КАЗАНСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

МАТЕМАТИКА.

Лекции за 1 семестр

Учебное пособие

Казань

2024

УДК 517

Печатается по рекомендации учебно-методической комиссии
Института геологии и нефтегазовых технологий
Казанского (Приволжского) федерального университета
(протокол № 9 от 25 апреля 2024 г.),
кафедры математических методов в геологии
Казанского (Приволжского) федерального университета
(протокол № 2 от 21 марта 2024г.)

Рецензенты:
доктор физ.-мат. наук, доцент кафедры
аэрогидромеханики ИММ КФУ **А.Н. Нуриев**;
доктор физ.-мат. наук, ведущий научный
сотрудник, зав. лаб. математического моделирования
процессов фильтрации КазНЦ РАН **А.И. Никифоров**

Жучкова О.С.

Математика. Лекции за 1 семестр: учебное пособие / О.С. Жучкова, О.Н. Тюленева, М.Г. Храмченков, Т.Р. Закиров. – Казань: Казанский университет, 2024. – 157 с.

Учебное пособие представляет собой конспект лекций по математике для студентов 1-го курса Института геологии и нефтегазовых технологий. Изложенный материал рассчитан на изучение в первом семестре и содержит основные сведения из линейной и векторной алгебры, части математического анализа, включающей в себя понятия о функциях, теорию пределов, основы дифференциального и интегрального исчисления. Теоретический материал сопровождается пояснениями в виде рисунков и примеров.
Пособие полностью соответствует программе первого семестра курса математики для студентов направлений «Геология» и «Нефтегазовое дело», а также может быть использовано студентами, обучающимися по другим естественнонаучным направлениям.

Оглавление

Глава 4. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Глава 1. ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

Лекция 1-2

Главной целью этого раздела является знакомство с методами решения систем линейных алгебраических уравнений большой размерности. К таким системам сводятся множество различных задач моделирования сложных физических и технических процессов, таких как процессы тепломассопереноса, фильтрации, экстракции, движения тел в жидкости (в воде, воздухе и пр.), процессы течения жидкостей по каналам и многих прочих. Умение моделировать такие процессы чрезвычайно важно для ключевых отраслей техники, таких как конструирование самолётов, подводных лодок, плотин гидроэлектростанций, реактивных двигателей, для решения задач нефтедобывающей отрасли, строительства, экономики и других.

§1. Определители

1.1. Основные понятия

Понятие определителя возникло в связи с задачей о решении систем алгебраических уравнений первой степени. Определитель также называют **детерминантом**.

Определение 1. ***Определителем второго порядка*** называется число

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

где вертикальные черточки - обозначение определителя, числа a_{ij} - элементы определителя.

В этом определителе, как и в определителях более высокого прядка, о которых речь пойдет ниже, имеются строки и столбцы, причем первый индекс каждого элемента определителя указывает номер строки, второй индекс – номер столбца, в котором расположен элемент. Так элемент определителя a_{21} расположен во второй строке и первом столбце рассматриваемого определителя. Считается, что ***главной диагональю*** определителя является диагональ с элементами a_{11} и a_{22}. Другую диагональ называют ***побочной***.

Таким образом, правило вычисления определителя следующее: ***определитель второго порядка равен разности произведений элементов главной и побочной диагоналей***.

Пример: Вычислить определитель второго порядка $\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$

Решение:

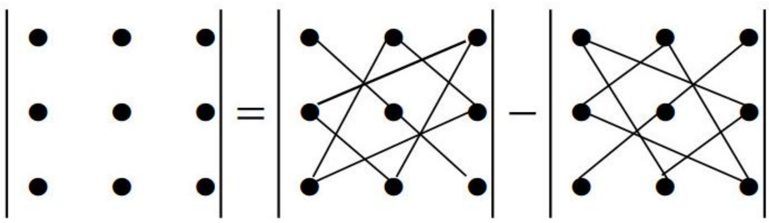
$$\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -2 \cdot 5 - (-2) \cdot 4 = -10 + 8 = -2$$

Определение 2. ***Определителем третьего порядка*** называется число

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

При вычислении определителя 3-го порядка удобно пользоваться *правилом треугольников* (или Саррюса), которое схематично можно представить в виде:



Итак, в формуле первые три слагаемых взяты со знаком $(+)$, то есть они имеют тот знак, который дает произведение элементов, перед последними тремя слагаемыми стоит знак $(-)$, то есть каждое слагаемое имеет знак, противоположный знаку произведения элементов. Первое слагаемое является произведением элементов главной диагонали определителя (см. рисунок). Второе слагаемое $a_{12}a_{23}a_{31}$ - есть произведение элементов, находящихся в вершинах равнобедренного треугольника, основание которого параллельно главной диагонали и расположено выше ее. Третье слагаемое $a_{21}a_{32}a_{13}$ – также произведение элементов, находящихся в вершинах равнобедренного треугольника, основание которого параллельно главной диагонали определителя и расположено ниже главной диагонали. Четвертое слагаемое – есть произведение элементов побочной диагонали определителя со знаком $(-)$, остальные два слагаемых записываются по той же схеме.

Наряду с определителями второго и третьего порядков, используются определители более высоких порядков. Так, в общем случае определитель n - го порядка содержит n строк и n столбцов.

Замечание. Отметим, что для определителей четвертого и более высоких порядков не существует формул, подобных приведенным выше. Однако, известны процедуры, позволяющие определять их значения.

Определение 3. ***Минором*** M_{ij} элемента a_{ij} определителя называется определитель на единицу меньшего порядка, образованный из исходного определителя вычеркиванием строки и столбца, на пересечении которых расположен элемент.

Примеры.

1. Для определителя третьего порядка

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

минором элемента a_{21} является следующий определитель второго порядка:

$$M_{21} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

У определителя 3-го порядка имеется 9 миноров.

2. Для определителя второго порядка

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

минором элемента a_{22} является определитель первого порядка (т.е. число)

$$M_{22} = a_{11}.$$

Определение 4. ***Алгебраическим дополнением*** A_{ij} элемента определителя называется выражение, определяемое формулой

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

Очевидно, алгебраическое дополнение элемента совпадает с минором того же элемента определителя при $i + j$ – четном, и отличается от него знаком в противном случае.

Примеры.

1. Для определителя третьего порядка

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

алгебраическим дополнением элемента a_{21} является

$$A_{21} = (-1)^{2+1} M_{21} = -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

2. Для определителя второго порядка

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

минором элемента a_{22} является определитель первого порядка (т.е. число)

$$A_{22} = (-1)^{2+2} M_{22} = a_{11}.$$

Знаки алгебраических дополнений элементов определителей второго, третьего и четвертого порядка можно задать следующими таблицами:

$$\begin{vmatrix} + & - \\ - & + \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{vmatrix}.$$

Теорема разложения определителя по элементам некоторого ряда: Определитель равен сумме произведений элементов некоторой строки (столбца) на соответствующие им алгебраические дополнения, т.е. для определителя третьего порядка имеем:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} =$$

$$= a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} =$$

$$= a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31} = \quad \text{и т.д.}$$

Доказательство. Проиллюстрируем эту теорему на примере определителя третьего порядка. В этом случае для первой строки имеем:

$$a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} =$$

$$a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}\left(-\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}\right) + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} = \Delta,$$

(по определению)

Для второго столбца

$$a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32} =$$

$$a_{12}\left(-\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}\right) + a_{22}\left(+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}\right) + a_{32}\left(-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{33} \end{vmatrix}\right) =$$

$$= -a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{22}a_{11}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{32}a_{11}a_{23} + a_{32}a_{13}a_{21} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} = \Delta,$$

(по определению)

Ч.Т.Д.

Пример. Вычислить $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$.

Решение.

Разложим определитель по первой строке

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} - (-2) \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 8 - 6 + 0 - 4 + 0 - 12 = -14,$$

Разложим определитель по первому столбцу

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 8 - 6 - 0 - 4 - 12 = -14.$$

С помощью теоремы разложения определителя по элементам некоторого ряда можно вычислить определитель любого порядка. Значит, ***чтобы вычислить определитель n порядка, необходимо элементы некоторого ряда (т.е. строки или столбца) умножить на соответствующие ему алгебраические дополнения, т.е. надо вычислить n определителей (n-1)-го порядка***:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \dots + a_{1n}A_{1n}.$$

1.2. Свойства определителей

Сформулируем основные свойства определителей, присущие определителям всех порядков, но доказывать и иллюстрировать их будем на примере определителей третьего порядка.

1. Равноправность строк и столбцов. Определитель не меняет своего значения при замене всех его строк соответствующими столбцами, т.е.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Упр. Доказать самостоятельно данное свойство.

Следствием этого свойства является то, что свойство, доказанное для строк определителя, справедливо и для его столбцов.

2. При перестановке двух параллельных строк (столбцов) знак определителя меняется на противоположный.

Доказательство: Пусть, например, в определителе

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

переставлены первая и вторая строки, тогда получим определитель:

$$\tilde{\Delta} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Разложим второй определитель по элементам второй строки

$$\tilde{\Delta} = a_{11} \cdot \left(- \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \right) + a_{12} \cdot \left(+ \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \right) + a_{13} \cdot \left(- \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \right) =$$

$$- \left(a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12} \left(- \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \right) + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \right) = -\Delta .$$

Ч.Т.Д.

3. Определитель, имеющий две одинаковые строки (или столбца), равен нулю.

Доказательство: Пусть, например, в определителе одинаковые первая и третья строки, тогда

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{vmatrix} = \underline{a_{11}a_{22}a_{13}} + \underline{\underline{a_{12}a_{23}a_{11}}} + a_{21}a_{12}a_{13} -$$

$$- \underline{a_{13}a_{22}a_{11}} - a_{12}a_{21}a_{13} - \underline{\underline{a_{23}a_{12}a_{11}}} = 0.$$

Ч.Т.Д.

4. Общий множитель элементов какой-либо строки (столбца) определителя можно выносить за знак определителя, т.е.

$$\Delta = \begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Упр. Доказать самостоятельно данное свойство.

5. Если все элементы какой-либо строки (столбца) определителя равны нулю, то определитель равен нулю

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

6. Если элементы какой-либо строки (столбца) определителя пропорциональны соответствующим элементам параллельной строки (столбца), то определитель равен нулю, т.е.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

7. Если элементы какой-либо строки (столбца) определителя представляют собой суммы двух слагаемых, то определитель может быть разложен на сумму двух соответствующих определителей, т.е.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}+b \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}+c \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}+d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b \\ a_{21} & a_{22} & c \\ a_{31} & a_{32} & d \end{vmatrix}.$$

Упр. Доказать самостоятельно данное свойство.

8. Элементарные преобразования определителя. Величина определителя не изменится, если к элементам какой-либо строки (столбца) его прибавить (или отнять) числа, пропорциональные соответствующим элементам параллельной строки (столбца) с одним и тем же коэффициентом пропорциональности.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+k\,a_{11} & a_{22}+k\,a_{12} & a_{23}+k\,a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ k\,a_{11} & k\,a_{12} & k\,a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Доказательство проведено с использованием свойств7 и 6.

Ч.Т.Д.

Пример. Вычислить определитель четвертого порядка

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & -6 \\ -2 & 3 & 7 & 1 \\ 4 & 5 & 3 & 5 \\ -6 & 4 & 3 & 2 \end{vmatrix}.$$

Единственным способом решения этой задачи является использование ***теоремы о разложении определителя по элементам некоторого ряда***:

$$\Delta = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} + a_{14}A_{14}.$$

Но в этом случае необходимо вычислять 4 алгебраических дополнения, то есть 4 определителя третьего порядка, что является громоздкой процедурой, которая может привести к ошибкам вычислений. Предлагается упростить определитель, используя ***свойство 8***.

Идея основана на получении в определителе возможно большего количества нулей. Для этого преобразуем вторую, третью и четвертую строки определителя следующим образом: умножаем первую строку на 2 и суммируем со второй, умножаем первую строку определителя на (- 4) и суммируем с третьей строкой, наконец, умножаем первую строку определителя на 6 и суммируем с четвертой строкой.

В результате первая строка определителя остается прежней, меняются остальные строки:

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & -6 \\ -2 & 3 & 7 & 1 \\ 4 & 5 & 3 & 5 \\ -6 & 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & -6 \\ 0 & 7 & 11 & -11 \\ 0 & -3 & -5 & 29 \\ 0 & 16 & 15 & -34 \end{vmatrix}.$$

Используем теперь ***теорему***, разлагая определитель по элементам первого столбца, затем полученный определитель третьего порядка по элементам третьей строки:

$$\Delta = 1 \cdot \begin{vmatrix} 7 & 11 & -11 \\ -3 & -5 & 29 \\ 16 & 15 & -34 \end{vmatrix} = 16 \cdot (11 \cdot 29 - 11 \cdot 5) - 15 \cdot (7 \cdot 29 - 11 \cdot 3) -$$

$$-34 \cdot (-7 \cdot 5 + 11 \cdot 3) = 1742$$

§2. Матрицы

2.1. Основные понятия

Матрицы - это таблицы, содержащие некоторую информацию и в отличие от определителей, их нельзя вычислить. Они хранят некоторые данные (необязательно числовые) об объектах или процессах в упорядоченном табличном виде. Например, в матрице могут храниться коэффициенты системы алгебраических уравнений. Мы будем рассматривать только вещественные числовые матрицы.

Определение 1. ***Матрицей*** называется прямоугольная таблица, составленная из чисел, содержащая m строк и n столбцов, которая записывается в виде

$$A_{m\times n}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{pmatrix},$$

где числа a_{ij} $(i=1,\dots,m\ ;\quad j=1,\dots,n)$ называются элементами матрицы.

Обозначения: Коротко матрицу обозначают так:

$$A=\left(a_{ij}\right), \text{где } i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n} \quad \text{или} \quad A_{m\times n}.$$

Здесь индекс $m\times n$ внизу читается как «m ***на*** n» и обозначает ***размер матрицы*** (т.е. число строк равно m, а число столбцов n), и говорят: A - матрица размера m на n.

Пример. $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$ – матрица размера 3×4,

В литературе можно встретить еще такое обозначение матрицы:

$$A=\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{Vmatrix}$$

Определение 2. Элементы, стоящие на диагонали, идущей из верхнего угла, образуют ***главную диагональ***.

Определение 3. Матрица, у которой число строк равно числу столбцов, называется ***квадратной***.

Иногда говорят, что ее размер, скажем, $m \times m$, чаще такую матрицу называют матрицей $m-$го порядка.

Определение 4. Квадратная матрица, у которой все элементы, кроме элементов главной диагонали, равны нулю, называется ***диагональной матрицей,*** т.е.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Определение 5. Диагональная матрица, у которой каждый элемент главной диагонали равен единице, называется ***единичной***. Обозначается буквой E.

Пример.

$$E_{3\times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ – единичная матрица третьего порядка,}$$

$$E_{n\times n} = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} \text{ – единичная матрица } n\text{-го порядка.}$$

Определение 6. Квадратная матрица называется ***треугольной***, если все элементы, расположенные по одну сторону от главной диагонали, равны нулю, т.е.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ & & & a_{n-1\,n-1} & a_{n-1n} \\ \vdots & & & \ddots & \\ & & & & \\ 0 & & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Определение 7. Матрица, все элементы которой равны нулю, называется ***нулевой***. Обозначается буквой O.

В матричном исчислении матрицы O и E играют роль чисел 0 и 1 в арифметике.

Определение 8. Матрица, содержащая один столбец или одну строку, называется ***вектор-столбец*** или ***вектор-строка*** соответственно. Их вид:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{pmatrix}.$$

Матрица размера 1×1, состоящая из одного числа, отождествляется с этим числом, т.е. $(5)_{1\times 1}$ есть 5.

Определение 9. Матрица, полученная из данной заменой каждой ее строки столбцом с тем же номером называется ***матрицей транспонированной к данной***.

Обозначение: A^T.

Примеры.

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \qquad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$

2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \qquad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$

3. $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}.$

Свойство транспонированной матрицы: $\left(A^T\right)^T = A$.

Определение 10. Матрицы **равны** между собой, если равны все соответствующие элементы этих матриц, т.е.

$$A = B, \quad \text{если} \quad a_{ij} = b_{ij}, \quad \text{где } i = \overline{1,\ m}, \quad j = \overline{1,\ n}$$

Т.е. сравнивать мы можем только те матрицы, у которых равны размеры.

2.2. Действия с матрицами

Как отмечалось выше, матрицы – это таблицы, содержащие некоторую информацию, а ,следовательно, свойства матриц определяются контекстом ситуации, в которой они используются.

Наибольшее распространение матрицы получили в линейной алгебре, в частности, при решении систем линейных алгебраических уравнений, упрощении квадратичных форм и т.д. Поэтому большинство свойств матриц приспособлено к решению этих задач.

Сложение

Определение 11. ***Суммой двух матриц*** одного размера называется матрица того же размера, каждый элемент которой представляет сумму соответствующих элементов суммируемых матриц. Пусть

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \end{pmatrix},$$

тогда

$$A+B=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} & a_{14}+b_{14} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} & a_{24}+b_{24} \end{pmatrix}.$$

Аналогично

$$A-B=\begin{pmatrix} a_{11}-b_{11} & a_{12}-b_{12} & a_{13}-b_{13} & a_{14}-b_{14} \\ a_{21}-b_{21} & a_{22}-b_{22} & a_{23}-b_{23} & a_{24}-b_{24} \end{pmatrix}.$$

Умножение на число

Определение 12. ***Произведением матрицы на число*** называется матрица того же размера, каждым элементом которой является произведением соответствующего элемента умножаемой матрицы на это число.

$$p\cdot\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} pa_{11} & pa_{12} & pa_{13} \\ pa_{21} & pa_{22} & pa_{23} \end{pmatrix}.$$

Замечание. *Отметим, что суммирование определителей и умножение определителя на число осуществляется по иным законам.*

Операции сложения матриц и умножения матрицы на число обладают следующими свойствами.

Свойства операций сложения и умножения матрицы на число

1. Свойство переместительности: $A+B=B+A$;
2. Свойство сочетательности: $A+\left(B+C\right)=\left(A+B\right)+C$;
3. $A+O=A$;
4. $A-A=O$;
5. $1\cdot A=A$
6. Свойство распределительности по отношению к матрицам:
$$\alpha\cdot\left(A+B\right)=\alpha A+\alpha B;$$
7. Свойство распределительности по отношению к числовому множителю:
$$\left(\alpha+\beta\right)\cdot A=\alpha A+\beta A;$$
8. Свойство сочетательности: $\alpha\cdot\left(\beta A\right)=\left(\alpha\beta\right)\cdot A$,

где A, B, C - матрицы, α, β - числа.

9. $\left(A+B\right)^T=A^T+B^T$.

Примеры.

Вычислить матрицы $A+B$ и $3A-2B$,

где $A=\begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -2 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$, $\quad B=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 6 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Решение:

$$A+B=\begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -2 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 6 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7 & -5 \\ 4 & 5 \\ 4 & -1 \end{pmatrix},$$

$$3A-2B=3\begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -2 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}-2\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 6 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 15 & -12 \\ -6 & 3 \\ 3 & -9 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 12 & 8 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 11 & -10 \\ -18 & -5 \\ -3 & -13 \end{pmatrix}.$$

Произведение матриц

Операция умножения двух матриц вводится только для случая, когда ***число столбцов первой матрицы равно числу строк второй матрицы***.

Определение 13. ***Произведением матрицы А размера*** $m \times n$ ***на матрицу В размера*** $n \times k$ является матрица *С* размера $m \times k$, такая что

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj},$$

где $i = 1, \ldots, m$; $j = 1, \ldots, k$, т.е. элемент, лежащий в $i-$ строке и $j-$ столбце, представляет собой сумму произведений элементов $i-$ строки матрицы *A* и $j-$ столбца матрицы *B*.

Примеры.

1. $$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} + a_{33}b_{31} & a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} + a_{33}b_{32} \end{pmatrix}.$$

Итак, мы перемножили матрицы размерами 3×3, 3×2 и получили матрицу - произведение размером 3×2.

2. $$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 5 & 1 \\ 7 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. $$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} + a_{33}b_{31} \end{pmatrix}.$$

В результате получаем вектор-столбец.

Отметим особенности и свойства умножения матриц.

Свойства умножения матриц

1) $A\cdot B\neq B\cdot A$ (переместительного свойства нет).

Пример. Даны матрицы $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & -4\\ -5 & 7\end{pmatrix}$. Найти произведения $A\cdot B$ и $B\cdot A$.

Решение.

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -4\\ -5 & 7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & -11\\ -15 & 13\end{pmatrix},$$

$$B\cdot A=\begin{pmatrix}0 & -4\\ -5 & 7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-8 & -12\\ 9 & 26\end{pmatrix}.$$

Более того, если матрица $A\cdot B$ существует, то матрица $B\cdot A$ может не существовать. Поэтому принято говорить «умножим матрицу *A* справа на *B*», тогда получим *AB*. При умножении матрицы *A* «слева на *B*» имеем $B\cdot A$.

Если матрицы *A* и *B* квадратные одного размера, то произведения $A\cdot B$ и $B\cdot A$ всегда существуют. Матрицы *A* и *B* называются ***перестановочными***, если $A\cdot B=B\cdot A$.

2) Произведение квадратной матрицы на единичную матрицу того же порядка равно самой матрице, т.е.

$$A\cdot E= E\cdot A=A.$$

Доказательство.

$$\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}\cdot 1+a_{12}\cdot 0 & a_{11}\cdot 0+a_{12}\cdot 1\\ a_{21}\cdot 1+a_{22}\cdot 0 & a_{21}\cdot 0+a_{22}\cdot 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}.$$

Итак, $A\cdot E=A$. Нетрудно показать, что $E\cdot A=A$.

Ч.Т.Д.

3) $(A\cdot B)^T=B^T\cdot A^T$.

Доказательство.

Пусть $A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{pmatrix}$.

Тогда

$$A^T=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{21}\\ a_{12} & a_{22}\end{pmatrix}, \quad B^T=\begin{pmatrix}b_{11} & b_{21}\\ b_{12} & b_{22}\end{pmatrix}.$$

$$A\cdot B=\begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{12} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} \end{pmatrix}.$$

В то же время

$$\left(A\cdot B\right)^T=\begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}\,b_{21} & a_{21}b_{11}+a_{22}\,b_{21} \\ a_{11}b_{12}+a_{12}\,b_{22} & a_{21}b_{12}+a_{22}\,b_{22} \end{pmatrix}.$$

$$B^T\cdot A^T=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} \\ b_{12} & b_{22} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}\,b_{21} & a_{21}b_{11}+a_{22}\,b_{21} \\ a_{11}b_{12}+a_{12}\,b_{22} & a_{21}b_{12}+a_{22}\,b_{22} \end{pmatrix}=\left(A\cdot B\right)^T .$$

Ч.Т.Д.

Непосредственной проверкой можно убедиться, что для суммы и произведения матриц справедливы следующие свойства:

4) $\left(A+B\right)^T=A^T+B^T$,

5) $A\left(BC\right)=\left(AB\right)C$ (свойство сочетательности),

6) $A\left(B+C\right)=AB+AC$ (свойство распределительности),

7) $\left(A+B\right)C=AC+BC$ (свойство распределительности),

8) $\alpha\left(AB\right)=\left(\alpha A\right)B$ (свойство распределительности).

Для квадратных матриц существует числовая характеристика, которая называется ***определителем матрицы***. Пусть матрица A – квадратная, тогда ее определитель обозначается $\det(A)$.

Пример. Вычислить определитель матрицы

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 5 & 6 \\ -3 & -5 & 10 \\ 12 & -8 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение.

$$\Delta=\det(A)=\begin{vmatrix} -1 & 5 & 6 \\ -3 & -5 & 10 \\ 12 & -8 & 1 \end{vmatrix}=1044.$$

Элементарные преобразования матриц

Элементарными преобразованиями матриц являются:

- Перестановка местами двух параллельных рядов матрицы;
- Умножение всех элементов матрицы на число, отличное от нуля;
- Прибавление ко всем элементам ряда матрицы соответствующих элементов параллельного ряда, умноженных на одно и то же число.

Определение 14. Две матрицы называются ***эквивалентными***, если одна из них получается из другой с помощью элементарных преобразований.

Обозначение: $A \sim B$.

2.3. Обратная матрица

Определение 15. Квадратная матрица называется ***невырожденной***, если ее определитель $\Delta \neq 0$.

Определение 16. ***Обратной матрицей*** квадратной матрицы A называют матрицу A^{-1}, для которой выполняется соотношение:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E.$$

Обратная матрица вычисляется по формуле

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{\Delta} & \frac{A_{21}}{\Delta} & \frac{A_{31}}{\Delta} \\ \frac{A_{12}}{\Delta} & \frac{A_{22}}{\Delta} & \frac{A_{32}}{\Delta} \\ \frac{A_{13}}{\Delta} & \frac{A_{23}}{\Delta} & \frac{A_{33}}{\Delta} \end{pmatrix},$$

где Δ – определитель матрицы A, A_{ij} – алгебраические дополнения элементов матрицы A.

Эта формула легко доказывается перемножением $A \cdot A^{-1} = E$.

Очевидно, ***обратная матрица существует только для невырожденных матриц***, то есть матриц, определитель которых не равен нулю. Вырожденная матрица (ее определитель равен нулю) обратной матрицы не имеет.

Отметим **свойства обратной матрицы:**

1. $\det\left(A^{-1}\right)=\dfrac{1}{\det A}$,

2. $\left(AB\right)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$,

3. $\left(A^{-1}\right)^{T}=\left(A^{T}\right)^{-1}$.

2.4. Ранг матрицы

Определение 17. ***Рангом матрицы*** называется наивысший из порядков миноров данной матрицы, отличных от нуля.

Рассмотрим матрицу $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & -5 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & -1 & 8 \end{pmatrix}$, один из ее миноров подсчитан ранее $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & 3 \\ 2 & 7 & -1 \end{vmatrix}=33\neq 0$, и следовательно, ранг матрицы равен трем.

Если все миноры третьего порядка матрицы того же размера, а их четыре, были бы равны нулю, но хотя бы один из определителей второго порядка был не равен нулю, ранг той матрицы был бы равен двум.

Свойства ранга матрицы

1. При транспонировании матрицы ее ранг не меняется.
2. Если вычеркнуть из матрицы нулевой ряд, то ранг матрицы не изменится.
3. Ранг матрицы не изменяется при элементарных преобразованиях матрицы.
4. Ранг нулевой матрицы равен 0. Ранг любой ненулевой матрицы-строки или матрицы-столбца равен единице. Ранг матрицы не превосходит ее минимальной размерности.
5. Вычислить ранг матрицы можно с помощью элементарных преобразований, направленных на получение матрицы ступенчатого вида.

Примеры.

1. $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 2 & -2 & 4\\ -1 & 1 & -2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow rank(A)=1$

2.

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 0 & 5\\ 2 & 4 & -1 & 0\\ -2 & -4 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 2 & 1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 2 & 0 & 5\\ 0 & 0 & -1 & -10\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 2 & -4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 2 & 0 & 5\\ 0 & -2 & 2 & -4\\ 0 & 0 & -1 & -10\end{pmatrix}\Rightarrow rank(A)=3$$

Ранг матрицы равен числу ненулевых строк в матрице ступенчатого вида.

§ 3. Системы линейных алгебраических уравнений

3.1. Основные определения

Определение 1. ***Системой линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)***, содержащей m уравнений и n неизвестных, называется система вида:

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\ ,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3+\cdots+a_{2n}x_n=b_2\ ,\\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3+\cdots+a_{3n}x_n=b_3\ ,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+a_{m3}x_3+\cdots+a_{mn}x_n=b_m\ ,\end{cases}$$

где числа a_{ij}, $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$ называются ***коэффициентами системы***, числа b_{ij} - ***свободными членами системы***. Подлежат нахождению числа x_n.

Обозначим

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}\end{pmatrix},\ X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_n\end{pmatrix}.$$

Нетрудно заметить, что ***в матричном виде система будет выглядеть следующим образом:***

$$A \cdot X = B.$$

Решить систему уравнений значит найти такие числа x_i $(i=\overline{1,\,n})$, что при подстановке в исходную систему уравнений каждое уравнение системы обратится в тождество. Необязательно решение будет единственным.

Определение 2. Система уравнений называется ***совместной***, если она имеет хотя бы одно решение, и ***несовместной***, если она не имеет ни одного решения.

Определение 3. Совместная система называется ***определенной,*** если она имеет единственное решение, и ***неопределенной***, если она имеет более одного решения. В последнем случае каждое ее решение называется ***частным решением*** системы. Совокупность всех частных решений называется ***общим решением.***

Решить систему – это значит выяснить, совместна она или несовместна. Если система совместна, найти ее общее решение.

Определение 4. Две системы называются ***эквивалентными*** (равносильными), если они имеют одно и то же общее решение.

Определение 5. Система уравнений называется ***однородной***, если все свободные члены равны нулю:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = 0\,, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = 0\,, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n = 0\,, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n = 0\,. \end{cases}$$

Однородная система всегда совместна, т.к. $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ является решением системы. Это решение называется ***нулевым*** или ***тривиальным***.

3.2. Матричный метод решения СЛАУ

Рассмотрим систему из n уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1\ , \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2\ , \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n = b_3\ , \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n\ , \end{cases}$$

В матричном виде система примет вид:

$$A \cdot X = B\,.$$

Умножим уравнение слева на матрицу A^{-1}. Ясно, что она должна существовать, то есть определитель матрицы A должен быть не равным нулю. Это означает, что данный метод пригоден только для случая единственного решения системы уравнений. Итак,

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B \Rightarrow\ E \cdot X = A^{-1} \cdot B \Rightarrow\ X = A^{-1} \cdot B\,.$$

Решение получено, остается его реализовать.

Пример. Решить систему

$$\begin{cases} 2\,x_1 - 4x_2 + 9x_3 = 28, \\ 7\,x_1 + 3x_2 - 6x_3 = -1, \\ 7\,x_1 + 9x_2 - 9x_3 = \ 5. \end{cases}$$

Решение.

Очевидно

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 9 \\ 7 & 3 & -6 \\ 7 & 9 & -9 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 28 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Основной определитель этой системы уравнений совпадает с определителем матрицы A:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 9 \\ 7 & 3 & -6 \\ 7 & 9 & -9 \end{vmatrix} = 2 \cdot 27 - 4 \cdot 21 + 9 \cdot 42 = 348\,.$$

Подсчитаем алгебраические дополнения всех элементов определителя:

$A_{11}=27$; $A_{12}=21$; $A_{13}=42$; $A_{21}=45$; $A_{22}=-81$;

$A_{23}=-46$; $A_{31}=-3$; $A_{32}=75$; $A_{33}=34$.

Тогда

$$A^{-1}=\frac{1}{348}\begin{pmatrix}27 & 45 & -3\\ 21 & -81 & 75\\ 42 & -46 & 34\end{pmatrix},$$

и найдем решение:

$$X=A^{-1}B=\frac{1}{348}\begin{pmatrix}27 & 45 & -3\\ 21 & -81 & 75\\ 42 & -46 & 34\end{pmatrix}\begin{pmatrix}28\\ -1\\ 5\end{pmatrix}.$$

$$X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\frac{1}{348}\begin{pmatrix}27\cdot 28+45\cdot(-1)-3\cdot 5\\ 21\cdot 28+81\cdot 1+75\cdot 5\\ 42\cdot 28+46\cdot 1+34\cdot 5\end{pmatrix}=\frac{1}{348}\begin{pmatrix}696\\ 1044\\ 1392\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ 3\\ 4\end{pmatrix},$$

отсюда $x_1=2$, $x_3=3$, $x_3=4$.

3.3. Метод Крамера решения СЛАУ

Рассмотрим систему двух уравнений с двумя неизвестными

$$\begin{cases}a_{11}x+a_{12}y=b_1\ ,\\ a_{21}x+a_{22}y=b_2\ .\end{cases}$$

Для решения системы применим ***метод исключения***. Для этого умножим первое уравнение системы на a_{22}, а второе на $\left(-a_{12}\right)$ и сложим их, получим

$$\left(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\right)x=b_1a_{22}-b_2a_{12}. \qquad (1)$$

Аналогично, умножая первое уравнение системы на $\left(-a_{21}\right)$, а второе – на a_{11} и складывая, получим

$$\left(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\right)y=b_2a_{11}-b_1a_{21}. \qquad (2)$$

В полученных уравнениях в левой части стоят одинаковые выражения, а в правой стоят выражения по структуре похожие на выражение в левой части.

Пусть Δ – определитель системы, Δ_x, Δ_y – дополнительные определители задаются следующим образом:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}\ , \Delta_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1 a_{22} - b_2 a_{12}\,,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11}b_2 - a_{21}b_1\ .$$

Заметим, что дополнительные определители Δ_x и Δ_y задают выражения, стоящие в правых частях уравнений (1) и (2). Они получаются из определителя системы Δ путем замены коэффициентов при одной из неизвестных на соответствующие свободные члены.

Тогда уравнения (1), (2) принимают вид:

$$\Delta \cdot x = \Delta_x, \qquad \Delta \cdot y = \Delta_y.$$

При дальнейшем решении возможны два варианта:

1) Если $\Delta \neq 0$, то получаем, что исходная система уравнений имеет единственное решение

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \qquad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} \text{ (формулы Крамера).}$$

2) Если $\Delta = 0$:

- Если $\Delta = 0$ и хотя бы один из определителей Δ_x или $\Delta_y \neq 0$, то **система не имеет решений** (т.е. несовместна).
- Если $\Delta = 0$ и $\Delta_x = \Delta_y = 0$, то система имеет **бесчисленное множество решений** (т.е. система неопределенная).

Доказательство.

Если $\Delta = 0$ и хотя бы один из определителей Δ_x или $\Delta_y \neq 0$ (пусть $\Delta_x \neq 0$), из первого уравнения системы (1), получаем

$$\underline{\Delta \cdot x = 0 = \Delta_x \neq 0} \text{ - противоречие.}$$

Значит, система уравнений не имеет решений.

Если $\Delta = 0$ и $\Delta_x = \Delta_y = 0$, то из системы (1):

$$\Delta \cdot x = 0 = \Delta_x = 0,\ \Delta \cdot y = 0 = \Delta_y = 0 \text{ - тождественные равенства.}$$

Ч.Т.Д.

Примеры.

1. $\begin{cases} 3x + 6y = 3, \\ 4x + 8y = 2. \end{cases}$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2\cdot 3 \\ 4 & 2\cdot 4 \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} \neq 0, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$$

Решений нет.

Действительно, сократим первое уравнение на 3, а второе на 4, получим:

$$\begin{cases} x + 2y = 1, \\ x + 2y = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Нельзя найти такие x, y, которые бы обращали в тождество оба уравнения системы.

2. $\begin{cases} 2x + 3y = 8, \\ 4x + 6y = 16. \end{cases}$

Здесь $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 0$, $\Delta_x = \begin{vmatrix} 8 & 3 \\ 16 & 6 \end{vmatrix} = 0$, $\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 4 & 16 \end{vmatrix} = 0$.

Одно из уравнений является следствием другого (например, второе получается из первого умножением на 2). Система сводится к одному уравнению и имеет бесчисленное множество решений, содержащихся в формуле:

$$y = -\frac{2}{3}x + \frac{8}{3}.$$

3. $\begin{cases} 2x + 3y = 8, \\ 7x - 5y = -3. \end{cases}$

Здесь все определители отличны от нуля:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 7 & -5 \end{vmatrix} = -31, \ \Delta_x = \begin{vmatrix} 8 & 3 \\ -3 & -5 \end{vmatrix} = -31, \ \Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 7 & -3 \end{vmatrix} = -62$$

Система имеет единственное решение:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = 1, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = 2.$$

Обобщение на случай трех уравнений с тремя неизвестными

Рассмотрим систему:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 , \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2, \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \ . \end{cases}$$

Выпишем определитель системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

а также дополнительные определители

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \ \Delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \ \Delta_z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

Возможны два варианта:

1) $\Delta \neq 0$, тогда решение исходной системы уравнений существует и оно единственное.

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \qquad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}, \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta} \text{ (формулы Крамера)} \qquad (3)$$

2) $\Delta = 0$

- Если $\Delta = 0$ и хотя бы один из определителей Δ_x или Δ_y или $\Delta_z \neq 0$, то хотя бы одно из равенств (3) невозможно, т.е. система **не имеет решений** (т.е. несовместна).
- Если $\Delta = 0$ и $\Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$, то система имеет либо **бесчисленное множество решений** (т.е. система неопределенная) либо **не имеет решений** (т.е. система несовместна).

