

# Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. М. Бикчентаев, О. Е. Тихонов, Непрерывность операторных функций в топологии локальной сходимости по мере, *Труды МИАН*, 2024, том 324, 51–59

DOI: 10.4213/tm4378

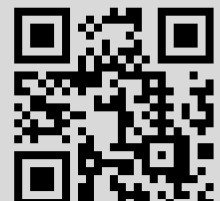
Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 178.213.245.204

17 мая 2024 г., 18:16:05



# Непрерывность операторных функций в топологии локальной сходимости по мере\*

А. М. Бикчентаев<sup>a</sup>, О. Е. Тихонов<sup>a</sup>

Поступило 20.06.2023; после доработки 05.10.2023; принято к публикации 06.10.2023

К 80-летию академика А.С. Холево

Пусть алгебра фон Неймана  $\mathcal{M}$  операторов действует в гильбертовом пространстве  $\mathcal{H}$ ,  $\tau$  — точный нормальный полуконечный след на  $\mathcal{M}$ . Пусть  $t_{\tau 1}$  — топология  $\tau$ -локальной сходимости по мере на \*-алгебре всех  $\tau$ -измеримых операторов  $S(\mathcal{M}, \tau)$ . Доказана  $t_{\tau 1}$ -непрерывность инволюции на подмножестве всех нормальных операторов из  $S(\mathcal{M}, \tau)$ . Исследована  $t_{\tau 1}$ -непрерывность операторных функций на  $S(\mathcal{M}, \tau)$ . Показано, что отображение  $A \mapsto |A|$  является  $t_{\tau 1}$ -непрерывным на подмножестве всех частичных изометрий из алгебры  $\mathcal{M}$ .

**Ключевые слова:** гильбертово пространство, линейный оператор, алгебра фон Неймана, нормальный след, измеримый оператор, локальная сходимости по мере, непрерывность операторных функций.

**DOI:** <https://doi.org/10.4213/tm4378>

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть алгебра фон Неймана  $\mathcal{M}$  операторов действует в гильбертовом пространстве  $\mathcal{H}$ , и пусть  $\tau$  — точный нормальный полуконечный след на  $\mathcal{M}$ . Настоящая работа продолжает начатые в [1, 3–8, 10, 11, 15, 16] исследования свойств топологий  $t_{\tau 1}$  и  $t_{w\tau 1}$  соответственно  $\tau$ -локальной и слабо  $\tau$ -локальной сходимости по мере на \*-алгебре  $S(\mathcal{M}, \tau)$  всех  $\tau$ -измеримых операторов. В работе доказана  $t_{\tau 1}$ -непрерывность инволюции на подмножестве всех нормальных операторов из  $S(\mathcal{M}, \tau)$  (теорема 4.8). Исследована  $t_{\tau 1}$ -непрерывность операторных функций на  $S(\mathcal{M}, \tau)$  (теорема 4.18); здесь мы воспользовались идеями и методами из работ [9, 13]. Показано, что отображение  $A \mapsto |A|$  является  $t_{\tau 1}$ -непрерывным на подмножестве всех частичных изометрий из алгебры  $\mathcal{M}$  (следствие 4.3).

Отметим, что непрерывность операторных функций в топологии  $t_{\tau}$  сходимости по мере на  $S(\mathcal{M}, \tau)$  была исследована вторым автором в [19], а на алгебрах локально измеримых операторов — М.А. Муратовым и В.И. Чилиным в [14]. Часть наших результатов являются новыми и для \*-алгебры  $\mathcal{M} = \mathcal{B}(\mathcal{H})$  всех ограниченных линейных операторов в  $\mathcal{H}$ , снабженной каноническим следом  $\tau = \text{tr}$ .

\*Работа выполнена за счет средств программы стратегического академического лидерства Казанского (Приволжского) федерального университета (“Приоритет-2030”).

<sup>a</sup>Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского Казанского (Приволжского) федерального университета, Казань, Россия.

✉ [Airat.Bikchentaev@kpfu.ru](mailto:Airat.Bikchentaev@kpfu.ru) (А.М. Бикчентаев), [Oleg.Tikhonov@kpfu.ru](mailto:Oleg.Tikhonov@kpfu.ru) (О.Е. Тихонов).

## 2. ОБОЗНАЧЕНИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Пусть  $\mathcal{M}$  — алгебра фон Неймана операторов в гильбертовом пространстве  $\mathcal{H}$ ,  $\mathcal{M}^{\text{pr}}$  — решетка ортопроекторов ( $P = P^2 = P^*$ ) в  $\mathcal{M}$ ,  $I$  — единица в  $\mathcal{M}$ ,  $P^\perp = I - P$  для  $P \in \mathcal{M}^{\text{pr}}$ ,  $\mathcal{M}^+$  — конус положительных элементов из  $\mathcal{M}$ .

Отображение  $\varphi: \mathcal{M}^+ \rightarrow [0, +\infty]$  называется *следом*, если  $\varphi(X + Y) = \varphi(X) + \varphi(Y)$  и  $\varphi(\lambda X) = \lambda\varphi(X)$  для всех  $X, Y \in \mathcal{M}^+$  и  $\lambda \geq 0$  (при этом  $0 \cdot (+\infty) \equiv 0$ ) и  $\varphi(Z^*Z) = \varphi(ZZ^*)$  для всех  $Z \in \mathcal{M}$ . След  $\varphi$  называется

- *точным*, если  $\varphi(X) > 0$  для всех  $X \in \mathcal{M}^+$ ,  $X \neq 0$ ;
- *полуконачным*, если  $\varphi(X) = \sup\{\varphi(Y) : Y \in \mathcal{M}^+, Y \leq X, \varphi(Y) < +\infty\}$  для любого  $X \in \mathcal{M}^+$ ;
- *нормальным*, если из соотношения  $X_i \nearrow X$  ( $X_i, X \in \mathcal{M}^+$ ) следует, что  $\varphi(X) = \sup \varphi(X_i)$

(см. [17, Ch. V, § 2]).

Оператор в  $\mathcal{H}$  (не обязательно ограниченный или плотно определенный) называется *присоединенным к алгебре фон Неймана  $\mathcal{M}$* , если он перестановочен с любым унитарным оператором из коммутанта  $\mathcal{M}'$  алгебры  $\mathcal{M}$ . Далее всюду  $\tau$  — точный нормальный полуконачный след на  $\mathcal{M}$ ,  $\mathcal{M}_\tau^{\text{pr}} = \{P \in \mathcal{M}^{\text{pr}} : \tau(P) < \infty\}$ .

