω , в которой задано поле $\vec{a}(M) = P(M)\vec{i} + Q(M)\vec{j} + R(M)\vec{k}$. Выберем точку M на поверхности Σ и условимся одно из направлений нормали в этой точке, например $\vec{n}(M) =$

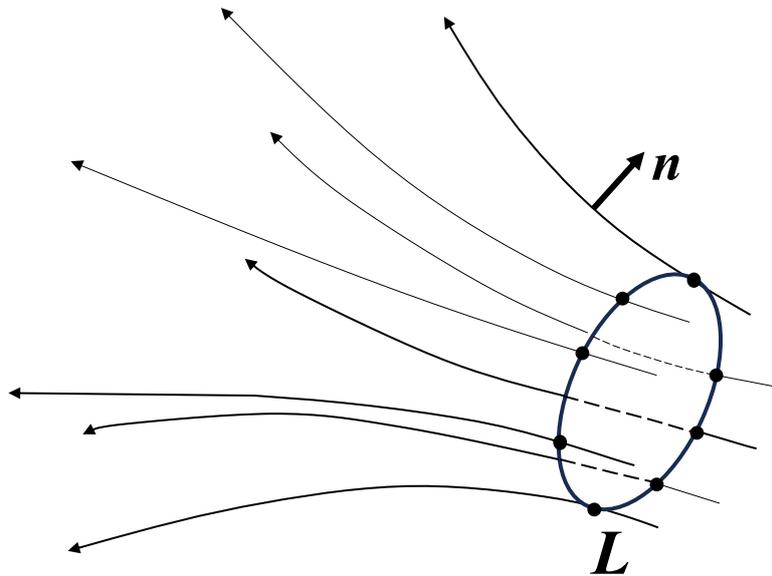


Рис. 2.10 – Векторная трубка

$\vec{i} \cos \alpha + \vec{j} \cos \beta + \vec{k} \cos \gamma$ считать положительным, а противоположное — отрицательным. Разобьем поверхность на бесконечно малые площадки $d\sigma$. Если поверхность не является плоской, то ее элементарные площадки можно заменить плоскими проекциями на соответствующую касательную плоскость. Выделим мысленно бесконечно малую ориентированную плоскую площадку $d\vec{\sigma} = \vec{n}d\sigma$, в пределах которой вектор $\vec{a}(M)$ может считаться постоянным.

Потоком $d\Phi$ векторного поля $\vec{a}(M)$ через бесконечно малую ориентированную площадку $d\vec{\sigma}$ называется величина:

$$d\Phi = (\vec{a}, d\vec{\sigma}) = (\vec{a}, \vec{n})d\sigma = a \cos \varphi d\sigma. \quad (2.14)$$

Чтобы найти поток Φ векторного поля через всю поверхность Σ , необходимо сложить потоки через все малые площадки $d\vec{\sigma}$, т. е. проинтегрировать по поверхности.

Потоком Φ векторного поля $\vec{a}(M)$ через поверхность Σ на-

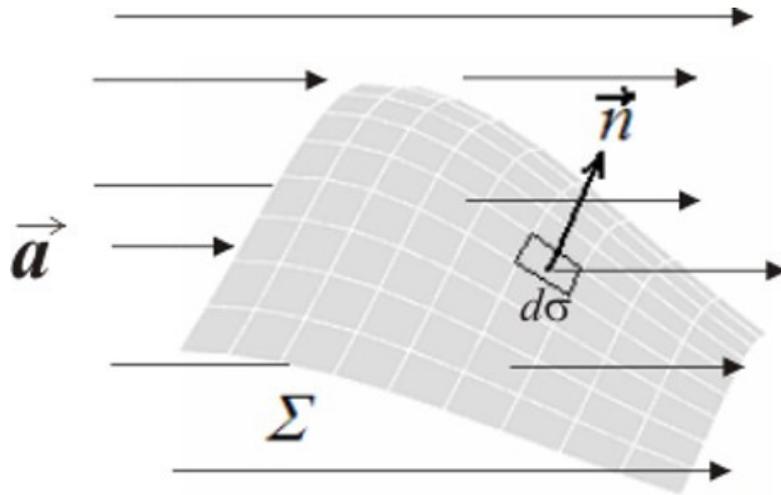


Рис. 2.11 – Положительное направление нормали \vec{n} к двусторонней гладкой поверхности Σ в области векторного поля

зывается поверхностный интеграл первого рода по поверхности Σ от скалярного произведения вектора $\vec{a}(M)$ на единичный вектор нормали \vec{n} к выбранной стороне поверхности:

$$\Phi = \iint_{\Sigma} d\Phi = \iint_{\Sigma} (\vec{a}, \vec{n}) d\sigma. \quad (2.15)$$

Раскрывая скалярное произведение, мы можем записать правую часть равенства в виде поверхностного интеграла второго рода:

$$\begin{aligned} \Phi &= \iint_{\Sigma} (\vec{a}, \vec{n}) d\sigma = \iint_{\Sigma} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) d\sigma \\ &= \iint_{\Sigma} P dydz + Q dx dz + R dx dy. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Согласно определению, поток есть поверхностный интеграл, поэтому он обладает свойствами линейности по отношению к подынтегральной функции и аддитивности по отношению к разбиению области интегрирования. Поток меняет знак при изменении стороны поверхности вместе с изменением направления

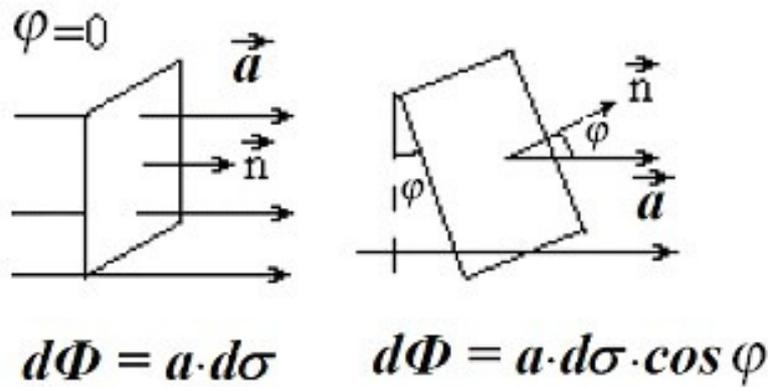


Рис. 2.12 – Поток $d\Phi$ векторного поля $\vec{a}(M)$ через бесконечно малую ориентированную площадку $d\vec{\sigma}$

вектора нормали с \vec{n} на $-\vec{n}$:

$$\Phi = \iint_{\Sigma} (\vec{a}, -\vec{n}) d\sigma = \Phi = - \iint_{\Sigma} (\vec{a}, \vec{n}) d\sigma.$$

Если $\vec{V}(M)$ есть вектор скорости текущей жидкости, то $(\vec{V}, \vec{n})d\sigma$ равно количеству жидкости, протекающей через элемент поверхности $d\sigma$ в единицу времени. Это следует из смысла подынтегрального выражения $(\vec{V}, \vec{n})d\sigma = V_n d\sigma$, где V_n — компонента скорости жидкости, перпендикулярная поверхности $d\sigma$. Рассматривая временной интервал равный единице, мы увидим, что $V_n d\sigma$ — это объем прямого цилиндрического тела с основанием $d\sigma$ и высотой V_n , заполненный жидкостью за единицу времени. После интегрирования по всей поверхности Σ мы получим объем жидкости, которая протекает через поверхность Σ за единицу времени.

Пример. Найти поток векторного поля $\vec{a}(x, y, z) = 3x\vec{i} + 2y\vec{j} + z\vec{k}$ через часть плоскости $\Sigma: x + y + 2z = 1$, расположенную в первом октанте (нормаль \vec{n} к этой плоскости образует острый угол с осью Oz):

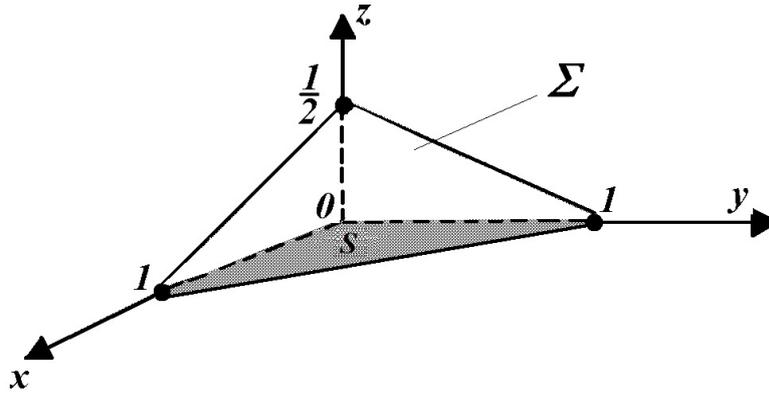


Рис. 2.13 – Плоскость $x + y + 2z = 1$ в примере

Решение. Найдем направляющие косинусы единичной нормали к заданной поверхности. Нормаль к плоскости, заданной уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$, имеет следующий вид:

$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}(A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k}).$$

Подставляя значения параметров уравнения плоскости из условий задачи, получим уравнение единичной нормали:

$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2}}(1\vec{i} + 1\vec{j} + 2\vec{k}) = \vec{n} = \frac{1}{\sqrt{6}}(\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}).$$

Найдем скалярное произведение (\vec{a}, \vec{n}) :

$$(\vec{a}, \vec{n}) = \left(3x\vec{i} + 2y\vec{j} + z\vec{k}, \frac{1}{\sqrt{6}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{6}}\vec{j} + \frac{2}{\sqrt{6}}\vec{k} \right) = \frac{3x}{\sqrt{6}} + \frac{2y}{\sqrt{6}} + \frac{2z}{\sqrt{6}}.$$

Подставим результат в формулу (2.15) для вычисления потока:

$$\Phi = \iint_{\Sigma} (\vec{a}, \vec{n}) d\sigma = \iint_{\Sigma} \left(\frac{3x}{\sqrt{6}} + \frac{2y}{\sqrt{6}} + \frac{2z}{\sqrt{6}} \right) d\sigma.$$

Как видно из рисунка 2.13, данная поверхность Σ однозначно проектируется на плоскость oxy в виде плоской области S . Сведем вычисление поверхностного интеграла к вычислению

двойного интеграла по области S в плоскости Oxy по известной формуле:

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) d\sigma = \iint_S f(x, y, z(x, y)) \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} dx dy.$$

Для этого запишем уравнение поверхности в явном виде:

$$z = \frac{1}{2}(1 - x - y),$$

и найдем

$$z'_x = -\frac{1}{2}, \quad z'_y = -\frac{1}{2}.$$

Подставим найденные явные выражения для $z(x, y)$, z'_x и z'_y в формулу двойного интеграла по области S :

$$\begin{aligned} \Phi &= \iint_S \left(\frac{3x}{\sqrt{6}} + \frac{2y}{\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{6}}(1 - x - y) \right) \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} dx dy \\ &= \iint_S \frac{1}{\sqrt{6}} (2x + y + 1) \sqrt{\frac{3}{2}} dx dy = \frac{1}{2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (2x + y + 1) dy \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \left[(2x + 1) \Big|_0^{1-x} + \frac{1}{2} y^2 \Big|_0^{1-x} \right] dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \left(-\frac{3}{2} x^2 + \frac{3}{2} \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \left(-\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3} x^3 \Big|_0^1 + \frac{3}{2} x \Big|_0^1 \right) = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Ответ: $\Phi = \frac{1}{2}$.

2.3.3. Поток векторного поля через замкнутую поверхность

На рисунке 2.14 показан случай равного нулю суммарного потока Φ через замкнутую поверхность Σ . Как правило, за положительное направление векторов нормалей принимается направ-

ление внешних нормалей. Число векторных линий поля, входящих через данную поверхность внутрь выделенной области ($-$), равно числу линий поля, выходящих из этой области ($+$), но они берутся с противоположными знаками: $\cos \varphi_+ > 0$, $\cos \varphi_- < 0$.