Примеры.

$$1. \begin{cases} x + y + z = 2, \\ 3x + 2y + 2z = 1, \\ 4x + 3y + 3z = 4. \end{cases}$$

Не имеет решений, т.к. $\Delta = 0, \quad \Delta_y = 1 \neq 0$.

$$2.\begin{cases} x+y+z=1, \\ 2x+y+z=2, \\ 3x+2y+2z=3. \end{cases}$$

Имеет бесчисленное множество решений.

$$\Delta=0, \quad \Delta_x=\Delta_y=\Delta_z=0.$$

Ищем минор отличный от нуля $M_{33}=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=-1$, возьмем первые два уравнения системы и запишем их в виде

$$\begin{cases} x+y=1-z, \\ 2x+y=2-z. \end{cases}$$

Определитель этой системы $\tilde{\Delta}=M_{33}=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=-1\neq 0$.

Воспользуемся формулами Крамера:

$$\tilde{\Delta}_x=\begin{vmatrix} 1-z & 1 \\ 2-z & 1 \end{vmatrix}=1-z-2+z=-1,$$

$$\tilde{\Delta}_y=\begin{vmatrix} 1 & 1-z \\ 2 & 2-z \end{vmatrix}=2-z-2+2z=z,$$

Тогда решение этой системы запишется в виде

$$x=\frac{\tilde{\Delta}_x}{\tilde{\Delta}}=\frac{-1}{-1}=1, \quad y=\frac{\tilde{\Delta}_y}{\tilde{\Delta}}=\frac{z}{-1}=-z.$$

Если возьмем $z=-t$, то решение системы запишется в виде

$$x=1, \ y=t, \ z=-t$$

$$3.\begin{cases} x+y+z=1, \\ 2x+2y+2z=3, \\ 3x+3y+3z=4. \end{cases}$$

Не имеет решений, т.к. $\Delta=0, \quad \Delta_x=\Delta_y=\Delta_z=0$, но уже первые два ее уравнения не совместны, т.к. если умножить первое из них на 2 и вычесть из второго, то получим невозможное равенство 0=1.

$$4.\begin{cases} x+y+z=1, \\ 2x+2y+2z=2, \\ 3x+3y+3z=3. \end{cases}$$

Имеет бесчисленное множество решений. Здесь $\Delta = 0$, $\Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$ и все миноры равны нулю и пропорциональны свободные члены, т.е. второе и третье уравнения являются следствием первого. Значит, имеем одно уравнение с тремя неизвестными, которое, естественно, имеет бесчисленное множество решений.

3.4. Метод Гаусса решения СЛАУ

Итак, матричный метод применим только в случае единственного решения системы уравнений. Метод Крамера применим, если число неизвестных совпадает с числом уравнений системы, можно его приспособить и к случаю, когда число неизвестных больше числа уравнений. Однако этот метод приводит к большому числу вычислений, и выгодно его применять только при наличии единственного решения системы.

Метод Гаусса отличается тем, что его можно применять в случае, когда число неизвестных не соответствует числу уравнений системы. Его достоинством является то, что он предлагает единый процесс получения решения как совместных, так и не совместных систем.

Пусть дана система m линейных уравнений с n неизвестными

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + a_{13} \cdot x_3 + \ldots + a_{1n} \cdot x_n = b_1, \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + a_{23} \cdot x_3 + \ldots + a_{2n} \cdot x_n = b_2, \\ a_{31} \cdot x_1 + a_{32} \cdot x_2 + a_{33} \cdot x_3 + \ldots + a_{3n} \cdot x_n = b_3, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + a_{m3} \cdot x_3 + \ldots + a_{mn} \cdot x_n = b_m. \end{cases} \qquad (4)$$

Метод Гаусса или ***метод последовательного исключения неизвестных*** состоит из двух этапов: ***прямой ход*** и ***обратный ход***.

На прямом ходе система приводится к виду, при котором матрица системы имеет треугольный вид – под главной диагональю все элементы равны 0. Этого можно добиться путем использования элементарных преобразований: умножением строк на число и сложением строк.

Предположим, что $a_{11} \neq 0$ (этого всегда можно добиться, поменяв уравнения местами). Исключим переменную x_1 из остальных уравнений системы. Для этого умножим первое уравнение системы (4) на $-a_{21}/a_{11}$ и прибавим ко второму, в результате получим уравнение, в котором коэффициент при x_1 обращается в ноль, т.е. переменная x_1 исключается из этого уравнения. Аналогично поступим с третьим уравнением (4), прибавляя к нему первое уравнение умноженное на $-a_{31}/a_{11}$ и т.д. Преобразовав все уравнения, приходим к системе, эквивалентной исходной (4):

$$\begin{cases} a_{11}\cdot x_1 + a_{12}\cdot x_2 + a_{13}\cdot x_3 + \ldots + a_{1n}\cdot x_n = b_1, \\ \qquad + a'_{22}\cdot x_2 + a'_{23}\cdot x_3 + \ldots + a'_{2n}\cdot x_n = b'_2, \\ \qquad + a'_{32}\cdot x_2 + a'_{33}\cdot x_3 + \ldots + a'_{3n}\cdot x_n = b'_3, \\ \qquad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ \qquad + a'_{m2}\cdot x_2 + a'_{m3}\cdot x_3 + \ldots + a'_{mn}\cdot x_n = b'_m, \end{cases} \tag{5}$$

где $a'_{ik}(i = 2,3,\ldots,m;\, k = 2,3,\ldots,n)$ – новые коэффициенты.

Предполагая, что $a'_{22} \neq 0$ и оставляя неизменными первые два уравнения системы (5), преобразуем ее так, чтобы в остальных уравнениях коэффициенты при x_2 обратились в нуль. Продолжая таким образом исключать неизвестные, систему (5) можно привести к одной из следующих систем:

$$\begin{cases} c_{11}\cdot x_1 + c_{12}\cdot x_2 + c_{13}\cdot x_3 + \ldots + c_{1n}\cdot x_n = d_1, \\ \qquad c_{22}\cdot x_2 + c_{23}\cdot x_3 + \ldots + c_{2n}\cdot x_n = d_2, \\ \qquad\qquad c_{33}\cdot x_3 + \ldots + c_{3n}\cdot x_n = d_3, \\ \qquad\qquad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ \qquad\qquad\qquad c_{nn}\cdot x_n = d_n, \end{cases} \tag{6}$$

где $c_{ij}(i, j = \overline{1,n})$ – некоторые коэффициенты, d_i – свободные члены;

$$\begin{cases} c_{11}\cdot x_1 + c_{12}\cdot x_2 + c_{13}\cdot x_3 + \ldots + c_{1n}\cdot x_n = d_1, \\ \qquad c_{22}\cdot x_2 + c_{23}\cdot x_3 + \ldots + c_{2n}\cdot x_n = d_2, \\ \qquad\qquad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ \qquad\qquad c_{kk}\cdot x_k + \ldots + c_{kn}\cdot x_n = d_k, \end{cases} \tag{7}$$

где $k < n$;

$$\begin{cases} c_{11}\cdot x_1 + c_{12}\cdot x_2 + c_{13}\cdot x_3 + \ldots + c_{1n}\cdot x_n = d_1, \\ \qquad c_{22}\cdot x_2 + c_{23}\cdot x_3 + \ldots + c_{2n}\cdot x_n = d_2, \\ \qquad\qquad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ \qquad\qquad\qquad 0\cdot x_n = d_k, \end{cases} \tag{8}$$

где $k \leq n$.

Система (6) имеет единственное решение. Оно отыскивается ***на обратном ходе***: начиная с последнего уравнения и последовательно доходя до первого, используем их для нахождения неизвестных. Из последнего уравнения (6) выражается x_n, значение x_{n-1} – из предпоследнего и т.д. Определив $x_2, x_3, ..., x_n$, из первого уравнения находят x_1.

Система (7) имеет бесконечное множество решений. Из последнего уравнения системы можно выразить одно из неизвестных (например, x_k) через остальные $n-k$ неизвестных ($x_{k+1}, x_{k+2}, ..., x_n$), входящих в это уравнение; из предпоследнего уравнения можно выразить x_{k-1} через эти неизвестные и т.д. В полученных формулах, выражающих $x_1, x_2, ..., x_k$ через $x_{k+1}, x_{k+2}, ..., x_n$, неизвестные $x_{k+1}, x_{k+2}, ..., x_n$ могут принимать любые значения.

Система (8) несовместна, так как никакие значения неизвестных не могут удовлетворять последнему уравнению.

Итак, преимуществом метода Гаусса является то, что он применим к любой системе линейных уравнений.

Для простоты применения метода приведенные преобразования совершают над ***расширенной матрицей системы*** – матрицей, составленной из коэффициентов системы $a_{ij}(i=\overline{1,n};\ j=\overline{1,m})$ и свободных членов $b_j(j=\overline{1,m})$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} & b_2 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Прямая черта отделяет матрицу системы от столбца свободных членов.

При построении решения такой системы существенную роль играют ранги основной и расширенной матриц. Так как основная матрица входит в расширенную, ранг расширенной матрицы не может быть меньше ранга основной.

Утв.: Если ранг расширенной матрицы больше ранга основной, система не имеет решения.

Это следует из формул метода Крамера

$$x \cdot \Delta = \Delta_x\,,\quad y \cdot \Delta = \Delta_y\,,\quad z \cdot \Delta = \Delta_z$$

и другого определения ранга матрицы: ***рангом матрицы*** называется наивысший из порядков отличных от нуля определителей, составленных из элементов матрицы.

Здесь Δ – определитель основной матрицы, Δ_x , Δ_y , Δ_z – определители того же порядка расширенной матрицы. Предположим, что $\Delta = 0$, и хотя бы один из остальных определителей, например, Δ_x не равен нулю. Тогда ранг основной матрицы меньше порядка определителя Δ, ранг расширенной матрицы равен порядку определителя Δ_x, то есть больше ранга основной матрицы. Но при $\Delta = 0$ и $\Delta_x \neq 0$ из первого уравнения следует $x \cdot 0 \neq 0$, что невозможно, следовательно, уравнение и соответственно рассматриваемая система уравнений не имеет решения. Аналогичный результат имеем, когда $\Delta_x = 0$, но $\Delta_y \neq 0$ или $\Delta_z \neq 0$.

Итак, ***система совместна***, то есть имеет решение, только в случае, ***когда ранги основной и расширенной матриц совпадают***.

Доказано также, что система линейных алгебраических уравнений имеет единственное решение, если ранг основной матрицы равен числу неизвестных.

Отсюда следует, что если ранг основной матрицы меньше числа неизвестных, система имеет бесчисленное множество решений.

Примеры.

1. Решить систему уравнений: $\begin{cases} 3x + 2y + 4z = 8 \\ 2x - 3y - 4z = -1. \\ x + y + 5z = 0 \end{cases}$

Решение.

Процедуру приведения данной системы к эквивалентной удобнее осуществлять, когда коэффициент при стоящей слева неизвестной (в нашем случае при x) хотя бы в одном уравнении был равен единице, для этого поменяем местами уравнения системы

$$\begin{cases} x + \quad y + 5z = 0 \\ 3x + 2y + 4z = 8 \\ 2x - 3y - 4z = -1 \end{cases}$$

и запишем для нее расширенную матрицу

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 5 & 0 \\ 3 & 2 & 4 & 8 \\ 2 & -3 & -4 & -1 \end{array}\right).$$

Создаем нули во второй и третьей строках первого столбца, для чего умножаем первую строку на (-3) и прибавляем ко второй строке, затем умножаем первую же строку на (-2) и суммируем с третьей строкой, тогда

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & -11 & 8 \\ 0 & -5 & -14 & -1 \end{array}\right).$$

Умножаем вторую строку на (-5) и прибавляем к третьей строке

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & -11 & 8 \\ 0 & 0 & 41 & -41 \end{array}\right).$$

Запишем систему уравнений, соответствующую полученной расширенной матрице

$$\begin{cases} x+y+5z=0 \\ -y-11z=8 \\ 41z=-41 \end{cases}.$$

Из третьего уравнения имеем $z=-1$, из второго $y=11-8=3$, из первого $x=-3+5=2$. Итак, получено единственное решение данной, а, следовательно, исходной системы уравнений $\{2, 3, -1\}$.

Проверим результат.

$$2+3-5=0,\quad 6+6-4=8,\quad 4-9+4=-1.$$

2. Решить систему уравнений: $\begin{cases} x-y+5z=5 \\ 3x+y+7z=11 \\ 5x+y+5z=11 \end{cases}.$

Решение.

Очевидно,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 5 & 5 \\ 3 & 1 & 7 & 11 \\ 5 & 1 & 5 & 11 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 5 & 5 \\ 0 & 4 & -8 & -4 \\ 0 & 6 & -20 & -14 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & -10 & -7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \end{array}\right).$$

В целях упрощения решения при переходе от второй матрицы к третьей вторая и третья строки были поделены на 4 и 2 соответственно.

Система уравнений, соответствующая итоговой матрице имеет следующий вид:

$$\begin{cases} x - y + \ 5z = 5 \\ \quad y - 2z = -1 \\ \quad\ -4z = -4 \end{cases}.$$

Очевидно, $z = 1$, $y = 1$, $x = 1$.

Проверка.

$$1 - 1 + 5 = 5,\ \ 3 + 1 + 7 = 11,\ \ 5 + 1 + 5 = 11.$$

3. Решить систему уравнений: $\begin{cases} x + 2y + 3z = 4 \\ 3x + \ y \ - z = 1 \\ 4x + 3y + 2z = 3 \end{cases}.$

Решение.

Преобразуем расширенную матрицу системы

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -5 & -10 & -11 \\ 0 & -5 & -10 & -13 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -5 & -10 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right).$$

Запишем последнее из уравнений, соответствующее полученной расширенной матрице $0 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z = -2$. Это равенство невозможно ни при каких значениях x, y, z, следовательно, эквивалентная система уравнений не имеет решения, и исходная система уравнений также несовместна.

4. Решить систему уравнений: $\begin{cases} x_1 + 6x_2 - 7x_3 = 9 \\ 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 5 \\ 3x_1 - 14x_2 + 17x_3 = 1 \end{cases}$

Решение.

Осуществим прямой ход метода Гаусса, собирая нули под главной диагональю.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & -7 & 9 \\ 2 & -4 & 5 & 5 \\ 3 & -14 & 17 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & -7 & 9 \\ 0 & -16 & 19 & -13 \\ 0 & -32 & 38 & -26 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & -7 & 9 \\ 0 & -16 & 19 & -13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

После первого шага прямого хода получили, что вторая и третья строка совпадают с точностью до множителя и на втором шаге элементы третьей строки обращаются в нули. Получаем тождество $0x_3 = 0$. Следовательно, x_3 может принимать любые значения, а остальные неизвестные выражаются через x_3. Система в этом случае является неопределенной и имеет бесконечное множество решений:

$$x_3 = t,\ x_2 = \frac{-13-19t}{-16},\ x_1 = 9 - \frac{3(13+19t)}{8} + 7t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

5. Решить систему уравнений: $\begin{cases} 2x+3y-z=3 \\ x-2y+z=4 \\ 4x-y+z=11 \end{cases}$.

Решение.

$$\begin{cases} 2x+3y-z=3 \\ x-2y+z=4 \\ 4x-y+z=11 \end{cases} \sim \begin{cases} x-2y+z=4 \\ 2x+3y-z=3 \\ 4x-y+z=11 \end{cases}$$

Тогда

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & -1 & 3 \\ 4 & -1 & 1 & 11 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 7 & -3 & -5 \\ 0 & 7 & -3 & -5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 7 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Последнее уравнение тождественно выполняется при любых значениях неизвестных, остается система двух уравнений относительно трех неизвестных

$$\begin{cases} x-2y+z=4 \\ 7y-3z=-5 \end{cases}.$$

Из второго уравнения имеем:

$$7y-3z=-5, \quad z=\frac{1}{3}(7y+5).$$

Из первого уравнения получаем:

$$x = 4+2y-z = 4+2y-\frac{7}{3}y-\frac{5}{3} = \frac{1}{3}(7-y).$$

В итоге

$$\begin{cases} x = \frac{1}{3}(7-y) \\ z = \frac{1}{3}(7y+5) \end{cases}.$$

Проверка.

$$\frac{14}{3}-\frac{2}{3}y+3y-\frac{7}{3}y-\frac{5}{3}=3, \quad \frac{28}{3}-\frac{4}{3}y-y+\frac{7}{3}y+\frac{5}{3}=11.$$

Глава 2. ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ

Лекция 3-4

§ 4. Векторы

4.1. Основные понятия

Известно, что скалярная величина (скаляр) определяется одним параметром – величиной, например, 3, -5, 3.14 и так далее. В дальнейшем скаляры будем обозначать буквами a, b, x, y и так далее.

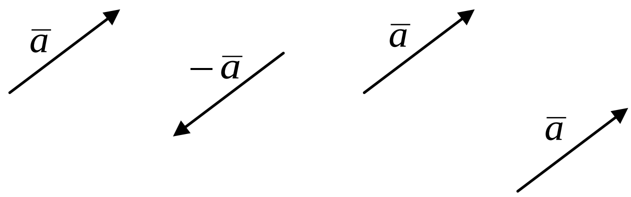
Определение 1. ***Вектор*** – это направленный отрезок, характеризуемый двумя параметрами – длиной и направлением. Чтобы отличать векторы от скаляров, их будем задавать следующим образом:

$$\overline{a}\,,\ \overline{AB}$$

В последнем случае A – начальная, B – конечная точки вектора. Иногда их обозначают жирным шрифтом $\boldsymbol{a}$.

Определение 2. Векторы, расположенные на параллельных прямых называются ***коллинеарными.***

Определение 3. Векторы, расположенные на параллельных прямых и направленные в одну сторону называются ***сонаправленными.***



Исторически сложилось, что геометрия оперирует со свободными векторами. Это означает, что ***два вектора считаются равными, если одинаковы их длины и они сонаправлены***. Другими словами, действие вектора на объект не зависит от точки его приложения.

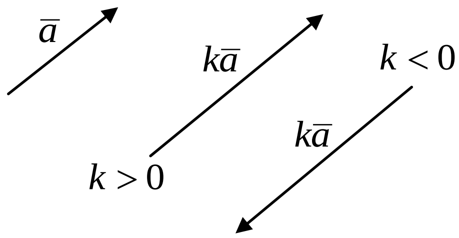
Определение 4. Векторы, лежащие в некоторой плоскости или параллельные некоторой плоскости, называются ***компланарными.***

Компланарные векторы могут быть перемещены в одну плоскость, что следует из определения свободных векторов.

4.2. Линейные преобразования векторов

Умножение вектора на число

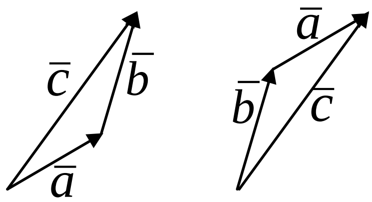
Умножение вектора на положительное число $k > 0$ означает умножение длины вектора на это число при сохранении направления вектора. Умножение вектора на отрицательное число $k < 0$ означает умножение длины вектора на число $|k|$ и замена направления вектора на противоположное.



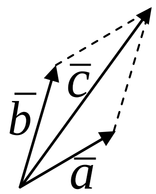
Сложение векторов

Вектор $\overline{c} = \overline{a} + \overline{b}$ может быть получен одним из следующих способов.

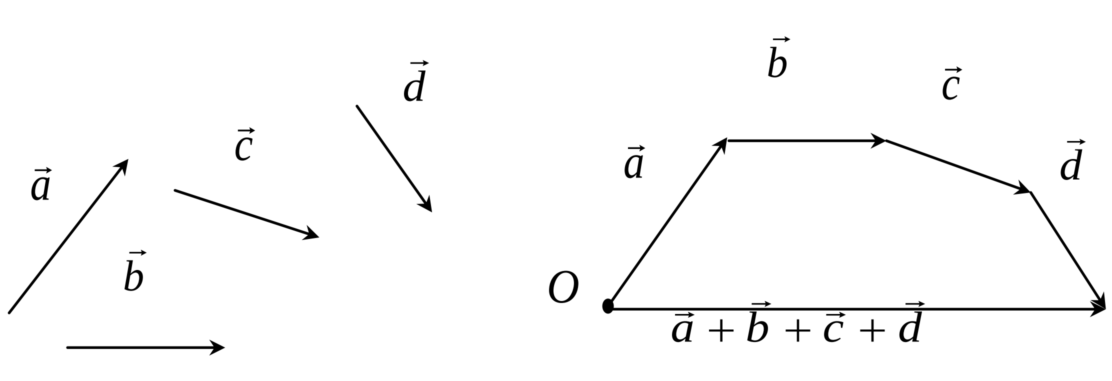
А) **Правило треугольника**. Приставим начало вектора $\overline{b}$ к концу вектора $\overline{a}$, а затем соединим начало вектора $\overline{a}$ с концом вектора $\overline{b}$. Полученный вектор $\overline{c}$, конец которого совпадает с концом вектора $\overline{b}$ и является суммой этих двух векторов. Очевидно, что результат суммирования не зависит от перестановки слагаемых $\overline{a}$ и $\overline{b}$.



Б) **Правило параллелограмма**. Поместим начала векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ в одну точку. Если считать эти векторы сторонами параллелограмма, то вектор $\overline{c} = \overline{a} + \overline{b}$ будет диагональю того же параллелограмма, причем начало вектора будут находиться в точке, совпадающей с началами векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$.



В) **Правило многоугольника**.

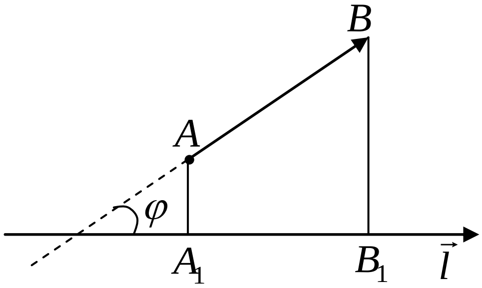


4.3. Проекция вектора на ось

Определение 5. ***Проекцией вектора*** $\overline{AB}$ на направление $\overline{l}$, называется скалярная величина A_1B_1, равная

$$A_1B_1 = np_{\overline{l}}\,\overline{AB} = \left|\overline{AB}\right|\cos\varphi ,$$

следовательно, если угол между векторами $\overline{AB}$ и $\overline{l}$ острый, $A_1B_1 > 0$, в противном случае проекция отрицательна.



Определение 6. Вектор, длина которого равна единице, называется ***единичным вектором*** или ***ортом***. Обозначим $|\overline{a}|$ длину, или модуль вектора $\overline{a}$, тогда единичный вектор $\overline{a}^0 = \dfrac{\overline{a}}{|\overline{a}|}$.

Кроме того, имеет смысл ввести ***нулевой вектор*** $\vec{0}$ – вектор, имеющий нулевую длину и не имеющий направления.

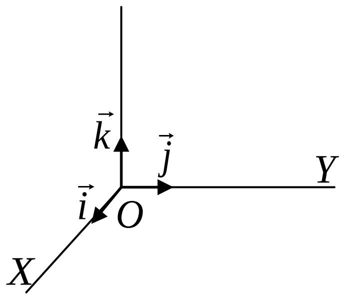
4.4. Базис

Для упрощения совершения операций с векторами введем понятие базиса. Тогда работа с векторами, как геометрическими объектами, заменяется операциями с его проекциями, то есть числами.

Определение 7. Любые два неколлинеарных вектора могут быть выбраны в качестве ***базиса на плоскости*** – пары векторов, которая позволяет задать любой вектор на плоскости.

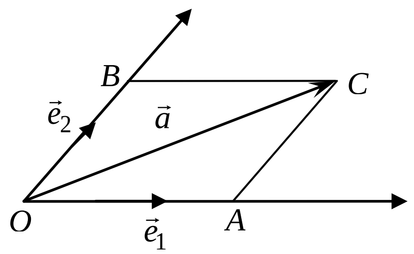
Определение 8. Любые три некомпланарных вектора могут быть выбраны в качестве ***базиса в трехмерном пространстве***– тройка векторов, которая позволяет задать любой вектор в пространстве.

Базис называется ***ортогональным***, если углы между базисными векторами прямые. Базис называется ***нормированным***, если базисные векторы единичные. Базис называется ***ортонормированным***, если он ортогональный и нормированный.



Векторы ортонормированного базиса в соответствии с существующими традициями обозначаются $\overline{i}$, $\overline{j}$, k.

Теорема. Любой вектор $\overline{a}$ плоскости может быть представлен в виде линейной комбинации базисных векторов $\overline{e}_1$, $\overline{e}_2$: $\overline{a} = \alpha\,\overline{e}_1 + \beta\,\overline{e}_2$.



Доказательство теоремы следует из правила параллелограмма сложения векторов и правила умножения вектора на число.

Теорема. Любой вектор трехмерного пространства может быть представлен в виде линейной комбинации базисных векторов.

Для ортонормированного базиса:

$$\overline{a} = a_1\,\overline{i} + a_2\,\overline{j} + a_3\,\overline{k}\,,\ \overline{b} = b_1\,\overline{i} + b_2\,\overline{j} + b_3\,\overline{k}\,.$$

Теперь вместо суммирования векторов с помощью правил параллелограмма или многоугольника, то есть построением, достаточно ограничиться суммированием их проекций.

Пример.

В ортонормированном базисе $\overline{i}\,,\overline{j}\,,\overline{k}$ заданы векторы $\overline{e}_1(-3,2,5),\ \overline{e}_2(1,-2,4),\ \overline{e}_3(4,3,7),\ \overline{d}(5,-1,8)$. Показать, что первые три вектора образуют базис и определить координаты вектора $\overline{d}$ в новом базисе.

Решение.

Составим определитель из координат векторов $\overline{e}_1,\overline{e}_2,\overline{e}_3$:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -3 & 2 & 5 \\ 1 & -2 & 4 \\ 4 & 3 & 7 \end{vmatrix} = 151\,.$$ Поскольку определитель не равен нулю, значит, ранг матрицы равен 3. Следовательно, 3 вектора линейно независимы, то есть не компланарны и образуют базис.

Тогда $\overline{d} = \alpha\overline{e}_1 + \beta\overline{e}_2 + \gamma\overline{e}_3$. Следовательно получим СЛАУ:

$$\begin{cases} -3\alpha+\beta+4\gamma=5 \\ 2\alpha-2\beta+3\gamma=-1 \\ 5\alpha+4\beta+7\gamma=8 \end{cases}$$

Пользуясь методом Крамера, получим:

$$\alpha=\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} 5 & 1 & 4 \\ -1 & -2 & 3 \\ 8 & 4 & 7 \end{vmatrix}=\frac{-51}{151},\ \beta=\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} -3 & 5 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \\ 5 & 8 & 7 \end{vmatrix}=\frac{182}{151},$$

$$\gamma=\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} -3 & 1 & 5 \\ 2 & -2 & -1 \\ 5 & 4 & 8 \end{vmatrix}=\frac{105}{151}.$$

Следовательно, $\overline{d}=\left(-51\overline{e}_1+182\overline{e}_2+105\overline{e}_3\right)/151$

4.5. Вектор в декартовой системе координат

Декартова система координат

Зададим в пространстве прямоугольную систему координат $OXYZ$ называемую ***декартовой системой координат***.

Определение 9. ***Осью координат*** (координатной осью) называют прямую, на которой выбрана начальная точка (начало отсчета), положительное направление и единица масштаба.

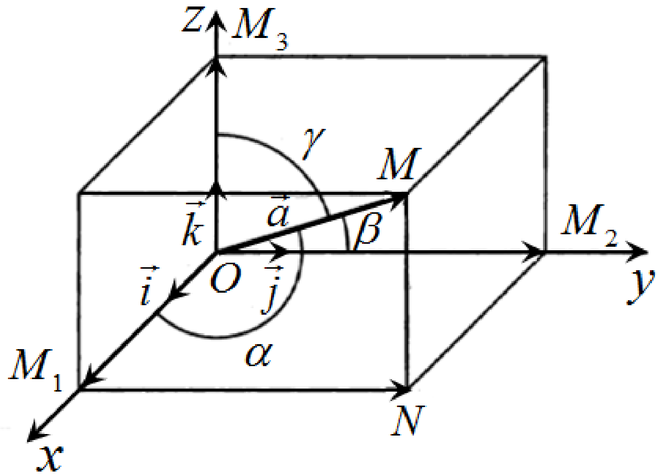
Векторы ортонормированного базиса $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$ задают ***направления осей*** декартовой системы координат. Выделим на координатных осях OX, OY и OZ эти единичные векторы $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$ соответственно. Базисный вектор $\overline{i}$ направлен вдоль оси абсцисс(OX), вектор $\overline{j}$ - по оси ординат(OY), вектор $\overline{k}$ по оси аппликат(OZ).

Совместим начальные точки векторов ортонормированного базиса, назовем эту точку ***началом координат***.

Поскольку положительное направление каждой оси и масштаб определены направлением и длиной базисного вектора, точка отсчета совпадает с началом координат, имеем систему трех взаимно перпендикулярных осей. Ее называют ***прямоугольной декартовой системой координат*** $OXYZ$.

Координаты вектора. Направляющие косинусы

Выберем произвольный вектор $\bar{a}$ и совместим его начало с началом координат: $\bar{a} = \overline{OM}$. Найдем проекции вектора на координатные оси, опуская соответствующие перпендикуляры.



Получим прямоугольный параллелепипед, одной из диагоналей которого является вектор $\overline{OM}$. По определению суммы нескольких векторов имеем

$$\bar{a} = \overline{OM_1} + \overline{M_1N} + \overline{NM}$$

Так как $\overline{M_1N} = \overline{OM_2}$, $\overline{NM} = \overline{OM_3}$, то

$$\bar{a} = \overline{OM_1} + \overline{OM_2} + \overline{OM_3}.$$

Но так как $\overline{OM_1} = \left|\overline{OM_1}\right| \bar{i}, \overline{OM_2} = \left|\overline{OM_2}\right| \bar{j}, \overline{OM_3} = \left|\overline{OM_3}\right| \bar{k}$ и проекциями вектора $\bar{a}$ на координатные оси являются:

$$np_x\bar{a} = \left|\overline{OM_1}\right|, np_y\bar{a} = \left|\overline{OM_2}\right|, np_z\bar{a} = \left|\overline{OM_3}\right|,$$

то, обозначив проекции на оси OX, OY, OZ соответственно через a_x, a_y, a_z, т.е. $\left|\overline{OM_1}\right| = a_x, \left|\overline{OM_2}\right| = a_y, \left|\overline{OM_3}\right| = a_z$, получаем

$$\boxed{\bar{a} = a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k}}.$$

Эта формула является основной в векторном исчислении и называется ***разложением вектора по ортам координатных осей***.

Определение 10. Числа a_x, a_y, a_z называются ***координатами вектора***, т. е. координаты вектора есть его проекции на соответствующие координатные оси.

Векторное равенство часто записывают в символическом виде:

$$\bar{a} = \left(a_x, a_y, a_z\right).$$

На основании теоремы о длине диагонали прямоугольного параллелепипеда можно написать $\left|\bar{a}\right|^2 = \left|\overline{OM_1}\right|^2 + \left|\overline{OM_2}\right|^2 + \left|\overline{OM_3}\right|^2$, т.е.

$$\left|\bar{a}\right|^2 = a_x^{\ 2} + a_y^{\ 2} + a_z^{\ 2}.$$

Отсюда

$$\boxed{\left|\bar{a}\right| = \sqrt{a_x^{\ 2} + a_y^{\ 2} + a_z^{\ 2}}},$$

т. е. ***модуль вектора равен квадратному корню из суммы квадратов его проекций на оси координат.***

Пусть углы вектора с осями OX , OY, OZ соответственно равны α, β, γ. По свойству проекций вектора на ось имеем

$$a_x = \left|\bar{a}\right| \cos\alpha, \quad a_y = \left|\bar{a}\right| \cos\beta, \quad a_z = \left|\bar{a}\right| \cos\gamma$$

Определение 11. Числа $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ называются ***направляющими косинусами*** и определяются как:

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{a_x}{\left|\bar{a}\right|}, \quad \cos\beta = \frac{a_y}{\left|\bar{a}\right|}, \quad \cos\gamma = \frac{a_z}{\left|\bar{a}\right|}}.$$

Можно получить

$$\left|\bar{a}\right|^2 = \left|\bar{a}\right|^2 \cos^2\alpha + \left|\bar{a}\right|^2 \cos^2\beta + \left|\bar{a}\right|^2 \cos^2\gamma.$$

Сократив на $\left|\bar{a}\right|^2 \neq 0$, получим соотношение

$$\boxed{\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1},$$

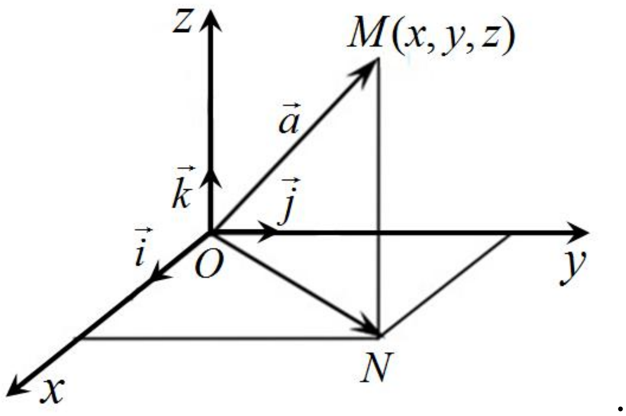
т.е. ***сумма квадратов направляющих косинусов ненулевого вектора равна единице.***

Таким образом, ***зная координаты вектора, можно определить его длину и направление***, т.е. сам вектор.

4.6. Действия над векторами, заданными координатами

Определение 12. ***Радиус-вектор точки*** M – это вектор, начальной точкой которого является начало координат, конечной – точка M . Если точке M соответствуют координаты (x, y, z), нетрудно заметить, что радиус-вектор точки может быть представлен в виде

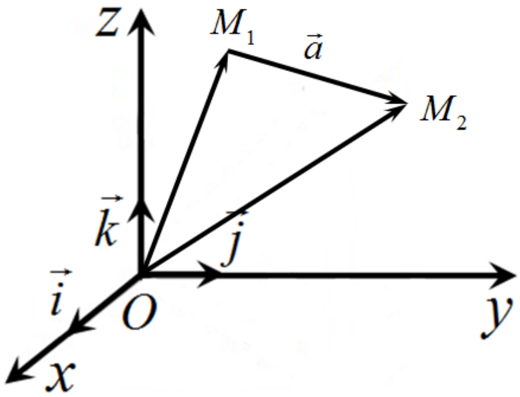
$$r\left(M\right) = \overrightarrow{OM} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$$



$$\vec{a} = \overrightarrow{OM} = (x, y, z)\text{, если } O(0,0,0),\ M(x, y, z)$$

Координаты вектора

Найдем координаты вектора $\vec{a} = \overrightarrow{M_1 M_2}$, если даны две точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$.



Вместе с вектором $\overrightarrow{M_1 M_2}$ радиусы-векторы точек M_1 и M_2 представляют треугольник OM_1M_2, причем

$$\overrightarrow{M_1 M_2} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1} = \left(x_2 - x_1\right)\vec{i} + \left(y_2 - y_1\right)\vec{j} + \left(z_2 - z_1\right)\vec{k} .$$

Следовательно, ***координаты вектора равны разностям соответствующих координат его конца и начала***:

$$\boxed{\overrightarrow{M_1 M_2} = \left(x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\right)}.$$

Определение 13. ***Длина вектора*** $\overrightarrow{M_1 M_2}$, совпадающая с расстоянием между точками M_1 и M_2, вычисляется по формуле:

$$\boxed{\left|\overrightarrow{M_1 M_2}\right| = \sqrt{\left(x_2 - x_1\right)^2 + \left(y_2 - y_1\right)^2 + \left(z_2 - z_1\right)^2}} .$$

Пусть векторы $\overline{a}=\left(a_x,a_y,a_z\right)$ и $\overline{b}=\left(b_x,b_y,b_z\right)$ заданы своими проекциями на оси декартовой системы координат или (что то же самое):

$$\overline{a}=a_x\overline{i}+a_y\overline{j}+a_z\overline{k},\ \overline{b}=b_x\overline{i}+b_y\overline{j}+b_z\overline{k}.$$

Поскольку линейные операции над векторами сводятся к соответствующим линейным операциям над проекциями этих векторов, то можно проводить их по следующим правилам.

1.Сумма и разность векторов

$$\overline{a}+\overline{b}=\left(a_x+b_x\right)\overline{i}+\left(a_y+b_y\right)\overline{j}+\left(a_z+b_z\right)\overline{k},$$

$$\overline{a}-\overline{b}=\left(a_x-b_x\right)\overline{i}+\left(a_y-b_y\right)\overline{j}+\left(a_z-b_z\right)\overline{k}.$$

2. Умножение вектора на скаляр λ

$$\lambda\,\overline{a}=\lambda\,a_x\,\overline{i}+\lambda\,a_y\,\overline{j}+\lambda\,a_z\,\overline{k}.$$

Примеры.