Замкнутый оператор  $X$ , присоединенный к  $\mathcal{M}$  и имеющий всюду плотную в  $\mathcal{H}$  область определения  $\mathcal{D}(X)$ , называется  *$\tau$ -измеримым*, если для любого  $\varepsilon > 0$  существует такой  $P \in \mathcal{M}^{\text{pr}}$ , что  $P\mathcal{H} \subset \mathcal{D}(X)$  и  $\tau(P^\perp) < \varepsilon$ . Множество  $S(\mathcal{M}, \tau)$  всех  $\tau$ -измеримых операторов является  $*$ -алгеброй относительно перехода к сопряженному оператору, умножению на скаляр и операций сильного сложения и умножения, получаемых замыканием обычных операций [18, Ch. IX]. Пусть  $S(\mathcal{M}, \tau)^{\text{nor}}$  — множество всех нормальных ( $A^*A = AA^*$ ) операторов в  $S(\mathcal{M}, \tau)$ . Для семейства  $\mathcal{L} \subset S(\mathcal{M}, \tau)$  обозначим через  $\mathcal{L}^+$  и  $\mathcal{L}^{\text{h}}$  его положительную и эрмитову части соответственно. Частичный порядок в  $S(\mathcal{M}, \tau)^{\text{h}}$ , порожденный собственным конусом  $S(\mathcal{M}, \tau)^+$ , будем обозначать через  $\leq$ . Если  $X \in S(\mathcal{M}, \tau)$  и  $X = U|X|$  — полярное разложение оператора  $X$ , то  $U \in \mathcal{M}$  и  $|X| = \sqrt{X^*X} \in S(\mathcal{M}, \tau)^+$ . Для оператора  $A \in S(\mathcal{M}, \tau)$  будем далее использовать обозначения

$$\operatorname{Re} A = \frac{1}{2}(A + A^*) \quad \text{и} \quad \operatorname{Im} A = \frac{1}{2i}(A - A^*).$$

В  $*$ -алгебре  $S(\mathcal{M}, \tau)$  вводится топология  $t_\tau$  сходимости по мере [18, Ch. IX, § 2], фундаментальную систему окрестностей нуля которой образуют множества

$$\mathcal{U}(\varepsilon, \delta) = \{X \in S(\mathcal{M}, \tau) : \exists Q \in \mathcal{M}^{\text{pr}} (\|XQ\| \leq \varepsilon \text{ и } \tau(Q^\perp) \leq \delta)\}, \quad \varepsilon > 0, \quad \delta > 0.$$

Известно, что  $\langle S(\mathcal{M}, \tau), t_\tau \rangle$  является полной метризуемой топологической  $*$ -алгеброй, причем алгебра  $\mathcal{M}$  плотна в  $\langle S(\mathcal{M}, \tau), t_\tau \rangle$ . Для обозначения сходимости сети  $\{X_j\}_{j \in J} \subset S(\mathcal{M}, \tau)$  к оператору  $X \in S(\mathcal{M}, \tau)$  в топологии  $t_\tau$  используется запись  $X_j \xrightarrow{t_\tau} X$ ; при этом говорят, что  $\{X_j\}_{j \in J}$  сходится к  $X$  по мере  $\tau$ .

Через  $\mu(X; t)$  обозначим *функцию сингулярных значений* оператора  $X \in S(\mathcal{M}, \tau)$ , т.е. возрастающую непрерывную справа функцию  $\mu(X; \cdot): (0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ , заданную формулой

$$\mu(X; t) = \inf\{\|XP\| : P \in \mathcal{M}^{\text{pr}}, \tau(P^\perp) \leq t\}, \quad t > 0.$$

Множество  $\tau$ -компактных операторов  $S_0(\mathcal{M}, \tau) = \{X \in S(\mathcal{M}, \tau) : \lim_{t \rightarrow \infty} \mu(X; t) = 0\}$  является идеалом в  $S(\mathcal{M}, \tau)$ . Топология  $t_\tau$  определяется и  $F$ -нормой  $\rho_\tau(X) = \inf_{t > 0} \max\{t, \mu(X; t)\}$ ,  $X \in S(\mathcal{M}, \tau)$ .

**Лемма 2.1** [12]. Пусть  $X, Y, X_j \in S(\mathcal{M}, \tau)$ ,  $j \in J$ . Тогда

- (i)  $\mu(X; t) = \mu(|X|; t) = \mu(X^*; t)$  для всех  $t > 0$ ;
- (ii)  $\mu(X^*X; t) = \mu(XX^*; t)$  для всех  $t > 0$ ;

- (iii) если  $|X| \leq |Y|$ , то  $\mu(X; t) \leq \mu(Y; t)$  для всех  $t > 0$ ;
- (iv) если  $X \in \mathcal{M}$ , то  $\lim_{t \rightarrow +0} \mu(X; t) = \sup_{t > 0} \mu(X; t) = \|X\|$ ;
- (v)  $\mu(XY; t + s) \leq \mu(X; t)\mu(Y; s)$  для всех  $t, s > 0$ ;
- (vi)  $\mu(X + Y; t + s) \leq \mu(X; t) + \mu(Y; s)$  для всех  $t, s > 0$ ;
- (vii)  $\mu(|X|^\alpha; t) = \mu(X; t)^\alpha$  для всех  $\alpha > 0$  и  $t > 0$ ;
- (viii)  $X_j \xrightarrow{\tau} X$  тогда и только тогда, когда  $\mu(X_j - X; t) \rightarrow 0$  для каждого  $t > 0$ ;
- (ix) если  $A, Z \in \mathcal{M}$ , то  $\mu(AYZ; t) \leq \|A\|\mu(Y; t)\|Z\|$  для всех  $t > 0$ .