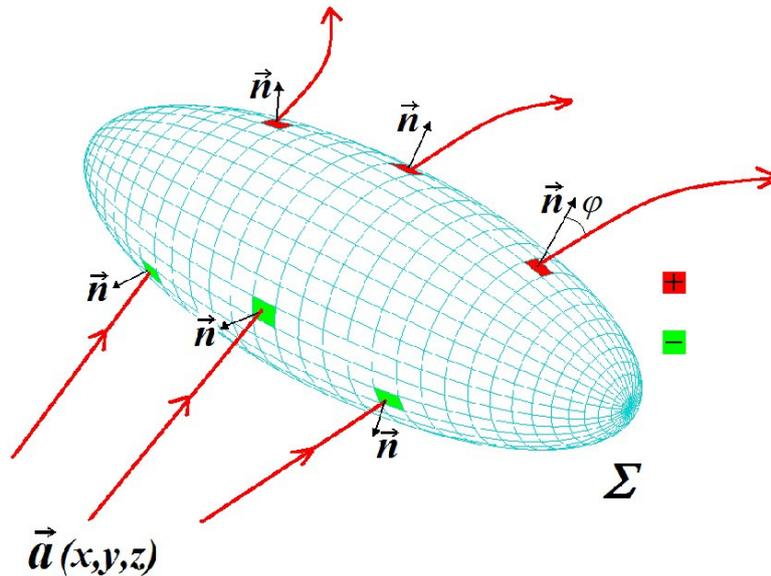


Рис. 2.14 – Поток векторного поля через замкнутую поверхность

Строго говоря, равенство нулю потока векторного поля через замкнутую поверхность Σ может означать также равенство мощностей *источников* и *стоков* векторного поля (см. стр. 53) в области, ограниченной этой поверхностью, как показано на рисунке 2.15.

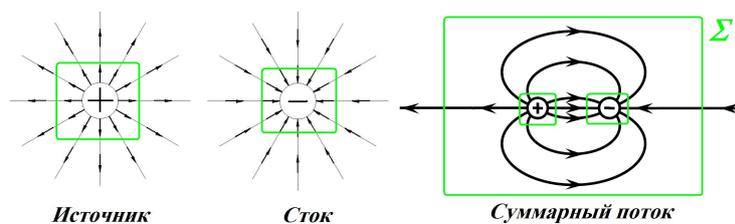


Рис. 2.15 – Источники и стоки векторного поля

2.3.4. Теорема Остроградского-Гаусса

Если в некоторой области Ω трёхмерного пространства, ограниченной замкнутой кусочно-гладкой поверхностью Σ , задано непрерывно дифференцируемое векторное поле $\vec{a}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$, то поток Φ векторного поля \vec{a} через внешнюю сторону замкнутой поверхности Σ равен тройному интегралу от функции $\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)$ по области Ω :

$$\begin{aligned}\Phi &= \oiint_{\Sigma} (\vec{a}, \vec{n}) d\sigma = \oiint_{\Sigma} P dydz + Q dx dz + R dx dy \\ &= \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz,\end{aligned}$$

где символ \oiint_{Σ} обозначает интеграл по замкнутой поверхности Σ .

Для вывода этой теоремы разобьем область Ω системой взаимно перпендикулярных плоскостей (рис. 2.16) и рассмотрим малый параллелепипед со сторонами $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ с центром в произвольной точке $M(x_0, y_0, z_0)$.

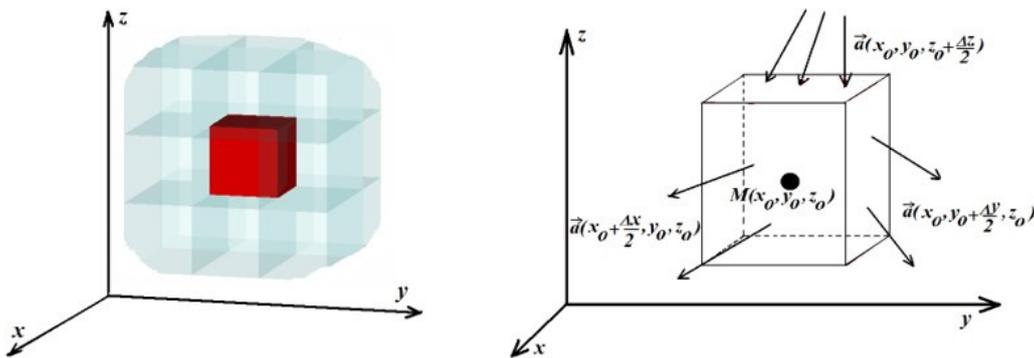


Рис. 2.16 – Элементарный параллелепипед и потоки векторного поля через его грани

Из построения плоскостями параллельными координатным следует, что внешние нормали \vec{n} к граням ($\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5$ и σ_6)

параллелепипеда будут попарно параллельны осям выбранной системы координат: $-\vec{i}(\sigma_1)$ и $+\vec{i}(\sigma_2)$, $-\vec{j}(\sigma_3)$ и $+\vec{j}(\sigma_4)$, $-\vec{k}(\sigma_5)$ и $+\vec{k}(\sigma_6)$. Воспользовавшись свойством аддитивности поверхностного интеграла, представим полный поток через замкнутую поверхность $\delta\Sigma = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_4 + \sigma_5 + \sigma_6$ в виде суммы потоков $\delta\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 + \Phi_4 + \Phi_5 + \Phi_6$ через каждую из шести граней, заданных уравнениями своих плоскостей:

$$\begin{aligned} \sigma_1(x = x_0 - \frac{\Delta x}{2}) : \Phi_1 &= \iint_{\sigma_1} (\vec{a}, -\vec{i}) d\sigma = - \iint_{\sigma_1} P(x_0 - \frac{\Delta x}{2}, y_0, z_0) dydz; \\ \sigma_2(x = x_0 + \frac{\Delta x}{2}) : \Phi_2 &= \iint_{\sigma_2} (\vec{a}, +\vec{i}) d\sigma = \iint_{\sigma_2} P(x_0 + \frac{\Delta x}{2}, y_0, z_0) dydz; \\ \sigma_3(y = y_0 - \frac{\Delta y}{2}) : \Phi_3 &= \iint_{\sigma_3} (\vec{a}, -\vec{j}) d\sigma = - \iint_{\sigma_3} Q(x_0, y_0 - \frac{\Delta y}{2}, z_0) dzdx; \\ \sigma_4(y = y_0 + \frac{\Delta y}{2}) : \Phi_4 &= \iint_{\sigma_4} (\vec{a}, +\vec{j}) d\sigma = \iint_{\sigma_4} Q(x_0, y_0 + \frac{\Delta y}{2}, z_0) dzdx; \\ \sigma_5(z = z_0 - \frac{\Delta z}{2}) : \Phi_5 &= \iint_{\sigma_5} (\vec{a}, -\vec{k}) d\sigma = - \iint_{\sigma_5} R(x_0, y_0, z_0 - \frac{\Delta z}{2}) dxdy; \\ \sigma_6(z = z_0 + \frac{\Delta z}{2}) : \Phi_6 &= \iint_{\sigma_6} (\vec{a}, +\vec{k}) d\sigma = \iint_{\sigma_6} R(x_0, y_0, z_0 + \frac{\Delta z}{2}) dxdy; \end{aligned}$$

Сгруппируем попарно потоки через противоположные гра-

ни:

$$\Phi_1 + \Phi_2 = \iint_{\sigma_1 + \sigma_2} \left[P\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}, y_0, z_0\right) - P\left(x_0 - \frac{\Delta x}{2}, y_0, z_0\right) \right] dydz$$

$$\Phi_3 + \Phi_4 = \iint_{\sigma_3 + \sigma_4} \left[Q\left(x_0, y_0 + \frac{\Delta y}{2}, z_0\right) - Q\left(x_0, y_0 - \frac{\Delta y}{2}, z_0\right) \right] dzdx$$

$$\Phi_5 + \Phi_6 = \iint_{\sigma_5 + \sigma_6} \left[R\left(x_0, y_0, z_0 + \frac{\Delta z}{2}\right) - R\left(x_0, y_0, z_0 - \frac{\Delta z}{2}\right) \right] dxdy$$

Для приближенного вычисления $\Phi_1 + \Phi_2$ разложим подынтегральные функции в окрестности точки $M(x_0, y_0, z_0)$ в ряд Тейлора по известной формуле:

$$f(x) \approx f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + \dots$$

Ограничившись слагаемыми первого порядка малости, найдем

$$\begin{aligned} P\left(x_0 - \frac{\Delta x}{2}, y_0, z_0\right) &\approx P(x_0, y_0, z_0) + \frac{\partial P(x_0, y_0, z_0)}{\partial x} \left(x_0 - \frac{\Delta x}{2} - x_0\right) + \dots \\ &\approx P(M) - \frac{\partial P(M)}{\partial x} \frac{\Delta x}{2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}, y_0, z_0\right) &\approx P(x_0, y_0, z_0) + \frac{\partial P(x_0, y_0, z_0)}{\partial x} \left(x_0 + \frac{\Delta x}{2} - x_0\right) + \dots \\ &\approx P(M) + \frac{\partial P(M)}{\partial x} \frac{\Delta x}{2}, \end{aligned}$$

и после подстановки в подынтегральное выражение получим

$$\begin{aligned}
\Phi_1 + \Phi_2 &= \iint_{\sigma_1 + \sigma_2} \left[P\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}, y_0, z_0\right) - P\left(x_0 - \frac{\Delta x}{2}, y_0, z_0\right) \right] dydz \\
&\approx \iint_{\sigma_1 + \sigma_2} \left[P(M) + \frac{\partial P(M)}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} - P(M) + \frac{\partial P(M)}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} \right] dydz \\
&= \iint_{\sigma_1 + \sigma_2} \left[\frac{\partial P(M)}{\partial x} \Delta x \right] dydz = \frac{\partial P(M)}{\partial x} \Delta x \iint_{\sigma_1 + \sigma_2} dydz \\
&= \frac{\partial P(M)}{\partial x} \Delta x \int_{y_0 - \frac{\Delta y}{2}}^{y_0 + \frac{\Delta y}{2}} dy \int_{z_0 - \frac{\Delta z}{2}}^{z_0 + \frac{\Delta z}{2}} dz = \frac{\partial P(M)}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z.
\end{aligned}$$

Аналогичным образом получим потоки через другие грани:

$$\begin{aligned}
\Phi_3 + \Phi_4 &= \iint_{\sigma_3 + \sigma_4} \left[Q\left(x_0, y_0 + \frac{\Delta y}{2}, z_0\right) - Q\left(x_0, y_0 - \frac{\Delta y}{2}, z_0\right) \right] dydz \\
&\approx \frac{\partial Q(M)}{\partial y} \Delta x \Delta y \Delta z, \\
\Phi_5 + \Phi_6 &= \iint_{\sigma_5 + \sigma_6} \left[R\left(x_0, y_0, z_0 + \frac{\Delta z}{2}\right) - R\left(x_0, y_0, z_0 - \frac{\Delta z}{2}\right) \right] dydz \\
&\approx \frac{\partial R(M)}{\partial z} \Delta x \Delta y \Delta z.
\end{aligned}$$

Просуммируем потоки

$$\begin{aligned}
\delta\Phi &= \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 + \Phi_4 + \Phi_5 + \Phi_6 \\
&\approx \left(\frac{\partial P(M)}{\partial x} + \frac{\partial Q(M)}{\partial y} + \frac{\partial R(M)}{\partial z} \right) \Delta x \Delta y \Delta z
\end{aligned}$$

и запишем результат:

$$\begin{aligned}
\delta\Phi &= \iint_{\delta\Sigma} P dydz + Q dx dz + R dx dy \\
&\approx \left(\frac{\partial P(M)}{\partial x} + \frac{\partial Q(M)}{\partial y} + \frac{\partial R(M)}{\partial z} \right) \Delta V,
\end{aligned} \tag{2.17}$$

где $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$ — объем элементарного параллелепипеда.

Для получения результирующего потока Φ через внешнюю поверхность Σ ограничивающую область Ω , просуммируем потоки $\delta\Phi_i$, приходящиеся на все элементарные ячейки нашего разбиения области Ω .