Даны векторы:

$\overline{a}=3\,\overline{i}-4\,\overline{k}$, $\overline{b}=\overline{i}-4\,\overline{j}+7\,\overline{k}$, $\overline{c}=3\,\overline{i}+\overline{j}+2\,\overline{k}$, $\overline{d}=2\,\overline{i}+6\,\overline{j}+5\,\overline{k}$.

1. Определить сумму векторов

$$\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}+\overline{d}=\left(3+1+3+2\right)\overline{i}+\left(0-4+1+6\right)\overline{j}+\left(-4+7+2+5\right)\overline{k}.$$

Очевидно, $\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}+\overline{d}=9\,\overline{i}+3\,\overline{j}+10\,\overline{k}$.

2. Вычислить для этих же векторов $\overline{a}-2\overline{b}+5\overline{c}+\overline{d}$.

$$\overline{a}-2\overline{b}+5\overline{c}+\overline{d}=\left(3-2\cdot1+5\cdot3+2\right)\overline{i}+\left(0+2\cdot4+5\cdot1+6\right)\overline{j}+$$
$$+\left(-4-2\cdot7+5\cdot2+5\right)\overline{k}$$

Итак, $\overline{a}-2\overline{b}+5\overline{c}+\overline{d}=18\,\overline{i}+19\,\overline{j}-3\overline{k}$.

3. Найти длину и направляющие косинусы вектора $\overline{a}$.

$$\left|\overline{a}\right|=\sqrt{3^2+0^2+(-4)^2}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$$

Так как $\cos\alpha=\dfrac{a_x}{\left|\overline{a}\right|},\quad \cos\beta=\dfrac{a_y}{\left|\overline{a}\right|},\quad \cos\gamma=\dfrac{a_z}{\left|\overline{a}\right|}$, то:

$$\cos\alpha=\frac{3}{5},\quad \cos\beta=0,\quad \cos\gamma=-\frac{4}{5}$$

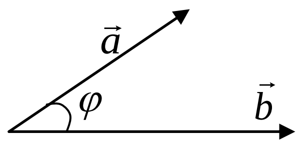
§5. Скалярное, векторное и смешанное произведения векторов

5.1. Скалярное произведение векторов

Определение 1. ***Скалярным произведением*** двух векторов $\overline{a}\cdot\overline{b}$ (или $(\overline{a},\overline{b})$) называется ***число***, равное произведению модулей этих векторов на косинус угла между ними:

$$\boxed{\overline{a}\cdot\overline{b}=\left|\overline{a}\right|\cdot\left|\overline{b}\right|\cos\varphi}, \qquad (1)$$

где $\varphi=\angle(\overline{a},\overline{b})$.



Свойства скалярного произведения

1. $\overline{a}\cdot\overline{b}=\overline{b}\cdot\overline{a}$.

Доказательство:

Поскольку $\varphi-$угол между первым и вторым векторами произведения, в левом и правом произведениях эти углы отличаются знаком, и в силу четности косинуса не влияют на величину произведения.

Ч.Т.Д.

2. $m\left(\overline{a}\cdot\overline{b}\right)=m\overline{a}\cdot\overline{b}=\overline{a}\cdot m\overline{b}$, если $m-$скаляр.

Доказательство:

Для $m>0$ это свойство очевидно: поскольку $\vec{a}$ и $m\vec{a}$ в этом случае сонаправлены,

$$m\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)=m\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cos\varphi=\left|m\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cos\varphi=\left(m\vec{a}\cdot\vec{b}\right).$$

Ч.Т.Д.

Доказательство для случая $m<0$ не приводится.

3. $\left(\overline{a}+\overline{c}\right)\cdot\overline{b}=\overline{a}\cdot\overline{b}+\overline{c}\cdot\overline{b}$.

4. $\overline{a}\cdot\overline{b}=0$, тогда и только тогда, когда $\overline{a}\perp\overline{b}$.

Доказательство:

Если исключить из рассмотрения нуль-векторы, то скалярное произведение равно нулю при $\cos\varphi=0$, то есть при $\varphi=\dfrac{\pi}{2}$.

Ч.Т.Д.

5. $\bar{a} \cdot \bar{a} = |\bar{a}|^2$,

то есть квадрат длины вектора равен скалярному произведению вектора на себя.

Заметим, что в силу взаимной перпендикулярности скалярное произведение двух разных ортов равно нулю, а скалярный квадрат орта равен 1, например, $\bar{i} \cdot \bar{j} = 0$, $\bar{i} \cdot \bar{i} = |\bar{i}|^2 = 1$.

6. $\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}|\, np_{\bar{a}}\bar{b} = |\bar{b}|\, np_{\bar{b}}\bar{a}$

Скалярное произведение векторов в ортонормированном базисе

Скалярное произведение векторов, заданных в ортонормированном базисе как

$$\bar{a} = a_1\,\bar{i} + a_2\,\vec{j} + a_3\bar{k}\,,\;\; \bar{b} = b_1\,\bar{i} + b_2\,\vec{j} + b_3\bar{k}\,.$$

вычисляется по формуле:

$$\boxed{\bar{a} \cdot \bar{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}$$

Доказательство:

Используя свойства скалярного произведения при раскрытии скобок, получим

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = \left(a_1\,\bar{i} + a_2\,\bar{j} + a_3\bar{k}\right)\cdot\left(b_1\,\bar{i} + b_2\,\bar{j} + b_3\bar{k}\right) =$$
$$= a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3.$$

Ч.Т.Д.

Приложения скалярного произведения

1. Используя скалярное произведение двух векторов, легко найти угол между этими векторами.

В соответствии с определением скалярного произведения:

$$\cos\varphi = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{a}| \cdot |\bar{b}|},$$

следовательно,

$$\cos\varphi = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}} \qquad (2)$$

2. В силу свойства 5 модуль (длина) вектора равен:

$$\left|\bar{a}\right| = \sqrt{\bar{a}\cdot\bar{a}} = \sqrt{a_1^{\,2} + a_2^{\,2} + a_3^{\,2}} \qquad (3)$$

3. Условие ортогональности векторов: из $\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)=0$ следует

$$a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0.$$

4. Расстояние между точками: расстояние между точками равно длине вектора соединяющего начало и конец вектора и может быть вычислено по формуле (3).

5. Работа, совершаемая силой $\bar{b}$ на пути $\bar{a}$, вычисляется по формуле

$$A = \left|\bar{a}\right|\cdot np_{\bar{a}}\bar{b} = \left(\bar{a},\bar{b}\right).$$

Примеры.

1. Задан треугольник с вершинами $A\left(2\,,-1\,,4\right)$, $B\left(-3\,,1\,,0\right)$, $C\left(1\,,5\,,2\right)$. Определить длину стороны AC и угол при вершине C.

Решение.

Длину стороны определяем как расстояние между вершинами, тогда

$$AC = \sqrt{\left(1-2\right)^2 + \left(5+1\right)^2 + \left(2-4\right)^2} = \sqrt{1+36+4} = \sqrt{41}.$$

Определим векторы :

$$\overline{CA} = \left(2-1\right)\bar{i} + \left(-1-5\right)\bar{j} + \left(4-2\right)\bar{k} = \bar{i} - 6\bar{j} + 2\bar{k},$$

$$\overline{CB} = \left(-3-1\right)\bar{i} + \left(1-5\right)\bar{j} + \left(0-2\right)\bar{k} = -4\bar{i} - 4\bar{j} - 2\bar{k}.$$

Угол между этими векторами есть угол при вершине C. Тогда

$$\cos\left(\angle ACB\right) = \frac{\overline{CA}\cdot\overline{CB}}{\left|\overline{CA}\right|\left|\overline{CB}\right|} = \frac{1\left(-4\right)+\left(-6\right)\left(-4\right)+2\left(-2\right)}{\sqrt{41}\sqrt{16+16+4}} = \frac{16}{\sqrt{41}\sqrt{36}} = \frac{8}{3\sqrt{41}}$$

2. Вычислить скалярное произведение векторов $\vec{a}+5\vec{b}$ и $4\vec{a}-2\vec{b}$, если:

1) $\left|\vec{a}\right| = 2, \left|\vec{b}\right| = 3, \angle(\vec{a},\vec{b}) = \pi/3$

2) $\vec{a} = \left\{1,0,2\right\}, \vec{b} = \left\{3,4,-1\right\}$

Решение.

1) $\left(\vec{a}+5\vec{b}\right)\cdot\left(4\vec{a}-2\vec{b}\right) = 4\vec{a}\cdot\vec{a} + 5\vec{b}\cdot 4\vec{a} - \vec{a}\cdot 2\vec{b} + 5\vec{b}\cdot(-2\vec{b}) =$

$$=4\left|\vec{a}\right|^2+18\left|\vec{a}\right|\left|\bar{b}\right|\cos\varphi-10\left|\bar{b}\right|^2=4\cdot 2^2+18\cdot 2\cdot 3\cos\frac{\pi}{3}-10\cdot 3^2=-20$$

2) $\vec{a}+5\vec{b}=\{16,20,-3\}$, $4\vec{a}-2\vec{b}=\{-2,-8,10\}$

$$\left(\vec{a}+5\vec{b}\right)\cdot\left(4\vec{a}-2\vec{b}\right)=-2\cdot 16-8\cdot 20-10\cdot 3=-222$$

3. Вычислить проекцию вектора $5\vec{b}$ на вектор $4\vec{a}-2\vec{b}$, если:

1) $\left|\vec{a}\right|=2,\left|\vec{b}\right|=3,\angle(\vec{a},\vec{b})=\pi/3$ 2) $\vec{a}=\{1,0,2\},\vec{b}=\{3,4,-1\}$

Решение.

1) $$np_{4\bar{a}-2\bar{b}}5\bar{b}=\frac{\left(5\bar{b},4\bar{a}-2\bar{b}\right)}{\left|4\bar{a}-2\bar{b}\right|}=\frac{20\bar{a}\bar{b}-10\left|\bar{b}\right|^2}{\sqrt{\left(4\bar{a}-2\bar{b},4\bar{a}-2\bar{b}\right)}}=$$

$$=\frac{60-90}{\sqrt{16\cdot 2^2+4\cdot 3^2-16\cdot 2\cdot 3\cdot 0.5}}=\frac{-30}{\sqrt{148}}$$

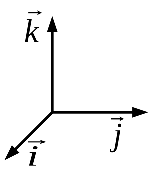
2) $4\bar{a}-2\bar{b}=\left(-2,-8,10\right)=-2\{1,4,-5\}$, $\vec{b}=\{3,4,-1\}$

$$np_{4\bar{a}-2\bar{b}}5\bar{b}=5\frac{\left(\bar{b},4\bar{a}-2\bar{b}\right)}{\left|4\bar{a}-2\bar{b}\right|}=-10\cdot\frac{3+16+5}{2\sqrt{1+16+25}}=-5\cdot\frac{24}{42}=\frac{-60}{21}=-2\frac{18}{21}$$

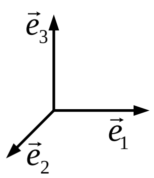
5.2. Векторное произведение

Определение 2. Тройка некомпланарных векторов называется ***правой тройкой***, если с конца третьего вектора кратчайший поворот от первого вектора ко второму виден против часовой стрелки.

Определение 3. Тройка некомпланарных векторов называется ***левой тройкой***, если с конца третьего вектора кратчайший поворот от первого вектора ко второму видится по часовой стрелке

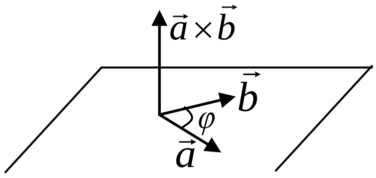


$\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$ – *правая тройка*



$\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$ – *левая тройка*

Определение 4. ***Векторным произведением*** двух векторов $\overline{a}\times\overline{b}$ или $\left\|\left[\overline{a},\overline{b}\right]\right\|$ называется **вектор** $\overline{c}$, такой что:



1) длина $\overline{c}=\overline{a}\times\overline{b}$ равна произведению длин перемножаемых векторов на синус угла между ним:

$\left|\,\overline{a}\times\overline{b}\right|=\left\|\left[\overline{a},\overline{b}\right]\right\|=\left|\overline{a}\right|\cdot\left|\overline{b}\right|\sin\varphi$,

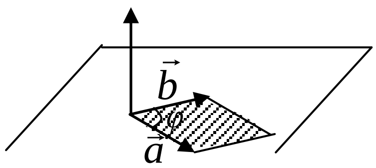
2) $\overline{c}=\overline{a}\times\overline{b}$ перпендикулярен плоскости, в которой расположены перемножаемые вектора,

3) векторы $\overline{a},\overline{b},\overline{a}\times\overline{b}$ образуют правую тройку. То есть с его конца вектора $=\overline{a}\times\overline{b}$ кратчайший поворот от первого вектора ко второму виден против часовой стрелки.

Алгебраические свойства векторного произведения

1. $\overline{a}\times\overline{b}=-\overline{b}\times\overline{a}$.
2. $m\left(\overline{a}\times\overline{b}\right)=m\overline{a}\times\overline{b}=\overline{a}\times m\overline{b}$, если $m-$скаляр.
3. $\left(\overline{a}+\overline{c}\right)\times\overline{b}=\overline{a}\times\overline{b}+\overline{c}\times\overline{b}$.

Геометрические свойства



1. Модуль векторного произведения численно равен площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

$$S_{\square}=\left|\overline{a}\right|\left|\overline{b}\right|\sin\varphi=\left|\overline{a}\times\overline{b}\right|$$

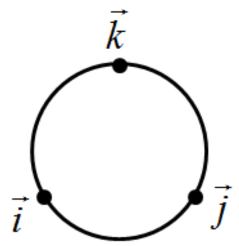
Доказательство следует из определения векторного произведения.

2. $\overline{a}\times\overline{b}=0$, тогда и только тогда, когда $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны. Доказательство следует из того, что между коллинеарными векторами угол 0 или π , но $\sin 0=\sin\pi=0$.

Нетрудно заметить, что

$$\overline{i}\times\overline{j}=-\overline{j}\times\overline{i}=\overline{k}\ ,$$
$$\overline{j}\times\overline{k}=-\overline{k}\times\overline{j}=\overline{i}\ ,$$
$$\overline{k}\times\overline{i}=-\overline{i}\times\overline{k}=\overline{j}\ .$$

Запомнить, какой орт получается как векторное произведение двух других ортов, легко, если пользоваться следующей схемой.



Если при движении от первого в векторном произведении вектора ко второму мы движемся против часовой стрелки, результатом векторного произведения будет третий вектор со знаком +, если по часовой стрелке, то третий вектор со знаком –.

Векторное произведение векторов в ортонормированном базисе

Если $\overline{a} = a_1\,\overline{i} + a_2\,\vec{j} + a_3\overline{k}$, $\overline{b} = b_1\,\overline{i} + b_2\,\overline{j} + b_3\overline{k}$, то

$$\overline{a} \times \overline{b} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \overline{i}\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - \overline{j}\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + \overline{k}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} =$$

$$= \overline{i}\,\left(a_2b_3 - a_3b_2\right) - \overline{j}\,\left(a_1b_3 - a_3b_1\right) + \overline{k}\,\left(a_1b_2 - a_2b_1\right).$$

Замечание 1. В этой формуле используется разложение определителя третьего порядка по элементам его первой строки, затем вычисляются определители второго порядка.

Замечание 2. Определитель третьего порядка в этой формуле называют иногда символическим, поскольку не все свойства обычных определителей для него справедливы. Это связано с тем, что одна из строк состоит из векторов, элементы двух других - скаляры.

Его использование оправдано тем, что после вычисления векторного произведения с помощью определителя результат легко представить в традиционном виде разложения вектора по базису, что следует из вышеприведенной формулы.

Замечание 3. ***Условием коллинеарности векторов является равенство нулю их векторного произведения***. Следовательно, символический определитель должен быть равен нулю, для этого достаточно, чтобы любые две его строки, или два столбца были пропорциональны. Столбцы пропорциональными быть не могут, так как базисные векторы не коллинеарны, а значит, не пропорциональны, строка из векторов не может быть пропорциональна строке из скаляров по той же причине. Остается пропорциональность двух последних строк определителя.

Итак, ***условием коллинеарности векторов*** $\vec{a}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}$**,** $\vec{b}=b_1\vec{i}+b_2\vec{j}+b_3\vec{k}$ ***является:***

$$\boxed{\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}}.$$

Механический смысл векторного произведения

Если вектор $\overline{F}$ - сила, а вектор $\overline{r}$ есть радиус-вектор точки приложения силы, имеющей свое начало в точке O, то момент $m_O\left(\overline{F}\right)$ силы $\overline{F}$ относительно точки O есть вектор, равный векторному произведению радиус-вектора $\overline{r}$ точки приложения силы на вектор $\overline{F}$ силы, а величина этого момента равна длине полученного вектора, т.е.

$$m_O\left(\overline{F}\right)=\overline{r}\times\overline{F},\quad \left|m_O\left(\overline{F}\right)\right|=\left|\overline{r}\times\overline{F}\right|.$$

Пример. Определить площадь треугольника, заданного вершинами $A(-2,1,6)$, $B(3,-1,1)$, $C(4,5,3)$.

Решение.

Площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, равна $\left|\overline{AB}\right|\cdot\left|\overline{AC}\right|\sin\left(\angle A\right)$, то есть модулю векторного произведения этих векторов, а площадь заданного треугольника равна половине площади параллелограмма, то $S_{\Delta\,ABC}=\dfrac{1}{2}\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right|$.

Вычислим

$$\overline{AB}=\left(3+2\right)\overline{i}+\left(-1-1\right)\overline{j}+\left(1-6\right)\overline{k}=5\,i-2\,\overline{j}-5\,\overline{k},\quad \overline{AC}=6\,\overline{i}+4\,\overline{j}-3\,\overline{k}.$$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ 5 & -2 & -5\\ 6 & 4 & -3\end{vmatrix}=\left(6+20\right)\overline{i}-\left(-15+30\right)\overline{j}+\left(20+12\right)\overline{k}=$$

$$=26\,\overline{i}-15\,\overline{j}+32\,\overline{k}$$

В итоге, $S_{\Delta\,ABC}=\dfrac{1}{2}\sqrt{26^2+15^2+32^2}=\dfrac{1}{2}\sqrt{1925}$.

5.3. Смешанное произведение векторов

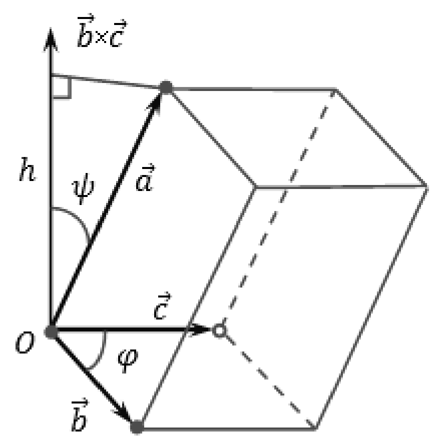
Определение 5. ***Смешанным произведением трех векторов*** называется число, равное скалярному произведению вектора $\overline{a}$ на векторное произведение векторов $\overline{b}$ и $\overline{c}$ и обозначается

$$\overline{a}\cdot\overline{b}\cdot\overline{c}=\left(\overline{a},\overline{b},\overline{c}\right)=\overline{a}\cdot\left(\overline{b}\times\overline{c}\right).$$

Иногда смешанное произведение называют векторно-скалярным.

Геометрические свойства смешанного произведения

1. Модуль смешанного произведения некомпланарных векторов $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ равен объему параллелепипеда, построенного на этих векторах. Произведение $\left(\overline{a},\overline{b},\overline{c}\right)$ положительно, если тройка векторов $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ — правая, и отрицательно, если тройка $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ — левая.



Доказательство.

Найдем по определению смешанное произведение векторов $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$. Пусть ψ — угол между векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}\times\overline{c}$. Модуль векторного произведения $\left|\overline{b}\times\overline{c}\right|$ равен площади S параллелограмма, построенного на векторах $\overline{b}$ и c. Поэтому

$$\left(\overline{a},\overline{b},\overline{c}\right)=S\cdot\left|\overline{a}\right|\cdot\cos\psi.$$

причем $\left|\overline{a}\right|\cdot\cos\psi$ является проекцией вектора $\overline{a}$ на ось, задаваемую вектором $\overline{b}\times\overline{c}$. Очевидно, что $\left|\overline{a}\right|\cdot\cos\psi>0$, если $\psi<\frac{\pi}{2}$ (в этом случае векторы $\overline{a},\vec{b},\vec{c}$ составляют правую тройку) и $\left|\overline{a}\right|\cdot\cos\psi<0$, если $\psi>\frac{\pi}{2}$ (в этом случае векторы $\overline{a},\vec{b},\vec{c}$ составляют левую тройку). А модуль этой величины равен высоте $h=\left|\overline{a}\right|\cdot\left|\cos\psi\right|$ параллелепипеда, построенного на векторах $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$. Значит,

$$\left|\left(\bar{a},\bar{b},\bar{c}\right)\right| = S \cdot h .$$

Поэтому модуль смешанного произведения равен объему этого параллелепипеда, а знак смешанного произведения зависит от ориентации тройки векторов.

Ч.Т.Д.

2. Смешанное произведение $\left(\bar{a},\bar{b},\bar{c}\right)$ равно нулю тогда и только тогда, когда векторы $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ компланарны.

Алгебраические свойства смешанного произведения

1. При перестановке двух множителей смешанное произведение изменяет знак на противоположный:

$$\left(\bar{a},\bar{b},\bar{c}\right) = -\left(\bar{b},\bar{a},\bar{c}\right) = -\left(\bar{a},\bar{c},\bar{b}\right) = -\left(\bar{c},\bar{b},\bar{a}\right)$$

2. При циклической (круговой) перестановке множителей смешанное произведение не изменяется:

$$\left(\bar{a},\bar{b},\bar{c}\right) = \left(\bar{b},\bar{c},\bar{a}\right) = \left(\bar{c},\bar{a},\bar{b}\right)$$

3. Смешанное произведение линейно по любому множителю:

$$\left(\alpha\,\bar{a} + \beta\,\bar{b},\bar{c},\bar{d}\right) = \alpha(\bar{a},\bar{c},\bar{d}) + \beta(\bar{b},\bar{c},\bar{d}) .$$

Смешанное произведение векторов в ортонормированном базисе

Если координаты векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ равны, соответственно,

$\bar{a} = a_1\,\bar{i} + a_2\,\bar{j} + a_3\bar{k}$, $\bar{b} = b_1\,\bar{i} + b_2\,\bar{j} + b_3\bar{k}$, $\bar{c} = c_1\,\bar{i} + c_2\,\bar{j} + c_3\bar{k}$,

то смешанное произведение вычисляется с помощью определителя третьего порядка:

$$\left(\bar{a},\bar{b},\bar{c}\right) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} .$$

Пример.

Найти объем параллелепипеда, заданного векторами $\vec{a} = 2\vec{i} + 4\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = -\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{c} = 3\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$.

Вычислим

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 2(-6-2)-4(2-6)+1\cdot(-1-9) = -16+16-10 = -10,$$

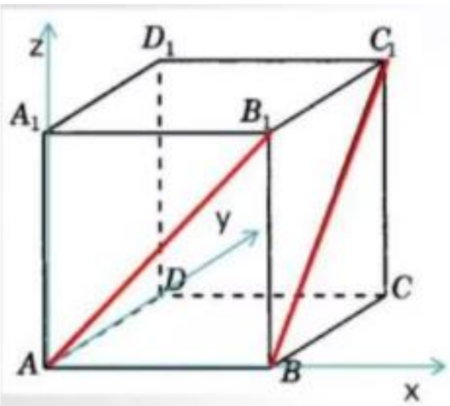
Объем этого параллелепипеда равен 10.

Задачи.

1. Дан прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой BC. Постройте вектор $\overline{m} = \overline{AB} + \overline{AC} - \overline{BC}$ и найдите $|\overline{m}|$, если AB =8.

2. Решить задачу 1 аналитически.

3. Дан куб с длиной стороны равной 1. Найти угол между векторами $\overline{AB_1}$ и $\overline{BC_1}$ и их векторное произведение.



4. Дана пирамида с вершинами $A(4;2;5), B(0;7;2), C(-1;2;7), D(1,5,0)$.

Найти:

1) длину стороны AB;

2) угол между ребрами AB и $\overline{CD}$;

3) Объем пирамиды;

4)Площадь грани ABC, высоту DH.

5. Вычислить:

1) $\overline{i}\cdot\left(\overline{i}-\overline{j}+\overline{k}\right)$;

2) $\overline{i}\times\left(\overline{i}-3\overline{j}+2\overline{k}\right)$

Глава 3. ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Лекции 5-10

Математический анализ - раздел математики, в котором переменные величины (функции и их обобщения) изучаются с использованием пределов. Понятие предела связано с понятием бесконечно малой величины, и иногда говорят, что математический анализ изучает функции и их обобщения с использованием *метода бесконечно малых*.
Для формулировки математических утверждений используют логические символы, позволяющие сокращать запись:
$\forall$ – любой, произвольный, все;
$\exists$ – существует, найдется;
$\Rightarrow$ – следует, влечет, справедливо;
$\Leftrightarrow$ – равносильно; тогда и только тогда;
$\mapsto$ – соответствие;
$:$ – имеет место; такое, что;
$\in$ – принадлежит;
$\subset$ – включено в, содержится в.

§6. Числовые множества. Функции

6.1. Числовые множества. Множество действительных чисел

Определение 1. ***Множеством*** называется совокупность объектов, объединенных по некоторому признаку.
Например, множество студентов института, множество рыб Черного моря и т.д.

Мы будем использовать ***числовые множества***, элементами которых являются числа. Примерами числовых множеств являются:
$\mathbb{N}=\{1;2;3;\ldots;n;\ldots\}$ - множество натуральных чисел;
$\mathbb{Z}_0=\{0;1;2;3;\ldots;n;\ldots\}$ - множество целых неотрицательных чисел;
$\mathbb{Z}_0=\{0;\pm1;\pm2;\pm3;\ldots;\pm n;\ldots\}$ - множество целых чисел;
$\mathbb{Q}=\left\{\frac{m}{n}:m\in\mathbb{Z},n\in\mathbb{N}\right\}$ - множество рациональных чисел;

Все эти числа принадлежат множеству $\mathbb{R}$ - ***множеству действительных чисел*** и справедливо соотношение: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Множество $\mathbb{R}$ содержит рациональные и иррационатьные числа. Всякое рациональное число, как видно из определения, выражается или конечной десятичной дробью или бесконечной периодической дробью. Например, $\frac{1}{2} = 0.500...$, $\frac{1}{3} = 0,333...$ - рациональные числа.

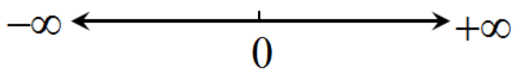
Действительные числа, не являющиеся рациональными, называют ***иррациональными***. Наличие иррациональных чисел легко показать с помощью следующей теоремы.

Теорема. Не существует рационального числа, квадрат которого равен числу 2.

Упр 1. Найти и узучить самостоятельно доказательство данной теоремы.

Мы будем работать с действительными (или вещественными) числами.

Известной и наглядной **интерпретацией** множества $\mathbb{R}$ является бесконечная прямая, на которую нанесена точка (O), являющаяся началом отсчета как в положительном, так и в отрицательном направлениях. Действительные числа – это точки прямой с расстояниями от точки отсчета, равными величинам чисел. Такой интерпретацией мы активно пользуемся со школы, называя положительной бесконечностью ($+\infty$) условный предел при удалении точки по прямой вправо и отрицательной бесконечностью ($-\infty$) условный предел при удалении точки по прямой влево.



6.2. Переменные и постоянные величины

Величины могут быть *<u>переменными</u> и <u>постоянными</u>*, то есть изменяющимися или сохраняющими свое значение неизменным в ходе исследования процессов, встречающихся в природе.

Пример. Радиус и длина окружности могут принимать различные значения, их можно считать значениями переменными, а вот отношение длины окружности к ее диаметру есть величина неизменная, то есть постоянная, называемая числом π ($\pi = 3.14159...$).

Переменные величины могут быть *<u>независимыми</u> и <u>зависимыми (или функциями)</u>* – меняющимися в зависимости от каких-то других величин. Эти понятия также условны.

К примеру, время меняется независимо от чего-либо, и его следует считать переменной величиной. Однако, с позиций общей теории относительности Эйнштейна это совсем не так.

Если рассмотреть уравнение окружности $x^2 + y^2 = 4$, в нем участвует две переменные величины x и y. Одной из них можно придавать в некоторой области любые значения, другая находится из приведенного уравнения. Следовательно, одну из них можно считать независимой, другую – зависимой переменной. При этом независимой переменной может считаться любая из них, тогда вторая будет зависимой.

6.3. Функция. Способы задания функции

Определение 2. Переменная величина y называется ***функцией (однозначной)*** от переменной величины x, если они связаны между собой так, что каждому значению величины x соответствует единственное определенное значение величины y.

Переменная x при этом называется ***аргументом функции*** или ***независимой переменной***. Совокупность всех значений независимой переменной x, для которых функция y определена, называется ***областью определения (областью существования)*** данной функции.

Сформулируем данные определения, пользуясь терминологией множеств.

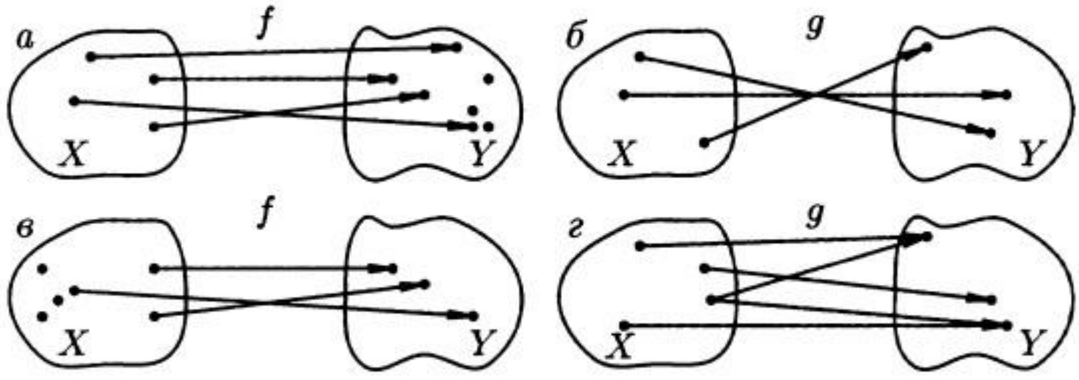
Определение 3. ***На множестве*** X ***задана функция*** $y = f(x)$, если каждому элементу некоторого множества $X \subset \mathbb{R}$ ставится в соответствие один и только один элемент множества $Y \subset \mathbb{R}$:

$$f : X \mapsto Y,$$

здесь f определяет закон, с помощью которого осуществляется это соответствие.

Примеры.

На рисунке ниже функциями являются соответствия f и g на рисунках а) и б), а в случаях в) и г) – нет. В случае в) не каждому элементу $x \in X$ соответствует элемент $y \in Y$. В случае г) не выполняется условие однозначности.



Примеры функций:

1. Показательная функция $y = a^x, x \in \mathbb{R}$, a - параметр.

2. Логарифмическая функция $y = \log_2 x$, $x > 0$.

3. Степенная функция $y = x^n, x \in \mathbb{R}, n$ -параметр, показатель степени.

Определение 4. Множество X называется ***областью существования (областью определения)*** функции $f : X \mapsto Y$, или областью ее определения.

Определение 5. Множество Y называется ***областью значений функции*** $f : X \mapsto Y$.

*Наиболее часто области определения и области существования представляют собой **промежутки**.*

Определение 6. Любое связное подмножество (то есть такое, что от одной произвольной его точки можно дойти до второй произвольной его точки, оставаясь внутри подмножества) числовой оси называется ***промежутком.***

Определение 7. Открытый промежуток, не включающий граничных точек, называется ***интервалом*** и обозначается (a, b) или $a < x < b$.

Определение 8. Замкнутый промежуток, содержащий все внутренние и граничные точки, называется ***отрезком*** и обозначается $[a, b]$ или $a \le x \le b$. Существуют также полуинтервалы $[a,b)$ и $(a,b]$. В первом случае в полуинтервал входит только левая граничная точка, во втором – только правая.

Примеры.

1. Для функции $y = \sin x$ областью существования является вся числовая ось, то есть $-\infty < x < +\infty$ или $x \in \mathbb{R}$, область значений: $y \in [-1,1]$.

2. У функции $y = \sqrt{x}$ область существования $[0, \infty)$ или $0 \le x < \infty$, область значений также $[0, \infty)$.

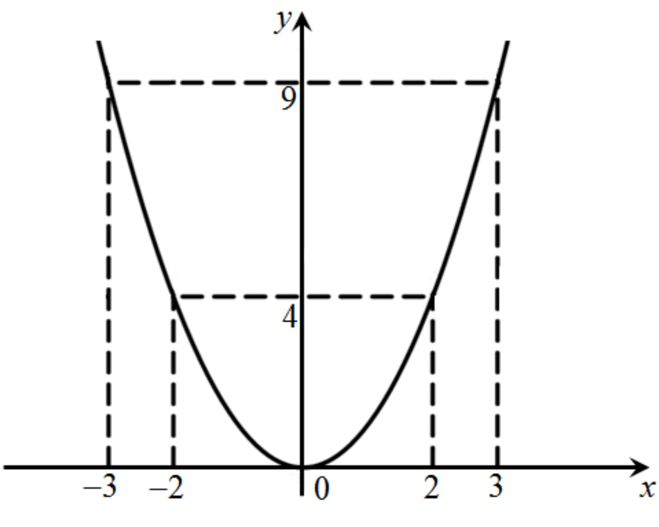
3. У функции $y = \log_a x$ область существования $(0, \infty)$, область значений $(-\infty, \infty)$.

Способы задания функции

Функция может быть задана в виде ***таблицы*** или ***графика***, либо ***формулой (аналитическое задание)***.

В качестве примера приведена степенная функция, аналитическое задание которой $y = x^2$, а табличное и графическое ее задания приведены ниже.

x	± 1	± 1.5	± 2	± 2.5	± 3
y	1	2.25	4	6.25	9



Аналитически функцию можно задать несколькими способами:

1) ***в явном виде:***

$y = f(x)$ - ***явное задание функции***, когда из формулы следует, что переменная y зависит от x, то есть является функцией аргумента x.

2) ***неявно***:

$$F(x,y)=0,$$

когда любая из переменных может считаться независимой, тогда другая переменная является функцией.

Пример неявного задания функции: $x^2+y^2=9$.

Нетрудно заметить, что эта формула задает фактически две непрерывные функции:

$$y=\sqrt{9-x^2},\ x\in[-3{,}3],\ y=-\sqrt{9-x^2},\ x\in[-3{,}3].$$

График первой функции представляет верхнюю полуокружность, график второй – нижнюю ее часть. Если не требовать непрерывности, то из соотношения $x^2+y^2=9$ можно получить бесчисленное множество функций, заданных на отрезке [-3,3].

3) Кроме того, возможно ***параметрическое задание функции***:

$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$, когда вводится дополнительный параметр $t\in[t_0,T]$.

Примером является параметрическое уравнение той же, что и выше окружности $\begin{cases} x=3\cos t \\ y=3\sin t \end{cases}, t\in[0,2\pi)$.

6.4. Обратная функция и сложная функция

Пусть задана функция $y=f(x)$ с областью определения D и множеством значений E.

Определение 9. Если каждому значению $y\in E$ соответствует единственное значение $x\in D$, то определена ***обратная функция*** $x=\varphi(y)$ с областью определения E и множеством значений D:

$$x=\varphi(y)=f^{-1}(y),$$

удовлетворяющая условию

$$f(\varphi(y))=y.$$

Про функции $y=f(x)$ и $x=\varphi(y)$ говорят, что они являются ***взаимно обратными***.

Чтобы найти функцию $x=\varphi(y)$, обратную к $y=f(x)$ достаточно решить уравнение $f(x)=y$ относительно x.

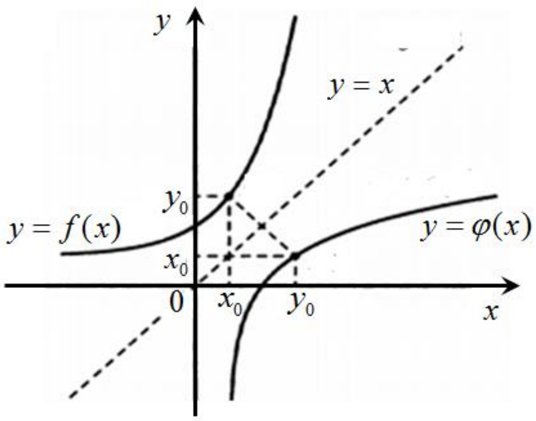
Примеры.