### 3. ТОПОЛОГИИ ЛОКАЛЬНОЙ СХОДИМОСТИ ПО МЕРЕ НА $S(\mathcal{M}, \tau)$

Топология  $t_\tau$  сходимости по мере может быть локализована следующим образом. Для  $\varepsilon, \delta > 0$  и  $P \in \mathcal{M}_\tau^{\text{pr}}$  определим множества

$$\mathcal{V}(\varepsilon, \delta, P) = \{X \in S(\mathcal{M}, \tau) : \exists Q \in \mathcal{M}^{\text{pr}} (Q \leq P, \|XQ\| \leq \varepsilon, \tau(P - Q) \leq \delta)\},$$

$$\mathcal{W}(\varepsilon, \delta, P) = \{X \in S(\mathcal{M}, \tau) : \exists Q \in \mathcal{M}^{\text{pr}} (Q \leq P, \|QXQ\| \leq \varepsilon, \tau(P - Q) \leq \delta)\}.$$

Пространство  $S(\mathcal{M}, \tau)$  становится топологическим векторным пространством относительно топологии  $\tau$ -локальной сходимости по мере  $t_{\tau_1}$ , базис окрестностей нуля которой образован семейством  $\Theta = \{\mathcal{V}(\varepsilon, \delta, P)\}_{\varepsilon, \delta > 0, P \in \mathcal{M}_\tau^{\text{pr}}}$ , а также относительно топологии  $t_{w\tau_1}$  слабо  $\tau$ -локальной сходимости по мере, базис окрестностей нуля которой образован семейством  $\Theta = \{\mathcal{W}(\varepsilon, \delta, P)\}_{\varepsilon, \delta > 0, P \in \mathcal{M}_\tau^{\text{pr}}}$ . Будем писать  $X_i \xrightarrow{\tau_1} X$  и  $X_i \xrightarrow{w\tau_1} X$  для обозначения  $t_{\tau_1}$ - и  $t_{w\tau_1}$ -сходимостей соответственно. С помощью стандартной техники редуцирования алгебр фон Неймана можно показать (см. также [11, 16]), что  $X_i \xrightarrow{\tau_1} X$  тогда и только тогда, когда  $X_i P \xrightarrow{\tau} X P$  для всех  $P \in \mathcal{M}_\tau^{\text{pr}}$  (ср. [8, р. 114]), и что  $X_i \xrightarrow{w\tau_1} X$  тогда и только тогда, когда  $P X_i P \xrightarrow{\tau} P X P$  для всех  $P \in \mathcal{M}_\tau^{\text{pr}}$  (ср. [8, р. 114] и [10, р. 746]). Ясно, что  $t_{w\tau_1} \leq t_{\tau_1} \leq t_\tau$  и  $t_{w\tau_1}$ -сходимость совпадает со сходимостью по мере относительно  $\langle S(PMP) = PS(\mathcal{M}, \tau)P, t_{\tau_P} \rangle$  для всех  $P \in \mathcal{M}_\tau^{\text{pr}}$ , где  $\tau_P(X) = \tau(PXP)$ . Топологии  $t_{\tau_1}$  и  $t_{w\tau_1}$  можно определить и в терминах невозрастающих перестановок. Семейство  $\tilde{\Theta} = \{\tilde{\mathcal{V}}(\varepsilon, \delta, P)\}_{\varepsilon, \delta > 0, P \in \mathcal{M}_\tau^{\text{pr}}}$ , где  $\tilde{\mathcal{V}}(\varepsilon, \delta, P) = \{X \in S(\mathcal{M}, \tau) : \mu(XP; \delta) < \varepsilon\}$ , также задает базис окрестностей нуля для  $t_{\tau_1}$ . Если  $\tau(I) < \infty$ , то  $t_\tau = t_{\tau_1} = t_{w\tau_1}$ ;  $t_\tau$  является минимальной метризуемой топологией, согласованной со структурой кольца в  $S(\mathcal{M}, \tau)$  (см. [2]).

Если  $\mathcal{M}$  — это \*-алгебра  $\mathcal{B}(\mathcal{H})$  всех ограниченных линейных операторов в  $\mathcal{H}$  и  $\tau = \text{tr}$  — канонический след, то  $S(\mathcal{M}, \tau)$  и  $S_0(\mathcal{M}, \tau)$  совпадают с  $\mathcal{B}(\mathcal{H})$  и с идеалом  $\mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H})$  компактных операторов в  $\mathcal{H}$  соответственно. Топология  $t_\tau$  совпадает с топологией нормы  $\|\cdot\|$ , а  $t_{\tau_1}$  и  $t_{w\tau_1}$  совпадают с топологиями сильной и слабой операторной сходимости соответственно. Имеем  $\mu(X; t) = \sum_{n=1}^\infty s_n(X)\chi_{[n-1, n)}(t)$ ,  $t > 0$ , где  $\{s_n(X)\}_{n=1}^\infty$  — последовательность  $s$ -чисел вполне непрерывного оператора  $X$ , а  $\chi_A$  — индикатор множества  $A \subset \mathbb{R}$ .

Если  $\mathcal{M}$  абелева (т.е. коммутативна), то  $\mathcal{M} \simeq L^\infty(\Omega, \Sigma, \nu)$  и  $\tau(f) = \int_\Omega f d\nu$ , где  $(\Omega, \Sigma, \nu)$  — локализуемое пространство с мерой, а алгебра  $S(\mathcal{M}, \tau)$  совпадает с алгеброй всех измеримых комплексных функций  $f$  на  $(\Omega, \Sigma, \nu)$ , которые ограничены всюду, кроме множества конечной меры. При этом топология  $t_\tau$  является обычной топологией сходимости по мере, а  $t_{\tau_1} = t_{w\tau_1}$  совпадают с известной топологией сходимости по мере на множествах конечной меры.

### 4. О НЕПРЕРЫВНОСТИ ОПЕРАТОРНЫХ ФУНКЦИЙ

**Лемма 4.1** [1, Theorem 1, part 1]. Пусть сеть  $\{A_\alpha\} \subset S(\mathcal{M}, \tau)$  сходится в топологии  $t_{\tau_1}$  к оператору  $A \in S(\mathcal{M}, \tau)$ . Тогда  $A_\alpha B \xrightarrow{\tau_1} AB$  для любого  $B \in S(\mathcal{M}, \tau)$ .

Из определений  $t_{\tau_1}$ - и  $t_{w\tau_1}$ -сходимостей и  $t_\tau$ -непрерывности инволюции и произведения в алгебре  $S(\mathcal{M}, \tau)$  легко следует

**Предложение 4.2.** Если  $A, A_\alpha \in S(\mathcal{M}, \tau)$  и  $A_\alpha \xrightarrow{\tau_1} A$ , то  $|A_\alpha|^2 \xrightarrow{w\tau_1} |A|^2$ .