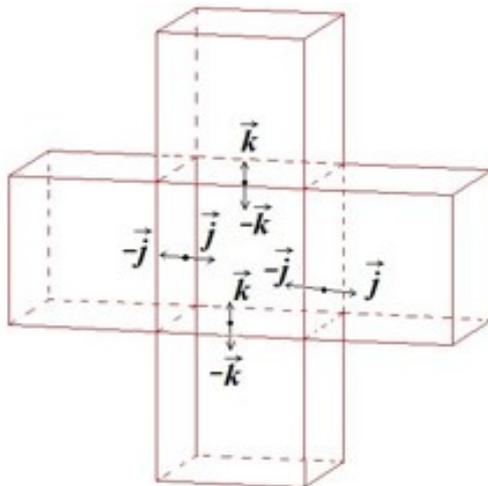


Рис. 2.17 — Ориентация нормалей к смежным граням элементарных ячеек

При этом учтем, что по каждой смежной грани двух соседних ячеек поверхностный интеграл будет браться дважды — по разным сторонам одной и той же смежной грани (рис. 2.17). Подобные пары поверхностных интегралов существуют для любой внутренней ячейки разбиения и взаимно уничтожаются при суммировании, т. к. они имеют противоположные знаки. В конечном итоге, при бесконечном уменьшении размеров элементарных ячеек и, при этом, бесконечного увеличения их общего числа N , ненулевыми останутся только интегралы по внешней поверхности, и мы сможем записать в окончательном виде формулу

Остроградского-Гаусса в инвариантной и координатной формах:

$$\begin{aligned}
 \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \delta\Phi_i &= \Phi_{\Sigma} = \oiint_{\Sigma} (\vec{a}, \vec{n}) d\sigma \\
 &= \oiint_{\Sigma} P dydz + Q dx dz + R dx dy \quad (2.18) \\
 &= \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz.
 \end{aligned}$$

Дивергенция векторного поля.

Поделив левую и правую части уравнения (2.17) на ΔV , мы получим *объемную плотность потока* в области элементарного параллелепипеда:

$$\begin{aligned}
 \frac{\delta\Phi}{\Delta V} &\approx \frac{\oiint_{\delta\Sigma} P dydz + Q dx dz + R dx dy}{\Delta V} \\
 &\approx \frac{\partial P(M)}{\partial x} + \frac{\partial Q(M)}{\partial y} + \frac{\partial R(M)}{\partial z}. \quad (2.19)
 \end{aligned}$$

Стягивая элементарный параллелепипед в точку, т. е. переходя в уравнении (2.19) к пределу: $\Delta V \rightarrow 0$ и, соответственно, $\delta\Sigma \rightarrow 0$, получим *инвариантное определение дивергенции*:

$$\begin{aligned}
 \operatorname{div} \vec{a}(M) &= \frac{\partial P(M)}{\partial x} + \frac{\partial Q(M)}{\partial y} + \frac{\partial R(M)}{\partial z} \\
 &= \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oiint_{\delta\Sigma \rightarrow 0} (\vec{a}, \vec{n}) d\sigma}{\Delta V} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\delta\Phi}{\Delta V}. \quad (2.20)
 \end{aligned}$$

Дивергенция векторного поля в точке M есть скалярная величина, численно равная предельной объемной плотности потока векторного поля в этой точке.

Если $\operatorname{div}\vec{a}(M) > 0$, то точка M называется *источником*, и векторные линии расходятся из этой области (рис. 2.15). Если $\operatorname{div}\vec{a}(M) < 0$, то точка M называется *стоком*, и векторные линии сходятся к этой области. Величина $\operatorname{div}\vec{a}(M) > 0$ характеризует мощность источника (или стока). Если это поток поля скоростей несжимаемой жидкости и внутри данного элементарного объема отсутствуют источники и стоки, тогда суммарный поток жидкости должен быть равен нулю.

Дифференциальный оператор дивергенции. Дифференциальный оператор дивергенции определяется как скалярное произведение двух векторов, оператора "набла" и \vec{a} :

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\vec{a} &= (\nabla, \vec{a}) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}, P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k} \right) \\ &= \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.\end{aligned}$$

Таким образом, действуя на векторное поле, дифференциальный оператор дивергенции порождает скалярное поле.

Векторный оператор дивергенции обладает следующими свойствами.

1. $\operatorname{div}\vec{C} = 0$, где \vec{C} — постоянный вектор.
2. **Линейность.** Для любых двух векторов \vec{a} и \vec{b} , и постоянных чисел α и β справедливо:

$$\operatorname{div}(\alpha\vec{a} + \beta\vec{b}) = \alpha\operatorname{div}\vec{a} + \beta\operatorname{div}\vec{b}.$$

3. Если $U\vec{a}$ — произведение скалярной функции U на векторную функцию \vec{a} , тогда

$$\operatorname{div}(U\vec{a}) = U\operatorname{div}\vec{a} + (\vec{a}, \operatorname{grad}U).$$

С использованием дифференциального оператора дивергенции формула Остроградского-Гаусса (2.18) может быть записана в компактном виде:

$$\Phi_{\Sigma} = \oiint_{\Sigma} (\vec{a}, \vec{n}) d\sigma = \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{a} \, dx dy dz. \quad (2.21)$$

Формула Остроградского-Гаусса означает, что поток векторного поля через замкнутую поверхность Σ (в направлении внешней нормали) равен суммарной мощности источников, заключенных в объеме Ω , ограниченному данной поверхностью.

Если векторное поле представлено напряженностью элетрического поля \vec{E} и источниками поля являются точечные носители дискретных положительных и отрицательных зарядов, то справедлива теорема Гаусса: *Поток вектора напряжённости электрического поля через любую произвольно выбранную замкнутую поверхность пропорционален алгебраической сумме зарядов, заключённых внутри этой поверхности:*

$$\Phi_{\Sigma} = \oiint_{\Sigma} (\vec{E}, \vec{n}) d\sigma = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_i q_i.$$

Аналогичным образом теорему Остроградского-Гаусса можно применить к потоку напряженности гравитационного поля:

$$\Phi_{\Sigma} = \oiint_{\Sigma} (\vec{E}, \vec{n}) d\sigma = -4\pi G \sum_i m_i.$$

Соленоидальное поле

Векторное поле $\vec{a}(M)$ называется *соленоидальным* или *трубчатым* в некоторой области Ω , если всюду в этой области

его дивергенция равна нулю:

$$\operatorname{div} \vec{a}(M) = 0, \quad M \in \Omega.$$

Следствием этого определения являются следующие свойства соленоидального поля.

1. В соленоидальном поле поток вектора \vec{a} через любое сечение векторной трубки (рис. 2.18) один и тот же. Поверхности σ_1 ,

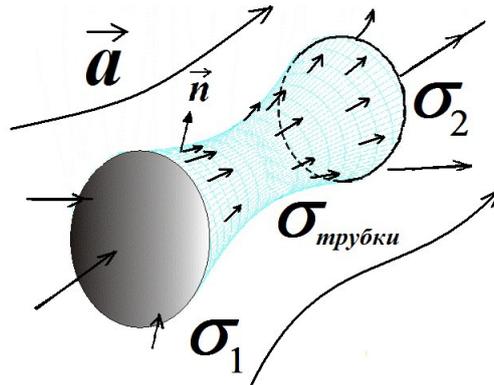


Рис. 2.18 – Векторная трубка в соленоидальном поле

σ_2 и $\sigma_{\text{трубки}}$ (рис. 2.18) образуют замкнутую поверхность Σ и по теореме Остроградского-Гаусса сумма потоков через эти три поверхности равна нулю:

$$\oiint_{\Sigma} (\vec{a}, \vec{n}) d\sigma = \iint_{\sigma_1} (\vec{a}, \vec{n}_1) d\sigma + \iint_{\sigma_{\text{трубки}}} (\vec{a}, \vec{n}_{\text{трубки}}) d\sigma + \iint_{\sigma_2} (\vec{a}, \vec{n}_2) d\sigma = 0.$$

Так как $\vec{n}_{\text{трубки}} \perp \vec{a}$, тогда $(\vec{a}, \vec{n}_{\text{трубки}}) = 0$ и второе слагаемое в сумме трех интегралов равно нулю. Следовательно

$$-\iint_{\sigma_1} (\vec{a}, \vec{n}_1) d\sigma = \iint_{\sigma_2} (\vec{a}, \vec{n}_2) d\sigma.$$

При вычислении потока из замкнутой области всегда полагают, что обе нормали \vec{n}_1 и \vec{n}_2 к поверхностям σ_1 и σ_2 ориентированы во внешнюю область. Чтобы сравнить поток через

эти две поверхности, ориентируем их одинаково по отношению к направлению потока, тогда интеграл по поверхности σ_1 меняет знак и мы получим искомое равенство потоков через два произвольных сечения векторной трубки:

$$\iint_{\sigma_1} (\vec{a}, -\vec{n}_1) d\sigma = \iint_{\sigma_2} (\vec{a}, \vec{n}_2) d\sigma.$$

2. Поток соленоидального векторного поля \vec{a} через любую поверхность, натянутую на замкнутый контур L не зависит от вида поверхности. Действительно, любые две поверхно-

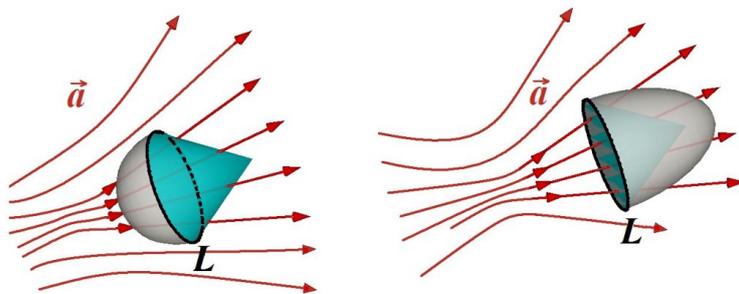


Рис. 2.19 – Две произвольные поверхности σ_1 (полуэллипс) и σ_2 (конус), натянутые на замкнутый контур в векторном поле

сти σ_1 (полуэллипс на рис. 2.19) и σ_2 (конус на рис. 2.19) в этом случае образуют замкнутую поверхность Σ . Используя формулу Остроградского-Гаусса, увидим, что поток $\Phi_\Sigma = \oiint_{\Sigma} (\vec{a}, \vec{n}) d\sigma = 0$. Рассуждая как и в предыдущем случае, получим равенство потоков: $\oiint_{\sigma_1} (\vec{a}, -\vec{n}_1) d\sigma = \oiint_{\sigma_2} (\vec{a}, \vec{n}_2) d\sigma$.

2.3.5. Ротор векторного поля. Циркуляция

Ротор. Пусть в некоторой области Ω трёхмерного пространства, ограниченной замкнутой кусочно-гладкой поверхностью Σ , задано непрерывно дифференцируемое векторное поле $\vec{a}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$.

Ротором (или вихрем) векторного поля называется дифференциальный векторный оператор $\text{rot}\vec{a}$, который определяется как векторное произведение оператора ∇ и вектора \vec{a} :

$$\begin{aligned} \text{rot}\vec{a} &= [\nabla \times \vec{a}] \\ &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k}. \end{aligned} \tag{2.22}$$

Здесь правая часть — раскрытая форма определителя для векторного произведения.

Физический смысл ротора можно проиллюстрировать на следующей модели. Пусть твердое тело вращается вокруг неподвижной оси l с угловой скоростью $\vec{\omega}$. Не нарушая общности, можно считать, что ось l совпадает с осью Oz : $\vec{\omega} = \omega\vec{k}$. Связь между угловой скоростью $\vec{\omega}$ и линейной скоростью V точки $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ задается известной формулой:

$$\vec{V} = [\vec{\omega} \times \vec{r}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ x & y & z \end{vmatrix} = -y\omega\vec{i} + x\omega\vec{j}.$$

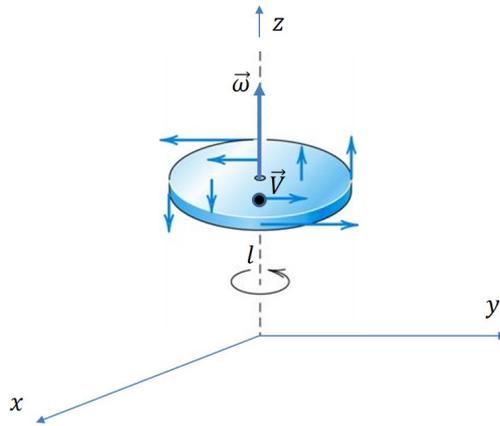


Рис. 2.20 – Связь векторов угловой скорости и линейной скорости точек вращающегося тела

Вычислим ротор векторного поля скоростей \vec{V} :

$$\operatorname{rot}\vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y\omega & x\omega & 0 \end{vmatrix} = 2\omega\vec{k}.$$

Мы получили, что $\operatorname{rot}\vec{V} = 2\omega\vec{k}$, т. е. *ротор поля скоростей вращающегося твердого тела одинаков во всех точках поля, параллелен оси вращения и равен удвоенной угловой скорости вращения.*

Пример. Вычислить ротор векторного поля $\vec{a} = -\frac{y^2}{2}\vec{i} + \frac{x^2}{2}\vec{j}$.