1. Для $y=2x$ обратной является функция $x=\frac{1}{2}y$

2. Для $y=x^2$, $x\in(0,1)$ обратной является функция $x=\sqrt{y}$

3. Для $y=\sin x$ обратной является функция $x=\arcsin y$.

Во всех этих случаях исходная и обратная функции имеют одинаковые графики, но если условиться, что зависимая переменная всегда берется как x, а зависимая - y, то функция обратная $y=f(x)$ запишется в виде $y=\varphi(x)$. И ***графики взаимно обратных функций будут симметричны относительно биссектрисы первой и третьей четвертей декартовой системы координат.***



Рассмотрим ***функцию от о функции*** $y=f(\varphi(x))$, которая называется ***сложной функцией*** от x (или ***суперпозицией*** заданных функций).
Если $y=f(u)$ и $u=\varphi(x)$ являются взаимно обратными, то сложная функция

$$y=f(\varphi(x))=f(f^{-1}(x))=x,$$

то есть взаимно обратные функции в суперпозиции нивелируют друг друга.

Например:

1. Так как для $y=2x$ обратной является функция $x=\frac{1}{2}y$, то:

$$y=2u, u=\frac{1}{2}x \Rightarrow y=2(u)=2\left(\frac{1}{2}x\right)=x$$

2.Так как для $y = x^2$, $x \in (0,1)$ обратной является функция $x = \sqrt{y}$,то очевидно: $y = u^2, u = \sqrt{x} \Rightarrow y = (u)^2 = \left(\sqrt{x}\right)^2 = x$

3. Так как для $y = \sin x$ обратной является функция $x = \arcsin y$, то очевидно: $y = \sin u, u = \arcsin x \Rightarrow y = \sin(u) = \sin(\arcsin x) = x$.

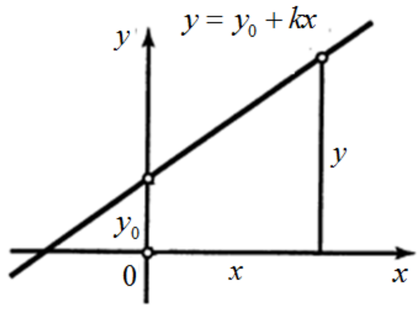
6.5. Основные элементарные функциональные зависимости

Линейная зависимость

Определение 10. Две переменные величины связаны ***линейной зависимостью***, если

$$y = y_0 + kx,$$

где y_0 и k-постоянные величины. Такая функция называется ***линейной***, ее график – прямая, k - угловой коэффициент.



Определение 11. Если $y_0 = 0$, то функция $y = kx$ задает ***прямую пропорциональную зависимость***, а две перменные величины называются ***прямо пропорциональными***, коэффициент k носит название ***коэффициента пропорциональности.***

Примерами прямо пропорциональных величин служат: длина окружности и ее радиус; путь и затраченное время при равномерном движении, линейное растяжение упругого стержня и нагрузка и др.
Примерами величин, находящихся в линейной зависимости

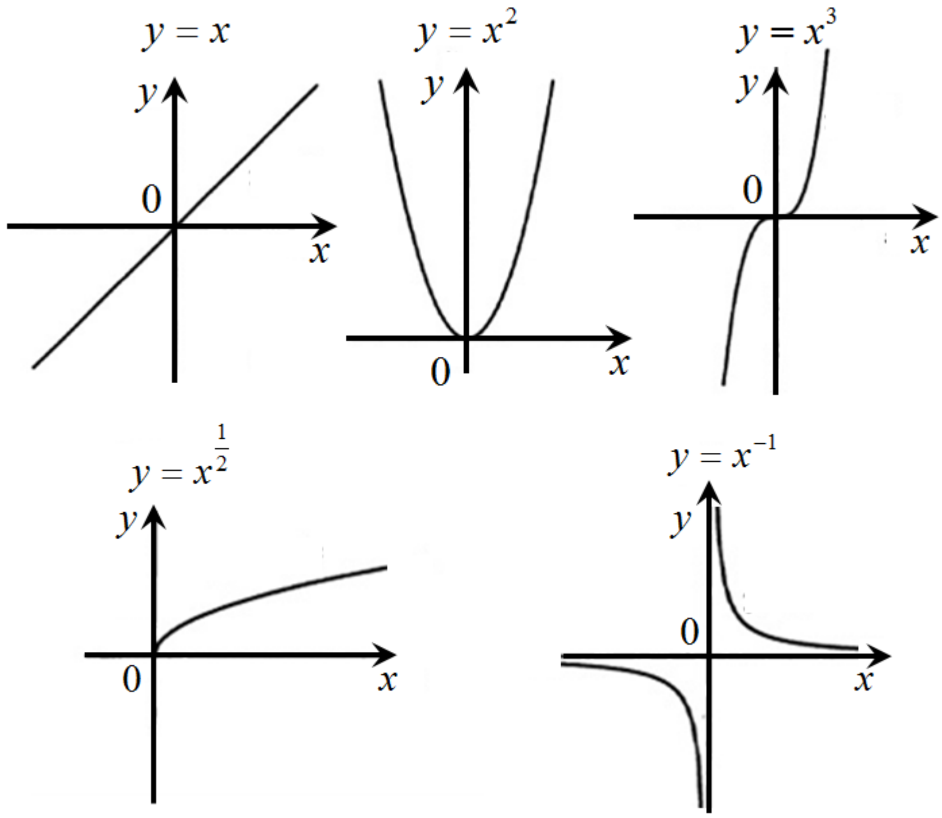
Степенная функция

$$y = x^{\alpha}, \alpha \in \mathbb{R}$$

При различных значениях параметра α получают различные виды зависимостей. Например:

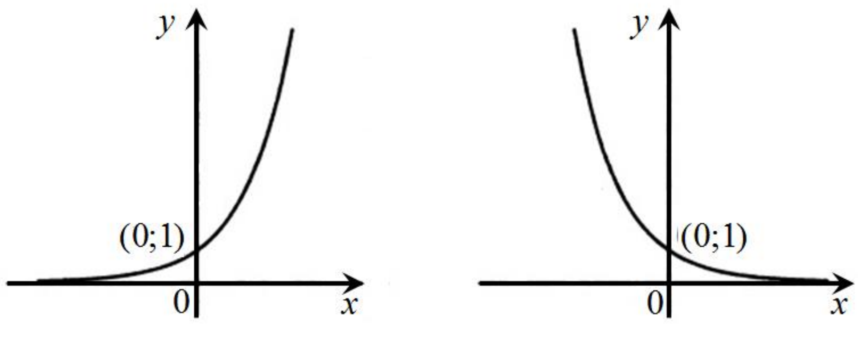
при $\alpha = 1$ - ***прямо пропорциональная*** или ***линейная***;
при $\alpha = 2$ зависимость называется ***квадратичной*** и задает параболу;
при $\alpha = 3$зависимость задает кубическую параболу;
при $\alpha = 0.5$ имеем ветвь параболы направленную вдоль оси Ox;
при $\alpha = -1$ имеем ***обратно пропорциональную зависимость***.

Примерами обратно пропорциональных зависимостей являются объем занимаемый газом и давление (при постоянной температуре), сила тока и сопротивление цепи(при постоянной электродвижущей силе).
Графики некоторых зависимостей приведены ниже.



Показательная функция

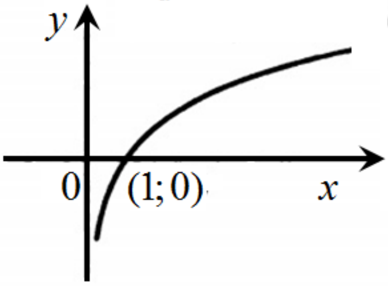
$$y = a^x, a > 0, a \neq 1.$$



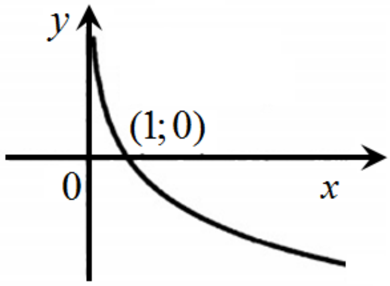
Логарифмическая функция

$$y = \log_a x, a > 0, a \neq 1$$

$y = \log_a x,\ a > 1$



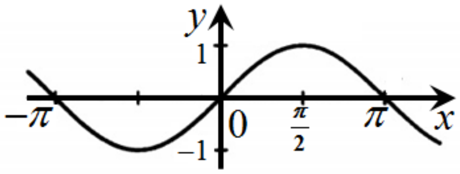
$y = \log_a x,\ 0 < a < 1$



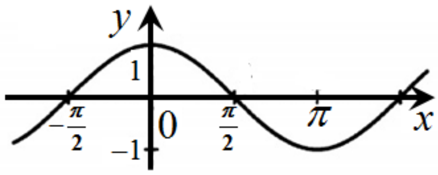
Замечание. Показательная и логарифмическая функции с одинаковыми основаниями являются взаимно обратными.

Тригонометрические функции

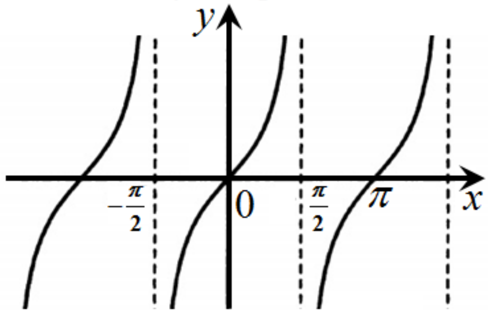
$y = \sin x$



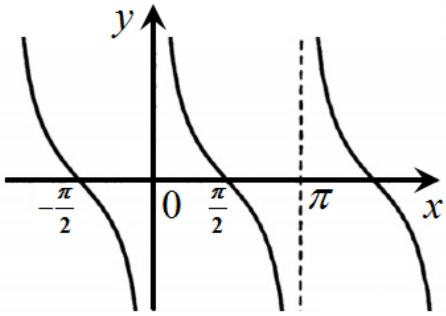
$y = \cos x$



$y = \operatorname{tg} x$

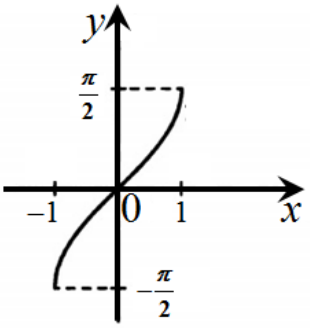


$y = \operatorname{ctg} x$

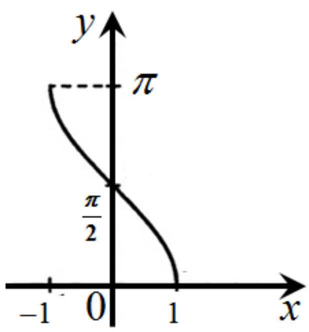


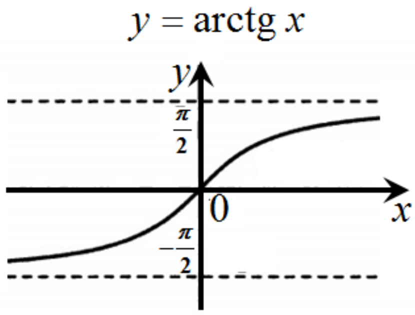
Обратные тригонометрические функции

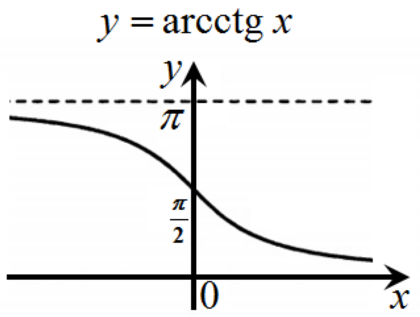
$y = \arcsin x$



$y = \arccos x$







Функция, задаваемая одной формулой, составленной из основных элементарных функций и постоянных с помощью конечного числа арифметических операций (сложения, вычитания, умножения, деления) и операций взятия функции от функции, называется ***элементарной функцией***. Примерами элементарных функций могут служить функции:

$$y = 2^{\sin\sqrt{x}},\ y = \arccos\frac{1}{x^2} - \frac{tgx}{x^2-4},\ y = \ln(x^2+10)$$

Примерами неэлементарных функций могут служить функции

$$y = \operatorname{sign} x = \begin{cases} 1, & x>0, \\ 0, & x=0, \\ -1, & x<0; \end{cases} \quad y = \begin{cases} x^2-1, & x\le 0, \\ x-1, & x\ge 0; \end{cases}$$

$$y = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \ldots + \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)!}x^{2n-1} + \ldots$$

§7. Последовательности

7.1. Числовые последовательности

Определение 1. ***Последовательностью*** $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$ называется функция

$$\boxed{x_n = f(n)},$$

заданная на множестве натуральных чисел $\mathbb{N}$. Обозначается она кратко в виде:

$$\{x_n\} \text{ или } x_n, n\in\mathbb{N}.$$

Число x_1 называется первым членом (элементом) последовательности, x_2 – вторым, …, x_n– ***общим*** или ***n-ым членом последовательности***.

Последовательности бывают ***числовыми***, если все ее элементы – числа и ***функциональными***, когда ее элементы – функции.

Примеры.

1. $\left\{\frac{1}{n^2}\right\}_{n\in N}=1,\frac{1}{4},\frac{1}{9},\frac{1}{16},\frac{1}{25},.......$ – числовая последовательность,

2. $\left\{\frac{\sin(nx)}{n}\right\}_{n\in N}=\sin x,\frac{\sin(2x)}{2},\frac{\sin(3x)}{3},\frac{\sin(4x)}{4},\frac{\sin(5x)}{5},.....,\ x\in[0,2\pi],$ – функциональная последовательность.

7.2. Предел числовой последовательности

Определение 2. Числовая последовательность называется ***ограниченной***, если

$$\exists M>0:\forall n\quad\Rightarrow|x_n|\le M$$

Определение 3. Последовательность называется ***возрастающей (неубывающей)***, если

$$\forall n\quad\Rightarrow x_n<x_{n+1}\quad(x_n\le x_{n+1})$$

Аналогично, последовательность ***убывающая (невозрастающая)***, если

$$\forall n\quad\Rightarrow x_n>x_{n+1}\quad(x_n\ge x_{n+1}).$$

Данные последовательности называются ***монотонными***.

Пример.

$\left\{\frac{1}{n^2}\right\}$, $\left\{\frac{n-1}{n}\right\}$ - ограниченные, монотонные (убывающая и возрастающая соответственно);

$\left\{n^2+1\right\}$ - неограниченная, монотонная;

$\left\{(-1)^n\cdot n\right\}$ - неограниченная, немонотонная

Определение 4. Число a называется ***пределом числовой последовательности*** x_n, если для любого положительного числа ε найдется такое натуральное число N, что при всех $n>N$ справедливо неравенство: $|x_n-a|<\varepsilon$.

Коротко это определение можно записать так:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}x_n=a\Leftrightarrow\left(\forall\varepsilon>0\quad\exists N=N(\varepsilon):\forall n>N\Rightarrow|x_n-a|<\varepsilon\right)}$$

Произвольность положительного числа ε обеспечивает возможность для членов последовательности x_n с большими номерами n подойти сколь угодно близко к пределу a.

Пример.

Доказать, что предел последовательности $u_n = \left\{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \cdots, \frac{n-1}{n}, \cdots\right\}$

равен 1.

Доказательство.

По определению предел равен 1, если

$$\left(\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = N(\varepsilon): \forall n > N \Rightarrow |u_n - 1| < \varepsilon\right) \quad \Leftrightarrow \quad \left|\frac{n-1}{n} - 1\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon$$

Неравенство справедливо для всех $n > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow n > N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$, где квадратными скобками обозначена целая часть числа $\frac{1}{\varepsilon}$.

Если $\varepsilon = \frac{3}{26} \Rightarrow n > N = \left[\frac{26}{3}\right] = \left[8\frac{2}{3}\right] = 8$.

Если $\varepsilon = 0.1 \Rightarrow n > N = \left[\frac{1}{0.1}\right] = 10$

Итак, для любого положительного числа ε указано соответствующее значение N. Это доказывает, что $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 1$.

Ч.Т.Д.

Выясним геометрический смысл определения предела последовательности. Для этого введем следующее определение.

Пусть x_0 - любое действительное число.

Определение 5. ***Окрестностью точки*** x_0 называется любой интервал (a,b), содержащий точку x_0.В частности, интервал $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ называется ε***-окрестностью точки*** x_0. Число x_0 называется ***центром***, а число ε - ***радиусом***.

Если $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, то $x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon$ или, что то же, $|x - x_0| < \varepsilon$. Выполнение неравенства $|x - x_0| < \varepsilon$ означает попадание точки x в ε-окрестность.

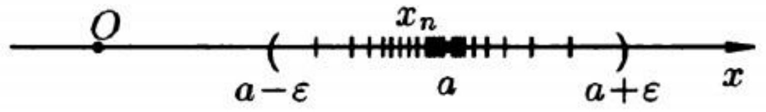
Тогда ***геометрический смысл определения*** предела последовательности следующий.

Определение 4а. Число a называется ***пределом последовательности*** x_n, если для любой ε-окрестности точки a найдется такое нату-

ральное число N, что все значения x_n, для которых $n > N$, попадут в ε -окрестность точки a.
Действительно,

$$\left|x_n - a\right| < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < x_n - a < \varepsilon \Leftrightarrow a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon \Rightarrow x_n \in \left(a - \varepsilon, a + \varepsilon\right),$$

т.е. x_n принадлежит ε-окрестности точки a.



Определение 6. Последовательность, имеющая ***конечный предел,*** называется ***сходящейся последовательностью***. В противном случае последовательность называют ***расходящейся***.

Теорема (Вейерштрасс). Всякая монотонная ограниченная последовательность имеет предел.

Примеры.

1. $\left\{\frac{1}{n}\right\}$- монотонная, убывающая ограниченная последовательность. Следовательно, имеет предел.

Величина $\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n}$ может быть сделана сколь угодно малой при достаточно больших значениях n. Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$.

2. $\left\{\frac{n-1}{n}\right\}$ - монотонно возрастающая ограниченная последовательность. Следовательно, имеет предел.

Величина $|\frac{n}{n+1} - 1| = \frac{1}{n+1}$ может быть сделана сколь угодно малой при достаточно больших значениях n. Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = 1$.

3. Последовательность $\left\{n^3\right\}_{n\in\mathrm{N}} = 1, 8, 27, ...$ неограниченно возрастает с ростом n, стремясь к бесконечности. Конечного предела эта последовательность не имеет. Следовательно, эта последовательность расходится.

4. Последовательность $\left(-1\right)^{n+1} = 1, -1, 1, -1......$ не имеет предела, и значит, расходится.

5. Последовательность $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 2, \left(\frac{3}{2}\right)^2, \left(\frac{4}{3}\right)^3, ...$

является сходящейся, ее предел называется ***числом Непера*** и обозначается буквой e, причем $e \approx 2,7182818...$

Таким образом, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$.

Определение 7. Последовательность x_n называется ***бесконечно малой***, если ее предел равен нулю, т.е. для $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = N(\varepsilon) \in \mathrm{N}$ такое, что при $\forall n > N(\varepsilon)$ справедливо неравенство:

$$|x_n| < \varepsilon.$$

Определение 8. Расходящаяся последовательность называется ***бесконечно большой***, если для $\forall M > 0 \quad \exists N = N(M) \in \mathrm{N}$ такое, что при $\forall n > N(M)$ справедливо неравенство:

$$|x_n| > M.$$

Произвольность числа M позволяет значениям членов последовательности с большими номерами быть сколь угодно большими по абсолютной величине.

Очевидно, что ***последовательность*** x_n ***является бесконечно малой тогда и только тогда, когда последовательность*** $y_n = \frac{1}{x_n}$ ***является бесконечно большой***.

Определение 9. Последовательность $b_n = b_1, b_2, b_3........$ называется ***подпоследовательностью*** последовательности $a_n = a_1, a_2, a_3........$, если все ее элементы b_n являются элементами последовательности a_n.

Пример.

Последовательность $\left\{\frac{1}{3^{2n}}\right\} = \frac{1}{3^2}, \frac{1}{3^4}, \frac{1}{3^6}, ...$ является подпоследовательностью последовательности $\left\{\frac{1}{3^n}\right\} = \frac{1}{3}, \frac{1}{3^2}, \frac{1}{3^3}, \frac{1}{3^4}, \frac{1}{3^5}, \frac{1}{3^6}, ...$

Существует теорема, доказывающая, что *если последовательность сходится к некоторому значению, то все ее подпоследовательности сходятся и к тому же значению.*

§8. Предел функции

8.1. Предел функции в точке

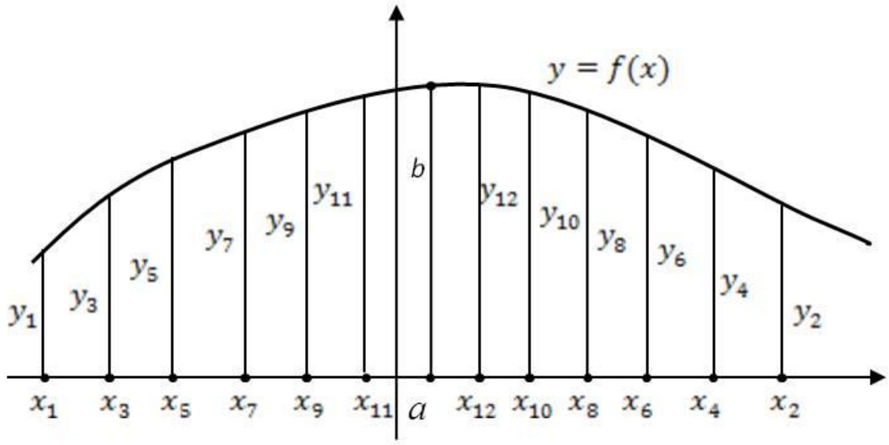
Если при вычислении предела последовательности всегда $n \to \infty$, то, вычисляя предел функции $f(x)$, следует оговаривать, к чему стремится ее аргумент. Рассмотрим, в чем различие между пределами последовательности $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}$ и функции $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}$. Если в последовательности n возрастает, принимая только значения из множества натуральных чисел, то x может возрастать, принимая любые вещественные значения. Пределы последовательности и функции в этом случае равны нулю.

В то же время имеет смысл рассмотреть предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}$. Стоящая под знаком предела функция увеличивается с приближением ее аргумента x к нулю, оставаясь положительной, причем, при x сколь угодно близких к нулю, ее значение становится все большим и большим. Ясно, что $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=\infty$. Поскольку при $x=0$ рассматриваемая функция не существует, этот ее предел дает важнейшую информацию – показывает поведение функции в окрестности предельной точки. При подходе к этой точке она уходит в бесконечность.

Определение 1. Число b называется ***пределом функции*** $f(x)$ при $x \to a$, если для любой последовательности x_k значений аргумента, стремящейся к числу a, соответствующая ей функциональная последовательность $f(x_k)$ сходится к b.

Пусть дана функция $y = f(x)$ и задана некоторая последовательность значений аргумента $\{x_k\}$, предел которой равен числу a. Для наглядности можно составить соответствующую таблицу значений функции $\{y_k\}$ и отметить значения обеих последовательностей на графике.

x_k	x_1	x_3	x_5	x_7	x_9	x_{11}	$\to$	a
$y_k = f(x_k)$	y_1	y_3	y_5	y_7	y_9	y_{11}	$\to$	b



$$\lim_{x\to a} f(x) = b$$

Рассмотрим две подпоследовательности $\{x_k\}$, которые также будут стремиться к числу a. В одну подпоследовательность включим все элементы с четным индексом k, в другую – с нечетными индексами k и составим две соответствующие таблицы:

x_k	x_2	x_4	x_6	x_8	x_{10}	x_{12}	$\to$	a
$y_k = f(x_k)$	y_2	y_4	y_6	y_8	y_{10}	y_{12}	$\to$	b

x_k	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}	$\to$	a
$y_k = f(x_k)$	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8	y_9	y_{10}	y_{11}	y_{12}	$\to$	b

В первой таблице все члены последовательности x_k больше a, и мы подходим к точке a справа, во второй – все элементы меньше предельного значения аргумента, подходим к точке a слева, в исходной полной таблице для всех k – элементы последовательности расположены как слева, так и справа от предельного значения a. Соответствующие им функциональные последовательности $y_k = f\left(x_k\right)$ во всех трех случаях стремятся к b. Если для любой другой последовательности z_k, стремящейся к a, последовательность $y_k = f\left(z_k\right)$ также стремится к b, то предел функции равен этому числу, что видно из рисунка.

Приведенное определение предела функции в точке, связанное с рассмотрением числовых последовательностей, неудобно тем, что реально невозможно изучить все числовые последовательности, сходящиеся к числу a. Поэтому для исследования существования предела пользуются вторым определением, равносильным первому.

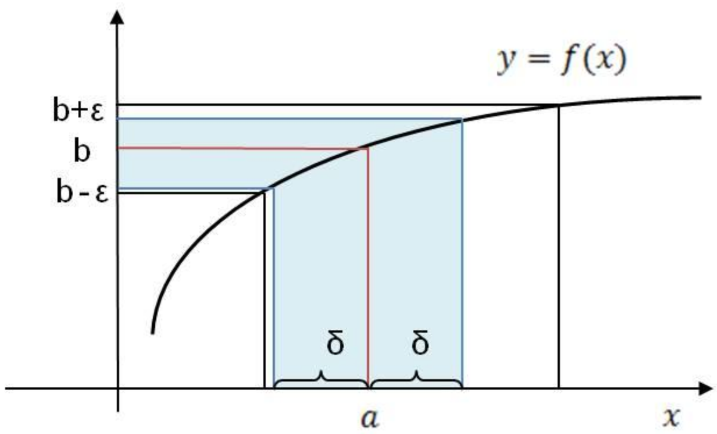
Определение 2. Число b называется ***пределом функции*** $f(x)$ при $x \to a$, если для любого положительного ε существует такое положительное $\delta(\varepsilon)$, что для любого x, для которого выполняется неравенство $|x-a|<\delta$, выполняется неравенство $|f(x)-b|<\varepsilon$.

Краткая формулировка определения такова:

$$\boxed{\left(\forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0 \ \forall x: \quad |x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-b|<\varepsilon\right) \Leftrightarrow \lim_{x\to a} f(x)=b.}$$

Геометрический смысл определения следующий.

Число b называется пределом функции $f(x)$ при $x \to a$, если для любой ε-окрестности точки b найдется такая δ-окрестность точки a, что для всех $x \neq a$ из этой δ-окрестности соответствующие значения функции $f(x)$ лежат в ε-окрестности точки b(см. рисунок ниже).



Доказана эквивалентность определений *1* и 2, то есть из *1* следует *2*, и наоборот.

8.2. Предел функции при $x \to \infty$

Определение 3. Число b ***называется пределом функции*** $f(x)$ ***при*** $x \to \infty$, если для любого положительного ε существует такое число $M = M(\varepsilon) > 0$, что при всех x, удовлетворяющих неравенству $|x| > M$ выполняется неравенство $|f(x)-b|<\varepsilon$.

Коротко это определение записывается так:

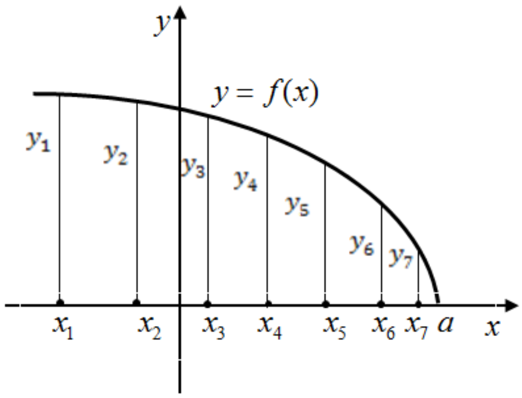
$$\boxed{\left(\forall\varepsilon>0 \quad \exists M = M(\varepsilon)>0 \ \forall x: \quad |x|>M \Rightarrow |f(x)-b|<\varepsilon\right) \Leftrightarrow \lim_{x\to \infty} f(x)=b.}$$

Если $x \to +\infty$, то пишут $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=b$, если $x \to -\infty$, то пишут $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=b$

8.3. Односторонние пределы

Определение 4. Число b называется ***левым пределом функции*** $f(x)$ при $x \to a$ (пределом слева), если для любой последовательности значений аргумента $\{x_k\}$, стремящейся к a слева $(x_k < a)$ соответствующая ей функциональная последовательность $\{f(x_k)\}$ сходится к b.

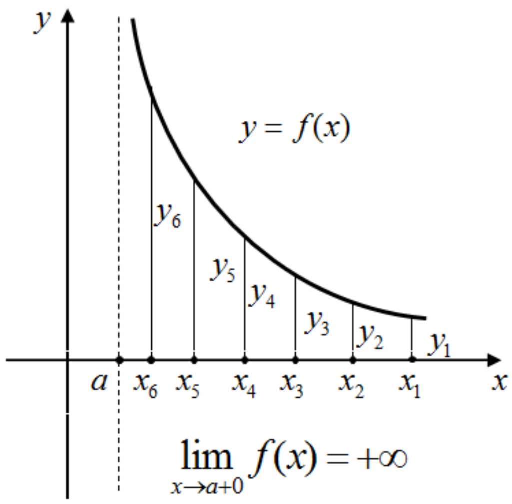
Обозначение $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = b$.



$$\lim_{x \to a-0} f(x) = 0$$

Определение 5. Число b ***называется правым пределом функции*** $f(x)$ при $x \to a$ (пределом справа), если для любой последовательности значений аргумента $\{x_k\}$, стремящейся к a справа $(x_k > a)$ соответствующая ей функциональная последовательность $\{f(x_k)\}$ сходится к b.

Обозначение $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = b$.



§9. Бесконечно малые и бесконечно большие функции

9.1. Основные определения и свойства

Определение 1. Функция $\alpha(x)$ называется ***бесконечно малой функцией*** (бесконечно малой) при $x \to x_0$, если

$$\lim_{x \to x_0} \alpha(x) = 0.$$

Определение 2. Функция $A(x)$ называется ***бесконечно большой функцией*** (бесконечно большой) при $x \to x_0$, если

$$\lim_{x \to x_0} A(x) = \pm\infty.$$

Следствие. Функция $\frac{1}{A(x)}$ при $x \to x_0$ бесконечно малая, а $\frac{1}{\alpha(x)}$ – бесконечно большая.

Определение 3. Функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называется ***бесконечно малыми одного порядка малости*** при $x \to x_0$, если

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = K, \text{ причем } 0 < /K/ < \infty.$$

Определение 4. Функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называется ***эквивалентными бесконечно малыми*** при $x \to x_0$, если:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1.$$

Определение 5. Функция $\alpha(x)$ называется ***бесконечно малой более высокого порядка малости***, чем $\beta(x)$, при $x \to x_0$, если:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0.$$

Известны следующие **свойства** бесконечно малых.

1) Сумма конечного числа бесконечно малых – бесконечно малая.
2) Произведение бесконечно малой и конечной величины – величина бесконечно малая.
3) Произведение бесконечно малых – бесконечно малая.

9.2. Связь между функцией, ее пределом и бесконечно малой функцией

Теорема о пределе функции. Функция, стоящая под знаком предела отличается от своего предельного значения на бесконечно малую, то есть из $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=b$ следует $f(x)=b+\alpha(x)$, причем $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$.

Доказательство.

Если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=b$, то согласно определению предела $\forall\varepsilon>0\,\exists\delta(\varepsilon)>0:\forall x,|x-x_0|<\delta(\varepsilon)\left(\left|f(x)-b\right|<\varepsilon\right)$, теперь если обозначить $f(x)-b=\alpha(x)$, то $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$.

Ч.Т.Д.

9.3. Свойства пределов функций

1) Предел постоянной равен самой постоянной:

$$\lim_{x\to x_0} C=C$$

Это свойство следует из определения предела.

2) Постоянную можно выносить за знак предела:

$$\lim_{x\to x_0} Kf(x)=K\lim_{x\to x_0} f(x)$$

Доказательство.

В самом деле, пусть $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=b$, в соответствии с теоремой $f(x)=b+\alpha(x)$, причем $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$.

Очевидно, $K\cdot f(x)=K\cdot b+K\cdot\alpha(x)$, где K постоянная. Но $K\cdot\alpha(x)$ – бесконечно малая при $x\to x_0$, что следует из свойств бесконечно малых, тогда функция $K\cdot f(x)$ отличается от $K\cdot b$ на бесконечно малую величину, следовательно, $\lim\limits_{x\to x_0} K\cdot f(x)=K\cdot b=K\cdot\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.

Ч.Т.Д.

3) Предел суммы двух функций равен сумме пределов этих функций, если они существуют:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=b,\lim_{x\to x_0} g(x)=c\Rightarrow\lim_{x\to x_0}\left(f(x)+g(x)\right)=b+c$$

Доказательство.

Пусть $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=b$ и $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=c$, тогда $f(x)=b+\alpha(x)$ и $g(x)=c+\gamma(x)$, где $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$ и $\lim\limits_{x\to x_0}\gamma(x)=0$, тогда $f(x)+g(x)=b+c+\underline{\alpha(x)+\gamma(x)}$. Но подчеркнутые члены – это бесконечно малая величина, и значит,

$\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)+g(x)\right)=b+c=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)+\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$. Ч.Т.Д.

4) Предел произведения двух функций равен произведению их пределов, если они существуют:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=b, \lim_{x\to x_0} g(x)=c \Rightarrow \lim_{x\to x_0}\left(f(x)\cdot g(x)\right)=b\cdot c$$

Упр. Доказать самостоятельно свойство 4.

5) Предел отношения двух функций: $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$, если оба предела существуют и $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\neq 0$.

Упр. Доказать самостоятельно свойство 5.

6) Если $f(x)\le g(x)$, то $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\le\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.

7) **Теорема о двух полицейских.** Если $h(x)\le f(x)\le g(x)$ и $\lim\limits_{x\to x_0} h(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=b$, то $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=b$.

9.4. Первый замечательный предел

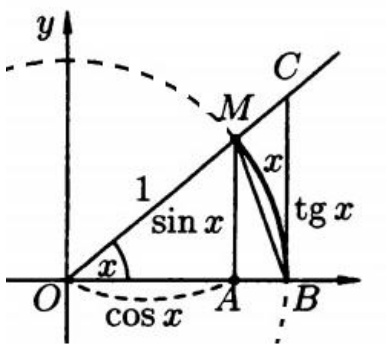
Докажем, что справедлива формула

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1},$$

называемая ***первым замечательным пределом***.

Доказательство.

Рассмотрим сектор круга единичного радиуса с углом при вершине, равным $x, 0<x<\dfrac{\pi}{2}$. BM – дуга граничной окружности сектора, A – его вершина, AB = AM = 1. BD – отрезок касательной к дуге BM в точке B. BC – перпендикуляр, опущенный из точки B на отрезок AM.



В силу последовательной вложенности друг в друга треугольника OBM, сектора OBM и треугольника OBC соответствующие соотношения между площадями этих фигур имеют место:

$$S_{\Delta OBM} < S_{сектора\ OBM} < S_{\Delta OBC}.$$

Записывая выражения этих площадей, имеем: $\frac{1}{2}\sin x < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}\operatorname{tg} x$.

Поэтому получаем неравенство: $\sin x < x < \operatorname{tg} x$.

Если мы поделим все части этого неравенства на $\sin x$, то знаки неравенства не изменятся. Поэтому мы имеем:

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}.$$

А теперь устремим x к нулю и применим теорему о двух полицейских. Мы получим, что при $x > 0$: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sin x} = 1$.

Если $x < 0$, то $\frac{\sin x}{x} = \frac{\sin(-x)}{-x}$, $-x > 0$. Поэтому и в этом случае равенство справедливо. Осталось применить свойство 5) пределов для получения предела обратной величины: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$.

Ч.Т.Д.

9.5. Второй замечательный предел и его следствия

Справедливы следующие формулы, называемые ***вторым замечательным пределом***:

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}, \quad \lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = \mathrm{e}, \quad \mathrm{e} \approx 2.71...}$$

Равносильность этих формул следует из связи переменных: $\alpha = \frac{1}{x}$.

Заметим, что здесь в первой из приведенных формул переменная x может стремиться как к $+\infty$, так и к $-\infty$, а также может просто расти по абсолютной величине, меняя знак произвольно.

Приведенная формула имеет следующие ***следствия***.