Заметим, что из утверждения 1) леммы 3.1 в [3] следует, что отображение  $A \mapsto |A|$  ( $A \in S(\mathcal{M}, \tau)$ ) является  $t_{\tau_1}$ -непрерывным в точке  $A = 0$ .

**Следствие 4.3.** *Если операторы  $A, A_\alpha \in \mathcal{M}$  являются частичными изометриями и  $A_\alpha \xrightarrow{\tau_1} A$ , то  $|A_\alpha| \xrightarrow{\tau_1} |A|$ .*

**Доказательство.** Поскольку  $|A_\alpha|, |A| \in \mathcal{M}^{\text{pr}}$ , имеем  $|A_\alpha| = |A_\alpha|^2 \xrightarrow{\text{w}\tau_1} |A|^2 = |A|$ , т.е.  $|A_\alpha| \xrightarrow{\text{w}\tau_1} |A|$ . Теперь в силу утверждения 1) леммы 3.7 из [3] получаем  $|A_\alpha| \xrightarrow{\tau_1} |A|$ .  $\square$

**Следствие 4.4.** *Если  $A_\alpha \in \mathcal{M}_r := \{X \in \mathcal{M} : \|X\| \leq r\}$ ,  $r > 0$ , и  $A_\alpha \xrightarrow{\text{w}\tau_1} A \in S(\mathcal{M}, \tau)$ , то  $A \in \mathcal{M}_r$ .*

**Доказательство.** Предположим, что  $A \notin \mathcal{M}_r$ , т.е.  $r < \|A\| \leq +\infty$ . Так как  $\|A^*A\| = \|A\|^2$ , имеем  $r^2 < \|A^*A\| \leq +\infty$ . Существуют спектральный ортопроектор  $Q$  оператора  $A^*A$  и число  $a > r^2$  такие, что

$$A^*A \geq aQ. \quad (4.1)$$

В силу полуконечности следа  $\tau$  найдется ненулевой ортопроектор  $P \in \mathcal{M}_\tau^{\text{pr}}$  такой, что  $P \leq Q$ . Тогда из (4.1) получаем  $PA^*AP \geq aP$ . Поскольку  $\|A_\alpha^*A_\alpha\| \leq r^2$ , имеем  $PA_\alpha^*A_\alpha P \leq r^2P$  и

$$PA^*AP - PA_\alpha^*A_\alpha P \geq (a - r^2)P.$$

Поэтому в силу утверждения (ii) леммы 2.1 получаем

$$\mu(PA^*AP - PA_\alpha^*A_\alpha P; t) \geq (a - r^2)\mu(P; t) = (a - r^2)\chi_{(0, \tau(P)]}(t).$$

Следовательно, из утверждения (viii) леммы 2.1 имеем  $PA_\alpha^*A_\alpha P \xrightarrow{\tau} PA^*AP$ . Получили противоречие.  $\square$

**Теорема 4.5.** *Пусть  $A, A_n \in S(\mathcal{M}, \tau)$ ,  $A_n \xrightarrow{\text{w}\tau_1} A$  при  $n \rightarrow \infty$  и последовательность  $\{A_n\}$  является  $t_\tau$ -ограниченной. Тогда  $BA_n \xrightarrow{\tau_1} BA$  при  $n \rightarrow \infty$  для каждого оператора  $B \in S_0(\mathcal{M}, \tau)$  и  $BA_n C \xrightarrow{\tau} BAC$  при  $n \rightarrow \infty$  для каждой пары операторов  $B, C \in S_0(\mathcal{M}, \tau)$ .*

**Доказательство.** Пусть  $X, X_n \in S(\mathcal{M}, \tau)$ . Тогда

$$X_n \xrightarrow{\text{w}\tau_1} X \quad \text{при } n \rightarrow \infty \quad \Leftrightarrow \quad PX_n Q \xrightarrow{\tau} PXQ \quad \text{при } n \rightarrow \infty \quad \forall P, Q \in \mathcal{M}_\tau^{\text{pr}}$$

(см. [1, p. 20]). Поскольку  $X_n \xrightarrow{\text{w}\tau_1} X$  при  $n \rightarrow \infty$  тогда и только тогда, когда  $X_n^* \xrightarrow{\text{w}\tau_1} X^*$  при  $n \rightarrow \infty$ , имеем  $PA_n^* \xrightarrow{\tau_1} PA^*$  при  $n \rightarrow \infty$  для каждого  $P \in \mathcal{M}_\tau^{\text{pr}}$ . Теперь в силу [1, Theorem 2] получаем

$$PA_n^* B^* \xrightarrow{\tau} PA^* B^* \quad \text{при } n \rightarrow \infty \quad \forall P \in \mathcal{M}_\tau^{\text{pr}}, \quad \forall B \in S_0(\mathcal{M}, \tau) \quad (4.2)$$

(напомним, что  $B^* \in S_0(\mathcal{M}, \tau)$ ). Переходя в (4.2) к сопряженным операторам, с учетом  $t_\tau$ -непрерывности инволюции в  $S(\mathcal{M}, \tau)$  имеем  $BA_n P \xrightarrow{\tau} BAP$  при  $n \rightarrow \infty$ . В силу произвольности проектора  $P \in \mathcal{M}_\tau^{\text{pr}}$  получаем  $BA_n \xrightarrow{\tau_1} BA$  при  $n \rightarrow \infty$ . Еще раз применив [1, Theorem 2], имеем  $BA_n C \xrightarrow{\tau} BAC$  при  $n \rightarrow \infty$  для каждой пары операторов  $B, C \in S_0(\mathcal{M}, \tau)$ .  $\square$

**Следствие 4.6.** *Пусть  $A, A_n \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ ,  $A_n \rightarrow A$  при  $n \rightarrow \infty$  в слабой операторной топологии и последовательность  $\{A_n\}$  является  $\|\cdot\|$ -ограниченной. Тогда  $BA_n \rightarrow BA$  при  $n \rightarrow \infty$  в сильной операторной топологии для каждого оператора  $B \in \mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H})$ , а также  $\|B(A_n - A)C\| \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$  для каждой пары операторов  $B, C \in \mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H})$ .*

**Пример 4.7.** Условие  $t_\tau$ -ограниченности последовательности  $\{A_n\}$  существенно в теореме 4.5. В абелевой алгебре фон Неймана  $\mathcal{M} \simeq L^\infty(\mathbb{R}^+, d\nu)$  с линейной мерой Лебега  $\nu$  рассмотрим точный нормальный полуконечный след  $\tau(f) = \int_{\mathbb{R}^+} f d\nu$  и положим

$$f_n = n\chi_{[n, 2n]}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Тогда  $f_n \xrightarrow{\tau_1} 0$  при  $n \rightarrow \infty$  и для  $\tau$ -компактных  $g, h, g = h$ , заданных функцией  $\min\{1, x^{-1/2}\}$ ,  $x \in \mathbb{R}^+$ , имеем  $\mu(gf_n h; t) \geq \chi_{(0, n]}(t)/2 \not\rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$  для каждого  $t > 0$ . Поэтому  $gf_n h \not\xrightarrow{\tau} 0$  при  $n \rightarrow \infty$  в силу утверждения (viii) леммы 2.1.