Решение.

$$\operatorname{rot}\vec{a} = [\nabla \times \vec{a}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -\frac{y^2}{2} & \frac{x^2}{2} & 0 \end{vmatrix} = 0\vec{i} + 0\vec{j} + (x + y)\vec{k} = (x + y)\vec{k}.$$

Векторное поле, ротор которого всюду равен 0, называется *безвихревым*. В частности, покажем, что поле градиентов является безвихревым.

Пусть векторное поле \vec{a} в каждой точке области Ω является полем градиентов некоторой потенциальной функции $U(x, y, z)$,

т. е. $\vec{a} = \text{grad}U$:

$$\vec{a} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k} = \frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}.$$

Вычислим компоненты ротора этого поля:

$$\begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} &= \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial y} = 0, \\ \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} &= \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} = 0, \\ \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} &= \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} = 0. \end{aligned}$$

Поскольку все компоненты ротора равны нулю, мы можем записать:

$$\text{rot grad}U = 0. \quad (2.23)$$

Покажем также, что если векторное поле $\vec{\omega}$ в каждой точке некоторой области Ω является ротором некоторого другого поля $\vec{a} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$, т. е. $\vec{\omega} = \text{rot}\vec{a}$, тогда векторное поле $\vec{\omega}$ является соленоидальным. Для этого вычислим дивергенцию вектора $\vec{\omega}$:

$$\begin{aligned} \text{div}\vec{\omega} &= \text{div rot}\vec{a} \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \\ &= \frac{\partial^2 R}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 Q}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 P}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 R}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 P}{\partial y \partial z}. \end{aligned}$$

Мы доказали, что поле ротора соленоидальное $\text{div rot}\vec{a} = 0$ и обладает следующими свойствами (рис. 2.21):

- поле ротора не имеет источников и стоков;
- Силовые линии поля ротора не имеют ни начала, ни конца, в области определения;

- Начала и концы силовых линий поля ротора находятся на границах области, или силовые линии замыкаются внутри области.

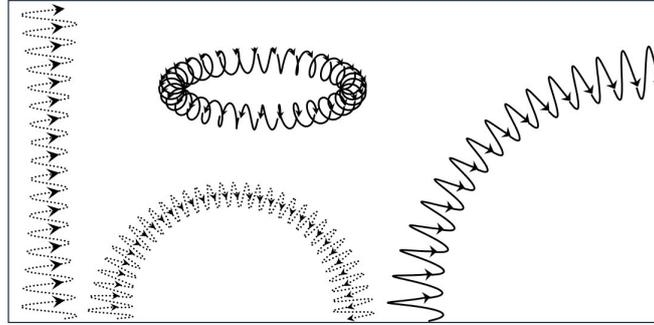


Рис. 2.21 – Вихревые движения в сплошной среде

В гидродинамике соленоидальность поля ротора связана со второй теоремой Гельмгольца — *поток вихря линейной скорости жидкости (газа) сквозь любое сечение вихревой трубки один и тот же в данный момент времени:*

$$\Phi = \iint_{\sigma_1} (\text{rot} \vec{V}, \vec{n}_1) d\sigma = \iint_{\sigma_2} (\text{rot} \vec{V}, \vec{n}_2) d\sigma.$$

Следствие: невозможность окончания вихревой трубки в жидкости, т. к. при уменьшении площади сечения трубки до нуля угловая скорость превратилась бы в бесконечность.

Циркуляция. Пусть поверхность Σ имеет своей границей замкнутый контур L , тогда говорят, что поверхность Σ натянута на контур L . Взаимосогласованным будем считать такой выбор положительного направления нормали \vec{n} к поверхности Σ и положительного направления интегрирования по замкнутому

контур, когда при обходе контура в положительном направлении нормаль к поверхности, непосредственно прилегающей к контуру, всегда остается слева, как показано на рисунке 2.22. Вектор $d\vec{r}$, показанный на левом рисунке, — это векторный дифференциал дуги L и при параметрическом задании кривой L в виде $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$ его направление совпадает с направлением бесконечно малого перемещения из точки $\vec{r}(t)$ в точку $\vec{r}(t + dt)$ по мере увеличения параметра t ($dt > 0$).

Отметим, что применяя правило взаимосогласования направлений обхода контура и нормалей к двум смежным участкам поверхности, содержащих точки M_1 и M_2 , как показано на рисунке 2.22, направления движения вдоль общей границы оказываются взаимно противоположными.

Пусть в некоторой области Ω , содержащей ориентированный замкнутый контур L , задано непрерывное векторное поле $\vec{a}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$. Циркуляцией векторного поля называется криволинейный интеграл векторного поля по замкнутому ориентированному контуру:

$$\text{Ц} = \oint_L (\vec{a}, d\vec{r}) = \oint_L Pdx + Qdy + Rdz.$$

Если векторное поле является силовым полем, т. е. $\vec{a} = \vec{F}$ — вектор силы, тогда циркуляция численно равна работе A силового поля по замкнутому контуру:

$$A = \oint_L (\vec{F}, d\vec{r}).$$

Задание. Вычислить ротор векторного силового поля $\vec{F} = y\vec{i} - z\vec{j}$. Найти работу A этого поля при перемещении единичной

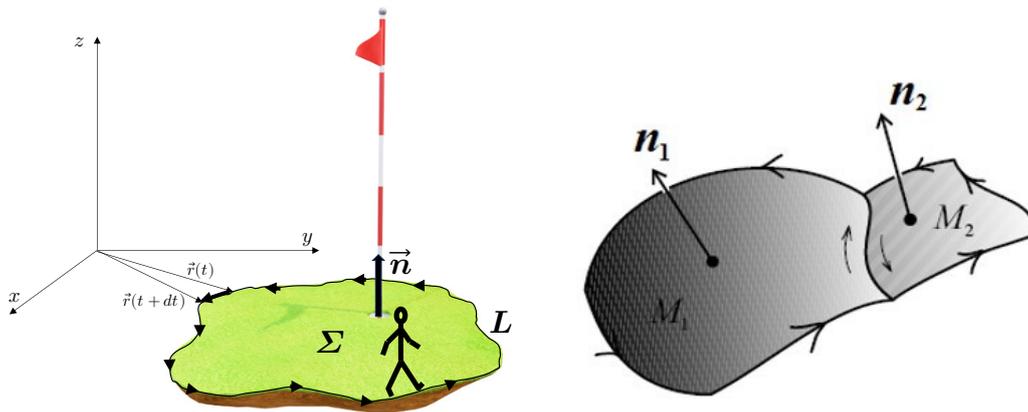


Рис. 2.22 – Согласование положительных направлений нормали к поверхности и обхода контура

массы по замкнутым плоским контурам $ABCD$ против часовой стрелки:

- а) $A(0, 0)$; $B(1, 0)$, $(1, 1)$ и $D(0, 1)$;
- б) $A(1, 0)$; $B(2, 0)$, $C(2, 1)$ и $D(1, 1)$;
- в) $A(0, 0)$; $B(1, 0)$, $C(1, 2)$ и $D(0, 2)$.

Сопроводить решение нахождением уравнения векторных линий, их графическим изображением и направлениями векторов поля вдоль этих линий.

2.3.6. Формула Стокса

Циркуляция векторного поля $\vec{a}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$ вдоль ориентированного замкнутого контура L равна потоку ротора вектора \vec{a} через любую поверхность Σ , ограниченную этим контуром:

$$\oint_L \vec{a} d\vec{r} = \iint_{\Sigma} (\text{rot} \vec{a}, \vec{n}) d\sigma = \oint_L P dx + Q dy + R dz.$$

Запишем это уравнение в координатной форме:

$$\begin{aligned}
 & \oint_L Pdx + Qdy + Rdz \\
 &= \iint_{\Sigma} \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cos \alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cos \beta \right. \\
 & \quad \left. + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos \gamma \right] d\sigma \\
 &= \iint_{\Sigma} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dzdx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy.
 \end{aligned}$$

Для доказательства разобьем поверхность Σ ортогональными плоскостями, параллельными координатным плоскостям. Выберем произвольно, но достаточно близко к поверхности, точку O и рассмотрим бесконечно малый элемент поверхности $\Delta\Sigma$, который однозначно проектируется на координатные плоскости. Границей $\Delta\Sigma$ служит замкнутый контур $\Delta L = ABCA$. Не теряя общности, поместим начало координат в точке O . Используя свойство аддитивности криволинейного интеграла второго рода, вычислим интеграл по замкнутому контуру $ABCA$ в виде суммы интегралов по контурам, лежащим в координатных плоскостях (см. рисунок 2.23):

$$\oint_{ABCA} \vec{a}d\vec{r} = \oint_{OCAO} \vec{a}d\vec{r} + \oint_{OABO} \vec{a}d\vec{r} + \oint_{OBCO} \vec{a}d\vec{r}.$$

Справедливость полученного равенства следует из того, что интегрирование по отрезкам AO , BO и CO происходит дважды, причем в противоположных направлениях (рис. 2.23) так, что интегралы по отрезкам вдоль координатных осей при суммировании взаимно уничтожаются.

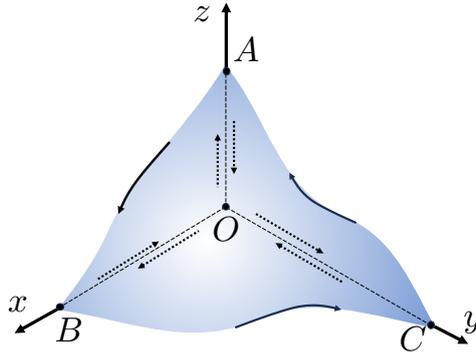


Рис. 2.23 – Направления обхода замкнутого контура $ABCA$ и его проекций на координатные плоскости

Вычислим интегралы в правой части последнего равенства, воспользовавшись формулой Грина для плоских областей:

$$\begin{aligned}
 \oint_{OCAO} \vec{a} d\vec{r} &= \oint_{OCAO} P dx + Q dy + R dz \\
 &\stackrel{dx=0}{=} \oint_{OCAO} Q dy + R dz \stackrel{\text{формула Грина}}{=} \iint_{AOC} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy dz, \\
 \oint_{OABO} \vec{a} d\vec{r} &\stackrel{dy=0}{=} \oint_{OABO} R dz + P dx \stackrel{\text{формула Грина}}{=} \iint_{BOA} \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz dx, \\
 \oint_{OBCO} \vec{a} d\vec{r} &\stackrel{dz=0}{=} \oint_{OBCO} P dx + Q dy \stackrel{\text{формула Грина}}{=} \iint_{COB} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy.
 \end{aligned}$$

Просуммируем полученные равенства:

$$\begin{aligned}
 \oint_{OCAO} \vec{a} d\vec{r} + \oint_{OABO} \vec{a} d\vec{r} + \oint_{OBCO} \vec{a} d\vec{r} &= \iint_{AOC} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy dz + \\
 + \iint_{BOA} \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz dx + \iint_{COB} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy.
 \end{aligned}$$

Сумма интегралов в левой части равенства, как мы уже показали есть интеграл по замкнутому контуру $\oint_{ABCA} \vec{a} d\vec{r}$. Сумма двойных интегралов в правой части равенства по определению является поверхностным интегралом второго рода по поверхности $\Delta\Sigma$, поэтому можем записать:

$$\oint_{\Delta L} \vec{a} d\vec{r} = \iint_{\Delta\Sigma} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dzdx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy.$$