1. Если мы формально прологарифмируем вторую из приведенных формул, мы получим 1-е следствие второго замечательного предела:

$$\boxed{\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t}=1}.$$

2. Другим следствие второго замечательного предела является предел, получаемый из предыдущего заменой $z=\ln(1+t)$:

$$\boxed{\lim_{z\to 0}\frac{e^z-1}{z}=1}.$$

3. Рассмотрим теперь предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^\alpha-1}{x}$.

Сделаем замену $(1+x)^\alpha=e^z$. При такой замене $x\to 0$ тогда и только тогда, когда $z\to 0$. Получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\lim_{z\to 0}\frac{e^z-1}{e^{z/\alpha}-1}=\lim_{z\to 0}\frac{e^z-1}{z}\cdot\lim_{z\to 0}\frac{z/\alpha}{e^{z/\alpha}-1}\cdot\alpha=\alpha,$$

А значит

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\left(1+x\right)^\alpha-1}{x}=\alpha}$$

§10. Непрерывность функции

10.1. Основные определения

Определение 1. ***Функция*** $f(x)$ ***непрерывна в точке*** a, если предел этой функции при $x\to a$ равен значению функции в предельной точке, то есть

$$\boxed{\lim_{x\to a}f(x)=f(a)}.$$

Это равенство может быть записано в виде:

$$\lim_{x\to a}f(x)=f(\lim_{x\to a}x)=f(a),$$

так как $\lim\limits_{x\to a}x=a$.

Это означает, что ***при нахождении предела непрерывной функции*** $f(x)$ ***можно перейти к пределу под знаком функции, то есть вместо*** x ***подставить его предельное значение*** a.

Примеры.

1) $\lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{\sin x}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}} = e$

На промежуточном шаге вычислений функция и предел поменялись местами (знак предела внесен под знак функции, в ее аргумент) в силу непрерывности функции e^x.

2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot\ln(1+x) = \lim\limits_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln\left(\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right) = 1$

Применяя определение предела функции в точке (см. §8,Определение 2), получим

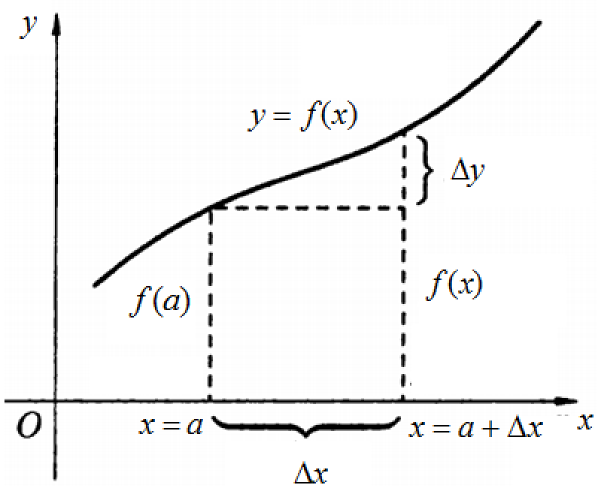
Определение 2. ***Функция*** $f(x)$ ***непрерывна в точке*** a, если $\left(\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0 \ \ \forall x: \quad |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon\right)$.

Другое определение непрерывности опирается на понятия приращения аргумента и функции.

Пусть функция $f(x)$ определена на некотором интервале (b,c). Возьмем точку $a \in (b,c)$.

Определение 3. Для любого $x \in (b,c)$ разность $x-a$ называется ***приращением аргумента*** x ***в точке*** a и обозначается Δx: $\Delta x = x - a$.

Определение 4. Разность соответствующих значений функции $f(x) - f(a)$ называется ***приращением функции*** $f(x)$ ***в точке*** a и обозначается Δy: $\Delta y = f(x) - f(a)$ или $\Delta y = f(a+\Delta x) - f(a)$.



Определение 5. ***Функция*** $y = f(x)$ ***непрерывна в точке*** a, если

$$\boxed{\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0}$$

где Δx – приращение аргумента функции ($x = a + \Delta x$), а $\Delta y = f(a + \Delta x) - f(a)$ – приращение функции, соответствующее приращению ее аргумента Δx.

Доказательство.

Из Определения 1 непрерывности функции следует

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} \left(f\left(a + \Delta x\right) - f\left(a\right)\right) = \lim_{\Delta x \to 0} f\left(a + \Delta x\right) - \lim_{\Delta x \to 0} f\left(a\right) = f\left(a\right) - f\left(a\right) = 0.$$

Здесь первый из пределов вычисляется с помощью Определения 1, второй – как предел постоянной, поскольку $f\left(a\right)$ не зависит от Δx.

Ч.Т.Д.

Определение 6. ***Функция*** $f(x)$ ***непрерывна в точке*** a, если

$$\lim_{x \to a-0} f\left(x\right) = \lim_{x \to a+0} f\left(x\right) = f\left(a\right).$$

Определение 7. ***Функция*** $f(x)$ ***непрерывна в некоторой области***, если она непрерывна во всех точках этой области.

Все степенные, показательные, логарифмические, тригонометрические и обратные тригонометрические функции непрерывны в областях существования.

10.2. Свойства непрерывных функций

1) Сумма непрерывных функций – есть непрерывная функция.

Доказательство.

Действительно, из Определения 1 непрерывности следует, что если $\lim_{x \to a} f\left(x\right) = f\left(a\right)$ и $\lim_{x \to a} g\left(x\right) = g\left(a\right)$, то

$$\lim_{x \to a} \left(f(x) + g(x)\right) = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x) = f(a) + g(a)$$

Ч.Т.Д.

2) Произведение непрерывных функций есть функция непрерывная.

3) Частное непрерывных функций – функция непрерывная, если знаменатель в предельной точке не равен нулю.

Доказательства второго и третьего свойств также следует из свойств пределов.

Упр. Доказать самостоятельно свойства 2 и 3.

4) Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна в точке a, пусть функция $z = g(y)$ непрерывна в точке $b = f(a)$. Тогда функция $z = h(x) = g(f(x))$ непрерывна в точке a.

Доказательство.

Очевидно, что $\Delta z = h(a+\Delta x) - h(a) = g(f(a+\Delta x)) - g(f(a)) =$

$= g(f(a) + f(a+\Delta x) - f(a)) - g(f(a)) = g(b+\Delta y) - g(b)$.

Так как согласно определению 3 непрерывности $\Delta y \to 0$ при $\Delta x \to 0$ и $\Delta z \to 0$ при $\Delta y \to 0$, получим: $\Delta z \to 0$ при $\Delta x \to 0$.

Ч.Т.Д.

Таким образом, ***непрерывная функция от непрерывной функции есть функция непрерывная***.

Пример. Функция $z = \sin\left(x^2\right)$ непрерывна для всех $x \in \mathbb{R}$, так как функция $y = x^2$ непрерывна на $\mathbb{R}$, а функция $z = \sin y$ непрерывна на множестве неотрицательных чисел.

10.3. Точки разрыва функции

Определение 8. Точки, в которых функция не определена или определена, но не является непрерывной, называются ***точками разрыва этой функции***.

Определение 9. Если $x = x_0$ – точка разрыва функции $y = f(x)$ и существуют конечные пределы $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = A_1$ и $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = A_2$, то она называется ***точкой разрыва первого рода.*** При этом:

а) если $A_1 = A_2$, то точка x_0 называется ***точкой устранимого разрыва;***

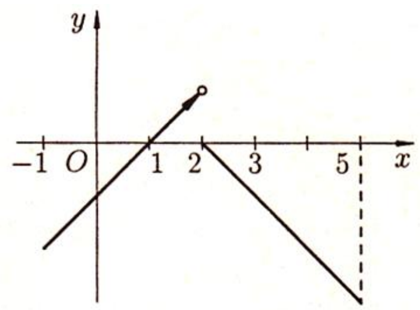
б) если $A_1 \neq A_2$, то точка x_0 называется ***точкой конечного разрыва***.

Величину $\left|A_1 - A_2\right|$ называют ***скачком функции*** в точке разрыва первого рода.

Пример:

1. Для функции $f(x) = \begin{cases} x-1, \text{ если } -1 \le x < 2, \\ 2-x, \text{ если } 2 \le x \le 5, \end{cases}$

Точка $x_0 = 2$ является точкой разрыва первого рода, т.к. функция определена в точке $x_0 = 2$ ($f(2) = 0$), однако в точке $x_0 = 2$ имеет разрыв – функция не имеет предела при $x \to 2$:



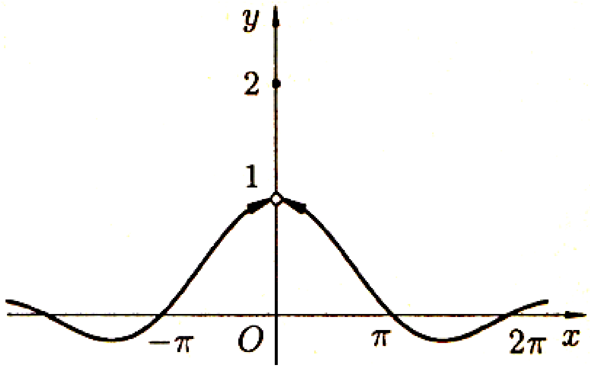
$\lim\limits_{x \to 2-0} f(x) = 1$, а $\lim\limits_{x \to 2+0} f(x) = 0$

.

Скачок функции равен $|1 - 0| = 1$.

2. Для функции

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, \text{если } x \neq 0, \\ 2, \quad \text{если } x = 0. \end{cases}$$



Точка $x_0 = 0$ – точка разрыва: $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$, а $g(x_0) = g(0) = 2$.

При этом $x_0 = 0$ является точкой устранимого разрыва первого рода. Положив $g(x) = 1$ (вместо $g(x) = 2$) при $x = 0$, разрыв устранится, функция станет непрерывной.

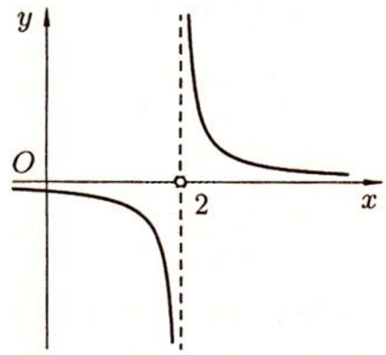
Определение 10. Точка разрыва x_0 называется ***точкой разрыва второго рода*** функции $y = f(x)$, если по крайней мере один из односторонних пределов (слева или справа) не существует или равен бесконечности.

Пример:

Функция $y = \dfrac{1}{x-2}$ не определена в точке $x_0 = 2$

.

Точка $x_0 = 2$ – точка разрыва второго рода.



Пример.

Дана функция $f(x) = \dfrac{|x-3|}{x-3}$. Найти точки разрыва, выяснить их тип.

Решение.

Функция $f(x)$ определена и непрерывна на всей числовой оси, кроме точки $x=3$. Очевидно, $f(x)=\begin{cases} 1 \text{ при } x>3, \\ -1 \text{ при } x<3. \end{cases}$

Следовательно, $\lim\limits_{x\to 3+0} f(x)=1$, а $\lim\limits_{x\to 3-0} f(x)=-1$. Поэтому в точке $x=3$ функция имеет разрыв первого рода. Скачок функции в этой точке равен $1-(-1)=2$.

10.4. Вычисление пределов

Вначале выясним, в чем состоит смысл вычисления пределов. В точках, где функция $f(x)$определена и непрерывна, соответствующий предел можно получить, вычислив ее значение. Особый подход к вычислению предела необходим, когда желательно знать поведение функции в окрестности особой точки, или установить, как ведет себя функция при стремлении ее аргумента к бесконечности.

Рассмотрим функции $\frac{x^2-1}{x-1}=\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)}$ и $x+1$. Последняя получена в результате формального сокращения числителя и знаменателя первой на множитель $(x-1)$. Это разные функции, так как имеют разные области существования, хотя их значения совпадают повсюду, кроме точки $x=1$. В этой точке первая функция не существует (деление на ноль), вторая равна 2. Теперь вычислим предел $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}$. Рассмотрим последовательность действий под знаком предела:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)}=\lim_{x\to 1}(x+1)=2.$$

Здесь мы заменяем одну функцию на другую в той области, где они совпадают, ибо при вычислении предела x стремится к предельной точке 1, не попадая в саму эту точку.

Итак, рассматриваемая функция в точке 1 не существует, но стремится к значению 2 при $x\to 1$.

Исследуем $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-1}{x^2-x+2}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2\left(3-\dfrac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(1-\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x^2}\right)}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(3-\dfrac{1}{x^2}\right)}{\left(1-\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x^2}\right)}$.

Он равен 3, так как $\dfrac{1}{x}$ и $\dfrac{1}{x^2}$ являются бесконечно малыми при $x\to\infty$. Сокращение на x^2 также законно, поскольку $x\neq\infty$, а только стремится к ней, то есть принимает сколь угодно большие, но конечные значения.

Правила вычисления пределов

Чтобы вычислить $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, необходимо.

1. Попробовать подставить в функцию, стоящую под знаком предела, $x=a$. Если функция в этой точке непрерывна, в соответствии формулой $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$ предел равен числу $f(a)$.

2. Если точка a не входит в область определения функции, то конечный предел может не существовать, и если абсолютная величина функции неограниченно увеличивается при стремлении переменной к a, то пределом является бесконечность.

3. Если в результате подстановки получается неопределенность, то есть выражение вида $\dfrac{0}{0},\dfrac{\infty}{\infty},\infty-\infty,0\cdot\infty,1^{\infty}$, следует раскрыть эту неопределенность, сделав сокращения, или привести получаемое выражение к замечательному пределу или его следствию.

Примеры.

1. $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{2x^2-5x-3}{x^2-5x+6}=\left\{\dfrac{0}{0}\right\}=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{2(x-3)\left(x+\dfrac{1}{2}\right)}{(x-3)(x-2)}=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{2\left(x+\dfrac{1}{2}\right)}{(x-2)}=\dfrac{2\left(3+\dfrac{1}{2}\right)}{1}=7$

.

2. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2}{1-\cos2x}=\left\{\dfrac{0}{0}\right\}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2}{2\sin^2x}=\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{x}{\sin x}\cdot\dfrac{x}{\sin x}\right)=\dfrac{1}{2}$.

Неопределенность $\dfrac{\infty}{\infty}$ показывает, что в числителе и знаменателе присутствуют бесконечно большие функции. Чтобы избавиться от них следует вынести самую большую величину в числителе и знаменателе за скобки, произвести сокращение, после чего еще раз применить пункт 1 правил.

Примеры.

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+3x^2+x-1}{x^3-x^2+2}=\left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3\left(1+\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x^3}\right)}{x^3\left(1-\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x^3}\right)}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(1+\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x^3}\right)}{\left(1-\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x^3}\right)}=1$

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-x+1}{x^3-x^2+2}=\left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2\left(2-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)}{x^3\left(1-\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x^3}\right)}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(2-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)}{x\left(1-\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x^3}\right)}=0$.

Неопределенности $\infty-\infty, 0\cdot\infty$ приводятся вначале к виду $\dfrac{0}{0}$ или $\dfrac{\infty}{\infty}$, затем раскрываются одним из перечисленных выше способов.

Примеры.

1. $\lim\limits_{x\to3}\left(\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{6}{x^2-9}\right)=\{\infty-\infty\}=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x+3-6}{x^2-9}=\left\{\dfrac{0}{0}\right\}=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{1}{x+3}=\dfrac{1}{6}$

2. $\lim\limits_{x\to0}x\operatorname{ctg}x=\{0\cdot\infty\}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{\operatorname{tg}x}=\left\{\dfrac{0}{0}\right\}=\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{x}{\sin x}\cos x\right)=1.$

Неопределенность вида 1^∞ раскрывается приведением ко второму замечательному пределу.

Примеры.

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2}\right)^{\frac{1}{\sin^2 x^{-1}}}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)^{x^2}\right]^{\frac{x^{-2}}{\sin^2 x^{-1}}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^{-1}}{\sin x^{-1}}\right)^2}=e^1=e$.

2. $\lim\limits_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to0}\left[1+(\cos x-1)\right]^{\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to0}\left[\left[1+(\cos x-1)\right]^{\frac{1}{\cos x-1}}\right]^{\frac{-2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}}=e^{-\frac{1}{2}}$

Пример исследования непрерывности функции в точке.

Проверить непрерывность функции $y=\begin{cases}x+4, & x\le-1\\ x^2+2 & -1<x\le1.\\ 2x & x>1\end{cases}$

Поскольку функции $x+4$, x^2+2 и $2x$ непрерывны в областях их задания, достаточно рассмотреть функцию y в точках стыковки этих функций. Итак, для $x=-1$ имеем $\lim\limits_{x\to-1-0}y=\lim\limits_{x\to-1}(x+4)=3$, $\lim\limits_{x\to-1+0}y=\lim\limits_{x\to-1}\left(x^2+2\right)=3$, $y(-1)=-1+4=3$.

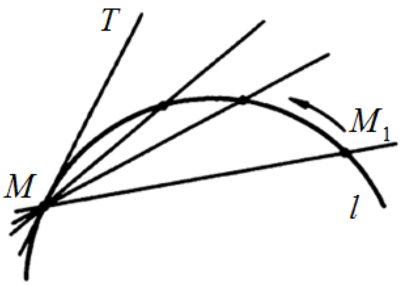
Функция в этой точке непрерывна согласно определению 4.

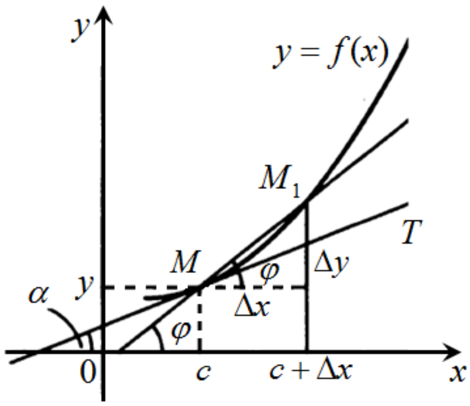
Для $x=1$ имеем $\lim\limits_{x\to 1-0} y=\lim\limits_{x\to 1}\left(x^2+2\right)=3$, $\lim\limits_{x\to 1+0} y=\lim\limits_{x\to 1} 2x=2$, $y\left(1\right)=1^2+2=3$. Условие непрерывности в точке $x=1$ не выполняется. Следовательно, функция y непрерывна для всех $x\in\mathbb{R}$ за исключением точки $x=1$, где она имеет конечный разрыв со скачком (-1).

§11. Производная функции

11.1. Задача о проведении касательной к кривой

Определение 1. ***Касательная к данной кривой в данной точке*** $M(c, f(c))$ – это прямая MT, являющейся предельным положением секущей MM_1, проходящей через точки M и M_1, когда вторая точка пересечения M_1 неограниченно приближается по кривой к точке M.





Пусть заданная кривая является графиком непрерывной функции $y=f(x), x\in[a,b]$, и требуется провести касательную к этой кривой в точке $c\in(a,b)$. Найдем ее угловой коэффициент $k=\operatorname{tg}\alpha$, где α – угол, образованный касательной с положительным направлением оси OX.

Для этого проведем через точки кривой $M(c, f(c))$ и $M_1(c+\Delta x, f(c+\Delta x))$ секущую. Обозначим через φ - угол между секущей MM_1 и осью Ox. Из рисунка видно, что угловой коэффициент секущей равен

$$k_{сек}=\operatorname{tg}\varphi=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x}$$

При $\Delta x\to 0$ в силу непрерывности функции Δy тоже стремится к нулю. Поэтому точка M_1 неограниченно приближается по кривой к точке M, а секущая MM_1, поворачиваясь около точки M, переходит в касательную:

$$\varphi \to \alpha \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{\Delta x \to 0} \varphi = \alpha \quad \Rightarrow \quad \lim_{\Delta x \to 0} \operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} \alpha .$$

Поэтому угловой коэффициент касательной равен

$$k = \operatorname{tg} \alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \operatorname{tg} \varphi = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x}$$

Очевидно, что существуют непрерывные кривые, в некоторых точках которых провести касательную невозможно.

Возникает вопрос: какое условие нужно наложить на функцию $y = f(x)$ в окрестности точки c, чтобы в соответствующей точке можно было провести касательную к графику этой функции.

11.2. Условие дифференцируемости функции

Определение 2. Функция $y = f(x)$ называется ***дифференцируемой в точке*** x_0, если ее приращение $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ представимо в виде:

$$\boxed{\Delta y = A \cdot \Delta x + \alpha(x)},$$

причем A – константа, $\alpha(x)$ – бесконечно малая функция, более высокого порядка малости, чем Δx, то есть $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\alpha(x)}{\Delta x} = 0$.

Установим значение A, для чего вычислим

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(A + \frac{\alpha(x)}{\Delta x} \right) = A.$$

Назовем число A ***производной*** функции $y = f(x)$ в точке x_0 и обозначим ее $f'\left(x_0\right)$, в результате получаем определение производной.

Определение 3. ***Производной функции*** $y = f(x)$ ***в точке*** x_0 называется предел отношения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю:

$$\boxed{y'(x_0) = f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}},$$

и, кроме того, $\Delta y = f'(x_0) \cdot \Delta x + \alpha(x)$.

Как было сказано выше, второе слагаемое в выражении приращения функции – величина более высокого порядка малости, чем величина Δx, а следовательно, и чем величина $f'(x_0) \cdot \Delta x$. Другими словами, ***первое слагаемое в выражении приращения функции представляет основную часть приращения функции***.

Определение 4. ***Дифференциалом функции*** $y = f(x)$ в точке x_0 называется главная часть ее приращения, равная произведению производной функции на приращение аргумента, и обозначается dy:

$$dy = f'(x_0)\cdot\Delta x.$$

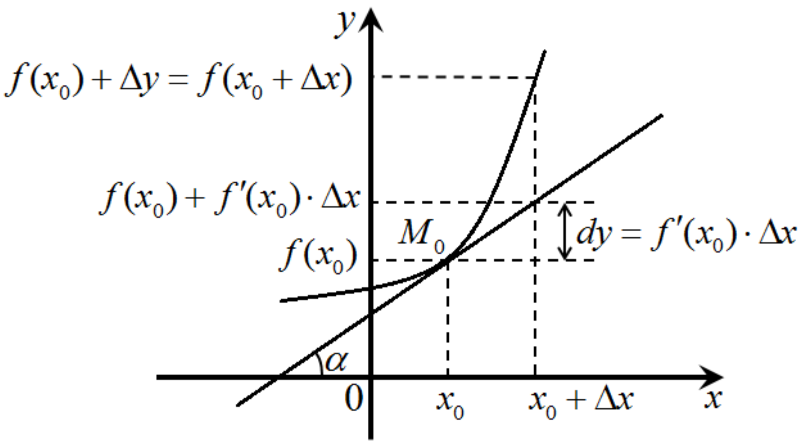
В целях единообразия и для того, чтобы подчеркнуть, что Δx – бесконечно малая величина, приращение аргумента Δx в этой формуле обозначают dx. Тогда

$$\boxed{dy = f'(x_0)dx},$$

то есть ***дифференциал функции равен произведению производной этой функции на дифференциал независимой переменной.***

Отсюда следует второе обозначение производной: $f'(x) = \dfrac{df}{dx}$.

Связь между приращением функции и ее дифференциалом изображена на рисунке ниже.



Дифференциал функции в точке x_0 *равен приращению ординаты касательной к графику функции в этой точке, когда* x_0 *получит приращение* Δx.

Замечание. ***Геометрический смысл производной*** состоит в том, что значение производной $f'(x_0)$ в точке x_0 определяет тангенс угла наклона касательной к кривой $y = f(x)$ в точке $\left(x_0, f(x_0)\right)$. Пользуясь уравнением прямой, проходящей через заданную точку в заданном направлении, можно записать ***уравнение касательной к кривой***

$$y - f(x_0) = f'(x_0)\cdot(x - x_0).$$

Прямая, перпендикулярная касательной в точке касания, называется ***нормалью к кривой*** и ее уравнением служит

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0),$$

так как $k_{норм} = -\frac{1}{k_{кас}} = -\frac{1}{f'(x_0)}$.

Физическим смыслом производной $f'(x_0)$ является скорость в момент $x = x_0$, когда зависимость длины пути y от скорости x задается функцией $y = f(x)$.

Теорема. Дифференцируемая в точке x_0 функция непрерывна в этой точке.

Доказательство.

В самом деле, поскольку $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \left(f'(x_0) \cdot \Delta x + \alpha(x) \right) = 0$, то имеем $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$, то есть условие непрерывности (определение 3).

Ч.Т.Д.

Если из условия непрерывности следует, что приращение функции Δy бесконечно малая при $\Delta x \to 0$, то из условия дифференцируемости получаем, что Δy бесконечно малая одного порядка малости с Δx.

Вычисление производной называют дифференцированием функции.

11.3. Правила дифференцирования

1) Производная суммы функций есть сумма производных этих функций:

$$\boxed{(u + v)' = u' + v'}.$$

Доказательство.

Пусть $F(x) = u(x) + v(x)$, тогда

$$\Delta F(x) = \underline{u(x + \Delta x)} + v(x + \Delta x) - \left(\underline{u(x)} + v(x) \right) = \Delta u + \Delta v .$$

Очевидно,

$$(u + v)' = F'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u + \Delta v}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = u' + v' .$$

Ч.Т.Д.

2) Производная от произведения функций:

$$\boxed{(u\cdot v)' = u'\cdot v + u\cdot v'} .$$

Доказательство.

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)v(x+\Delta x)-u(x)v(x)}{\Delta x} =$$

$$= \begin{Bmatrix} \Delta u = u(x+\Delta x)-u(x), & \Delta v = v(x+\Delta x)-v(x) \\ u(x+\Delta x) = \Delta u + u(x), & v(x+\Delta x) = \Delta v + v(x) \end{Bmatrix} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left(\Delta u + u(x)\right)\left(\Delta v + v(x)\right)-u(x)v(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u\Delta v + u(x)\Delta v + \Delta u v(x) + u(x)v(x)-u(x)v(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\left(\Delta u\frac{\Delta v}{\Delta x} + u(x)\frac{\Delta v}{\Delta x} + \frac{\Delta u}{\Delta x}v(x)\right) =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\Delta u\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x} + u(x)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x} + v(x)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} =$$

$$= 0v' + u\cdot v' + v\cdot u' = u'\cdot v + u\cdot v'$$

Ч.Т.Д.

3) Производная от отношения двух функций:

$$\boxed{\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}} .$$

Упр. Доказать самостоятельно свойство 3.

4) Производная от сложной функции.

Пусть $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0, $f(x_0) = y_0$. Пусть функция $z = g(y)$ дифференцируема в точке y_0. Тогда сложная функция $z = g(f(x))$ дифференцируема в точке x_0, причем:

$$\boxed{\left(g(f(x_0))\right)' = g'(y_0)\cdot f'(x_0) = g'(\cdot f(x_0))\cdot f'(x_0)}.$$

Доказательство.

$$z'(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta g}{\Delta y}\cdot\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta g}{\Delta y}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x} = g'(y_0)\cdot f'(x_0) .$$

Ч.Т.Д.

11.4. Производная обратной функции

Даны функция $y = f(x)$ и обратная ей функция $x = g(y)$, т.е. $x = g(f(x))$. Если $f(x)$ дифференцируема в точке x_0 и $f'(x_0) \neq 0$, тогда $g(y)$ дифференцируема в точке $y_0 = f(x_0)$, при этом:

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(g(y_0))} \ .$$

Доказательство. Действительно, если $\Delta x \to 0$, то $\Delta y \to 0$. Теперь

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\frac{\Delta x}{\Delta y}} = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y}} = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta н \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y}} = \frac{1}{g'(y_0)} = \frac{1}{g'(f(x_0))}..$$

Следовательно,

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(g(y_0))}$$

Ч.Т.Д.

11.5. Таблица производных

1. $(C)' = 0$, где $C = \text{const}$

2. $(x^{\alpha})' = \alpha \cdot x^{\alpha - 1}$

3. $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$; $\quad (e^x)' = e^x$

4. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$; $\quad (\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$

5. $(\sin x)' = \cos x$ **6.** $(\cos x)' = -\sin x$

7. $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ **8.** $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$

9. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ **10.** $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

11. $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1 + x^2}$ **12.** $(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1 + x^2}$

Докажем некоторые из этих формул.

1. Если $y = C$, то $\Delta y = 0$, и первая формула доказана.

2. Пусть $y = x^{\alpha}$, тогда

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x+\Delta x)^{\alpha} - x^{\alpha}}{\Delta x} = x^{\alpha}\frac{\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\alpha} - 1}{\Delta x} = x^{\alpha}\frac{\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\alpha} - 1}{\frac{\Delta x}{x}\cdot x}.$$

Переходя к пределу при $\Delta x \to 0$ и используя 3-е следствие из второго замечательного предела, получим вторую формулу.

3. Пусть $y = \sin x$, тогда

$$\Delta y = \sin(x+\Delta x) - \sin x = 2\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}$$

Используя первый замечательный предел, получим

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = \cos x.$$

4. Пусть $y = \operatorname{tg} x$, тогда

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x\cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

5. Пусть $y = \log_a x$, тогда

$$\Delta y = \log_a(x+\Delta x) - \log_a x = \log_a\left(\frac{x+\Delta x}{x}\right) = \log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right),$$

теперь применяя первое следствие из второго замечательного предела, получим

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\ln a\cdot\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\ln a\cdot\frac{\Delta x}{x}\cdot x} = \frac{1}{x\ln a}.$$

6. Пусть $y = a^x$, тогда, $x = \log_a y$, $x'(y) = \frac{1}{y\ln a}$, значит

$$y'(x) = \left(a^x\right)' = \frac{1}{x'(y)} = y\ln a = a^x\ln a.$$

7. Пусть $y = \arcsin x$, тогда

$$x = \sin y,\; x'(y) = \cos y = \sqrt{1-\sin^2 y} = \sqrt{1-x^2}\ .$$

$$y'(x) = \left(\arcsin x\right)' = \frac{1}{x'(y)} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Примеры.

1. Найти производную функции $y = \ln(x^2+1)$.

$$y' = \frac{1}{x^2+1}\cdot\left(x^2+1\right)',$$

$$y' = \frac{2x}{x^2+1}.$$

2. Найти производную функции $y = \sin^3(5x)$.

$$y' = 3\sin^2(5x)\cdot\cos(5x)\cdot 5 = 15\sin^2(5x)\cdot\cos(5x).$$

11.6. Производная параметрически заданной функции

Пусть задана параметрическая функция:

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases},\; t\in\left[t_1, t_2\right],$$

причем обе функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ дифференцируемы в точке $t_0 \in \left(t_1, t_2\right)$, $\varphi'(t_0)\neq 0$, $\varphi(t_0) = x_0, \psi(t_0) = y_0$.

Вычислим производную в точке x_0 по определению:

$$y'(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{\Delta y}{\Delta t}}{\frac{\Delta x}{\Delta t}} = \frac{\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta t}}{\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t}} = \frac{y'(t_0)}{x'(t_0)}.$$

Итак, $\boxed{y'(x) = \dfrac{y'(t)}{x'(t)}}$.

Пример.

Найти производную функции: $\begin{cases} x = 2(t-\sin t) \\ y = 2(1-\cos t) \end{cases}$.

Решение.

Найдем производные

$$x'(t) = 2(1-\cos t),\ y'(t) = 2\sin t,$$

Тогда искомая производная параметрической функции:

$$y'(x) = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{\sin t}{1-\cos t}.$$

11.7. Дифференцирование неявно заданных функций

Если функция задана неявно $F(x, y) = 0$, то для нахождения производной от y по x нет необходимости разрешать уравнение относительно y перед дифференцированием: ***достаточно продифференцировать имеющееся уравнение*** $F(x, y) = 0$ ***по*** x***, рассматривая при этом*** y ***как функцию, зависящую от*** x***, то есть*** $F(x, y(x)) = 0$, и полученное затем уравнение разрешить относительно производной y'.

Результат выразится через переменную x и функцию y.

Пример.

Найти производную неявно заданной функции $x^2 + y^2 = 9$.

Решение.

Дифференцируем обе части уравнения по переменной x, используя при этом правило дифференцирования сложных функций:

$$\left(x^2 + y^2\right)'_x = \left(9\right)'_x \Rightarrow 2x + 2y \cdot y' = 0,$$

откуда следует:

$$y' = -\frac{x}{y}.$$

11.8. «Логарифмическое» дифференцирование

В некоторых случаях для нахождения производной имеет смысл заданную функцию ***предварительно прологарифмировать***, а результат продифференцировать. Такой подход к решению называется ***логарифмическим дифференцированием.***

Пример.

Показать, что при $x = 2022$ значение производной равно удвоенному значению функции, т.е. $y'(2022) = 2 \cdot y(2022)$ для

$$y = \frac{x^{2022} \cdot (x+1)^{2023} \cdot (x+2)^{2024}}{(x+3)^{2025}}.$$

Решение.

Вычислим производную функции, предварительно прологарифмировав ее:

$$\ln y = \ln \frac{x^{2022} \cdot (x+1)^{2023} \cdot (x+2)^{2024}}{(x+3)^{2025}}$$

$$\ln y = \ln x^{2022} + \ln (x+1)^{2023} + \ln (x+2)^{2024} - \ln(x+3)^{2025}$$

$$\ln y = 2022 \ln x \; + 2023 \ln (x+1) \; + 2024 \ln (x+2) \; - 2025 \ln(x+3)$$

$$\frac{y'}{y} = \left(\frac{2022}{x} + \frac{2023}{x+1} + \frac{2024}{x+2} - \frac{2025}{x+3} \right)$$

$$y' = y \cdot \left(\frac{2022}{x} + \frac{2023}{x+1} + \frac{2024}{x+2} - \frac{2025}{x+3} \right)$$

Тогда, подставив $x = 2022$, получим $y'(2022) = 2 \cdot y(2022)$.

Существуют функции, производные которых находятся лишь логарифмическим дифференцированием. Например, производную ***степенно-показательной функции*** $y = u^v$, где $u = u(x)$, $v = v(x)$, можно вычислить только с помощью данной операции:

$$\ln y = v \ln u \quad \Rightarrow \quad \frac{y'}{y} = v' \ln u + v \frac{u'}{u} \quad \Rightarrow \quad y' = y \left(v' \ln u + v \frac{u'}{u} \right),$$

то есть:

$$\left(u^v\right)' = u^v \left(v' \ln u + v \frac{u'}{u} \right) \text{ или } \boxed{\left(u^v\right)' = u^v \ln u \cdot v' + v u^{v-1} u'}.$$

Пример.

Найти производную функции $y = x^{\sin x}$.

Решение.

Прологарифмируем обе части уравнения, а затем вычислим производную по правилу для неявной функции:

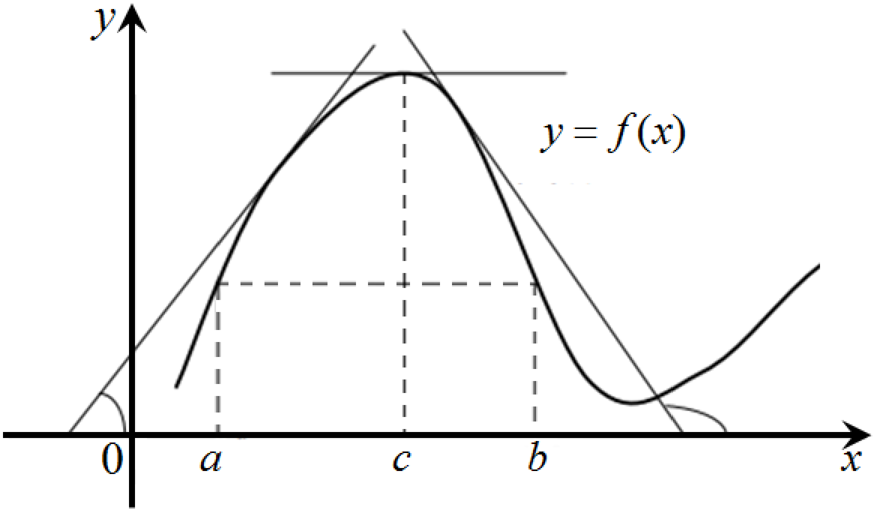
$$\ln y = \sin x \ln x \Rightarrow \frac{y'}{y} = \cos x \ln x + \frac{\sin x}{x} \Rightarrow y' = x^{\sin x}\left(\cos x \cdot \ln x + \frac{\sin x}{x}\right)$$
.

В результате

$$y' = x^{\sin x} \ln x \cdot \cos x + \sin x \cdot x^{\sin x - 1}.$$

11.9. Теоремы о дифференцируемых функциях

Терема Ролля. Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема на интервале (a,b), причем $f(a) = f(b)$, тогда найдется хотя бы одна точка c внутри интервала, в которой производная функции обращается в нуль, то есть $f'(c) = 0$, $c \in (a,b)$.