**Теорема 4.8.** *Если  $A, A_\alpha \in S(\mathcal{M}, \tau)^{\text{nor}}$  и  $A_\alpha \xrightarrow{\tau_1} A$ , то  $A_\alpha^* \xrightarrow{\tau_1} A^*$ .*

**Доказательство.** Шаг 1. Имеем  $PA_\alpha^* \xrightarrow{\tau} PA^*$  для каждого  $P \in \mathcal{M}_\tau^{\text{pr}}$  в силу  $t_\tau$ -непрерывности инволюции в  $S(\mathcal{M}, \tau)$ . Поэтому в силу  $t_\tau$ -непрерывности произведения в  $S(\mathcal{M}, \tau)$  получаем

$$PA_\alpha \cdot A_\alpha^* P = PA_\alpha^* \cdot A_\alpha P \xrightarrow{\tau} PA^* \cdot AP = PA \cdot A^* P$$

для каждого  $P \in \mathcal{M}_\tau^{\text{pr}}$ . Таким образом,  $\mu(PA_\alpha A_\alpha^* P - PA A^* P; t) \rightarrow 0$  для каждого  $t > 0$  в силу утверждения (viii) леммы 2.1.

Шаг 2. Для каждого  $P \in \mathcal{M}_\tau^{\text{pr}}$  и  $t > 0$  оценим

$$\begin{aligned} \mu(A_\alpha^* P - A^* P; t)^2 &= \mu(|A_\alpha^* P - A^* P|; t)^2 = \mu(|A_\alpha^* P - A^* P|^2; t) = \\ &= \mu((PA_\alpha - PA)(A_\alpha^* P - A^* P); t) = \\ &= \mu(PA_\alpha A_\alpha^* P + PAA^* P - PA_\alpha A^* P - PAA_\alpha^* P; t) = \\ &= \mu(PA_\alpha^* A_\alpha P + PA^* AP - 2\text{Re}(PA_\alpha A^* P); t) = \\ &= \mu(PA_\alpha^* A_\alpha P + PA^* AP - 2\text{Re}(PA^* AP) - 2\text{Re}(PA_\alpha A^* P - PA^* AP); t) = \\ &= \mu(PA_\alpha^* A_\alpha P - PA^* AP - 2\text{Re}(PA_\alpha A^* P - PA^* AP); t) \leq \\ &\leq \mu\left(PA_\alpha^* A_\alpha P - PA^* AP; \frac{t}{2}\right) + 2\mu\left(\text{Re}(PA_\alpha A^* P - PA^* AP); \frac{t}{2}\right) \end{aligned} \quad (4.3)$$

в силу утверждений (vi) и (vii) леммы 2.1. В силу шага 1 имеем

$$\mu\left(PA_\alpha^* A_\alpha P - PA^* AP; \frac{t}{2}\right) \rightarrow 0$$

для каждого  $P \in \mathcal{M}_\tau^{\text{pr}}$  и  $t > 0$ . Оценим второе слагаемое в последнем неравенстве в цепочке (4.3):

$$\begin{aligned} 2\mu\left(\text{Re}(PA_\alpha A^* P - PA^* AP); \frac{t}{2}\right) &= 2\mu\left(P(\text{Re}(A_\alpha A^* - A^* A)P); \frac{t}{2}\right) = \\ &= \mu\left(P(A_\alpha - A)A^* P + PA(A_\alpha^* - A^*)P; \frac{t}{2}\right) \leq \\ &\leq \mu\left(P(A_\alpha - A)A^* P; \frac{t}{4}\right) + \mu\left(PA(A_\alpha^* - A^*)P; \frac{t}{4}\right) \leq \\ &\leq \|P\| \mu\left((A_\alpha - A)A^* P; \frac{t}{4}\right) + \|P\| \mu\left(PA(A_\alpha^* - A^*); \frac{t}{4}\right) = \\ &= \mu\left((A_\alpha - A)A^* P; \frac{t}{4}\right) + \mu\left((PA(A_\alpha^* - A^*))^*; \frac{t}{4}\right) = \\ &= 2\mu\left((A_\alpha - A)A^* P; \frac{t}{4}\right) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

в силу утверждений (vi), (ix) и (viii) леммы 2.1 и  $t_\tau$ -непрерывности операции умножения на оператор  $A^*$  слева (см. лемму 4.1). Таким образом,  $\mu(A_\alpha^* P - A^* P; t) \rightarrow 0$  для любых  $t > 0$  и  $P \in \mathcal{M}_\tau^{\text{pr}}$ . Теорема доказана.  $\square$

Для оператора  $A \in S(\mathcal{M}, \tau)$  через  $R_\lambda(A)$  обозначим его резольвенту.

**Лемма 4.9.** *Если в  $S(\mathcal{M}, \tau)^{\text{h}}$  сеть  $\{A_\alpha\}$  сходится к  $A$  в топологии  $t_{\tau_1}$ , то  $R_\lambda(A_\alpha) \xrightarrow{\tau_1} R_\lambda(A)$  для любого  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ .*

**Доказательство.** Как известно,

$$R_\lambda(A) - R_\lambda(A_\alpha) = R_\lambda(A_\alpha)(A_\alpha - A)R_\lambda(A).$$

Возьмем  $Q \in \mathcal{M}_\tau^{\text{pr}}$ . Так как  $A_\alpha - A \xrightarrow{\tau_1} 0$ , то  $(A_\alpha - A)R_\lambda(A) \xrightarrow{\tau_1} 0$  по лемме 4.1. Следовательно,  $(A_\alpha - A)R_\lambda(A)Q \xrightarrow{\tau} 0$ , т.е.  $\mu((A_\alpha - A)R_\lambda(A)Q; s) \rightarrow 0$  для любого  $s > 0$ . Так как

$$\begin{aligned} \mu(R_\lambda(A_\alpha)(A_\alpha - A)R_\lambda(A)Q; s) &\leq \|R_\lambda(A_\alpha)\| \mu((A_\alpha - A)R_\lambda(A)Q; s) \leq \\ &\leq |\operatorname{Im} \lambda|^{-1} \mu((A_\alpha - A)R_\lambda(A)Q; s), \end{aligned}$$

то  $\mu(R_\lambda(A_\alpha)(A_\alpha - A)R_\lambda(A)Q; s) \rightarrow 0$ .