Воспользовавшись данным выше определением ротора, перепишем полученное равенство:

$$\oint_{\Delta L} \vec{a} d\vec{r} = \iint_{\Delta\Sigma} (\text{rot} \vec{a}, \vec{n}) d\sigma.$$

Полагая элемент поверхности $\Delta\Sigma$ достаточно малым, мы можем применить теорему о среднем:

$$\iint_{\Delta\Sigma} (\text{rot} \vec{a}, \vec{n}) d\sigma \approx (\text{rot} \vec{a}, \vec{n})|_M \cdot S_{\Delta\Sigma},$$

где M — некоторая точка в пределах элемента поверхности $\Delta\Sigma$, а $S_{\Delta\Sigma}$ — площадь поверхности $\Delta\Sigma$. Поделим обе части равенства на $S_{\Delta\Sigma}$ и запишем

$$(\text{rot} \vec{a}, \vec{n})|_M = \text{rot}_n \vec{a}|_M \approx \frac{\oint \vec{a} d\vec{r}}{S_{\Delta\Sigma}},$$

где $\text{rot}_n \vec{a}|_M$ — проекция ротора на нормаль \vec{n} , вычисленная в точке M . Отметим, что максимальная величина проекции ротора на направление \vec{n} достигается при $\text{rot} \vec{a} \parallel \vec{n}$ и соответствует его абсолютному значению. При бесконечном уменьшении размера элементарной площадки $\Delta\Sigma$ знак приближенного равенства можно

заменить на равенство, что позволяет дать инвариантное определение ротора. *Нормальная к поверхности $\Delta\Sigma$ проекция ротора векторного поля в точке M есть предельная поверхностная плотность циркуляции вектора \vec{n} по контуру, ограничивающему эту поверхность при стягивании контура в точку M :*

$$\text{rot}_n \vec{a} \Big|_M = \lim_{\Delta\Sigma \rightarrow M} \frac{\oint \vec{a} d\vec{r}}{S_{\Delta\Sigma}}, \quad (2.24)$$

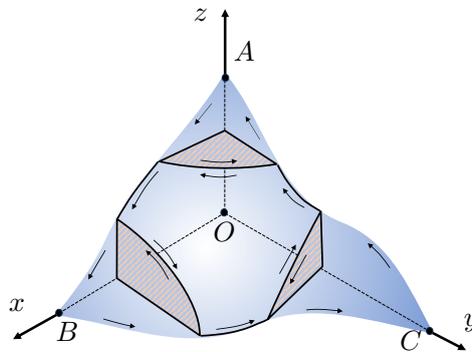


Рис. 2.24 – Малый элемент поверхности общего вида, заключенный между тремя парами плоскостей, параллельных координатным плоскостям. Показаны направления обхода контура малого элемента поверхности и его дополнений до вершин A , B и C на координатных осях

Перейдем к суммированию по всем элементарным площадкам $\Delta\Sigma_i$. Отметим, что выбранный нами вид элемента поверхности (рис. 2.23.) не нарушает общности рассуждений, что проиллюстрировано на следующем рисунке 2.24. Центральная часть элемента поверхности на рисунке 2.24 имеет наиболее

общую форму и может быть дополнена элементами поверхности уже проанализированного вида (рис. 2.23.), что позволяет распространить полученный результат на всю поверхность Σ :

$$\sum_i \oint_{\Delta L_i} \vec{a} d\vec{r} = \sum_i \iint_{\Delta \Sigma_i} (\text{rot} \vec{a}, \vec{n}) d\sigma.$$

Учтем, что внутренние границы между смежными элементами поверхности вносят нулевой вклад в суммарный криволинейный интеграл и получим окончательно формулу Стокса

$$\oint_L \vec{a} d\vec{r} = \iint_{\Sigma} (\text{rot} \vec{a}, \vec{n}) d\sigma,$$

Формула Стокса читается следующим образом: *Циркуляция векторного поля по замкнутому контуру равна потоку его ротора через поверхность, стягиваемую этим контуром.*

Примеры.

1. Является ли соленоидальным поле : $\vec{a} = y^2\vec{i} - (x^2 + y^2)\vec{j} + z(3y^2 + 1)\vec{k}$?

Решение:

Запишем явные выражения для компонент векторного поля $\vec{a} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$:

$$\begin{aligned}P &= y^2, \\Q &= -(x^2 + y^2), \\R &= z(3y^2 + 1).\end{aligned}$$

Подставим уравнение поля в общую формулу для дивергенции в декартовых координатах (2.20):

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\vec{a} &= \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \\&= \frac{\partial(y^2)}{\partial x} - \frac{\partial(x^2 + y^2)}{\partial y} + \frac{\partial(z(3y^2 + 1))}{\partial z} \\&= 0 - 2y + (3y^2 + 1) = 3y^2 - 2y + 1 \neq 0.\end{aligned}$$

Ответ: Поле $\vec{a} = y^2\vec{i} - (x^2 + y^2)\vec{j} + z(3y^2 + 1)\vec{k}$ не является соленоидальным, поскольку $\operatorname{div}\vec{a} \neq 0$.

2. Является ли соленоидальным поле : $\vec{a} = y^2\vec{i} - (x^2 + y^2)\vec{j} + z(3y^2 + 1)\vec{k}$?

Решение: Векторное поле \vec{a} имеет следующие компоненты в цилиндрической системе координат:

$$a_\rho = \rho, \quad a_\varphi = 0, \quad a_z = z.$$

Подставим их в общую формулу (3.2):

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \vec{a} &= \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial(a_\rho \rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \\ &= \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial(\rho \cdot \rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial 0}{\partial \varphi} + \frac{\partial z}{\partial z} \\ &= \frac{1}{\rho} \cdot 2\rho + 1 = 2 + 1 = 3.\end{aligned}$$

Вычислим компоненты ротора по формулам (3.10):

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}_{e_\rho} \vec{a} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial a_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial a_\varphi}{\partial z} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial z}{\partial \varphi} - \frac{\partial 0}{\partial z} = 0, \\ \operatorname{rot}_{e_\varphi} \vec{a} &= \frac{\partial a_\rho}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial \rho} = \frac{\partial \rho}{\partial z} - \frac{\partial z}{\partial \rho} = 0, \\ \operatorname{rot}_{e_z} \vec{a} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho \cdot a_\varphi)}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial a_\rho}{\partial \varphi} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho \cdot 0)}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial \varphi} = 0,\end{aligned}$$

Поскольку все компоненты ротора оказались равны нулю, то $\operatorname{rot} \vec{a} = 0$.

Ответ: $\operatorname{div} \vec{a} = 3$, $\operatorname{rot} \vec{a} = 0$.

3. Показать, что поле $\vec{a} = x^2 \vec{i} + y^2 \vec{j} + z^2 \vec{k}$ является потенциальным и найти его потенциал.

Решение:

Векторное поле является потенциальным, если оно представляет собой поле градиентов некоторого скалярного поля. Соответствующее скалярное поле называют потенциалом. Необходимым и достаточным условием потенциальности физического поля является равенство нулю его ротора.

Вычислим ротор по формулам (2.22):

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{a} &= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k} \\ &= \left(\frac{\partial z^2}{\partial y} - \frac{\partial y^2}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial x^2}{\partial z} - \frac{\partial z^2}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial y^2}{\partial x} - \frac{\partial x^2}{\partial y} \right) \vec{k} \\ &= 0\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k} = 0. \end{aligned}$$

Из равенства нулю ротора следует, что векторное поле \vec{a} является градиентом некоторого потенциала U :

$$\vec{a} = \operatorname{grad} U = \frac{\partial U}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{k}.$$

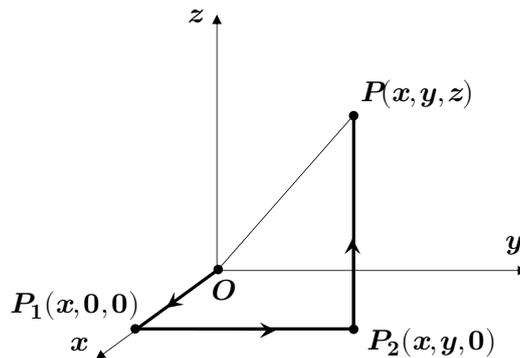


Рис. 2.25 – Траектория интегрирования к вычислению потенциала векторного поля

Для нахождения потенциала воспользуемся свойством независимости криволинейного интеграла от пути, если подинтегральное выражение является полным дифференциалом. Действительно, используя связь градиента и полного дифференциала функции (3.2) мы можем записать криволиней-

ный интеграл между точками O и P (рис. 2.25):

$$\begin{aligned}
 \int_{OP} dU &= \int_{OP} (\text{grad}U, d\vec{r}) = \int_{OP} (\vec{a}, d\vec{r}) = \int_{OP} x^2 dx + y^2 dy + z^2 dz \\
 &= \int_{OM} x^2 dx + y^2 dy + z^2 dz \quad \left| \quad dy = 0, dz = 0 \right. \\
 &+ \int_{MN} x^2 dx + y^2 dy + z^2 dz \quad \left| \quad x = \text{const} \Rightarrow dx = 0, dz = 0 \right. \\
 &+ \int_{NP} x^2 dx + y^2 dy + z^2 dz \quad \left| \quad \begin{array}{l} x = \text{const} \Rightarrow dx = 0 \\ y = \text{const} \Rightarrow dy = 0 \end{array} \right. \\
 &= \int_0^x x^2 dx + \int_0^y y^2 dy + \int_0^z z^2 dz = \frac{x^3 + y^3 + z^3}{3} + \text{Const.}
 \end{aligned}$$

С другой стороны, $\int_{OP} dU = U(x, y, z) - U(0, 0, 0)$, или в общем случае для произвольной точки $P_0(x_0, y_0, z_0)$ справедливо $\int_{P_0P} dU = U(x, y, z) - U(x_0, y_0, z_0) = U(x, y, z) + \text{Const}$, следовательно искомый потенциал имеет вид:

$$U(x, y, z) = \frac{x^3 + y^3 + z^3}{3} + \text{Const.}$$

Проверка:

$$\begin{aligned}
 \text{grad}U &= \text{grad} \frac{x^3 + y^3 + z^3}{3} = \frac{3x^2}{3} \vec{i} + \frac{3y^2}{3} \vec{j} + \frac{3z^2}{3} \vec{k} \\
 &= x^2 \vec{i} + y^2 \vec{j} + z^2 \vec{k}.
 \end{aligned}$$

Ответ: Векторное поле $\vec{a} = x^2 \vec{i} + y^2 \vec{j} + z^2 \vec{k}$ является потенциальным, его потенциалом служит скалярное поле $U = \frac{x^3 + y^3 + z^3}{3} + \text{Const}$.

Глава 3

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ В КРИВОЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ КООРДИНАТ

3.1. Градиент в криволинейных системах координат

Для вывода закона преобразования градиента при переходе в новую систему координат нам полезно вспомнить свойство *инвариантности формы первого дифференциала* (1.6):

$$df = f'_\xi d\xi = f'_x x'_\xi d\xi = f'_x dx.$$

Свойство инвариантности формы первого дифференциала справедливо также для функции многих переменных $U(x, y, z)$. Например, если аргументы сложной функции $U(x, y, z)$ сами являются функциями трех других переменных: $x = x(\xi, \eta, \zeta)$, $y = y(\xi, \eta, \zeta)$ и $z = z(\xi, \eta, \zeta)$, тогда справедливо:

$$dU = U'_x dx + U'_y dy + U'_z dz = U'_\xi d\xi + U'_\eta d\eta + U'_\zeta d\zeta. \quad (3.1)$$

В том случае, если переменные x, y, z представляют собой

координаты точки и связанного с ней радиус-вектора $\vec{r}(x, y, z)$ в декартовом пространстве, тогда функция $U(x, y, z)$, соответственно, определяет некоторое скалярное поле в этом пространстве и выражение полного дифференциала можно записать в виде скалярного произведения (1.1) двух векторов $\text{grad}U = \frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}$ и $d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$:

$$dU = (\text{grad}U, d\vec{r}) = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz. \quad (3.2)$$

Среди всех возможных векторов в пространстве свойство (3.2) присуще только вектору градиента в любой системе координат. Действительно, если найдется такой вектор \vec{a} , что в любой точке пространства и для произвольного вектора $d\vec{r}$ будет справедливым равенство

$$dU = (\vec{a}, d\vec{r}),$$

то можно утверждать, что $\vec{a} = \text{grad}U$, так как из равенства

$$dU = (\vec{a}, d\vec{r}) = (\text{grad}U, d\vec{r})$$

следует, что скалярное произведение

$$(\vec{a} - \text{grad}U, d\vec{r}) = 0.$$

Учитывая произвольное направление вектора $d\vec{r}$, последнее равенство означает, что произвольный вектор разности является нуль-вектором $(\vec{a} - \text{grad}U) = \vec{0}$, который ортогонален всем другим векторам, и $\vec{a} = \text{grad}U$.