Теорема дается без доказательства, приведена геометрическая иллюстрация теоремы.

Теорема Коши. Если функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ дифференцируемы на интервале (a,b) и $g(b) \neq g(a)$, то существует такая точка $c \in (a,b)$, что $\dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$.

Доказательство.

Рассмотрим вспомогательную функцию

$$\Phi(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}[g(x) - g(a)].$$

Она дифференцируема, так как кроме функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$ в нее входят только постоянные, причем, $\Phi(a) = \Phi(b) = f(a)$, то есть удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля. Тогда $\Phi'(c) = f'(c) - \dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(c) = 0.$

Ч.Т.Д.

Теорема конечных приращений Лагранжа. Если функция $y = f(x)$ дифференцируема на интервале (a, b), то существует такая точка $c \in (a, b)$, для которой справедливо: $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.

Доказательство.

Покажем, что теорема Лагранжа может рассматриваться как частный случай теоремы Коши. Пусть $g(x) = x$. Тогда функции $y = f(x)$ и $y = g(x) = x$ дифференцируемы на интервале (a, b), $g(b) \neq g(a)$, и по теореме Коши существует такая точка $c \in (a, b)$, что

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}, g(b) = b, g(a) = a, g'(x) = x' = 1 \Rightarrow \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

Ч.Т.Д.

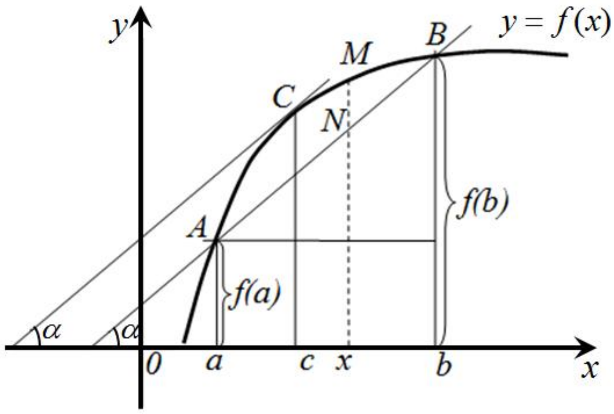
Полученную формулу называют ***формулой Лагранжа*** или ***формулой о конечном приращении***: приращение дифференцируемой функции на отрезке $[a, b]$ равно приращению аргумента, умноженному на значение производной функции в некоторой внутренней точке этого отрезка.

Геометрический смысл теоремы:

$$k_{сек\ AB} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c) = k_{кас}$$

.

То есть на графике функции $y = f(x)$ найдется точка $C(c, f(c))$, в которой касательная к графику функции параллельна секущей АВ.



11.10. Производные и дифференциалы высших порядков

Определение 5. ***Второй производной*** (или ***производной второго порядка***) ***функции*** $y = f(x)$ называется производная ее первой производной $y' = (y')'$.

Если физический смысл первой производной – есть скорость изменения функции, то *вторая производная определяет скорость изменения скорости изменения функции, то есть ускорение*.

Аналогично определяется производная любого порядка:

$$\boxed{y^{(n)} = \left(y^{(n-1)}\right)'}.$$

Примеры.

1) Если $y = x^5$, то $y' = 5x^4$, $y'' = 20x^3$, $y''' = 60x^2$ и так далее. Заметим, что производные высших порядков степени с натуральным показателем обращаются в ноль, если порядок производной выше показателя степени.

2) Если $y = \sin x$, то

$$y' = \cos x,\ y'' = -\sin x,\ y''' = -\cos x,\ y^{IV} = \sin x, \ldots, y^{(n)} = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}n\right)$$

Аналогично определяются ***дифференциалы высших порядков***.

Определение 6. ***Дифференциал второго порядка*** – это дифференциал от дифференциала, т.к. $df(x) = f'(x)dx$, тогда

$$d^2 f(x) = d\left(df(x)\right) = \left(df(x)\right)' dx = \left(f'(x)dx\right)' dx,$$

dx– бесконечно малое приращение, не зависящее от x, поэтому производная от dx вычисляется, как от постоянной. Т.е.

$$d^2 f(x) = \left(f'(x)\right)' dx^2 = f''(x)dx^2 .$$

Подобным образом получим формулу для вычисления дифференциала n-го порядка:

$$\boxed{d^n f(x) = f^{(n)}(x)dx^n}.$$

11.11. Формула Тейлора

Предположим, что функция $y = f(x)$ имеет производную первого порядка в точке a. Из определения дифференцируемости функции в точке a имеем $f(a+\Delta x) - f(a) = f'(a)\Delta x + \beta$, где β – бесконечно малая функция при $\Delta x \to 0$. Поэтому для точек x, близких к точке a $\left(x = a + \Delta x\right)$ справедлива формула

$$\boxed{f(x) \approx f(a) + f'(a)\left(x-a\right)}$$

обеспечивающая ***первое приближение*** функции. Эта формула позволяет получать очень грубые приближенные значения функций в точках, так как ее можно трактовать как замену функции $y = f(x)$ многочленом первой степени в окрестности той точки a, где значение функции и ее производной легко найти. Очевидно, что формула эта применима в очень малой окрестности точки a.

Пример. $\sqrt[4]{15} = \sqrt[4]{16-1} = 2\cdot\sqrt[4]{1-\frac{1}{16}} \approx 2\cdot\left[1+\frac{1}{4}\cdot 1^{-\frac{3}{4}}\cdot(-\frac{1}{16})\right] = \frac{63}{32}$.

Здесь мы использовали формулу первого приближения при $f(x) = \sqrt[4]{1+x}$, $a = 0$, $x = -\dfrac{1}{16}$.

Поэтому $f(a) = 1$, $f'(a) = \dfrac{1}{4}\cdot 1^{-\frac{3}{4}}$ и $\left(x-a\right) = -\dfrac{1}{16}$.

Возникают вопросы:

1) нельзя ли использовать многочлены более высоких степеней для более точного приближения функции?

2) как оценить ошибку приближения?

Формула Тейлора дает ответы на эти вопросы.

Предположим, что функция $y = f(x)$ имеет все производные до $n+1$ порядка в некотором промежутке, содержащем точку a. В таком случае для всех значений x из этого промежутка справедлива ***формула Тейлора***

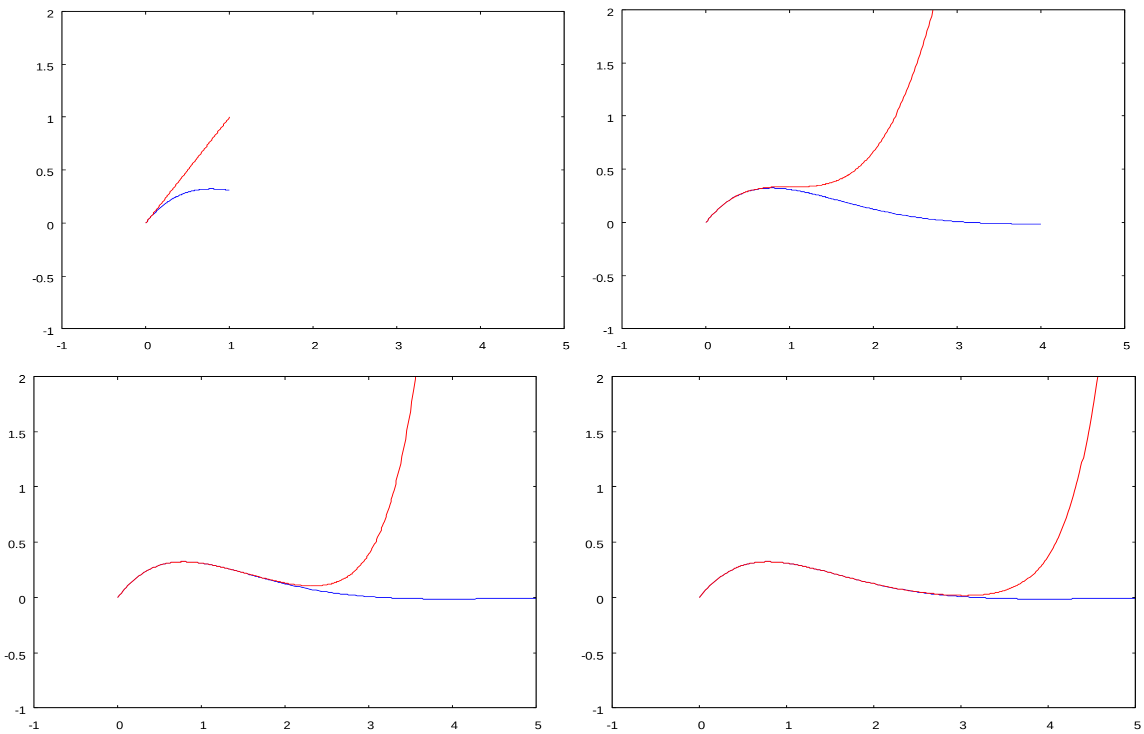
$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 +$$
$$+ \frac{f^{IV}(a)}{4!}(x-a)^4 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + r_n(x),$$

где $r_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(a+\theta(x-a))}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$, $\theta\in(0,1)$, $n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n$.

Слагаемое $r_n(x)$ - ***остаточный член*** формулы Тейлора, записанный в форме Лагранжа, определяющий ***погрешность*** приближения: функция приближается многочленом степени n. Погрешность (ошибка вычислений) обусловлена заменой значения функции значением многочлена, равна остаточному члену $r_n(x)$.

Поскольку точное значение $\theta\in(0,1)$ не может быть найдено, значения функций вычисляются приближенно, и ***остаточный член служит*** не для подсчета, а ***для оценки ошибки***. Формула Тейлора является обобщением формулы конечных приращений Лагранжа.

Следующий пример демонстрирует, как приближается функция $f(x)=e^{-x}\sin x$ (голубая линия) многочленами по формуле Тейлора (красная линия) в правой части окрестности точки $a=0$ при увеличении степеней многочленов от первой до одиннадцатой.



Формулу Тейлора можно записать через дифференциалы:

$$f(x)=f(a)+\frac{df(a)}{1!}+\frac{d^2f(a)}{2!}+\frac{d^3f(a)}{3!}+\frac{d^4f(a)}{4!}+\cdots+\frac{d^nf(a)}{n!}+r_n(x)$$

.

Для приложений к вычислению пределов используют ***локальную формулу Тейлора***, имеющую вид

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3+$$
$$+\frac{f^{IV}(a)}{4!}(x-a)^4+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+o\Big((x-a)^n\Big).$$

Такое представление остаточного члена показывает, что остаточный член есть бесконечно малая более высокого порядка малости, чем $(x-a)^n$.

В частности, при $a=0$ формула Тейлора называется ***формулой Маклорена***:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+r_n(x),$$

11.12. Примеры разложений элементарных функций по формуле Маклорена

Получим разложение по формуле Маклорена следующих функций.

Пример 1. $f(x)=e^x$.

Так как $f^{(n)}(0)=e^0=1$, то в соответствии с формулой Маклорена:

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+r_n(x).$$

Пример 2. $f(x)=\sin x$.

Так как $f'(x)=\cos x$, $f''(x)=-\sin x$, $f'''(x)=-\cos x$, $f^{IV}(x)=\sin x$, $f^{V}(x)=\cos x$ и т.д., получим:

$$f(0)=0,\ f'(0)=1,\ f''(0)=0,\ f'''(0)=-1,\ f^{IV}(0)=0,\ f^{V}(0)=1$$

Первые члены формулы Маклорена принимают вид

$$\sin x=\frac{1}{1!}x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5+\ldots$$

Анализируя первые члены разложения, записываем его общий член $\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)!}x^{2n-1}$. В результате

$$\sin x=\frac{1}{1!}x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5+\ldots+\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)!}x^{2n-1}+r_n(x).$$

Пример 3. $f(x)=\cos x$

Вычислим производные:

$$f'(x)=-\sin x,\ f''(x)=-\cos x,\ f'''(x)=\sin x,\ f^{IV}(x)=\cos x,$$

$$f^{IV}(x)=-\sin x,\ f^{VI}(x)=-\cos x.$$

Очевидно, что

$$f(0)=1,\ f'(0)=0,\ f''(0)=-1,\ f'''(0)=0,$$

$$f^{IV}(0)=1,\ f^{V}(0)=0,\ f^{VI}(0)=-1.$$

В соответствии с формулой Маклорена получаем

$$\cos x=1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\frac{1}{6!}x^6+\ldots+\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}+r_n(x).$$

Пример 4. $f\left(x\right)=\ln(1+x)$.

Упр. Получить, что $f^{(n)}(x)=\dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}$, $(0!=1)$.

Имеем $f^{(n)}(0)=(-1)^{n-1}(n-1)!$, поэтому получим разложение

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots+\frac{(-1)^{n+1}x^n}{n}+r_n(x).$$

Пример 5. $f(x)=(1+x)^{\alpha}$, $\alpha\in\mathbb{N}$.

Упр. Показать: $\left((1+x)^{\alpha}\right)^{(n)}=\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}$

и получить разложение:

$$(1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+r_n(x)$$

Пример применения локальной формулы Маклорена для вычисления предела.

$$\lim_{x\to0}\frac{\cos x-e^{-x^2/2}}{x^4}=\lim_{x\to0}\frac{1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)-(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{8}+o(x^4))}{x^4}=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{-\frac{x^4}{12}+o(x^4)}{x^4}=-\frac{1}{12}.$$

§12. Приложения производной функции

12.1. Правило Лопиталя

Теорема (Правило Лопиталя раскрытия неопределенностей $\left\{\dfrac{0}{0}\right\}$ и $\left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}$). Пусть требуется вычислить предел $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$, причем функции в числителе и знаменателе дифференцируемы в окрестности точки a и имеет место одна из неопределенностей $\left\{\dfrac{0}{0}\right\}$ или $\left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}$, тогда, если существует предел $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, возможно, равный бесконечности, то $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Доказательство (для неопределенности $\left\{\dfrac{0}{0}\right\}$*).*

Поскольку $f(a)=g(a)=0$, из теоремы Коши имеем

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(c)}{g'(c)}=\lim_{c\to a}\frac{f'(c)}{g'(c)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Здесь использовалось то, что c находится между a и x, следовательно, $c\to a$ при $x\to a$.

Ч.Т.Д.

Примеры.

1) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-4}=\left\{\dfrac{0}{0}\right\}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x-3}{2x}=\dfrac{1}{4}$.

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{x}=\left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^{-1}}{1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0.$

Правило Лопиталя применяется для раскрытия неопределенностей вида $\left\{\dfrac{0}{0}\right\}$ и $\left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}$, которые называют основными. Неопределенности вида $\{0\cdot\infty\}$, $\{\infty-\infty\}$, $\{1^\infty\}$, $\{0^0\}$ сводятся к двум основным видам путем тождественных преобразований.

12.2. Возрастание и убывание функций

Сформулируем необходимые и достаточные условия возрастания и убывания функции на интервале.

Теорема (Необходимое условие). Если дифференцируемая на интервале (a,b) функция $y = f(x)$ возрастает (убывает), то $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$) для $\forall x \in (a,b)$.

Доказательство.

Пусть $f(x)$ возрастает (убывает) на интервале (a,b). Тогда в формуле для производной $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ знаки числителя и знаменателя совпадают (противоположны), так как $f(x_0 + \Delta x) > f(x_0)$ если функция возрастает ($f(x_0 + \Delta x) < f(x_0)$ если убывает), а при предельном переходе знак неравенства становится нестрогим.

Ч.Т.Д.

Теорема (Достаточное условие). Если функция $y = f(x)$ дифференцируема на интервале (a, b) и $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) для $\forall x \in (a,b)$, то эта функция возрастает (убывает) на этом интервале.

Доказательство.

Пусть $f'(x) > 0$. Возьмем точки $x_1, x_2 \in (a,b)$, причем $x_1 < x_2$. Применим к отрезку $[x_1, x_2]$ теорему Лагранжа:

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1),$$

где $c \in (x_1, x_2)$. По условию $f'(c) > 0, x_2 - x_1 > 0$.

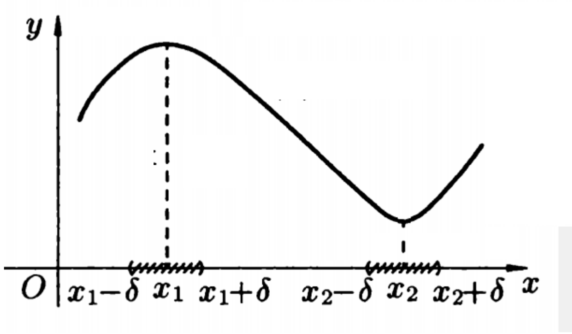
Следовательно, $f(x_2) - f(x_1) > 0$, т.е. функция $f(x)$ возрастает на интервале (a,b).

Ч.Т.Д.

12.3. Экстремум функции

Определение 1. Точка x_1 называется ***точкой максимума*** функции $y = f(x)$, если для всех x из некоторой δ-окрестности точки x_1 выполняется неравенство $f(x) < f(x_1)$ при $x \neq x_1$.

Определение 2. Точка x_2 называется ***точкой минимума*** функции $y = f(x)$, если для всех x из некоторой δ-окрестности точки x_2 выполняется неравенство $f(x) > f(x_2)$ при $x \neq x_2$.



Определение 3. Значение функции в точке максимума (минимума) называется ***максимумом*** (***минимумом***) функции. Максимум (минимум) функции называется ***экстремумом*** функции.

Теорема (необходимое условие экстремума). Если дифференцируемая функция $y = f(x)$ имеет экстремум в точке c, то ее производная в этой точке равна нулю: $f'(x) = 0$.

Доказательство.

Пусть точка c – точка максимума, тогда $\dfrac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x} < 0$ при $\Delta x > 0$

и $\dfrac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x} > 0$ при $\Delta x < 0$.

По условию теоремы производная существует. При вычислении производной получим

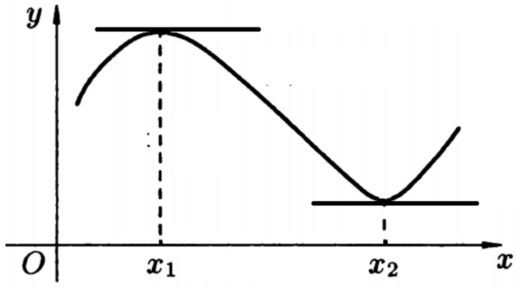
$$\Delta x < 0 : f'(c) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x} \geq 0$$

$$\Delta x > 0 : f'(c) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x} \leq 0.$$

Следовательно, $f'(c) = 0$.

Ч.Т.Д.

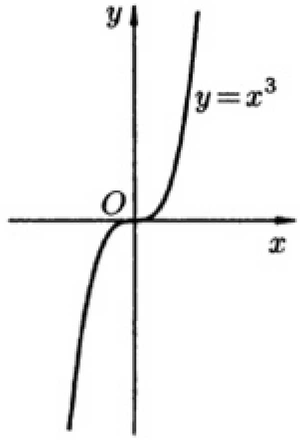
Геометрически равенство $f'(x) = 0$ означает, что в точке экстремума дифференцируемой функции $y = f(x)$ касательная к ее графику параллельна оси Ox.



Определение 4. Точки, в которых производная функции обращается в ноль или не существует, называются ***критическими точками***.

Критические точки функции не обязательно являются точками экстремума (обратная теорема неверна).

Например, если $f(x)=x^3$, то $f'(x)=3x^2=0$ при $x=0$, но точка $x=0$ не является точкой экстремума, что видно из рисунка.



Теорема 1 (достаточное условие экстремума). Если непрерывная функция $y=f(x)$ дифференцируема в некоторой окрестности критической точки c и при переходе через нее (слева направо) производная функции меняет знак с «+» на «–», то c - точка максимума; с «–» на «+», то c - точка минимума.

+ max -   - min +

Доказательство следует из теоремы о возрастании (убывании) функции.

Теорема 2 (достаточное условие экстремума). Пусть $f'(x_0)=0$, тогда при $x=x_0$ функция имеет максимум, если $f''(x_0)<0$ и минимум, если $f''(x_0)>0$.

Доказательство.

Из формулы Тейлора в окрестности точки экстремума x_0, в которой удержано три первых члена, имеем

$$\Delta y=f(x)-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2+o\left((x-x_0)^2\right).$$

Поскольку $f'(x_0)=0$, что следует из условия теоремы, а остаточный член r по определению меньше предыдущего члена формулы, знак приращения функции независимо от того, точка x находится левее, или правее x_0, определяется знаком второй производной. Когда $f''(x_0)>0$, получаем $f(x)-f(x_0)>0$, следовательно, x_0 точка минимума функции, если $f''(x_0)<0$, значит $f(x)-f(x_0)<0$, тогда x_0 - точка максимума функции.

Ч.Т.Д.

Пример 1.Найти экстремумы функции $y=\frac{1}{4}x^4-x^3$.

Решение.

Найдем критические точки этой функции. Так как $y'=x^3-3x^2=x^2(x-3)$, то критическими точками являются $x_1=0$, $x_2=3$. Применим первую теорему о достаточном условии. Очевидно, что $y'(x)<0$ при $x<0$ и при $0<x<3$, следовательно, в точке 0 экстремума нет. $y'(x)>0$ при $x>3$, следовательно, в точке 3 минимум функции.

Пример 2. Найти экстремумы функции $y=\cos^2 x$.

Решение.

Найдем критические точки этой функции. Так как $y'=-\sin 2x$, то критическими точками этой функции являются точки $x_k=\frac{\pi k}{2}$. Применим вторую теорему о достаточном условии. Очевидно, что $y''(x_k)=-2\cos\pi k$, поэтому $x_k=\frac{\pi k}{2}$ является точкой локального максимума при k четном и точкой локального минимума при k нечетном.

12.4. Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке

Следует отличать минимумы и максимумы функций от наибольшего и наименьшего ее значений на заданном отрезке. Функция может не иметь экстремумов в исследуемой области, а наименьшее и наибольшее в этой области значения она имеет всегда.

Чтобы определить наибольшее и наименьшее значения функции на заданном отрезке, необходимо подсчитать значения функции в точках экстремума, входящих в исследуемую область, а также в граничных ее точках и выбрать среди них наименьшее и наибольшее значения.

Пример.

Определить наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^3 - 3x^2 + 1$ на отрезке $\left[1;4\right]$.

Решение.

Находим точки, в которых производная обращается в нуль:

$$y' = 3x^2 - 6x = 3x\left(x-2\right) = 0,$$

получаем две точки, одна из которых $x=0$ не входит в исследуемую область, добавляем к ним граничные точки, тогда получим набор точек: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 4$.

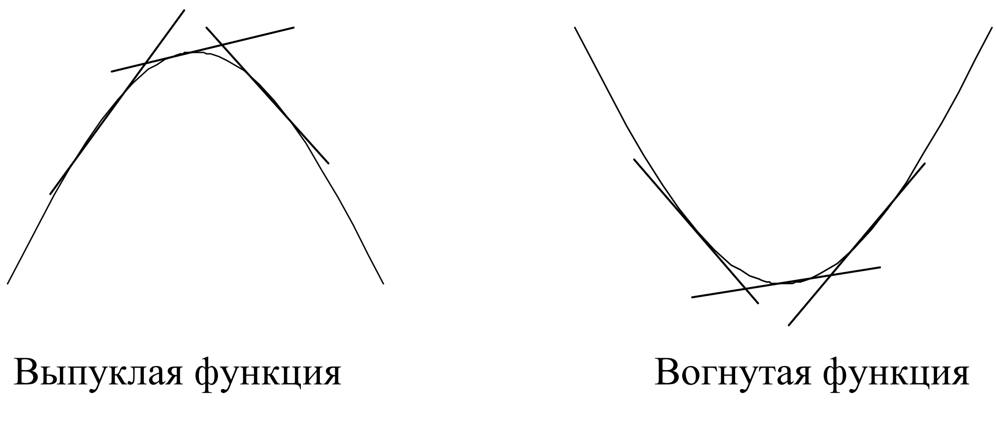
Определяем в этих точках значения функции $y_1 = -1$, $y_2 = -3$, $y_3 = 17$.

Таким образом, наименьшее в заданной области значение функции (-3) реализуется при $x=2$, наибольшее (17) при $x=3$.

12.5. Выпуклость и вогнутость функции. Точки перегиба

Определение 5. Функция $y = f\left(x\right)$ называется ***выпуклой на интервале*** $\left(a\,,b\right)$, если точки касательных к функции на этом интервале расположены выше точек функции.

Определение 6. Функция $y = f\left(x\right)$ называется ***вогнутой на интервале*** $\left(a_1\,,b_1\right)$, если точки касательных к функции на этом интервале расположены ниже точек функции.

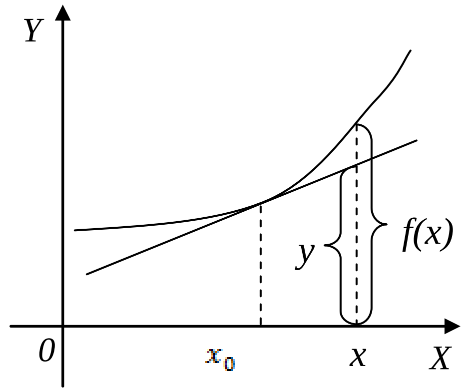


Выпуклая функция Вогнутая функция

Определение 7. Точки, в которых выпуклость переходит в вогнутость, или наоборот, называются ***точками перегиба функции***.

Теорема. Достаточным условием выпуклости функции $y = f(x)$ на интервале (a, b) является $f''(x) < 0$. Достаточным условием вогнутости функции $y = f(x)$ на интервале (a_1, b_1) является $f''(x) > 0$.

Доказательство.



Для доказательства теоремы запишем уравнение касательной к кривой $y = f(x)$ в точке $x_0 \in (a; b)$:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Вспомним также формулу Тейлора, которую представим следующим образом, взяв в ней первых три члена и перенеся первый из них влево от знака равенства:

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2 + o\left((x - x_0)^2\right).$$

Вычитаем эту формулу из формулы касательной, тогда

$$y - f(x) = -\frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2 + o\left((x - x_0)^2\right),$$

где $y -$ ординаты точек касательной. Знак правой части определяется первым ее членом, поскольку остаточный член $o\left((x - x_0)^2\right)$ в окрестности x_0 мал по сравнению с основным членом, таким образом. При условии $f''(x_0) < 0$ разность между значением касательной и функции положительна, следовательно, точки касательной лежат выше точек кривой, и функция выпуклая. Перебирая различные точки x_0 интервала $(a; b)$, убеждаемся, что первая часть теоремы доказана. Аналогично доказывается вогнутость кривой.

Ч.Т.Д.

Теорема. Если $f''(c) = 0$ и при переходе через точку c вторая производная меняет знак, $x = c$ – точка перегиба.

Пример. Найти точки перегиба и интервалы выпуклости/вогнутости функции $y = \frac{1}{4}x^4 - x^3$.

Решение.

Имеем

$$y' = x^3 - 3x^2. \quad y'' = 3x^2 - 6x = 3x(x-2) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, \quad x_2 = 2.$$

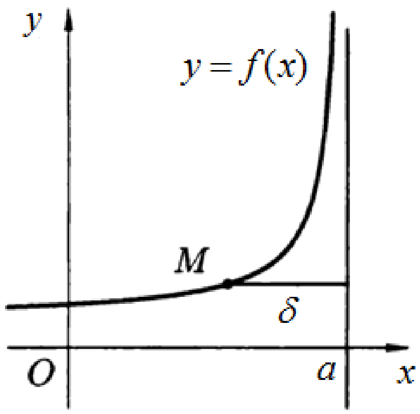
$$y''(x) > 0, \text{ при } x < 0,\ x > 2, \quad y''(x) < 0 \text{ при } 0 < x < 2.$$

Следовательно, точки x_1 и x_2 – точки перегиба. В первой вогнутость переходит в выпуклость, во второй – выпуклость в вогнутость.

12.6. Асимптоты кривой

Определение 8. ***Асимптотой кривой*** называется прямая, расстояние δ до которой от точки *M*, лежащей на кривой, стремится к нулю при неограниченном удалении точки *M* по кривой от начала координат (см. рисунок ниже).

Асимптоты бывают ***вертикальными*** (как на рисунке) и ***наклонными***, дающими представление о поведении функции при $x \to \pm\infty$.

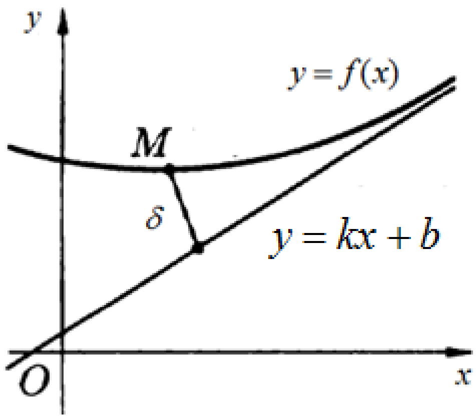


Определение 9. Прямая $x = a$ является ***вертикальной асимптотой*** графика функции $y = f(x)$, если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$, или $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = \infty$, или $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = \infty$.

Для отыскания вертикальных асимптот нужно найти те значения аргумента, вблизи которых функция неограниченно возрастает по модулю. Как правило, это точки разрыва второго рода, которые можно найти, определив область существования функции.

Наклонную асимптоту будем искать в виде

$$y = kx + b.$$



.

Теорема. Кривая $y = f(x)$ имеет наклонную асимптоту $y = kx + b$ при $x \to \infty$, если существуют пределы:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = k \quad \text{и} \quad \lim_{x\to\infty} [f(x) - kx] = b.$$

Доказательство.

Из определения асимптоты следует $f(x) - (kx + b) = \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ – бесконечно малая при $x \to \infty$, то есть $\lim\limits_{x\to\infty} \alpha(x) = 0$. Остается определить параметры уравнения асимптоты. Для этого вычислим $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty}\left[k + \frac{b}{x} + \frac{\alpha(x)}{x}\right] = k$, $\lim\limits_{x\to\infty} [f(x) - kx] = \lim\limits_{x\to\infty}[b + \alpha(x)] = b$. Итак, если оба предела существуют и конечны, параметры прямой k и b определены, причем точки этой прямой бесконечно сближаются с точками кривой при $x \to \infty$.

Ч.Т.Д.

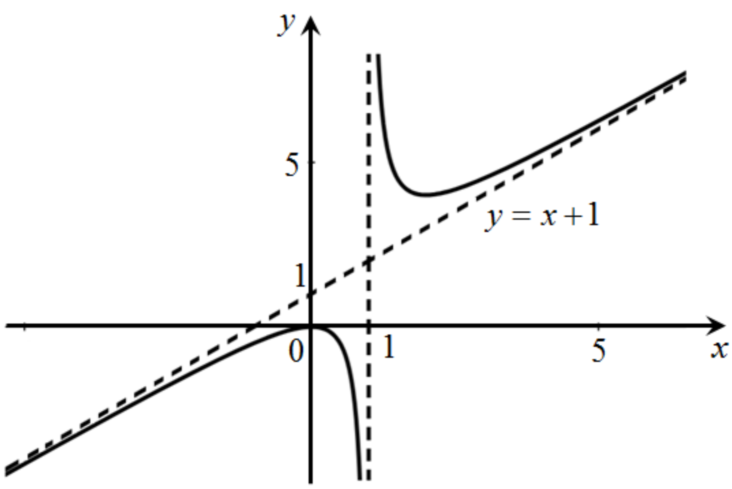
Пример. Найти асимптоты функции $y = \frac{x^2}{x-1}$.

Решение. Ясно, что $x = 1$ – уравнение вертикальной асимптоты. Найдем наклонную асимптоту $y = kx + b$.Определим:

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{(x-1)x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{(x-1)} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{x}\right)} = 1,$$

$$b = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^2}{(x-1)} - x\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - x^2 + x}{(x-1)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{(x-1)} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{x}\right)} = 1.$$

Наклонная асимптота при $x \to \infty$ имеет уравнение $y = x + 1$.



12.7. Общая схема исследования функции, построение графика

Исследование функции целесообразно вести в определенной последовательности.

I. Исследование самой функции

Необходимо установить:

1) Область определения функции, ее особые точки, вертикальные асимптоты;
2) Точки пересечения кривой с осями координат;
3) Функция четная, нечетная или общего вида;
4) Функция периодическая или не периодическая.

II. Исследование производной функции

Необходимо определить:

1) Интервалы возрастания и убывания функции;
2) Экстремумы функции.

III. Исследование второй производной

Необходимо определить:

1) Точки перегиба;
2) Интервалы выпуклости и вогнутости функции.

IV. Исследование поведения функции при $x \to \pm\infty$.

Найти наклонные асимптоты.

Замечание. Приведенная схема не является обязательной. В простых случаях достаточно выполнить лишь несколько операций, например, найти область определения, точки пересечения с осями и экстремумы. Если же график функции не совсем понятен, то следует выполнить все операции. Целесообразно выполнение операций сопровождать постепенным построением графика функции.

Пример 1.

Исследовать функцию $y = \dfrac{4x}{x^2+1}$ и построить график.

Решение.

I. 1. Область существования функции – вся числовая ось, то есть $(-\infty; \infty)$. Следовательно, у этой кривой нет особых точек, нет и вертикальных асимптот.

2. Кривая пересекает оси координат в начале координат. Следовательно, первая характерная точка графика $(0; 0)$.

3. Кривая нечетная:

$\dfrac{4(-x)}{(-x)^2+1}=-\dfrac{4x}{x^2+1}$, следовательно, она симметричная относительно начала координат.

4. Функция непериодическая.

II. 1. Определим первую производную

$$y'=\frac{4\left(x^2+1-2xx\right)}{\left(x^2+1\right)^2}=-\frac{4\left(x^2-1\right)}{\left(x^2+1\right)^2},$$

приравниваем ее нулю, откуда получаем еще две характерные (критические) точки $x=-1$, $x=1$, координаты этих точек на плоскости $(-1;-1)$, $(1;1)$. Рассмотрим первую из этих точек $x=-1$, левее ее производная $y'<0$, правее $y'>0$, следовательно, это точка минимума функции. Левее точки $x=1$ производная $y'>0$ правее она отрицательна, значит это точка максимума функции.

2. Знак первой производной определяется выражением $\left(-\left(x^2-1\right)\right)$, следовательно, она положительна на интервале $(-1;1)$, в остальных областях она отрицательна. Итак, функция убывает на интервале $(-\infty;-1)$, возрастает на интервале $(-1;1)$, затем опять убывает на $(1;\infty)$.

III. 1. Определяем вторую производную функции:

$$y'=-4\frac{2x\left(x^2+1\right)^2-4x\left(x^2+1\right)\left(x^2-1\right)}{\left(x^2+1\right)^4}=-8x\frac{x^2+1-2x^2+2}{\left(x^2+1\right)^3}=\frac{8x\left(x^2-3\right)}{\left(x^2+1\right)^3}.$$

Приравниваем производную нулю и получаем еще три характерные точки функции, одна из которых $x=0$ уже известна. Две другие $x=-\sqrt{3}$ и $x=\sqrt{3}$. На координатной плоскости они имеют координаты $\left(-\sqrt{3};-\sqrt{3}\right)$, $\left(\sqrt{3};\sqrt{3}\right)$. Знак второй производной определяется ее числителем. Левее точки $x=-\sqrt{3}$ она отрицательна, правее $y''>0$. Следовательно, это точка перегиба. Левее точки $x=0$ имеем $y''>0$, правее $y''<0$., еще одна точка перегиба. Левее точки $x=\sqrt{3}$ получаем $y''<0$, правее $y''>0$, третья точка перегиба.

2. Поскольку других точек, в которых вторая производная меняет знак у функции нет, можно утверждать, что на интервале $\left(-\infty;-\sqrt{3}\right)$ кривая выпуклая, на интервале $\left(-\sqrt{3};0\right)$ кривая вогнутая, на интервале $\left(0;\sqrt{3}\right)$ кривая опять выпуклая и, наконец, на интервале $\left(\sqrt{3};\infty\right)$ - вогнутая.