Таким образом,  $(R_\lambda(A) - R_\lambda(A_\alpha))Q \xrightarrow{\tau} 0$  для любого  $Q \in \mathcal{M}_\tau^{\text{pr}}$ , т.е.  $R_\lambda(A_\alpha) \xrightarrow{\tau_1} R_\lambda(A)$ .  $\square$

**Лемма 4.10.** Пусть  $f$  и  $g$  — две непрерывные функции из  $\mathbb{R}$  (или  $\mathbb{C}$ ) в  $\mathbb{C}$ , причем  $g$  ограничена. Если операторные функции  $f$  и  $g$  являются  $t_{\tau_1}$ -непрерывными на  $S(\mathcal{M}, \tau)^{\text{h}}$  (на  $S(\mathcal{M}, \tau)^{\text{por}}$ ), то операторная функция  $fg$  также  $t_{\tau_1}$ -непрерывна на  $S(\mathcal{M}, \tau)^{\text{h}}$  (соответственно на  $S(\mathcal{M}, \tau)^{\text{por}}$ ).

**Доказательство.** Пусть  $A_\alpha \xrightarrow{\tau_1} A$ . Запишем

$$(gf)(A) - (gf)(A_\alpha) = (g(A) - g(A_\alpha))f(A) + g(A_\alpha)(f(A) - f(A_\alpha)).$$

Из леммы 4.1 следует, что  $(g(A) - g(A_\alpha))f(A) \xrightarrow{\tau_1} 0$ . Из оценки

$$\mu(g(A_\alpha)(f(A) - f(A_\alpha))Q; s) \leq |g| \mu((f(A) - f(A_\alpha))Q; s),$$

где  $Q \in \mathcal{M}_\tau^{\text{pr}}$ , следует, что  $g(A_\alpha)(f(A) - f(A_\alpha)) \xrightarrow{\tau_1} 0$ . Таким образом, операторная функция  $gf$  является  $t_{\tau_1}$ -непрерывной.  $\square$

**Лемма 4.11.** Пусть последовательность  $(f_n)$  непрерывных функций, действующих из  $\mathbb{R}$  (или  $\mathbb{C}$ ) в  $\mathbb{C}$ , равномерно на  $\mathbb{R}$  (соответственно на  $\mathbb{C}$ ) сходится к функции  $f$ . Если операторные функции  $f_n$  являются  $t_{\tau_1}$ -непрерывными на  $S(\mathcal{M}, \tau)^{\text{h}}$  (на  $S(\mathcal{M}, \tau)^{\text{por}}$ ), то операторная функция  $f$  также  $t_{\tau_1}$ -непрерывна на  $S(\mathcal{M}, \tau)^{\text{h}}$  (соответственно на  $S(\mathcal{M}, \tau)^{\text{por}}$ ).

**Доказательство.** Приведем доказательство для функций на  $\mathbb{C}$ .

Возьмем  $\varepsilon > 0$  и подберем  $n_0$  так, что  $\sup_{x \in \mathbb{C}} |f(x) - f_{n_0}(x)| \leq \varepsilon/3$ . Пусть  $A_\alpha \xrightarrow{\tau_1} A$  и  $Q \in \mathcal{M}_\tau^{\text{pr}}$ . Для  $s > 0$  в силу утверждений (iv)–(vi) и (ix) леммы 2.1 имеем

$$\begin{aligned} \mu((f(A) - f(A_\alpha))Q; s) &= \\ &= \mu\left((f(A) - f_{n_0}(A))Q + (f_{n_0}(A) - f_{n_0}(A_\alpha))Q + (f_{n_0}(A_\alpha) - f(A_\alpha))Q; s\right) \leq \\ &\leq \mu\left((f - f_{n_0})(A)Q; \frac{s}{3}\right) + \mu\left((f_{n_0}(A) - f_{n_0}(A_\alpha))Q; \frac{s}{3}\right) + \mu\left((f - f_{n_0})(A_\alpha)Q; \frac{s}{3}\right) \leq \\ &\leq \|(f - f_{n_0})(A)Q\| + \mu\left((f_{n_0}(A) - f_{n_0}(A_\alpha))Q; \frac{s}{3}\right) + \|(f - f_{n_0})(A_\alpha)Q\| \leq \\ &\leq \frac{2\varepsilon}{3} + \mu\left((f_{n_0}(A) - f_{n_0}(A_\alpha))Q; \frac{s}{3}\right). \end{aligned}$$

Так как операторная функция  $f_{n_0}$  является  $t_{\tau_1}$ -непрерывной, второе слагаемое в последнем выражении не превосходит  $\varepsilon/3$  при достаточно больших значениях индекса  $\alpha$ .  $\square$

**Предложение 4.12.** Пусть функция  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  непрерывна на  $\mathbb{R}$  и  $f(x) = O(x)$  при  $x \rightarrow \infty$ . Тогда операторная функция  $f$  является  $t_{\tau_1}$ -непрерывной на  $S(\mathcal{M}, \tau)^{\text{h}}$ .

**Доказательство.** Рассмотрим сначала случай, когда  $f(x) \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow \infty$ . Если  $p(x)$  и  $q(x)$  — действительные многочлены такие, что степень  $p(x)$  меньше степени  $q(x)$  и  $q(x)$  не имеет действительных корней, то рациональную функцию  $r(x) = p(x)/q(x)$  можно представить

как конечную линейную комбинацию функций вида  $(x - \lambda)^{-n}$  ( $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ). Воспользовавшись леммами 4.9 и 4.10, получаем  $t_{\tau_1}$ -непрерывность операторной функции  $r$ . По теореме Стоуна  $f(x)$  можно равномерно на  $\mathbb{R}$  аппроксимировать последовательностью рациональных функций  $r(x)$  рассмотренного выше вида, и из леммы 4.11 следует  $t_{\tau_1}$ -непрерывность операторной функции  $f$ .