Представление полного дифференциала dU в виде скалярного произведения (3.2) также может служить определением инвариантности полного дифференциала, т. е. его независимости от системы координат.

Рассмотрим в цилиндрической системе координат полный дифференциал dU :

$$dU = U'_\rho d\rho + U'_\varphi d\varphi + U'_z dz.$$

и произвольный вектор:

$$\vec{a}(\rho, \varphi, z) = A\vec{e}_\rho + B\vec{e}_\varphi + C\vec{e}_z,$$

где A , B и C — коэффициенты, требующие определения. Проверим условие равенства dU и скалярного произведения \vec{a} с дифференциалом радиус-вектора $d\vec{r} = d\rho\vec{e}_\rho + \rho d\varphi\vec{e}_\varphi + dz\vec{e}_z$ цилиндрической системы координат (??):

$$\begin{aligned} dU &= U'_\rho d\rho + U'_\varphi d\varphi + U'_z dz \\ &= (\vec{a}, d\vec{r}) = (A\vec{e}_\rho + B\vec{e}_\varphi + C\vec{e}_z, d\rho\vec{e}_\rho + \rho d\varphi\vec{e}_\varphi + dz\vec{e}_z) \\ &= Ad\rho + B\rho d\varphi + Cdz. \end{aligned}$$

Из почленного равенства коэффициентов при одноименных множителях получим:

$$A = U'_\rho; \quad B = \frac{U'_\varphi}{\rho}; \quad C = U'_z.$$

Вектор \vec{a} с найденными коэффициентами совпадает по свойству (3.2) с градиентом $\text{grad}U$. Таким образом, градиент в цилиндрической системе координат и оператор "набла" имеют вид:

$$\begin{aligned} \text{grad}U &= \frac{\partial U}{\partial \rho}\vec{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial U}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{e}_z, \\ \nabla &= \frac{\partial}{\partial \rho}\vec{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi + \frac{\partial}{\partial z}\vec{e}_z. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Аналогичным образом рассмотрим в сферической системе координат произвольный вектор

$$\vec{a}(r, \theta, \varphi) = A\vec{e}_r + B\vec{e}_\theta + C\vec{e}_\varphi$$

и дифференциал радиус-вектора (1.29)

$$d\vec{r} = dr\vec{e}_r + r d\theta\vec{e}_\theta + r \sin\theta d\varphi\vec{e}_\varphi.$$

Составим скалярное произведение $(\vec{a}, d\vec{r})$ и, приравнявая его dU , найдем коэффициенты:

$$A = U'_r; \quad B = \frac{U'_\theta}{r}; \quad C = \frac{U'_\varphi}{r \sin\theta}.$$

Окончательно запишем градиент и ∇ в сферической системе координат:

$$\begin{aligned} \text{grad}U &= \frac{\partial U}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial\theta}\vec{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial U}{\partial\varphi}\vec{e}_\varphi, \\ \nabla &= \frac{\partial}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\vec{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\vec{e}_\varphi. \end{aligned} \quad (3.4)$$

В общем случае, переход из декартовой в любую систему криволинейных координат (q_1, q_2, q_3) с ортогональным базисом $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ при сохранении дифференциала длины дуги кривой требует соблюдения равенства (1.32):

$$dr^2 \equiv dl^2 = \sum_{n=1}^3 L_n^2 dq_n^2 = L_1^2 dq_1^2 + L_2^2 dq_2^2 + L_3^2 dq_3^2,$$

где L_1, L_2 и L_3 — масштабные коэффициенты по каждой из координатных осей (коэффициенты Ламе). Откуда следует, что градиент в такой системе координат будет иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} \text{grad}U &= \frac{1}{L_1}\frac{\partial U}{\partial q_1}\vec{e}_1 + \frac{1}{L_2}\frac{\partial U}{\partial q_2}\vec{e}_2 + \frac{1}{L_3}\frac{\partial U}{\partial q_3}\vec{e}_3, \\ \nabla &= \frac{1}{L_1}\frac{\partial}{\partial q_1}\vec{e}_1 + \frac{1}{L_2}\frac{\partial}{\partial q_2}\vec{e}_2 + \frac{1}{L_3}\frac{\partial}{\partial q_3}\vec{e}_3, \end{aligned}$$

3.2. Дивергенция в криволинейных системах координат

Для того, чтобы выразить дивергенцию векторного поля \vec{a} в криволинейной системе координат воспользуемся инвариантным определением дивергенции (2.20):

$$\operatorname{div}\vec{a}(M) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oiint (\vec{a}, \vec{n}) d\sigma}{\Delta V}, \quad (3.5)$$

где ΔV — бесконечно малый объем в окрестности точки M , в которой вычисляется дивергенция $\operatorname{div}\vec{a}(M)$.

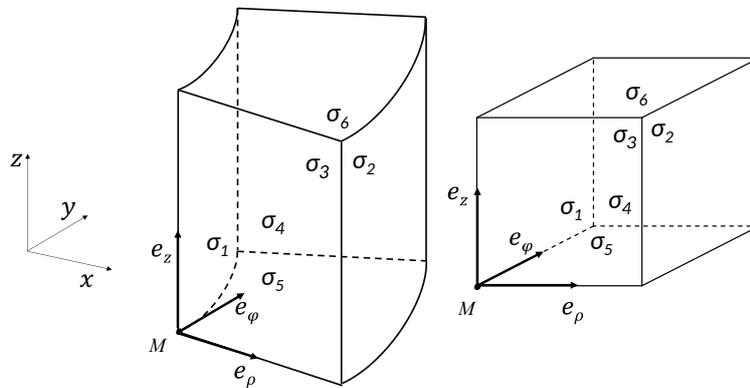


Рис. 3.1 – Грани криволинейного параллелепипеда, параллельные координатным плоскостям цилиндрической системы координат в окрестности точки M

Рассмотрим в локальной *цилиндрической системе координат* поток векторного поля $\vec{a}(a_\rho, a_\varphi, a_z)$ через бесконечно малый криволинейный параллелепипед с вершиной в точке $M(\rho, \varphi, z)$, как показано на рисунке (рис. 3.1). Грани σ_i этого параллелепипеда параллельны координатным плоскостям, положительная ориентация которых задана внешними нормальями. Ребрами этого параллелепипеда служат малые приращения вдоль координат-

ных осей (1.8, 1.21):

$$dl_{1-2} = d\rho, \quad dl_{3-4} = \rho d\varphi, \quad dl_{5-6} = dz.$$

Поток $d\Phi_1$ векторного поля через грань σ_1 запишем в виде (2.14):

$$d\Phi_1 = (\vec{a}, -\vec{e}_\rho)\sigma_1 = -a_\rho \rho d\varphi dz,$$

где мы учли (1.22) для масштабных коэффициентов. На грани σ_2 поток векторного поля $d\Phi_2$ запишем в виде ряда Тейлора по степеням приращения $d\rho$, ограничившись первыми двумя слагаемыми:

$$d\Phi_2 \approx a_\rho \rho d\varphi dz + \frac{\partial(a_\rho \rho d\varphi dz)}{\partial \rho} d\rho = \left[a_\rho \rho + \frac{\partial(a_\rho \rho)}{\partial \rho} d\rho \right] d\varphi dz.$$

Суммарный поток через две противоположные грани σ_1 и σ_2 :

$$d\Phi_1 + d\Phi_2 \approx \frac{\partial(a_\rho \rho)}{\partial \rho} d\rho d\varphi dz.$$

Аналогичным образом вычислим потоки через другие пары противоположащих граней σ_3 и σ_4 , σ_5 и σ_6 с учетом (??):

$$d\Phi_3 + d\Phi_4 \approx \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} d\rho d\varphi dz,$$

$$d\Phi_5 + d\Phi_6 \approx \frac{\partial(a_z \rho)}{\partial z} d\rho d\varphi dz.$$

Складывая все три выражения получим полный поток через замкнутую поверхность в окрестности точки M :

$$d\Phi \approx \left[\frac{\partial(a_\rho \rho)}{\partial \rho} + \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} + \rho \frac{\partial a_z}{\partial z} \right] d\rho d\varphi dz.$$

После деления суммарного потока на бесконечно малый объем в цилиндрической системе координат (1.23) $dV = dx dy dz = \rho d\rho d\varphi dz$, переходя к пределу, в соответствии с (3.5), получим

выражение для дивергенции в цилиндрической системе координат:

$$\operatorname{div}\vec{a}(M) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial(a_\rho \rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial a_z}{\partial z}. \quad (3.6)$$

Используя определение оператора Лапласа как дивергенцию от градиента скалярного поля U ($\vec{a} = \nabla U$), с учетом (3.3) запишем выражение для лапласиана в цилиндрической системе координат:

$$\Delta U = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial U}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}.$$

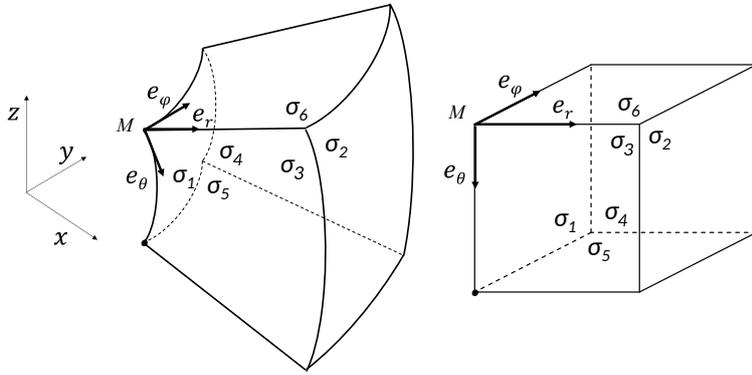


Рис. 3.2 – Грани криволинейного параллелепипеда, параллельные координатным плоскостям сферической системы координат в окрестности точки M

Аналогичным образом, в *сферической системе координат*, с учетом масштабных коэффициентов (1.33) для элементов длины, площади и объема, запишем полный поток через бесконечно малую замкнутую поверхность (рис. 3.2) в окрестности точки M и объем этой окрестности:

$$d\Phi \approx \left[\sin \theta \frac{\partial(a_r r^2)}{\partial r} + r \frac{\partial(a_\theta \sin \theta)}{\partial \theta} + r \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} \right] dr d\theta d\varphi, \quad (3.7)$$

$$dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi.$$

Поделив $d\Phi$ на dV и переходя к пределу $dV \rightarrow 0$, получим выражения для дивергенции вектора \vec{a} и лапласиана, полагая $\vec{a} = \nabla U$, в сферической системе координат:

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\vec{a}(M) &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial(a_r r^2)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(a_\theta \sin \theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi}, \\ \Delta U &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2}.\end{aligned}\quad (3.8)$$

В общем случае ортогональных криволинейных координат (q_1, q_2, q_3) , с использованием (1.34) выражения для дивергенции и лапласиана принимают следующий вид:

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\vec{a}(M) &= \frac{1}{L_1 L_2 L_3} \left[\frac{\partial(a_1 L_2 L_3)}{\partial q_1} + \frac{\partial(a_2 L_1 L_3)}{\partial q_2} + \frac{\partial(a_3 L_1 L_2)}{\partial q_3} \right], \\ \Delta U &= \frac{1}{L_1 L_2 L_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{L_2 L_3}{L_1} \frac{\partial U}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{L_3 L_1}{L_2} \frac{\partial U}{\partial q_2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\frac{L_1 L_2}{L_3} \frac{\partial U}{\partial q_3} \right) \right].\end{aligned}\quad (3.9)$$

3.3. Ротор в криволинейных системах координат

Для того, чтобы выразить ротор векторного поля $\operatorname{rot} \vec{a}$ в криволинейных системах координат воспользуемся инвариантным определением ротора (2.24) в точке M :

$$\operatorname{rot}_n \vec{a} = \lim_{\Delta \Sigma \rightarrow M} \frac{\oint_{\Delta \Sigma} \vec{a} d\vec{r}}{S_{\Delta \Sigma}},$$

Рассмотрим замкнутые контуры, которые образуют ребра граней σ_1 , σ_3 и σ_5 элементарного параллелепипеда с общей вершиной в точке M для цилиндрической системы координат (рис.