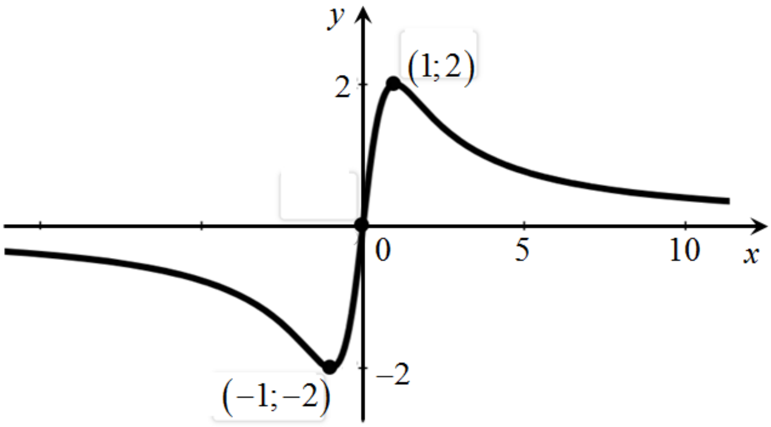
IV. Определяем наклонные асимптоты кривой, уравнение асимптоты $y = kx + b$, причем

$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{4x}{(x^2+1)x} = \lim_{x\to\infty}\frac{4}{(x^2+1)} = 0,$$

$$b = \lim_{x\to\infty}\left(f(x) - kx\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{4x}{(x^2+1)} = \lim_{x\to\infty}\frac{4x}{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x\to\infty}\frac{4}{x\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} = 0,$$

Поскольку уравнение асимптоты $y = 0$, асимптотой является ось OX.

В итоге график функции имеет вид



На рисунке отчетливо наблюдаются точки максимума и минимума функции и три точки перегиба. Видим также, что кривая «прижимается» к оси OX при x, стремящимся как к плюс-, так и к минус- бесконечности, следовательно, асимптота единая.

Пример 2.

Исследовать функцию $y = \dfrac{36x}{(x-1)^2}$ и построить график.

Решение.

Рассмотрим другое оформление исследования.

Область существования данной функции – вся числовая ось, кроме точки $x = 1$. Функция непериодическая (нет тригонометрических функций), общего вида (ни четная, ни нечетная).

Определим вначале все характерные точки графика, то есть точки пересечения с осями координат, особые точки, точки максимума и минимума, точки перегиба. Для этого вычислим первую и вторую производные

$$y' = 36\frac{(x-1)^2 - 2(x-1)x}{(x-1)^4} = 36\frac{(x-1)-2x}{(x-1)^3} = -\frac{36(x+1)}{(x-1)^3},$$

$$y'' = -36\frac{(x-1)^3 - 3(x-1)^2(x+1)}{(x-1)^6} = -36\frac{(x-1)-3(x+1)}{(x-1)^4} = \frac{72(x+2)}{(x-1)^4}.$$

Исследуя функцию и ее производные, устанавливаем, что имеется одна особая точка $x=1$ и еще три характерных точки $x=-2$, $x=-1$, $x=0$. Составим таблицу по результатам исследования:

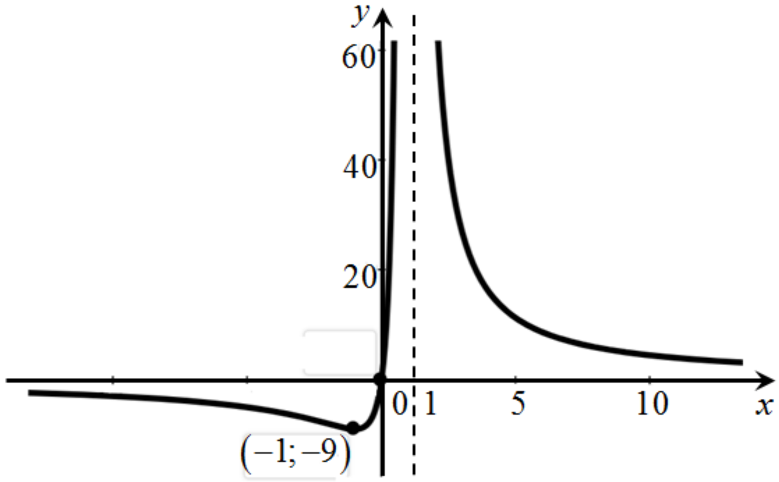
x	$(-\infty;-2)$	-2	$(-2;-1)$	-1	$(-1;0)$	0	$(0;1)$	1	$(1;\infty)$
y	<0	-8	<0	-9	<0	0	>0	н.с.	>0
y'	<0		<0	0	>0		>0	н.с.	<0
y''	<0	0	>0	>0	>0		>0	н.с.	>0
При-меч.	$y<0$, убыв., выпукл.	Т. пере-ре-гиба	$y<0$, убыв., вогн.	Min	$y<0$, возр., вогн.		$y>0$, возр., вогн.	Н.с.	$y>0$, убыв., вогн.

В таблице собрана вся информация о функции, примечания позволяют проще построить ее график, если при этом параллельно вести построение.

Определим наклонную асимптоту кривой $y = kx + b$, где

$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{36}{(x-1)^2} = 0$$

$$b = \lim_{x\to\infty}\left(f(x) - kx\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{36x}{(x-1)^2} = \lim_{x\to\infty}\frac{36}{x\left(1-\frac{1}{x}\right)} = 0.$$



Глава 4. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Лекции 11-13

§13. Неопределенный интеграл

13.1. Понятие неопределенного интеграла

В дифференциальном исчислении решается задача: *по данной функции* $f(x)$ *найти ее производную* (или дифференциал). Интегральное исчисление решает обратную задачу: *найти функцию* $F(x)$, *зная ее производную* $F'(x)=f(x)$ (или дифференциал). Искомую функцию $F(x)$ называют первообразной функции $f(x)$.

Определение 1. ***Первообразной функции*** $f(x)$ называется функция $F(x)$, производная которой равна $f(x)$, т. е. $F'(x)=f(x)$.

Поскольку $\left(F(x)+C\right)'=f(x)$, где C - постоянная, первообразных функции $f(x)$ бесчисленное множество.

Примеры.

1) Найти первообразную функции $f(x)=\cos x$.

$(\sin x)'=\cos x \quad \Rightarrow \quad F(x)=\sin x,$

однако справедливо также: $(\sin x+5)'=\cos x \quad \Rightarrow \quad F(x)=\sin x+5$.

Очевидно, $(\sin x+C)'=\cos x \quad \Rightarrow \quad F(x)=\sin x+C$ - также является первообразной при любом значении C.

2) $f(x)=3x^2 \quad (x^3+C)'=3x^2 \quad \Rightarrow \quad F(x)=x^3+C$.

Теорема. Любые две первообразные функции $f(x)$ могут отличаться только на постоянное слагаемое. Другими словами, если $F'(x)=f(x)$ и $G'(x)=f(x)$, то $F(x)-G(x)=C=const.$

Доказательство.

$\left(F(x)-G(x)\right)' = F'(x)-G'(x) = f(x)-f(x) = 0$, и так как производная разности двух первообразных оказалась равной нулю и $C'=0$, то сама разность функций является постоянной: $F(x)-G(x)=C$.

Ч.Т.Д.

Замечание. Таким образом, формула $G(x)=F(x)+C$ содержит в себе все первообразные функции $f(x)$.

Определение 2. Множество всех первообразных $F(x)+C$ для одной функции $f(x)$ называется ***неопределенным интегралом*** и обозначается символом $\int f(x)dx$.

Таким образом, по определению:

$$\boxed{\int f(x)dx = F(x)+C}$$

причем $f(x)$ называется подынтегральной функцией, $f(x)dx -$ подынтегральным выражением, а $C -$ произвольная постоянная интегрирования, слово "произвольная" подчеркивает, что постоянная может принимать любые значения.

13.2. Свойства неопределенного интеграла (НИ)

1) $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$

Доказательство.

$$\left(\int f(x)dx\right)' = \left(F(x)+C\right)' = F'(x) = f(x).$$

Ч.Т.Д.

2) $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$

Доказательство.

Доказательство следует из определения дифференциала функции и первого свойства НИ: $d\left(\int f(x)dx\right) = \left(\int f(x)dx\right)' dx = f(x)dx$.

Ч.Т.Д.

3) $\int dF(x) = F(x) + C$

Доказательство.

$$\int dF(x) = \int F'(x)\,dx = \int f(x)\,dx = F(x) + C \ .$$

Ч.Т.Д.

Примечание.

! Благодаря этим свойствам ***правильность интегрирования проверяется дифференцированием.***

Все последующие доказательства проводятся с точностью до постоянной интегрирования, что следует из определения интеграла.

4) $\int mf(x)\,dx = m\int f(x)\,dx$, если $m-$постоянная.

Доказательство.

Поскольку $\int f(x)\,dx = F(x) + C$, причем $F'(x) = f(x)$, а $\left(mF(x)\right)' = mF'(x) = mf(x)$, то $mF(x)-$ первообразная подынтегральной функции $mf(x)$, а значит

$$\int mf(x)\,dx = m\left(F(x) + C\right),$$

но $F(x) + C = \int f(x)\,dx$, следовательно, $\int mf(x)\,dx = m\int f(x)\,dx$

Ч.Т.Д.

5) $\int\left[f(x) + g(x)\right]dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$.

Доказательство.

Пусть $\int f(x)\,dx = F(x) + C_1$ и $\int g(x)\,dx = G(x) + C_2$, где $F'(x) = f(x)$, $G'(x) = g(x)$.

Поскольку $\left(F(x) + G(x)\right)' = F'(x) + G'(x) = f(x) + g(x)$, то $F(x) + G(x)$ является первообразной для $f(x) + g(x)$, следовательно,

$$\int\left[f(x) + g(x)\right]dx = F(x) + G(x) + C_1 + C_2 = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx.$$

Ч.Т.Д.

13.3 Таблица интегралов (с доказательствами)

1.	$\int 0\cdot dx = C$	$(C)' = 0$.
2.	$\int dx = \int 1\cdot dx = x + C$	$(x+C)' = 1$
3.	$\int x^{\alpha}dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1)$	$\left(\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C\right)' = x^{\alpha}$
4.	$\int \dfrac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + C$	$\left(\ln\lvert x\rvert + C\right)' = \dfrac{1}{x}$
5.	$\int a^{x}dx = \dfrac{a^{x}}{\ln a} + C$	$\left(\dfrac{a^{x}}{\ln a} + C\right)' = \dfrac{1}{\ln a}a^{x}\ln a = a^{x}$
6.	$\int e^{x}dx = e^{x} + C$	$\left(e^{x} + C\right)' = e^{x}$
7.	$\int \sin x dx = -\cos x + C$	$\left(-\cos x + C\right)' = \sin x$
8.	$\int \cos x dx = \sin x + C$	$\left(\sin x + C\right)' = \cos x$
9.	$\int \dfrac{dx}{\cos^{2} x} = \operatorname{tg} x + C$	$\left(\operatorname{tg} x + C\right)' = \dfrac{1}{\cos^{2} x}$
10.	$\int \dfrac{dx}{\sin^{2} x} = -\operatorname{ctg} x + C$	$\left(-\operatorname{ctg} x + C\right)' = \dfrac{1}{\sin^{2} x}$
11.	$\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^{2}}} = \arcsin x + C =$ $= -\arccos x + C$ $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^{2}-x^{2}}} = \arcsin \dfrac{x}{a} + C =$ $= -\arccos \dfrac{x}{a} + C$	$\left(\arcsin x + C\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}$ $\left(-\arccos x + C\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}$
12.	$\int \dfrac{dx}{1+x^{2}} = \operatorname{arctg} x + C =$ $= -\operatorname{arcctg} x + C$ $\int \dfrac{dx}{a^{2}+x^{2}} = \dfrac{1}{a}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{a} + C =$ $= -\dfrac{1}{a}\operatorname{arcctg}\dfrac{x}{a} + C$	$\left(\operatorname{arctg} x + C\right)' = \dfrac{1}{1+x^{2}}$ $\left(\text{-}\operatorname{arcctg} x + C\right)' = \dfrac{1}{1+x^{2}}$

13.	$\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\ln\left\|\frac{1+x}{1-x}\right\| + C.$ $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\|\frac{a+x}{a-x}\right\| + C$	$\left(\frac{1}{2}\ln\left\|\frac{1+x}{1-x}\right\| + C\right)' = \frac{1}{1-x^2}.$
14.	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm k}} = \ln\left\|x+\sqrt{x^2 \pm k}\right\| + C$ $(k \neq 0)$	$\left(\ln\left\|x+\sqrt{x^2 \pm k}\right\| + C\right)' =$ $= \frac{1}{\left(x+\sqrt{x^2 \pm k}\right)}\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2 \pm k}}\right) =$ $= \frac{\left(x+\sqrt{x^2 \pm k}\right)}{\left(x+\sqrt{x^2 \pm k}\right)\sqrt{x^2 \pm k}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm k}}$

13.4. Приемы интегрирования

I. Непосредственное интегрирование.
II. Замена переменной в интеграле.
III. Интегрирование по частям.

Рассмотрим каждый из этих приемов.

I. ***<u>Непосредственное интегрирование.</u>***

Этим способом можно вычислить интегралы, которые при помощи тождественных преобразований подынтегрального выражения и при использовании свойств интегралов сводятся к табличным интегралам.

Примеры.

1) $\int\left(x+\sqrt{x}-2\sin x\right)dx = \int xdx + \int x^{\frac{1}{2}}dx - 2\int \sin xdx =$

$$= \frac{x^2}{2} + \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + 2\cos x + C = \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + 2\cos x + C.$$

В этом примере сначала вместо интеграла от суммы взяли сумму интегралов, затем во втором интеграле радикал записали в виде степенной функции, а в третьем интеграле вынесли постоянную за знак интеграла. В результате получили сумму трех табличных интегралов.

$$2)\ \int \frac{x-2}{x^3}\,dx = \int \left(x^{-2} - 2x^{-3}\right) dx = \int x^{-2}dx - 2\int x^{-3}dx = \frac{x^{-1}}{-1} - 2\frac{x^{-2}}{-2} + C =$$
$$= x^{-2} - x^{-1} + C$$

В этом примеры сначала почленно поделили числитель на знаменатель, а затем представили интеграл от разности в виде разности интегралов и вынесли постоянный сомножитель за знак интеграла. В результате получили разность табличных интегралов

$$3)\ \int \frac{dx}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} = \int \frac{1}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}dx = \int \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}dx =$$
$$= \int \frac{dx}{\sin^2 x} + \int \frac{dx}{\cos^2 x} = = -ctg\ x + tg\ x + C$$

При решении воспользовались тождеством $1 = \cos^2 x + \sin^2 x$.

II. <u>Замена переменной в интеграле</u>

Наибольшее число известных интегралов вычисляются с использованием этого приема. Суть его в следующем. Вместо прежней переменной интегрирования вводится новая переменная так, чтобы вновь получившийся интеграл стал более простым, или более удобным для интегрирования.

Докажем, что если $F(x) + C = \int f(x)\,dx$, где $x = \varphi(t)$, то

$$\boxed{\int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,dt = F(\varphi(t)) + C}.$$

Доказательство.

Имеем: $\left(F(x) + C\right)' = f(x)$. Следовательно, согласно правилу дифференцирования сложной функции

$$\left(F(\varphi(t)) + C\right)' = F'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t).$$

Ч.Т.Д.

Формулу интегрирования заменой переменной можно записать в виде

$$\boxed{\int f(x)\,dx = \begin{Bmatrix} x = \varphi(t) \\ dx = \varphi'(t)\,dt \end{Bmatrix} = \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,dt}.$$

После нахождения интеграла правой части этого равенства следует перейти от новой переменной интегрирования t назад к старой переменной x.

Примеры.

1. $$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+5}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x+1)^2+4}} = \int \frac{d(x+1)}{\sqrt{(x+1)^2+4}} =$$

$$= \ln\left|x+1+\sqrt{(x+1)^2+4}\right| + C = \ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+5}\right| + C$$

После выделения полного квадрата в подкоренном выражении стала очевидной замена, приводящая интеграл к табличному виду. В простых случаях не обязательно выписывать замену, можно внести под дифференциал необходимую функцию так, чтобы интеграл стал табличным относительно полученной под дифференциалом функции. Этот прием называется «внесение под дифференциал». В данном примере воспользовались тем, что $dx = d(x+2)$. Вот второй путь решения:

$$\ldots = \int \frac{dx}{\sqrt{(x+1)^2+4}} = \begin{Bmatrix} t = x+1 \\ dt = dx \end{Bmatrix} = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2+4}} = \ln\left|t+\sqrt{t^2+4}\right| + C =$$

$$= \ln\left|x+1+\sqrt{(x+1)^2+1}\right| + C = \ln\left|x+1+\sqrt{x^2+4x+5}\right| + C \ .$$

Здесь замена приведена в фигурных скобках. Важно заметить, что в ходе замены переменной должна быть установлена связь не только между новой и старой переменными, но и между дифференциалами этих переменных.

2. $$\int \frac{2xdx}{1+x^4} = \begin{Bmatrix} d(x^2) = 2xdx \\ x^4 = \left(x^2\right)^2 \end{Bmatrix} = \int \frac{d\left(x^2\right)}{1+\left(x^2\right)^2} = arctg\left(x^2\right) + C \ .$$

или с помощью ввода новой переменной:

$$= \begin{Bmatrix} t = x^2 \\ dt = d\left(x^2\right) \end{Bmatrix} = \int \frac{dt}{1+t^2} = arctgt + C = arctg\left(x^2\right) + C$$

3.

$$\int \cos^4 x \sin x dx = \begin{Bmatrix} d(\cos x) = -\sin x dx \\ \sin x dx = -d(\cos x) \end{Bmatrix} = -\int \cos^4 x \, d(\cos x) = -\frac{1}{5}\cos^5 x + C$$

или с помощью ввода новой переменной:

$$= \begin{Bmatrix} z = \cos x \\ dz = -\sin x dx \end{Bmatrix} = -\int z^4 dz = -\frac{z^5}{5} + C = -\frac{1}{5}\cos^5 x + C$$

Упр. Продолжить решение самостоятельно:

$$\int e^{\sin x} \cos x dx = \begin{Bmatrix} d(?) = \cos x dx \\ \quad \end{Bmatrix} = \ldots.$$

$$= \begin{Bmatrix} t = ? \\ dt = \ldots \end{Bmatrix} = \int e^t dt = e^t + C = e^{\sin x} + C$$

В вышеприведенных примерах не всегда понятно, как выбирается замена переменной. Далее будет изложена теория, из которой следует, какую замену нужно производить в том, или ином случае.

Замечания.

1) $\boxed{\int f(ax)dx = \frac{1}{a}F(ax) + C}$, если $\int f(x)dx = F(x) + C$.

Доказательство.

Из $\int f(t)dt = F(t) + C$ при $t = ax$ имеем $dt = adx$, откуда имеем:

$$\int f(ax)dx = \int f(t)\frac{1}{a}dt = \frac{1}{a}\int f(t)dt = \frac{1}{a}F(t) + C = \frac{1}{a}F(ax) + C$$

. Ч.Т.Д.

2) $\boxed{\int f(x+b)dx = F(x+b) + C}$

Доказательство.

Из $\int f(t)dt = F(t) + C$ при $t = x + b$ имеем $dt = dx$, откуда имеем $\int f(x+b)dx = F(x+b) + C$.

. Ч.Т.Д.

3) $\boxed{\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C}$

Упр. Доказать самостоятельно. Доказательство следует из первого и второго следствий.

III. <u>***Интегрирование по частям***</u>

К сожалению, ***не существует формулы выражающей интеграл от произведения функции через интегралы от сомножителей***. С этим связано то обстоятельство, что в отличие от производных *интеграл от элементарной функции не всегда является элементарной функцией.* Например, интегралы $\int \sin x dx$ и $\int \frac{1}{x} dx$ - табличные, тогда как интеграл

$$\int \frac{\sin x}{x} dx$$

не выражается через основные элементарные функции («не берется в элементарных функциях»).

Тем не менее, некоторые интегралы от произведения функций можно взять по формуле интегрирования по частям.

Интегрирование по частям обычно используется, если подынтегральная функция представляет произведение функций разных типов - степенная и показательная, степенная и тригонометрическая, обратная тригонометрическая функция и степенная, показательная и тригонометрическая и т.д. Интегрирование в этом случае производится с помощью формулы

$$\boxed{\int u dv = uv - \int v du},$$

где u, v − функции одной переменной.

Доказательство.

Докажем формулу, рассмотрев правило вычисления производной от произведения функций. Пусть обе функции зависят от x, тогда

$$(uv)' = u'v + uv'$$

интегрируем обе части равенства и в результате имеем

$$uv = \int vu' dx + \int uv' dx ,$$

то есть

$$\boxed{\int uv' dx = uv - \int vu' dx}$$

или, что то же,

$$\int u dv = uv - \int v du .$$

Ч.Т.Д.

Обе выделенные формулы равносильны и называются ***формулами интегрирования по частям.***

При применении процедуры интегрирования по частям важен выбор функции u.

Укажем ***приоритеты выбора*** этой функции.

1) В первую очередь в качестве u выбирается одна из функций $\ln x$, $\arcsin x$, $\arccos x$ $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcctg} x$.

2) При отсутствии этих функций в подынтегральном выражении в качестве u может быть выбрана находящаяся в числителе степенная функция с целым положительным показателем степени.

Других приоритетов при выборе этой функции нет, задание u в этом случае осуществляется перебором возможных вариантов.

Примеры.

1.

$$\int x\ln x dx = \left\{\begin{array}{ll} u=\ln x\,, & du=\dfrac{dx}{x} \\ dv = xdx\,, & v=\int xdx=\dfrac{1}{2}x^2 \end{array}\right\} = \frac{1}{2}x^2\ln x - \int \frac{1}{2}x^2\frac{dx}{x} =$$

$$= \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{2}\int xdx = \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{4}x^2 + C\,.$$

Замечания.

1) Из примера становится ясным, почему указанная процедура называется интегрированием по частям. Один интеграл вычисляется при определении v, другим интегралом является $\int vdu$, то есть вместо одного интегрирования производится два,

2) В качестве u в этом примере выбрана логарифмическая функция, поскольку она обладает высшим приоритетом по сравнению со степенной функцией,

3) При определении v постоянную интегрирования обычно считают нулем, поскольку в качестве v может использоваться любая из первообразных подынтегральной функции.

2. $$\int x\sin x dx = \left\{\begin{array}{l} u=x\,, \quad du=dx \\ dv=\sin x dx\,, v=-\cos x \end{array}\right\} = -x\cos x + \int \cos x dx =$$

$$= -x\cos x - \sin x + C$$

3. $\int x^2e^xdx = \begin{Bmatrix} u = x^2\,, & du = 2xdx \\ dv = e^xdx\,, & v = e^x \end{Bmatrix} = x^2e^x - \int e^x 2xdx =$

$$= x^2e^x - 2\int xe^xdx = \begin{Bmatrix} u = x\,, & du = dx \\ dv = e^xdx\,, & v = e^x \end{Bmatrix} = x^2e^x - 2\left[xe^x - \int e^xdx\right] =$$

$$= x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + C\,.$$

В этом примере для получения табличного интеграла пришлось интегрировать по частям дважды, при каждом интегрировании показатель степени степенной функции уменьшался на единицу. В итоге повторном применении указанной процедуры степенная функция из подынтегрального выражения исчезла. Именно поэтому интеграл стал проще. Если показатель степени дробный, степенная функция при интегрировании по частям не исчезает, а переходит в знаменатель, что усложняет интеграл.

4.

$$\int e^x\cos xdx = \begin{Bmatrix} u = \cos x\,, & du = -\sin xdx \\ dv = e^xdx\,, & v = e^x \end{Bmatrix} = e^x\cos x + \int e^x\sin xdx =$$

$$= \begin{Bmatrix} u = \sin x\,, & du = \cos xdx \\ dv = e^xdx\,, & v = e^x \end{Bmatrix} = e^x\cos x + e^x\sin x - \int e^x\cos xdx\,.$$

В этом примере после дважды примененной процедуры интегрирования по частям табличного интеграла не получилось, однако, из формулы

$$\int e^x\cos xdx = e^x\cos x + e^x\sin x - \int e^x\cos xdx\,,$$

следует

$$2\int e^x\cos xdx = e^x\cos x + e^x\sin x$$

или

$$\int e^x\cos xdx = \frac{1}{2}e^x\left(\cos x + \sin x\right) + C\,.$$

Далее будут рассмотрены методы интегрирования некоторых классов функций. В первую очередь рассмотрим интегралы от дробно рациональных функций. Важность этого класса интегралов следует из того, что наибольшее число интегралов других классов сводятся именно к этим интегралам.

§ 14. Интегрирование рациональных функций

14.1. Понятия о рациональных функциях

Определение 1. ***Многочленом*** (или ***целой рациональной функцией***) называют функцию вида

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \ ,$$

где $n \in \mathbb{N}$, a_i - постоянные коэффициенты. Число n называется ***степенью многочлена.***

Определение 2. ***Дробно-рациональной функцией*** (или ***рациональной дробью***) называется функция, равная отношению двух многочленов, т.е.

$$f(x) = \frac{Q_m(x)}{P_n(x)} \ ,$$

где $P_n(x)$ - многочлен степени n, а $Q_m(x)$ - многочлен степени m, т.е.

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \ , \ Q_m(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0 \ .$$

Определение 3. Рациональная дробь называется ***правильной***, если старшая степень многочлена, находящегося в числителе, меньше старшей степени многочлена в знаменателе, то есть $m < n$, в противном случае дробь называется ***неправильной***.

Всякую неправильную рациональную дробь $\frac{Q(x)}{P(x)}$ ***можно, путем деления числителя на знаменатель, представить в виде суммы многочлена*** $M(x)$ ***и правильной рациональной дроби*** $\frac{R(x)}{Q(x)}$***, т. е. выделить целую часть:***

$$\frac{Q(x)}{P(x)} = M(x) + \frac{R(x)}{Q(x)} .$$

Пример.

$\dfrac{Q(x)}{P(x)} = \dfrac{x^4 - 5x + 9}{x - 2}$ - неправильная рациональная дробь.

Следовательно, можно выделить целую часть, разделив столбиком числитель на знаменатель:

$$
\begin{array}{l|l}
x^4-5x+9 & x-2 \\ \hline
 & x^3+2x^2+4x+3
\end{array}
$$

$$-\left(x^4-2x^3\right)$$

$$2x^3-5x+9$$

$$-\left(2x^3-4x^2\right)$$

$$4x^2-5x+9$$

$$-\left(4x^2-8x\right)$$

$$3x+9$$

$$-\left(3x-6\right)$$

$$15$$

Получим

$$\frac{Q(x)}{P(x)}=\frac{x^4-5x+9}{x-2}=\underline{\left(x^3+2x^2+4x+3\right)}+\frac{15}{\underline{\underline{x-2}}}=\underline{M(x)}+\frac{R(x)}{\underline{\underline{Q(x)}}}.$$

Определение 4. Правильные рациональные дроби вида

I. $\dfrac{A}{x-a}$;

II. $\dfrac{A}{(x-a)^n}\left(n\geq 2, n\in\mathbb{N}\right)$;

III. $\dfrac{(Mx+N)}{\left(x^2+px+q\right)}\left(D<0,\ p^2-4q<0\right)$;

IV. $\dfrac{(Mx+N)}{\left(x^2+px+q\right)^n}\left(n\geq 2, n\in\mathbb{N},\ D<0,\ p^2-4q<0\right)$,

где a, A, M, N, p, q - действительные числа, называются ***простейшими рациональными дробями I, II, III,IV типов.***

14.2. Интегрирование простейших дробно-рациональных функций

Интегралы от простейших дробно-рациональных функций вычисляются следующим образом

I. $\int \frac{dx}{x-a} = \int \frac{d(x-a)}{x-a} = \ln|x-a| + C$.

II. $\int \frac{dx}{(x-a)^m} = \int (x-a)^{-m}\, dx = \frac{1}{(1-m)(x-a)^{m-1}} + C$.

III. $\int \frac{(Mx+N)}{(x^2+px+q)}dx$, $\left(D<0, p^2-4q<0\right)$

Простейшие дроби III и IV типов преобразуются одинаково по следующей схеме:

1) Выделяется полный квадрат в знаменателе

$$x^2+px+q = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + q - \left(\frac{p}{2}\right)^2 = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + a^2 ,$$

где

$$a^2 = q - \left(\frac{p}{2}\right)^2 = \frac{4q-p^2}{4} \geq 0 .$$

2) Делается замена переменной $t = x + \frac{p}{2}$

$$.\int \frac{(Mx+N)}{(x^2+px+q)}dx = \int \frac{(Mx+N)dx}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + a^2} = \int \frac{M\left(t-\frac{p}{2}\right)+N}{t^2+a^2}dt$$

и тогда интеграл III типа сводится к следующим простым интегралам:

$$K_1\int \frac{2tdt}{t^2+a^2} + K_2\int \frac{dt}{t^2+a^2} =$$

$$= K_1 \ln\left(t^2+a^2\right) + \frac{K_2}{a} arctg\,\frac{t}{a} = K_1 \ln\left(x^2+px+q\right) + \frac{K_2}{a} arctg\,\frac{(2x+p)}{2a} + C,$$

где $K_1 = \frac{M}{2}, K_2 = \frac{2N-Mp}{2}$.

Пример. Вычислить $\int \frac{(4x+3)}{(x^2+2x+3)}dx$.

Поскольку $p^2-4q=9-12=-3<0$, данный интеграл является интегралом третьего типа. Решаем его, используя вышеприведенную процедуру

$$\int \frac{(4x+3)}{(x^2+2x+3)}dx = \int \frac{(4x+3)}{\left[(x+1)^2+2\right]}dx = \left\{\begin{matrix} t=x+1 \\ dt=dx \end{matrix}\right\} = \int \frac{4t-4+3}{(t^2+2)}dt =$$

$$= \int \frac{4tdt}{(t^2+2)}dt - \int \frac{dt}{(t^2+2)} = 2\int \frac{d(t^2+2)}{(t^2+2)} - \int \frac{dt}{(t^2+2)} =$$

$$= 2\ln\left|t^2+2\right| - arctg\frac{t}{\sqrt{2}} + C = 2\ln\left|x^2+2x+3\right| - arctg\frac{x+2}{\sqrt{2}} + C .$$

IV. $\int \frac{(Mx+N)}{(x^2+px+q)^m}dx \quad (p^2-4q<0)$.

С интегралом IV типа сложнее. После той же замены переменной получаем

$$\int \frac{(Mx+N)}{(x^2+px+q)^m}dx = K_1\int \frac{2tdt}{(t^2+a^2)^m} + K_2\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^m} =$$

$$= \left[K_1 \frac{1}{(1-m)(t^2+a^2)^{m-1}} + K_2 \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^m} \right] .$$

Один из интегралов сведен к табличному и вычислен. Для вычисления второго требуется, так называемая, рекуррентная формула, вывод которой осуществляется с помощью интегрирования по частям.

$$J_m = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^m} =$$

$$= \left\{\begin{matrix} u=\frac{1}{(t^2+a^2)^m} \text{ , } du=-m(t^2+a^2)^{-m-1}2tdt=-2m\frac{tdt}{(t^2+a^2)^{m+1}} \\ dv=dt \text{ , } \qquad v=t \end{matrix}\right\} =$$

$$=\frac{t}{\left(t^2+a^2\right)^m}+2m\int\frac{t^2dt}{\left(t^2+a^2\right)^{m+1}}=\frac{t}{\left(t^2+a^2\right)^m}+2m\int\frac{\left(t^2+a^2-a^2\right)dt}{\left(t^2+a^2\right)^{m+1}}=$$

$$=\frac{t}{\left(t^2+a^2\right)^m}+2m\int\frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^m}-2ma^2\int\frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^{m+1}}\ ,$$

откуда следует

$$J_m=\frac{t}{\left(t^2+a^2\right)^m}+2mJ_m-2ma^2J_{m+1}.$$

Определяем

$$J_{m+1}=\frac{1}{2ma^2}\left[\frac{t}{\left(t^2+a^2\right)^m}+\left(2m-1\right)J_m\right],$$

где

$$J_{m+1}=\int\frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^{m+1}}.$$

Покажем на примерах, как применяется рекуррентная формула.

Пример 1. Вычислить $J_2=\int\frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^2}$.

Поскольку

$$J_1=\int\frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)}=\frac{1}{a}arctg\,\frac{t}{a}+C,$$

применяем рекуррентную формулу при $m=1$:

$$J_2=\frac{1}{2a^2}\left[\frac{t}{\left(t^2+a^2\right)}+J_1\right]=\frac{1}{2a^2}\left[\frac{t}{\left(t^2+a^2\right)}+\frac{1}{a}arctg\,\frac{t}{a}\right]+C\ .$$

Итак,

$$\int\frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^2}=\frac{1}{2a^2}\left[\frac{t}{\left(t^2+a^2\right)}+\frac{1}{a}arctg\,\frac{t}{a}\right]+C\ .$$

Пример 2. Вычислить $J_3 = \int \frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^3}$.

Рекуррентная формула при $m=2$: $J_3 = \frac{1}{4a^2}\left[\frac{t}{\left(t^2+a^2\right)^2} + 3J_2\right]$,

но J_2 определено выше, тогда

$$J_3 = \frac{1}{4a^2}\left\{\frac{t}{\left(t^2+a^2\right)^2} + \frac{3}{2a^2}\left[\frac{t}{\left(t^2+a^2\right)} + \frac{1}{a} arctg\frac{t}{a}\right]\right\} =$$

$$= \frac{t}{4a^2\left(t^2+a^2\right)^2} + \frac{3t}{8a^4\left(t^2+a^2\right)} + \frac{3}{8a^5} arctg\frac{t}{a} \ .$$

Тогда $\int \frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^3} = \frac{t}{4a^2\left(t^2+a^2\right)^2} + \frac{3t}{8a^4\left(t^2+a^2\right)} + \frac{3}{8a^5} arctg\frac{t}{a}$.

Пример 3. Вычислить $\int \frac{(2x+7)}{\left(x^2+4x+13\right)^2}dx$.

Преобразуем интеграл, используя вышеуказанную процедуру

$$\int \frac{(2x+7)}{\left(x^2+4x+13\right)^2}dx = \int \frac{(2x+7)}{\left[(x+2)^2+9\right]^2}dx = \left\{\begin{matrix} t = x+2 \\ dt = dx \end{matrix}\right\} = \int \frac{(2t-4+7)}{\left(t^2+9\right)^2}dt =$$

$$= \int \frac{2tdt}{\left(t^2+1\right)^2} + 3\int \frac{dt}{\left(t^2+1\right)^2} \ .$$

Поскольку $\int \frac{dt}{\left(t^2+3^2\right)^2} = \frac{1}{18}\left[\frac{t}{\left(t^2+9\right)} + \frac{1}{3} arctg\frac{t}{3}\right] + C$,что следует из примера 1, получаем

$$\int \frac{(2x+7)}{\left(x^2+4x+13\right)^2}dx = -\frac{1}{\left(t^2+9\right)} + \frac{3}{18}\left[\frac{t}{\left(t^2+9\right)} + \frac{1}{3} arctg\frac{t}{3}\right] + C =$$

$$= \frac{x-4}{6\left(x^2+2x+10\right)} + \frac{1}{18} arctg\frac{(x+2)}{3} + C \ .$$

14.3. Интегрирование дробно-рациональных функций

При вычислении интегралов от дробно-рациональных функций необходимо руководствоваться следующим ***правилом интегрирования рациональных дробей***.

1). Если дробь неправильная, представить ее в виде суммы целой части и правильной дроби.

2) Выяснить, является ли правильная дробь простейшей, если да, то приступить к ее интегрированию.

3) Если дробь не является простейшей, представить ее в виде суммы простейших дробей и после этого приступить к интегрированию.

Пример. Рассмотрим интеграл

$$\int \frac{3x^5-2x^4+x^3+6x-5}{x-2}dx \ .$$

Дробь неправильная, значит необходимо выделить целую часть:

$$\begin{array}{l|l} 3x^5-2x^4+x^3+6x-5 & x-2 \\ \hline & 3x^4+4x^3+9x^2+18x+42 \end{array}$$

$$-\left(3x^5-6x^4\right)$$

$$4x^4+x^3+6x-5$$

$$-\left(4x^4-8x^3\right)$$

$$9x^3+6x-5$$

$$-\left(9x^3-18x^2\right)$$

$$18x^2+6x-5$$

$$-\left(18x^2-36x\right)$$

$$42x-5$$

$$-\left(42x-84\right)$$

$$79$$

В результате исходный интеграл примет вид

$$\int\left(3x^4+4x^3+9x^2+18x+42+\frac{79}{x-2}\right)dx=$$

$$=\frac{3}{5}x^5+x^4+3x^3+9x^2+42x+79\ln|x-2|+C\ .$$

Тут учтено, что $\int\frac{1}{x-2}dx=\int\frac{1}{x-2}d(x-2)=\ln|x-2|+C$.

Примечание. Интегрирование целой части, выделенной из неправильной дроби, сложности не представляет, поскольку приводит к интегралам от степенных функций.