Перейдем к общему случаю. Представим  $f$  в виде

$$f(x) = f(x) \frac{1}{1+x^2} + f(x) \frac{x^2}{1+x^2}.$$

Обозначим первое слагаемое через  $f_1(x)$ , а второе через  $f_2(x)$ . Тогда  $f_1(x) \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow \infty$ ; следовательно, операторная функция  $f_1$  является  $t_{\tau_1}$ -непрерывной на  $S(\mathcal{M}, \tau)^h$ . Последовательное применение леммы 4.10 к функциям  $xf_1(x)$  и  $x(xf_1(x))$  показывает  $t_{\tau_1}$ -непрерывность на  $S(\mathcal{M}, \tau)^h$  операторной функции  $f_2$ .  $\square$

**Лемма 4.13.** *Отображения  $A \mapsto \operatorname{Re} A$  и  $A \mapsto \operatorname{Im} A$  являются  $t_{\tau_1}$ -непрерывными на множестве  $S(\mathcal{M}, \tau)^{\text{nor}}$ .*

**Доказательство** следует из теоремы 4.8.  $\square$

**Лемма 4.14.** *Отображение  $A \mapsto I + |\operatorname{Re} A| + |\operatorname{Im} A|$  является  $t_{\tau_1}$ -непрерывным на множестве  $S(\mathcal{M}, \tau)^{\text{nor}}$ .*

**Доказательство.** Применяем лемму 4.13 и предложение 4.12.  $\square$

**Предложение 4.15.** *Пусть непрерывная функция  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  есть  $O(|z|)$  при  $z \rightarrow \infty$ . Тогда соответствующая операторная функция  $f$  будет  $t_{\tau_1}$ -непрерывной на  $S(\mathcal{M}, \tau)^{\text{nor}}$ .*

**Доказательство.** Пусть  $\mathcal{A}$  — алгебра функций из  $\mathbb{C}$  в  $\mathbb{R}$ , порожденная функциями вида  $f(\operatorname{Re} z)$  и  $g(\operatorname{Im} z)$ , где непрерывные функции  $f(x)$  и  $g(x)$  из  $\mathbb{R}$  в  $\mathbb{R}$  стремятся к нулю при  $x \rightarrow \infty$ . По теореме Стоуна алгебра  $\mathcal{A}$  равномерно плотна в алгебре  $\bar{\mathcal{A}}$  всех непрерывных функций из  $\mathbb{C}$  в  $\mathbb{R}$ , стремящихся к нулю на бесконечности. Из леммы 4.13, предложения 4.12 и леммы 4.10 следует, что операторные функции, соответствующие функциям из  $\mathcal{A}$ ,  $t_{\tau_1}$ -непрерывны, и из леммы 4.11 следует, что то же самое выполнено и для функций из  $\bar{\mathcal{A}}$ .

Пусть теперь непрерывная функция  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$  есть  $O(|z|)$  при  $z \rightarrow \infty$ . Запишем

$$f(z) = (1 + |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|)^2 \frac{f(z)}{(1 + |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|)^2}$$

и дважды применим леммы 4.14 и 4.10.

Пусть, наконец, непрерывная функция  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  есть  $O(|z|)$  при  $z \rightarrow \infty$ . Тогда функции  $\operatorname{Re} f(z)$  и  $\operatorname{Im} f(z)$  непрерывно действуют из  $\mathbb{C}$  в  $\mathbb{R}$  и суть  $O(|z|)$  при  $z \rightarrow \infty$ . Соответствующие операторные функции  $\operatorname{Re} f(A)$  и  $\operatorname{Im} f(A)$  будут  $t_{\tau_1}$ -непрерывными на  $S(\mathcal{M}, \tau)^{\text{nor}}$ , и, значит, операторная функция  $f(A) = \operatorname{Re} f(A) + i \operatorname{Im} f(A)$  будет  $t_{\tau_1}$ -непрерывной на  $S(\mathcal{M}, \tau)^{\text{nor}}$ .  $\square$

**Следствие 4.16.** *Отображение  $A \mapsto |A|$  является  $t_{\tau_1}$ -непрерывным на  $S(\mathcal{M}, \tau)^{\text{nor}}$ .*

Из [3, лемма 3.4] вытекает

**Лемма 4.17.** *Пусть  $\{A_\alpha\}$  и  $\{B_\alpha\}$  — две сети в  $\mathcal{M}^+$  такие, что  $\{A_\alpha\}$  равномерно ограничена,  $A_\alpha \xrightarrow{\tau_1} 0$  и  $B_\alpha \leq A_\alpha$  для всех  $\alpha$ . Тогда  $B_\alpha \xrightarrow{\tau_1} 0$ .*

Далее, для  $\Omega \subset \mathbb{C}$  положим  $S(\mathcal{M}, \tau)_\Omega^{\text{nor}} = \{A \in S(\mathcal{M}, \tau)^{\text{nor}} : \operatorname{Sp}(A) \subset \Omega\}$ , где  $\operatorname{Sp}(A)$  — спектр оператора  $A$ .

**Теорема 4.18.** *Пусть  $\Omega \subset \mathbb{C}$ ,  $A \in S(\mathcal{M}, \tau)_\Omega^{\text{nor}}$ . Пусть функция  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  такова, что ее ограничение на любое ограниченное замкнутое в  $\mathbb{C}$  подмножество множества  $\Omega$  измеримо по Борелю,  $\sup\{|f(z)|/(1+|z|) : z \in \Omega\} < \infty$  и  $f$  непрерывна в каждой точке из  $\operatorname{Sp}(A)$ . Тогда если сеть  $\{A_\alpha\}$  операторов из  $S(\mathcal{M}, \tau)_\Omega^{\text{nor}}$  сходится к  $A$  в топологии  $t_{\tau_1}$ , то  $f(A_\alpha) \xrightarrow{\tau_1} f(A)$ .*



**Доказательство.** Теорему достаточно доказать для вещественнозначной функции  $f$ , что мы и сделаем ниже в два этапа.

1. Предположим, что  $f$  ограничена на  $\Omega$ , пусть  $|f| \leq 1$ , и непрерывна во всех точках из  $\text{Sp}(A)$ . По теореме Титце–Урысона существует непрерывная функция  $g: \mathbb{C} \rightarrow [-1, 1]$ , совпадающая с  $f$  на  $\text{Sp}(A)$ . По предложению 4.15

$$g(A_\alpha) \xrightarrow{\tau_1} g(A) = f(A).$$

Согласно [20, лемма 2] существует ограниченная непрерывная функция  $h$  на  $\Omega$  такая, что  $h = 0$  на  $\text{Sp}(A)$  и  $|f - g| \leq h$  на  $\Omega$ .