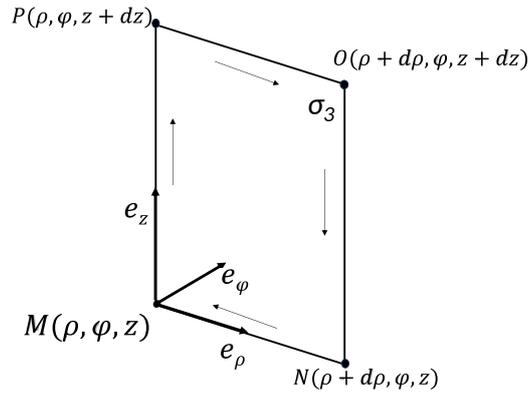


Рис. 3.3 – Положительное направление обхода контура грани σ_3 элементарного параллелепипеда в цилиндрической системе координат

3.1). Пусть положительные нормали к этим граням совпадают с положительными направлениями ортов цилиндрической системы координат.

Вычислим сначала проекцию ротора $\text{rot}_{e_\varphi} \vec{a}$ на положительную нормаль \vec{e}_φ к грани σ_3 . Длины ребер MP и NO равны dz , длины OP и MN равны $d\rho$, площадь грани $S_{\sigma_3} = d\rho dz$. Компоненты поля a_ρ на ребре OP и a_z на ребре NO запишем в виде разложения в ряд Тейлора по степеням dz и $d\rho$, соответственно, ограничившись первыми двумя слагаемыми:

$$a_\rho(\rho, \varphi, z + dz) \approx a_\rho(\rho, \varphi, z) + \frac{\partial a_\rho}{\partial z} dz,$$

$$a_z(\rho + d\rho, \varphi, z) \approx a_z(\rho, \varphi, z) + \frac{\partial a_z}{\partial \rho} d\rho.$$

Циркуляция по ребрам грани σ_3 представляет собой сумму интегралов вдоль ребер по направлениям, показанным на рисунке

3.3:

$$\begin{aligned} \int_{MP} \vec{a} d\vec{r} &= - \int_{MP} a_z dz \approx a_z|_{\bar{z}} dz, & \bar{z} \in MP; \\ \int_{PO} \vec{a} d\vec{r} &\approx \int_{PO} (a_\rho + \frac{\partial a_\rho}{\partial z} dz) d\rho \approx (a_\rho + \frac{\partial a_\rho}{\partial z} dz) \Big|_{\bar{\rho}} d\rho, & \bar{\rho} \in PO; \\ \int_{ON} \vec{a} d\vec{r} &\approx - \int_{ON} (a_z + \frac{\partial a_z}{\partial \rho} d\rho) dz \approx - (a_z + \frac{\partial a_z}{\partial \rho} d\rho) \Big|_{\bar{z}} dz, & \bar{z} \in ON; \\ \int_{NM} \vec{a} d\vec{r} &= - \int_{NM} a_\rho d\rho \approx - a_\rho|_{\bar{\rho}} d\rho, & \bar{\rho} \in NM; \end{aligned}$$

где $\bar{\rho}$ и \bar{z} — некоторые точки в пределах соответствующих отрезков интегрирования, удовлетворяющие теореме о среднем значении для определенного интеграла. Складывая, получим интеграл по замкнутому контуру $MPONM$:

$$\oint_{MPONM} \vec{a} d\vec{r} \approx \frac{\partial a_\rho}{\partial z} d\rho dz - \frac{\partial a_z}{\partial \rho} d\rho dz.$$

Поделив на площадь грани $S_{\sigma_3} = d\rho dz$ и переходя к пределу $\Delta_\Sigma \rightarrow M$, получим:

$$\text{rot}_{e_\varphi} \vec{a} = \frac{\partial a_\rho}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial \rho}.$$

Вычислим проекцию ротора $\text{rot}_{e_\rho} \vec{a}$ на положительную нормаль \vec{e}_ρ к грани σ_1 (рис. 3.4). Длины ребер MP и ON равны dz , длины PO и NM равны $\rho d\varphi$, площадь грани $S_{\sigma_1} = \rho d\varphi dz$. Циркуляция по ребрам этой грани представляет собой сумму интеграла

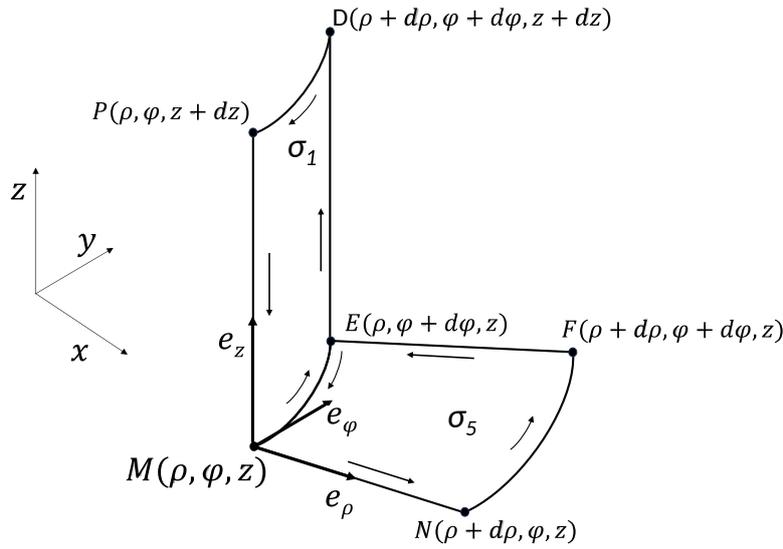


Рис. 3.4 – Положительное направление обхода контуров грани σ_1 и σ_5 элементарного параллелепипеда в цилиндрической системе координат

лов вдоль ребер по направлениям, показанным на рисунке 3.4:

$$\int_{ME} \vec{a} d\vec{r} = \int_{ME} a_\varphi d\varphi \approx a_\varphi|_{\bar{\varphi}} \rho d\varphi, \quad \bar{\varphi} \in ME.$$

$$\int_{ED} \vec{a} d\vec{r} \approx \int_{ED} (a_z + \frac{\partial a_z}{\partial \varphi} d\varphi) dz \approx (a_z + \frac{\partial a_z}{\partial \varphi} d\varphi) \Big|_{\bar{z}} dz, \quad \bar{z} \in ED;$$

$$\int_{DP} \vec{a} d\vec{r} \approx - \int_{DP} (a_\varphi + \frac{\partial a_\varphi}{\partial z} dz) d\varphi \approx - (a_\varphi + \frac{\partial a_\varphi}{\partial z} dz) \Big|_{\bar{\varphi}} \rho d\varphi, \quad \bar{\varphi} \in DP;$$

$$\int_{PM} \vec{a} d\vec{r} = - \int_{PM} a_z dz \approx - a_z|_{\bar{z}} dz, \quad \bar{z} \in PM;$$

где \bar{z} и $\bar{\varphi}$ — некоторые точки в пределах соответствующих отрезков интегрирования, удовлетворяющие теореме о среднем значении для определенного интеграла. Складывая, получим интеграл по замкнутому контуру MEDPM:

$$\oint_{MEDPM} \vec{a} d\vec{r} \approx \frac{\partial a_z}{\partial \varphi} d\varphi dz - \frac{\partial a_\varphi}{\partial z} \rho d\varphi dz.$$

Поделив на площадь грани $S_{\sigma_1} = \rho d\varphi dz$ и переходя к пределу $\Delta_\Sigma \rightarrow M$, получим:

$$\text{rot}_{e_\rho} \vec{a} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial a_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial a_\varphi}{\partial z}.$$

Вычисление $\text{rot}_{e_z} \vec{a}$ студентам предлагается провести самостоятельно с учетом направлений обхода контура грани σ_5 , показанных на рисунке 3.4, где ребра MN и EF грани σ_5 имеют одинаковую длину $d\rho$, длина ребра ME равна $\rho d\varphi$, длина NF равна $(\rho + d\rho)d\varphi$, площадь $S_{\sigma_5} = \rho d\rho d\varphi$.

Выпишем конечные выражения для трех проекций ротора на орты цилиндрической системы координат:

$$\begin{aligned} \text{rot}_{e_\rho} \vec{a} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial a_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial a_\varphi}{\partial z}, \\ \text{rot}_{e_\varphi} \vec{a} &= \frac{\partial a_\rho}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial \rho}, \\ \text{rot}_{e_z} \vec{a} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho a_\varphi)}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial a_\rho}{\partial \varphi}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Рассмотрим замкнутые контуры, которые образуют ребра граней σ_1 , σ_3 и σ_6 элементарного параллелепипеда с общей вершиной в точке M для сферической системы координат (рис. 3.2). Положительные нормали к этим граням совпадают с положительными направлениями ортов сферической системы координат.

Вычислим проекцию ротора $\text{rot}_{e_\theta} \vec{a}$ на положительную нормаль \vec{e}_θ к грани σ_6 (рис. 3.5). Длины ребер MN и DF равны dr , длина MD равна $r \sin \theta d\varphi$, длина NF равна $(r + dr) \sin \theta d\varphi$, площадь грани $S_{\sigma_6} = r \sin \theta dr d\varphi$. Циркуляция по ребрам этой грани представляет собой сумму интегралов вдоль ребер по направле-

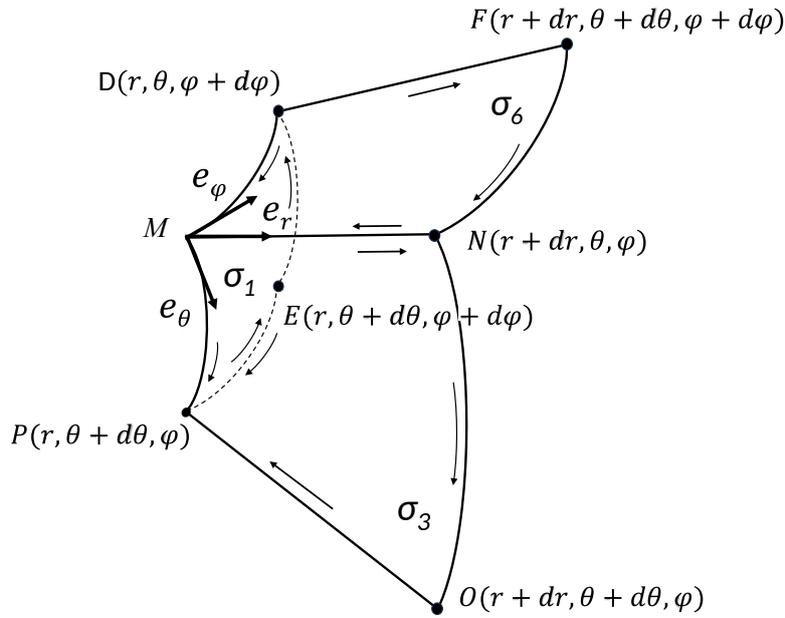


Рис. 3.5 – Положительные направления обхода контуров граней σ_1 , σ_3 и σ_6 с общей вершиной в точке $M(r, \theta, \varphi)$ элементарного параллелепипеда в сферической системе координат

ниями, показанным на рисунке 3.5:

$$\begin{aligned}
 \int_{MD} \vec{a} d\vec{r} &= \int_{MD} a_\varphi d\varphi \approx a_\varphi|_{\bar{\varphi}} r \sin \theta d\varphi, \quad \bar{\varphi} \in MD; \\
 \int_{DF} \vec{a} d\vec{r} &\approx \int_{DF} (a_r + \frac{\partial a_r}{\partial \varphi} d\varphi) dr \approx (a_r + \frac{\partial a_r}{\partial \varphi} d\varphi) \Big|_{\bar{r}} dr, \quad \bar{r} \in DF; \\
 \int_{FN} \vec{a} d\vec{r} &\approx - \int_{FN} (a_\varphi + \frac{\partial a_\varphi}{\partial r} dr) d\varphi \approx - (a_\varphi + \frac{\partial a_\varphi}{\partial r} dr) \Big|_{\bar{\varphi}} (r + dr) \sin \theta d\varphi \\
 &= - a_\varphi|_{\bar{\varphi}} r \sin \theta d\varphi - \frac{\partial (r a_\varphi)}{\partial r} \Big|_{\bar{\varphi}} \sin \theta dr d\varphi \\
 &\quad - \frac{\partial a_\varphi}{\partial r} \Big|_{\bar{\varphi}} \sin \theta dr^2 d\varphi, \quad \bar{\varphi} \in FN; \\
 \int_{NM} \vec{a} d\vec{r} &= - \int_{NM} a_r dr \approx - a_r|_{\bar{r}} dr, \quad \bar{r} \in NM.
 \end{aligned}$$

где \bar{r} и $\bar{\varphi}$ — некоторые точки в пределах соответствующих отрез-

ков интегрирования, удовлетворяющие теореме о среднем значении для определенного интеграла.