Теорема. Правильная несократимая дробно-рациональная функция

$$\frac{Q_m(x)}{(x-a)^s\left(x^2+px+q\right)^k}\quad (m<s+2*k)$$

может быть представлена в виде суммы простейших дробей следующим образом:

$$\frac{Q_m(x)}{(x-a)^s\left(x^2+px+q\right)^k}=\frac{A_1}{(x-a)^s}+\frac{A_2}{(x-a)^{s-1}}+\frac{A_3}{(x-a)^{s-2}}+....+\frac{A_s}{(x-a)}+$$

$$+\frac{M_1x+N_1}{\left(x^2+px+q\right)^k}+\frac{M_2x+N_2}{\left(x^2+px+q\right)^{k-1}}+\frac{M_3x+N_3}{\left(x^2+px+q\right)^{k-2}}+.....+\frac{M_kx+N_k}{\left(x^2+px+q\right)},$$

где $A_1,...,A_s,M_1,...,M_k,N_1,...,N_k$ - числовые коэффициенты.

(Без доказательства)

Правила определения коэффициентов разложения

1) После представления правильной дробно-рациональной функции в виде суммы простейших дробей приводим правую часть формулы к общему знаменателю, следя за тем, чтобы общий знаменатель суммы дробей совпадал со знаменателем разлагаемой дроби.

2) Так как знаменатели дробей в левой и правой частях равенства совпадают, приравняем их числители, в результате получаем равенство многочленов, расположенных в левой и правой частях формулы.

3) Из условия, что многочлены равны только тогда, когда совпадают коэффициенты при одинаковых степенях переменной, получаем систему уравнений относительно коэффициентов разложения, причем доказано, что она имеет единственное решение.

4) После определения из полученной системы значений коэффициентов разложения интегрируем простейшие дроби.

Пример 1. $\int \frac{3x+2}{(x-2)(x+3)^2}dx$.

Интеграл от дробно рациональной функции, дробь правильная, несократимая и не являющаяся простейшей. Тогда

$$\frac{3x+2}{(x-2)(x+3)^2} = \frac{A}{(x-2)} + \frac{B}{(x+3)^2} + \frac{D}{(x+3)}.$$

После приведения правой части равенства к общему знаменателю имеем

$$\frac{3x+2}{(x-2)(x+3)^2} \equiv \frac{A(x+3)^2 + B(x-2) + D(x-2)(x+3)}{(x-2)(x+3)^2}.$$

Приравниваем числители дробей

$$3x+2 \equiv A(x+3)^2 + B(x-2) + D(x-2)(x+3),$$

откуда следует

$$3x+2 \equiv A\left(x^2+6x+9\right) + B(x-2) + D\left(x^2+x-6\right). \qquad (*)$$

Требуем равенства коэффициентов при одинаковых степенях многочленов, в результате приходим к системе уравнений относительно коэффициентов разложения

$$\begin{array}{c|l} x^2 & A+D=0 \\ x & 6A+B+D=3 \\ 1 & 9A-2B-6D=2 \end{array}$$

Итак, получена система трех уравнений относительно A, B, D. Известно, что ее решение единственно. Решение может быть получено разными способами.

Представляет особый интерес добавление к этой системе дополнительных, "лишних" уравнений, упрощающих получение решения. Рассуждают при этом следующим образом. Тождество (*) предполагает, что равенство справедливо при любых значениях переменной x, следовательно, его можно использовать и при конкретных значениях переменной.

Примем $x=2$, тогда тождество приводит к уравнению

$$8 = 25A + B\cdot 0 + D\cdot 0,$$

откуда следует $A = \frac{8}{25}$.

Из первого и второго уравнения полученной выше системы следует:

$$D = -\frac{8}{25},\; B = -\frac{48}{25} + \frac{8}{25} + 3 = \frac{35}{25} = \frac{7}{5}.$$

Поскольку к решению системы привлекалось дополнительное уравнение, третье уравнение системы оказалось лишним. Используем его для проверки полученного результата:

$$\frac{72}{25} - \frac{70}{25} + \frac{48}{25} = \frac{50}{25} = 2.$$

Теперь

$$\int \frac{3x+2}{(x-2)(x+3)^2}dx \equiv \frac{8}{25}\int \frac{dx}{(x-2)} + \frac{7}{5}\int \frac{dx}{(x+3)^2} - \frac{8}{25}\int \frac{dx}{(x+3)} =$$

$$= \frac{8}{25}\ln|x-2| - \frac{7}{5(x+3)} - \frac{8}{25}\ln|x+3| + C = \frac{8}{25}\ln\left|\frac{x-2}{x+3}\right| - \frac{7}{5(x+3)} + C.$$

Пример 2. $\int \frac{(x-4)}{(x^3+x^2-2)}dx$.

Подынтегральная функция представляет собой правильную дробно рациональную функцию, которую следует разложить на простейшие дроби. Для этого многочлен в знаменателе необходимо представить в виде произведения простейших множителей. Это возможно, если удается определить все корни многочлена в знаменателе, что не всегда получается. Часто поступают следующим образом. Перебором вариантов подбирается один из корней, в нашем примере это $x=1$. Очевидно, многочлен в знаменателе нацело делится на $(x-1)$. Проверим это

$$\begin{array}{l|l}
x^3+x^2-2 & x-1 \\ \cline{2-2}
-(x^3-x^2) & x^2+2x+2 \\ \cline{1-1}
\quad 2x^2-2 & \\
-(2x^2-2x) & \\ \cline{1-1}
\quad 2x-2 & \\
-(2x-2) & \\ \cline{1-1}
\quad 0 &
\end{array}$$

Тогда $x^3+x^2-2=(x-1)\left(x^2+2x+2\right)$, причем второй множитель действительных корней не имеет, поскольку его дискриминант равен (-4). Теперь

$$\frac{(x-4)}{\left(x^3+x^2-2\right)}=\frac{(x-4)}{(x-1)\left(x^2+2x+2\right)}=\frac{A}{(x-1)}+\frac{Mx+N}{\left(x^2+2x+2\right)}.$$

После приведения правой части к общему знаменателю, имеем

$$\frac{(x-4)}{(x-1)\left(x^2+2x+2\right)}=\frac{A\left(x^2+2x+2\right)+(Mx+N)(x-1)}{(x-1)\left(x^2+2x+2\right)},$$

в результате

$$A\left(x^2+2x+2\right)+(Mx+N)(x-1)\equiv x-4.$$

Это тождество приводит к системе уравнений

$$\begin{array}{r||l} x^2 & A+M=0 \\ x & 2A-M+N=1 \\ 1 & 2A-N=-4 \end{array}$$

Добавим к этой системе уравнений дополнительное уравнение, полученное из тождества при $x=1$:

$$5A=-3,$$

откуда следует $A=-\dfrac{3}{5}$. Теперь из первого уравнения системы $M=\dfrac{3}{5}$, из последнего уравнения $N=-\dfrac{6}{5}+4=\dfrac{14}{5}$. Проверим результат, подставив полученные значения коэффициентов в оставшееся второе уравнение

$$2A-M+N=-\frac{6}{5}-\frac{3}{5}+\frac{14}{5}=\frac{5}{5}=1.$$

В итоге

$$\int\frac{(x-4)}{\left(x^3+x^2-2\right)}dx=-\frac{3}{5}\int\frac{dx}{(x-1)}+\frac{1}{5}\int\frac{(3x+14)}{\left(x^2+2x+2\right)}dx.$$

Первый интеграл табличный, второй является интегралом третьего типа, решаем его, используя описанную выше процедуру.

$$\int \frac{(3x+14)}{\left(x^2+2x+2\right)}dx = \int \frac{(3x+14)}{(x+1)^2+1}dx = \left\{ \begin{matrix} z = x+1 \\ dz = dx \end{matrix} \right\} =$$

$$= \int \frac{(3z-3+14)}{z^2+1}dz = 3\int \frac{zdz}{z^2+1} + 11\int \frac{dz}{z^2+1} =$$

$$= \frac{3}{2}\ln\left|z^2+1\right| + 11\,arctgz + C = \frac{3}{2}\ln\left|(x+1)^2+1\right| + 11arctg\,(x+1) + C\,.$$

Итак,

$$\int \frac{(x-4)}{\left(x^3+x^2-2\right)}dx = -\frac{3}{5}\ln|x-1| + \frac{3}{10}\ln\left|x^2+2x+2\right| + \frac{11}{5}\,arctg\,(x+1) + C$$

Пример 3. $\int \frac{dx}{x^4+4}$.

Иногда представление знаменателя дроби в виде произведения простейших скобок может быть осуществлено без определения корней знаменателя. Покажем, как это можно сделать в данном примере

$$x^4+4 = x^4+4x^2+4-4x^2 = \left(x^2+2\right)^2 - 4x^2 = \left(x^2-2x+2\right)\left(x^2+2x+2\right).$$

Дальнейшее упрощение знаменателя нецелесообразно, так как ни один из полученных квадратных трехчленов не имеет действительных корней. Итак,

$$\frac{1}{x^4+4} = \frac{1}{\left(x^2-2x+2\right)\left(x^2+2x+2\right)} = \frac{Mx+N}{\left(x^2-2x+2\right)} + \frac{Px+Q}{\left(x^2+2x+2\right)}\,.$$

После приведения дробей к общему знаменателю приходим к тождеству

$$(Mx+N)\left(x^2+2x+2\right) + (Px+Q)\left(x^2-2x+2\right) \equiv 1$$

$$Mx\left(x^2+2x+2\right) + N\left(x^2+2x+2\right) + Px\left(x^2-2x+2\right) + Q\left(x^2-2x+2\right) \equiv 1.$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях многочленов в левой и правой частях тождества

$$\begin{array}{c||l} x^3 & M+P=0 \\ x^2 & 2M+N-2P+Q=0 \\ x & 2M+2N+2P-2Q=0 \\ 1 & 2N+2Q=1 \end{array}$$

В этом случае не удается для упрощения решения системы уравнений привлечь дополнительных уравнений. Однако третье уравнение системы с помощью первого уравнения приводится к виду $2N-2Q=0$, откуда имеем $Q=N$. Теперь из последнего уравнения получаем $Q=N=\frac{1}{4}$. Из первого уравнения $P=-M$. Подставляя все это во второе уравнение, имеем $2M+\frac{1}{4}+2M+\frac{1}{4}=0$, откуда следует $M=-\frac{1}{8}$, после чего $P=\frac{1}{8}$. Итак,

$$\frac{1}{x^4+4}=-\frac{x-2}{8\left(x^2-2x+2\right)}+\frac{x+2}{8\left(x^2+2x+2\right)}.$$

Вычисляем интегралы

$$-\frac{1}{8}\int\frac{x-2}{\left(x^2-2x+2\right)}dx=-\frac{1}{8}\int\frac{x-2}{\left(x-1\right)^2+1}dx=\left\{\begin{matrix}t=x-1\\ dt=dx\end{matrix}\right\}=-\frac{1}{8}\int\frac{t-1}{t^2+1}dt=$$

$$=-\frac{1}{8}\int\frac{tdt}{t^2+1}+\frac{1}{8}\int\frac{dt}{t^2+1}=-\frac{1}{16}\ln\left|t^2+1\right|+\frac{1}{8}arctgt=$$

$$=-\frac{1}{16}\ln\left|\left(x-1\right)^2+1\right|+\frac{1}{8}arctg\left(x-1\right);$$

$$\frac{1}{8}\int\frac{x+2}{\left(x^2+2x+2\right)}dx=\frac{1}{8}\int\frac{x+2}{\left(x+1\right)^2+1}dx=\left\{\begin{matrix}z=x+1\\ dz=dx\end{matrix}\right\}=\frac{1}{8}\int\frac{z+1}{z^2+1}dz=$$

$$=\frac{1}{16}\int\frac{2z}{z^2+1}dz+\frac{1}{8}\int\frac{dz}{z^2+1}=\frac{1}{16}\ln\left|z^2+1\right|+\frac{1}{8}arctgz=$$

$$=\frac{1}{16}\ln\left|x^2+2x+2\right|+\frac{1}{8}arctg\left(x+1\right).$$

В итоге

$$\int\frac{dx}{x^4+4}=\frac{1}{16}\ln\left|\frac{x^2+2x+2}{x^2-2x+2}\right|+\frac{1}{8}arctg\left(x+1\right)+\frac{1}{8}arctg\left(x-1\right)+C.$$

§15. Интегрирование тригонометрических функций

15.1. Универсальная тригонометрическая подстановка

Рассмотрим некоторые случаи интегрирования тригонометрических функций. Функцию с переменными $\cos x$ и $\sin x$, над которыми выполняются рациональные действия (сложение, вычитание, умножение и деление) принято обозначать $R(\cos x, \sin x)$, где R - знак дробно-рациональной функция.

Вычисляется интеграл $\int R(\cos x, \sin x)dx$ с помощью замены переменной, посредством которой он сводится к интегралам от дробно-рациональной функции. Такая замена называется ***универсальной тригонометрической подстановкой*** и имеет вид

$$\boxed{t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}}.$$

Покажем, что функции $\cos x$ и $\sin x$, а также dx оказываются дробно-рациональными функциями новой переменной t.

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2\operatorname{tg}\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2} = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2},$$

$$\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \frac{\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}} = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

$$dx = \frac{2}{1+t^2}dt.$$

Здесь учитывалось, что

$$\frac{1}{\cos^2\alpha} = 1+\operatorname{tg}^2\alpha, \; x = 2\operatorname{arctg} t.$$

Итак,

$$\int R(\cos x, \sin x)dx = \int R\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}dt = \int \bar{R}(t)dt,$$

где $\bar{R}$ – дробно-рациональная функция аргумента t.

Таким образом, задача приведения рассматриваемого интеграла к интегралу предыдущего класса решена. Однако, как показывает опыт, эта замена приводит к сложным интегралам от дробно-рациональных функций, вычисление которых весьма затруднительно, если вообще возможно.

В некоторых случаях применяются более простые подстановки. Эти подстановки, называют иногда ***специальными***, так как применимы они лишь при выполнении некоторых условий.

Специальные подстановки

а) Замена $t=\sin x$ применима при выполнении условия

$$R(-\cos x, \sin x)=-R(\cos x, \sin x),$$

то есть подынтегральная функция нечетна относительно $\cos x$.

б) Замена $t=\cos x$ применима при выполнении условия

$$R(\cos x, -\sin x)=-R(\cos x, \sin x),$$

то есть подынтегральная функция нечетна относительно .

в) Замена $t=\operatorname{tg} x$ применима при выполнении условия

$$R(-\cos x, -\sin x)=R(\cos x, \sin x).$$

Это условие реализуется, когда функция $R(\cos x, \sin x)$ четна одновременно относительно $\cos x$ и $\sin x$. Тогда

$$\cos^2 x=\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x+\sin^2 x}=\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x}=\frac{1}{1+t^2},$$

$$\sin^2 x=\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x+\sin^2 x}=\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x\left(1+\operatorname{tg}^2 x\right)}=\frac{\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x}=\frac{t^2}{1+t^2}.$$

Так как $x=\operatorname{arctg} t$, значит $dx=\dfrac{1}{1+t^2}dt$.

Таким образом, приведение рассматриваемого класса интегралов к предыдущему классу возможно двумя способами. Либо применением универсальной подстановки, приводящей почти всегда к интегралам от сложных дробно рациональных функций, либо использованием, если это возможно, наиболее подходящей специальной подстановки.

Опыт показывает, что ***применение универсальной подстановки целесообразно, когда не работает ни одна из специальных подстановок***. Если допустимы несколько специальных подстановок, желательно осуществить каждую из них, чтобы выбрать ту, которая приводит к интегралу от самой простой дробно-рациональной функции.

Пример 1. Вычислить $\int \mathrm{tg}^5 x\, dx = \int \frac{\sin^5 x}{\cos^5 x} dx$.

Нетрудно проверить, что можно реализовать все приведенные выше подстановки. В самом деле, подынтегральная функция нечетна относительно $\cos x$, нечетна относительно $\sin x$, так же она четна относительно одновременно $\cos x$ и $\sin x$. Универсальная же подстановка осуществима в этих интегралах всегда. Реализуем поочередно все подстановки, начиная с универсальной.

А)

$$\int \mathrm{tg}^5 x\, dx = \int \frac{\sin^5 x}{\cos^5 x} dx = \int \frac{\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^5}{\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^5} \frac{2dt}{1+t^2} = -64\int \frac{t^5}{\left(t^2-1\right)^5\left(t^2+1\right)} dt =$$

$$= -64\int \frac{t^5}{(t-1)^5(t+1)^5\left(t^2+1\right)} dt.$$

В результате получен интеграл от дробно-рациональной функции, дробь правильная, несократимая. Ее можно представить в виде суммы одиннадцати простейших дробей. Относительно коэффициентов разложения получается система 12 алгебраических уравнений.

В)

$$\int \mathrm{tg}^5 x\, dx = \int \frac{\sin^5 x}{\cos^5 x} dx = \int \frac{\sin^5 x}{\cos^6 x} \cos x\, dx = \int \frac{\sin^5 x}{\left(1-\sin^2 x\right)^3} \cos x\, dx =$$

$$= \left\{\begin{matrix} t = \sin x \\ dt = \cos x\, dx \end{matrix}\right\} = \int \frac{t^5}{\left(1-t^2\right)^3} dt = -\int \frac{t^5}{(t-1)^3(t+1)^3} dt.$$

Подынтегральная функция может быть представлена в виде суммы шести простейших дробей, для отыскания коэффициентов разложения требуется решить систему 6 алгебраических уравнений. Задача значительно проще по сравнению с А).

С) $\int \mathrm{tg}^5 x\, dx = \left\{\begin{matrix} t = \mathrm{tg}\, x \\ dx = \frac{dt}{1+t^2} \end{matrix}\right\} = \int \frac{t^5}{t^2+1} dt.$

Итак, необходимо вычислить интеграл от неправильной дробно рациональной функции, что значительно проще вычисления интеграла B), не говоря уж об A).

D)

$$\int \operatorname{tg}^5 x\, dx = \int \frac{\sin^5 x}{\cos^5 x} dx = \int \frac{\sin^4 x}{\cos^5 x} \sin x\, dx = \int \frac{\left(1-\cos^2 x\right)^2}{\cos^5 x} \sin x\, dx =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} t = \cos x \\ dt = -\sin x\, dx \end{array} \right\} = -\int \frac{\left(1-t^2\right)^2}{t^5} dt = -\int \left(\frac{1}{t^5} - \frac{2}{t^3} + \frac{1}{t} \right) dt =$$

$$= \frac{1}{4t^4} - \frac{1}{t^2} - \ln|t| + C = \frac{1}{4\cos^4 x} - \frac{1}{\cos^2 x} - \ln|\cos x| + C .$$

Таким образом, последний вариант замены переменной оказался самым удачным, с помощью этой подстановки интеграл вычислен. В ходе решения подтвердилось, что универсальная подстановка в рассмотренном примере приводит к значительно более трудоемким вычислениям.

Пример 2. Вычислить $\int \frac{dx}{3\sin x + \cos x + 2}$. В этом случае не работает ни одна из специальных подстановок, приходится применять универсальную.

$$\int \frac{dx}{3\sin x + \cos x + 2} = \left\{ \begin{array}{ll} t = \operatorname{tg}\frac{x}{2} & dx = \frac{2}{1+t^2} dt \\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, & \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{array} \right\} =$$

$$= \int \frac{\frac{2}{1+t^2} dt}{\frac{6t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2} + 2} = \int \frac{2dt}{t^2 + 6t + 3} .$$

Знаменатель получившейся подынтегральной функции имеет действительные корни, следовательно, дробь может быть представлена в виде суммы двух более простых дробей. Однако значения корней выражаются через радикалы, поэтому откажемся от требований теории, предпочтя выделение полного квадрата в знаменателе.

$$\int \frac{2dt}{t^2+6t+3} = \int \frac{2dt}{(t+3)^2-6} = \left\{ \begin{matrix} z = t+3 \\ dz = dt \end{matrix} \right\} =$$

$$= 2\int \frac{dz}{z^2-6} = \frac{2}{2\sqrt{6}} \ln\left| \frac{z-\sqrt{6}}{z+\sqrt{6}} \right| + C =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{6}} \ln\left| \frac{t+3-\sqrt{6}}{t+3+\sqrt{6}} \right| + C = \frac{1}{\sqrt{6}} \ln\left| \frac{tg\frac{x}{2}+3-\sqrt{6}}{tg\frac{x}{2}+3+\sqrt{6}} \right| + C.$$

Итак,

$$\int \frac{dx}{3\sin x + \cos x + 2} = \frac{1}{\sqrt{6}} \ln\left| \frac{tg\frac{x}{2}+3-\sqrt{6}}{tg\frac{x}{2}+3+\sqrt{6}} \right| + C.$$

15.2. Интегралы вида $\int \sin^m x \cos^n x\, dx$

Эти интегралы являются частным случаем интеграла $\int R(\cos x, \sin x)dx$, следовательно, к ним применима теория предыдущего параграфа. Ее и следует использовать, когда один из показателей степеней нечетен.

1) Если m нечетно, то делается замена $t = \cos x$;

2) Если n нечетно, реализуется замена $t = \sin x$;

3) Интересен случай, когда m и $n-$ четные.

Теория предлагает в этом случае замену $t = \operatorname{tg} x$, однако удобнее понизить общую степень подынтегральной функции с помощью одной из формул

$$\sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x, \quad \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}.$$

Пример 3.

$$\int \sin^2 x \cos^2 x\, dx = \frac{1}{4}\int \sin^2 2x\, dx = \frac{1}{8}\int (1-\cos 4x)\, dx = \frac{1}{8}x - \frac{1}{32}\sin 4x + C$$

15.3. Использование тригонометрических преобразований

Интегралы вида

$$\int \sin ax \cos bx\, dx,\ \int \sin ax \sin bx\, dx,\ \int \cos ax \cos bx\, dx$$

вычисляются с помощью формул

$$\sin\alpha \cos\beta = \frac{1}{2}\left(\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)\right)$$

$$\sin\alpha \sin\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right)$$

$$\cos\alpha \cos\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\right).$$

Пример.

$$\int \sin 8x \cos 2x\, dx = \frac{1}{2}\int\left(\sin 10x + \sin 6x\right)dx = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{10}\cos 10x + \frac{1}{6}\cos 6x\right) + C$$

§ 16. Интегрирование иррациональных и показательных функций

16.1. Интегрирование показательных функций

Вычисляются интегралы вида $\int R\left(a^x\right)dx$, где $R-$ дробно рациональная функция аргумента a^x. В этом классе рекомендуется замена

$$z = a^x\ ,\quad dz = a^x \ln a\, dx \Rightarrow dx = \frac{1}{\ln a}\frac{dz}{z},$$

Тогда

$$\int R\left(a^x\right)dx = \frac{1}{\ln a}\int \frac{R(z)\,dz}{z}.$$

Пример.

$$\int \frac{dx}{e^x - e^{-x}} = \int \frac{e^x dx}{e^{2x}-1} = \left\{\begin{matrix} z = e^x \\ dz = e^x dx \end{matrix}\right\} = \int \frac{dz}{z^2-1} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{z-1}{z+1}\right| + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{e^x-1}{e^x+1}\right| + C.$$

16.2. Интегрирование иррациональных выражений

Этот класс интегралов является наиболее сложным, так как включает в себя множество подклассов интегралов, в каждом из которых свои приемы вычислений. Более того, кажущаяся очевидной замена переменной чаще всего не приводит к положительному результату. Основная идея, реализуемая в этом классе интегралов, избавление от радикалов в подынтегральном выражении.

1. Интегралы вида

$$\int R\left(x\,,\sqrt[m]{ax+b}\,,\sqrt[n]{ax+b}\,,\sqrt[p]{ax+b}\,,\sqrt[q]{ax+b}\right)dx\,,$$

где $R-$ дробно-рациональная функция. В этом случае работает замена $ax+b=z^s$, где $s-$ наименьше общее кратное чисел m, n, p, q, другими словами, $s-$ наименьшее из чисел, делящихся нацело на m, n, p, q.

Пример.

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x}-2\sqrt[3]{x}}=\left\{\begin{matrix}x=z^6\\ dx=6z^5dz\end{matrix}\right\}=\int\frac{6z^5dz}{z^3-2z^2}=6\int\frac{z^3}{z-2}dz=6\int\frac{z^3-8+8}{z-2}dz=$$

$$=6\left[\int\left(z^2+2z+4\right)dz+8\int\frac{dz}{z-2}\right]=2z^3+6z^2+24z+48\ln\left|z-2\right|+C=$$

$$=2\sqrt{x}+6\sqrt[3]{x}+24\sqrt[6]{x}+48\ln\left|\sqrt[6]{x}-2\right|+C\ .$$

2. Интегралы вида $\int R\left(x\,,\sqrt{a^2-x^2}\right)dx$.

Для этих интегралов имеются замены переменных, напрямую приводящие их к классу дробно-рациональных функций. Однако предпочтительнее в этом случае замена, переводящая интеграл в класс тригонометрических функций. Это

$$\left\{\begin{matrix}x=a\sin t\,,\quad \sqrt{a^2-x^2}=\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}=a\cos t\,,\\ dx=a\cos t\;dt\end{matrix}\right\},$$

Тогда

$$\int R\left(x\,,\sqrt{a^2-x^2}\right)dx=\int R\left(a\sin t,\,a\cos t\right)a\cos t\;dt\,.$$

Преобразование полученного в результате замены переменной интеграла происходит по правилам, установленным в классе тригонометрических функций.

Пример.

$$\int \frac{(1-x)}{\sqrt{4-x^2}}\,dx = \left\{ \begin{array}{l} x = 2\sin t\,,\ \sqrt{4-x^2} = \sqrt{4\left(1-\sin^2 t\right)} = 2\cos t \\ dx = 2\cos t\,dt \end{array} \right\} =$$

$$= \int \frac{(1-2\sin t)\,2\cos t}{2\cos t}\,dt = \int (1-2\sin t)\,dt = t + 2\cos t + C =$$

$$= \arcsin\frac{x}{2} + 2\cos\left(\arcsin\frac{x}{2}\right) + C$$

Второе слагаемое подлежит упрощению

$$2\cos\left(\arcsin\frac{x}{2}\right) = 2\sqrt{1-\sin^2\left(\arcsin\frac{x}{2}\right)} = 2\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2} = \sqrt{4-x^2}\,.$$

Поэтому

$$\int \frac{(1-x)}{\sqrt{4-x^2}}\,dx = \arcsin\frac{x}{2} + \sqrt{4-x^2} + C\,.$$

3. Интегралы вида $\int R\left(x\,,\sqrt{a^2+x^2}\right)dx$.

Подынтегральная функция приводится к дробно-рациональной относительно синуса и косинуса функции заменой

$$x = a\,\mathrm{tg}\,t\,,\quad \sqrt{a^2+x^2} = \sqrt{a^2+a^2\,\mathrm{tg}^2\,t} = a\sqrt{\frac{1}{\cos^2 t}} = \frac{a}{\cos t}\,,\quad dx = \frac{a}{\cos^2 t}\,dt$$

,

откуда следует

$$\int R\left(x\,,\sqrt{a^2+x^2}\right)dx = \int R\left(a\,\mathrm{tg}\,t\,,\frac{a}{\cos t}\right)\frac{a}{\cos^2 t}\,dt = \int \bar{R}(\cos t\,,\sin t)\,dt\,.$$

Для преобразований полученного интеграла используем теорию, относящуюся к интегралам от тригонометрических функций.

Пример.

$$\int \frac{(2+5x)}{\sqrt{\left(9+x^2\right)^3}}\,dx = \left\{ x = 3\,\mathrm{tg}\,t\,,\quad \sqrt{9+x^2} = \frac{3}{\cos t}\,,\quad dx = \frac{3}{\cos^2 t}\,dt \right\} =$$

$$= \int \frac{(2+15\,\mathrm{tg}\,t)}{\dfrac{27}{\cos^3 t}} \frac{3}{\cos^2 t} dt = \frac{1}{9}\int (2\cos t + 15\sin t)\, dt = \frac{2}{9}\sin t - \frac{5}{3}\cos t + C =$$

$$= \frac{2}{9}\sin\left(\mathrm{arctg}\,\frac{x}{3}\right) - \frac{5}{3}\cos\left(\mathrm{arctg}\,\frac{x}{3}\right) + C.$$

Если учесть формулы

$$\cos x = \sqrt{\cos^2 x} = \frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2 x}},$$

$$\sin x = \mathrm{tg}\,x \cos x = \mathrm{tg}\,x\sqrt{\cos^2 x} = \frac{\mathrm{tg}\,x}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2 x}},$$

то

$$\cos\left(\mathrm{arctg}\,\frac{x}{3}\right) = \frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\left(\mathrm{arctg}\,\dfrac{x}{3}\right)}} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\dfrac{x}{3}\right)^2}} = \frac{3}{\sqrt{9+x^2}},$$

$$\sin\left(\mathrm{arctg}\,\frac{x}{3}\right) = \frac{\mathrm{tg}\left(\mathrm{arctg}\,\dfrac{x}{3}\right)}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\left(\mathrm{arctg}\,\dfrac{x}{3}\right)}} = \frac{\dfrac{x}{3}}{\sqrt{1+\left(\dfrac{x}{3}\right)^2}} = \frac{x}{\sqrt{9+x^2}}.$$

Очевидно,

$$\int \frac{(2+5x)}{\sqrt{(9+x^2)^3}} dx = \frac{2x}{9\sqrt{9+x^2}} - \frac{5}{\sqrt{9+x^2}} + C.$$

4. Интегралы вида $\int R\left(x, \sqrt{x^2-a^2}\right) dx$.

Подынтегральная функция приводится к дробно рациональной относительно синуса и косинуса функции заменой

$$x = \frac{a}{\sin t},\ \sqrt{x^2-a^2} = \sqrt{\frac{a^2}{\sin^2 t} - a^2} = a\sqrt{\frac{\cos^2 t}{\sin^2 t}} = a\frac{\cos t}{\sin t},\ dx = -\frac{a\cos t}{\sin^2 t}dt$$

откуда следует

$$\int R\left(x, \sqrt{x^2-a^2}\right) dx = -\int R\left(\frac{a}{\sin t}, a\frac{\cos t}{\sin t}\right)\frac{a\cos t}{\sin^2 t} dt = \int \overline{R}(\cos t, \sin t)\, dt.$$

Пример.

$$\int \frac{\sqrt{\left(x^2-1\right)}}{x}\,dx = \left\{ \begin{array}{l} x=\dfrac{1}{\sin t}\,,\; dx=-\dfrac{\cos t}{\sin^2 t}\,dt \\ \sqrt{x^2-1}=\sqrt{\dfrac{1}{\sin^2 t}-1}=\dfrac{\cos t}{\sin t}\,, \end{array} \right\} =$$

$$= \int \frac{\dfrac{\cos t}{\sin t}}{\dfrac{1}{\sin t}} \cdot \left(-\frac{\cos t}{\sin^2\; t} \right) dt = -\int \frac{\cos^2 t}{\sin^2 t} dt = -\int \operatorname{ctg}^2 t\, dt = -\int \left(\frac{1}{\sin^2 t} - 1 \right) dt =$$

$$= \operatorname{ctg} t + t + C = \operatorname{ctg}\left(\arcsin \frac{1}{x} \right) + \arcsin \frac{1}{x} + C = \sqrt{x^2-1} + \arcsin \frac{1}{x} + C\,.$$

Здесь учитывались формулы

$$\operatorname{ctg}^2\; t = \frac{1}{\sin^2 t} - 1$$

и

$$\operatorname{ctg}\left(\arcsin \frac{1}{x} \right) = \sqrt{\frac{1}{\sin^2\left(\arcsin \frac{1}{x} \right)} - 1} = \sqrt{\frac{1}{\frac{1}{x^2}} - 1} = \sqrt{x^2-1}\,.$$

Вопросы к экзамену

1. Определители, их свойства (всего 8 свойств, четыре с доказательством), разложение по элементам строки (столбца).
2. Матрицы. Основные понятия, действия с матрицами и их свойства (с доказательствами). Элементарные преобразования матриц.
3. Произведения матриц и его свойства (с доказательством). Понятие обратной матрицы, свойства обратной матрицы. Ранг матрицы.
4. Системы линейных алгебраических уравнений. Основные понятия.
5. Решение систем линейных уравнений методом Гаусса.
6. Метод Крамера решения систем линейных уравнений (с выводом).
7. Решение систем линейных уравнений матричным методом (с выводом).
8. Векторы и действия с ними, линейные преобразования.
9. Понятие базиса. Проекция вектора. Представление вектора через базис. Сумма, разность векторов. Умножение вектора на скаляр.
10. Декартова система координат. Координаты вектора, радиус-вектор, направляющие косинусы.
11. Скалярное произведение векторов, определение, свойства. Вывод формулы скалярного произведения векторов, заданных в ортонормированном базисе.
12. Векторное произведение векторов, определение, свойства. Вывод формулы векторного произведения векторов, заданных в ортонормированном базисе.
13. Смешанное произведение векторов, определение, свойства (с доказательствами), приложения.
14. Понятие независимой и зависимой переменных. Аргумент и функция. Область существования функции. Область значений. Способы задания функции.
15. Последовательности. Предел числовой последовательности. Бесконечно малая и бесконечно большая последовательности.
16. Предел функции в точке. Определения.
17. Бесконечно большие и бесконечно малые функции. Свойства бесконечно малых функций. Теорема о пределе функции (с доказательством).
18. Предел функции, его свойства (с доказательствами).
19. Первый замечательный предел (с выводом) и его следствия (с выводом).

20. Второй замечательный предел и его следствия (с выводом).
21. Непрерывность функции в точке и на интервале. Доказательство эквивалентности определений. Свойства непрерывных функций (с доказательствами).
22. Точки разрыва функции.
23. Задача о проведении касательной к кривой. Понятие производной и дифференциала. Их геометрический и физический смысл.
24. Производная суммы (с выводом), произведения (с выводом), частного. Производная сложной функции (с выводом). Производная функции, заданной параметрически (с выводом). Производная обратной функции (с выводом).
25. Таблица производных (с выводами).
26. Дифференцирование неявно заданных функций. Логарифмическое дифференцирование.
27. Теорема Ролля. Геометрическая иллюстрация.
28. Теорема Коши (с доказательством).
29. Теорема конечных приращений Лагранжа (с доказательством и геометрической иллюстрацией).
30. Производные и дифференциалы высших порядков (вывод формулы). Формула Тейлора.
31. Разложение элементарных функций по формуле Маклорена (с выводом).
32. Правило Лопиталя (с доказательством).
33. Понятие возрастания и убывания функции. Необходимые и достаточные условия возрастания (убывания) функции на интервале (с доказательтвами).
34. Понятие экстремумов функции. Необходимое и достаточные условия максимума и минимума функции (с доказательствами).
35. Наибольшее и наименьшее значение функции.
36. Выпуклость (вогнутость) кривой. Необходимое и достаточное условие выпуклости (вогнутости) функции на интервале (с доказательством). Точки перегиба.
37. Определение асимптоты кривой. Вертикальные, горизонтальные и наклонные асимптоты кривой (с доказательством).
38. Схема исследования функции с формулировками основных необходимых теорем.

39. Неопределенный интеграл. Понятие первообразной функции. Теорема о множестве первообразных для данной функции (с доказательством).
40. Неопределенный интеграл и его свойства. Таблица простейших интегралов.
41. Основные методы интегрирования: непосредственное интегрирование, замена переменной (с доказательством), интегрирование по частям (с доказательством).
42. Интегрирование простейших дробно-рациональных функций (с доказательствами). Вывод рекуррентного соотношения.
43. Интегрирование дробно-рациональных функций.
44. Интегрирование тригонометрических функций (все виды замен с выводами формул).
45. Интегрирование показательных и иррациональных функций (с выводами).

ЛИТЕРАТУРА

1. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс / Д. Т. Письменный. – 10-е изд., испр. – М.: Айрис-пресс, 2011. – 608 с.
2. Секаева Л.Р. Курс лекций по математике для бакалавров-геологов: Учебное пособие / Л.Р. Секаева, О.Н. Тюленева, Е.А. Широкова. – Казань: Казанский университет, 2014. – 232 с.
3. Демидович Б. П. Краткий курс высшей математики: Учеб. Пособие для вузов / Б. П. Демидович, В.А. Кудрявцев. – М.: ООО «Издательство Астрель»; ООО «Издательство АСТ», 2001. – 656 с.
4. Мышкис А.Д. Лекции по высшей математике: Учебное пособие. 5-е изд., перераб. и доп. / А.Д. Мышкис. – СПб.: Изд-во «Лань», 2007. – 688 с.
5. Гусак А.А. Высшая математика. В 2 т. Т. 1 / А.А. Гусак. – Минск: ТетраСистемс, 2009. – 544 с.