Сумма интегралов по отрезкам DF и NM:

$$\int_{DF} \vec{a} d\vec{r} + \int_{NM} \vec{a} d\vec{r} \approx \left(a_r + \frac{\partial a_r}{\partial \varphi} d\varphi \right) \Big|_{\bar{r}} dr - a_r \Big|_{\bar{r}} dr = \frac{\partial a_r}{\partial \varphi} dr d\varphi.$$

Сумма интегралов по отрезкам MD и FN:

$$\begin{aligned} \int_{MD} \vec{a} d\vec{r} + \int_{FN} \vec{a} d\vec{r} \approx a_\varphi \Big|_{\bar{\varphi}} r \sin \theta d\varphi - a_\varphi \Big|_{\bar{\varphi}} r \sin \theta d\varphi \\ - \frac{\partial (ra_\varphi)}{\partial r} \Big|_{\bar{\varphi}} \sin \theta dr d\varphi - \frac{\partial a_\varphi}{\partial r} \Big|_{\bar{\varphi}} \sin \theta dr^2 d\varphi. \end{aligned}$$

Пренебрегая последним слагаемым $\sim dr^2$, запишем:

$$\int_{DF} \vec{a} d\vec{r} + \int_{NM} \vec{a} d\vec{r} \approx - \frac{\partial (ra_\varphi)}{\partial r} \sin \theta dr d\varphi.$$

Складывая, получим интеграл по замкнутому контуру MDFNM:

$$\oint_{MDFNM} \vec{a} d\vec{r} \approx \frac{\partial a_r}{\partial \varphi} dr d\varphi - \frac{\partial (ra_\varphi)}{\partial r} \sin \theta dr d\varphi.$$

Поделив на площадь грани $S_{\sigma_6} = r \sin \theta dr d\varphi$ и переходя к пределу $\Delta_\Sigma \rightarrow M$, получим:

$$\text{rot}_{e_\theta} \vec{a} = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial a_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial (ra_\varphi)}{\partial r}.$$

Проведя аналогичные вычисления для контуров граней σ_3 и σ_6 (см. рис. 3.5) мы сможем получить выражение для ротора в

сферической системе координат:

$$\operatorname{rot} \vec{a} = \operatorname{rot}_{e_r} \vec{a} \vec{e}_r + \operatorname{rot}_{e_\theta} \vec{a} \vec{e}_\theta + \operatorname{rot}_{e_\varphi} \vec{a} \vec{e}_\varphi,$$

где

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}_{e_r} \vec{a} &= \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial(\sin \theta a_\varphi)}{\partial \theta} - \frac{\partial(a_\theta)}{\partial \varphi} \right), \\ \operatorname{rot}_{e_\theta} \vec{a} &= \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial a_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial(ra_\varphi)}{\partial r}, \\ \operatorname{rot}_{e_\varphi} \vec{a} &= \frac{1}{r} \frac{\partial(ra_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial(a_r)}{\partial \theta}. \end{aligned}$$

В базисе произвольной ортогональной криволинейной системы координат $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ ротор в точке $M(q_1, q_2, q_3)$ записывается с помощью коэффициентов Ламе следующим образом:

$$\operatorname{rot} \vec{a} = \operatorname{rot}_{e_1} \vec{a} \vec{e}_1 + \operatorname{rot}_{e_2} \vec{a} \vec{e}_2 + \operatorname{rot}_{e_3} \vec{a} \vec{e}_3,$$

где

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}_{e_1} \vec{a} &= \frac{1}{L_2 L_3} \left(\frac{\partial(L_3 a_3)}{\partial q_2} - \frac{\partial(L_2 a_2)}{\partial q_3} \right), \\ \operatorname{rot}_{e_2} \vec{a} &= \frac{1}{L_3 L_1} \left(\frac{\partial(L_1 a_1)}{\partial q_3} - \frac{\partial(L_3 a_3)}{\partial q_1} \right), \\ \operatorname{rot}_{e_3} \vec{a} &= \frac{1}{L_1 L_2} \left(\frac{\partial(L_2 a_2)}{\partial q_1} - \frac{\partial(L_1 a_1)}{\partial q_2} \right). \end{aligned} \quad (3.11)$$

Студентам предлагается самостоятельно получить выражения для компонент ротора $\operatorname{rot}_{e_r} \vec{a} \vec{e}_r$ и $\operatorname{rot}_{e_\varphi} \vec{a} \vec{e}_\varphi$ в сферической системе координат, вычисляя циркуляцию вектора \vec{a} по ребрам граней σ_1 и σ_3 (рис. 3.5) и с использованием общей формулы (3.11).

Примеры.

1. Вычислить градиент скалярного поля, заданного в цилиндрических координатах: $U = \rho + z \cos \varphi$.

Решение:

Подставим уравнение поля в общую формулу для градиента в цилиндрических координатах (3.3):

$$\begin{aligned}\operatorname{grad}U &= \frac{\partial U}{\partial \rho} \vec{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial U}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{e}_z \\ &= \vec{e}_\rho - \frac{z}{\rho} \sin \varphi \vec{e}_\varphi + \cos \varphi \vec{e}_z.\end{aligned}$$

Ответ: $\operatorname{grad}U = \vec{e}_\rho - \frac{z}{\rho} \sin \varphi \vec{e}_\varphi + \cos \varphi \vec{e}_z$.

2. Найти в цилиндрической системе координат дивергенцию и ротор векторного поля $\vec{a} = \rho \vec{\rho} + z \vec{z}$.

Решение: Векторное поле \vec{a} имеет следующие компоненты в цилиндрической системе координат:

$$a_\rho = \rho, \quad a_\varphi = 0, \quad a_z = z.$$

Подставим их в общую формулу (3.2):

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \vec{a} &= \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial(a_\rho \rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \\ &= \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial(\rho \cdot \rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial 0}{\partial \varphi} + \frac{\partial z}{\partial z} \\ &= \frac{1}{\rho} \cdot 2\rho + 1 = 2 + 1 = 3.\end{aligned}$$

Вычислим компоненты ротора по формулам (3.10):

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}_{e_\rho} \vec{a} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial a_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial a_\varphi}{\partial z} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial z}{\partial \varphi} - \frac{\partial 0}{\partial z} = 0, \\ \operatorname{rot}_{e_\varphi} \vec{a} &= \frac{\partial a_\rho}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial \rho} = \frac{\partial \rho}{\partial z} - \frac{\partial z}{\partial \rho} = 0, \\ \operatorname{rot}_{e_z} \vec{a} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho \cdot a_\varphi)}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial a_\rho}{\partial \varphi} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho \cdot 0)}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial \varphi} = 0,\end{aligned}$$

Поскольку все компоненты ротора оказались равны нулю, то $\operatorname{rot} \vec{a} = 0$.

Ответ: $\operatorname{div} \vec{a} = 3$, $\operatorname{rot} \vec{a} = 0$.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Векторная алгебра. Скалярное и векторное произведение векторов.
2. Ортогональные криволинейные системы координат. Координатные линии. Координатные поверхности.
3. Орты декартовой, цилиндрической и сферической систем координат: декартова, цилиндрическая, сферическая. Координатные линии и поверхности в этих системах координат.
4. Элемент длины дуги, элемент площади и объёма в декартовой, цилиндрической и сферической системе координат.
5. Скалярные поля. Поверхности и линии уровня. Производная по направлению.
6. Градиент скалярного поля. Координатное и инвариантное определение градиента. Свойства и связь градиента с производной по направлению.
7. Полный дифференциал скалярной функции, инвариантность формы первого дифференциала. Связь полного дифференциала скалярного поля с градиентом.
8. Запись градиента в декартовой, цилиндрической и сферической системе координат.
9. Векторное поле. Векторная линия, её уравнение. Поверхностные интегралы. Поток векторного поля через поверхность.
10. Теорема Остроградского-Гаусса. Источники и стоки векторного поля.
11. Координатное и инвариантное определение дивергенции, её свойства. Источники и стоки векторного поля.
12. Уравнение Лапласа. Потенциальные, соленоидальные и

гармонические векторные поля.

13. Координатная форма дивергенции в декартовой, цилиндрической и сферической системе координат.

13. Криволинейный интеграл векторного поля. Геометрический и физический смысл.

14. Циркуляция. Теорема Стокса. Координатное и инвариантное определение ротора векторного поля, его физический смысл.

15. Потенциальное векторное поле, примеры. Необходимое и достаточное условие потенциальности векторного поля.

16. Символический оператор Гамильтона. Его свойства и связь с градиентом, дивергенцией и ротором. Символический оператор Лапласа.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В пособии приведено систематическое описание дифференциальных и интегральных формул векторного исчисления, используемых при описании скалярных и векторных полей. Изложенный материал может служить математической основой для постановки краевых задач при изучении гравитационных, статических электрических и магнитных полей, переменного электромагнитного поля, гидродинамических полей, механики деформируемых твердых тел и распространения упругих волн.

Литература

- [1] Волкова В.И. Векторный и тензорный анализ: учебное пособие (курс лекций) / В.И. Волкова, Р.Г. Закинян. — Ставрополь: СКФУ, 2022. — 128 с.
- [2] Краснов М.Л. Векторный анализ: задачи и примеры с подробными решениями / М.Л. Краснов, А.И. Киселев, Г.И. Макаренко. — М.: URSS, Едиториал УРСС, 2021. — 144 с.
- [3] Вся высшая математика Т. 4: Кратные и криволинейные интегралы, векторный анализ, функции комплексного переменного, дифференциальные уравнения с частными производными / М.Л. Краснов, А.И. Киселев, Г.И. Макаренко, Е.В. и др. — 4-е изд. — М.: URSS, Едиториал УРСС, 2017. — 352 с.
- [4] Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления для ВТУЗов. Т. 2. Уч. пособие для втузов / Н.С. Пискунов. — Стер. изд. — Москва: Альянс, 2016. — 544 с.
- [5] Дергачев Н. И. Теория поля: учебник для бакалавров / Н. И. Дергачев, В. А. Гершанок. — Санкт-Петербург: Юрайт, 2012. — 278 с.
- [6] Лалтев Г. Ф. Элементы векторного исчисления / Г.Ф. Лалтев. — М.: Наука 1975. — 336 с.

- [7] Кочин Н.Е. Векторное исчисление и начала тензорного исчисления / Н.Е. Кочин. — М.: Наука, 1965. — 426 с.
- [8] Морс Ф. М. Методы теоретической физики. Т. 2. / Ф. М. Морс, Г. Фешбах. — М.: ИЛ, 1960. — 897 с.
- [9] Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа /Л.Г. Лойцянский. — М.-Л.: Гостехиздат, 1950. — 676 с.

Учебное издание

А. А. Галеев,
А. Н. Калимуллина,
Д. И. Хасанов,
Б. Г. Червиков

Введение в векторный анализ