1а. Теперь предположим дополнительно, что  $\Omega = \mathbb{C}$ . Тогда  $h(A_\alpha) \xrightarrow{\tau} h(A) = 0$  по предложению 4.15. Так как  $0 \leq (f - g + h)(A_\alpha) \leq 2h(A_\alpha)$ , то  $(f - g + h)(A_\alpha) \xrightarrow{\tau_1} 0$  по лемме 4.17. Следовательно,

$$f(A_\alpha) = (f - g + h)(A_\alpha) + g(A_\alpha) - h(A_\alpha) \xrightarrow{\tau_1} f(A).$$

1б. Если  $\Omega \neq \mathbb{C}$ , то согласно [20, лемма 1] построим ограниченную функцию  $k: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ , которая продолжает  $h$ , непрерывна во всех точках из  $\Omega$  и полунепрерывна сверху на  $\mathbb{C}$ , а следовательно, измерима по Борелю. Воспользовавшись случаем 1а, получаем

$$h(A_\alpha) = k(A_\alpha) \xrightarrow{\tau_1} k(A) = h(A) = 0,$$










и остается дословно повторить два последних предложения предыдущего абзаца.




2. В общем случае положим  $g(z) = f(z)/(1 + |z|)$ . Тогда  $g(A_\alpha) \xrightarrow{\tau_1} g(A)$  по предыдущему,  $I + |A_\alpha| \xrightarrow{\tau_1} I + |A|$  по предложению 4.15, откуда по теореме 3 из [1] получаем

$$f(A_\alpha) = g(A_\alpha)(I + |A_\alpha|) \xrightarrow{\tau_1} g(A)(I + |A|) = f(A). \quad \square$$

**Следствие 4.19.** Пусть  $\Omega \subset \mathbb{C}$  и функция  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  непрерывна на  $\Omega$  и такова, что  $\sup\{|f(z)|/(1 + |z|): z \in \Omega\} < \infty$ . Тогда соответствующая операторная функция непрерывна на  $S(\mathcal{M}, \tau)_\Omega^{\text{nor}}$  в топологии  $t_{\tau_1}$ .

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bikchentaev A.M.* The continuity of multiplication for two topologies associated with a semifinite trace on von Neumann algebra // Lobachevskii J. Math. 2004. V. 14. P. 17–24.
2. *Бикчентаев А.М.* О минимальности топологии сходимости по мере на конечных алгебрах фон Неймана // Мат. заметки. 2004. Т. 75, № 3. С. 342–349. 
3. *Бикчентаев А.М.* Локальная сходимость по мере на полуконечных алгебрах фон Неймана // Тр. МИАН. 2006. Т. 255. С. 41–54. 
4. *Бикчентаев А.М.* Локальная сходимость по мере на полуконечных алгебрах фон Неймана. II // Мат. заметки. 2007. Т. 82, № 5. С. 783–786. 
5. *Bikchentaev A., Sukochev F.* When weak and local measure convergence implies norm convergence // J. Math. Anal. Appl. 2019. V. 473, N 2. P. 1414–1431. 
6. *Бикчентаев А.М.* Сходимость по мере и  $\tau$ -компактность  $\tau$ -измеримых операторов, ассоциированных с полуконечной алгеброй фон Неймана // Изв. вузов. Математика. 2020. № 5. С. 89–93. 
7. *Бикчентаев А.М.* Топологии локальной сходимости по мере в алгебрах измеримых операторов // Сиб. мат. журн. 2023. Т. 64, № 1. С. 17–27. 
8. *Ciach L.J.* Some remarks on the convergence in measure and on a dominated sequence of operators measurable with respect to a semifinite von Neumann algebra // Colloq. math. 1988. V. 55, N 1. P. 109–121. 
9. *Davies E.B.* A generalisation of Kaplansky’s theorem // J. London Math. Soc. Ser. 2. 1972. V. 4, N 3. P. 435–436. 
10. *Dodds P.G., Dodds T.K.-Y., de Pagter B.* Noncommutative Köthe duality // Trans. Am. Math. Soc. 1993. V. 339, N 2. P. 717–750. 

11. *Dodds P.G., Dodds T.K., Sukochev F.A., Tikhonov O.Ye.* A non-commutative Yosida–Hewitt theorem and convex sets of measurable operators closed locally in measure // *Positivity*. 2005. V. 9, N 3. P. 457–484. 
12. *Fack T., Kosaki H.* Generalized  $s$ -numbers of  $\tau$ -measurable operators // *Рис. J. Math.* 1986. V. 123, N 2. P. 269–300. 
13. *Kadison R.V.* Strong continuity of operator functions // *Рис. J. Math.* 1968. V. 26, N 1. P. 121–129. 
14. *Муратов М.А., Чилин В.И.* Топологические алгебры измеримых и локально измеримых операторов // *Совр. математика. Фунд. напр.* 2016. Т. 61. С. 115–163. [Math-Net](#)
15. *Скворцова Г.Ш.* О слабой секвенциальной полноте факторпространств пространства интегрируемых операторов // *Изв. вузов. Математика*. 2002. №9. С. 71–74. [Math-Net](#)
16. *Скворцова Г.Ш., Тихонов О.Е.* Выпуклые множества в некоммутативных  $L_1$ -пространствах, замкнутые в топологии локальной сходимости по мере // *Изв. вузов. Математика*. 1998. №8. С. 48–55. [Math-Net](#)
17. *Takesaki M.* Theory of operator algebras. I. Berlin: Springer, 2002. (Encycl. Math. Sci.; V. 124. Operator Algebras and Non-commutative Geometry; V. 5).
18. *Takesaki M.* Theory of operator algebras. II. Berlin: Springer, 2003. (Encycl. Math. Sci.; V. 125. Operator Algebras and Non-commutative Geometry; V. 6).
19. *Тихонов О.Е.* Непрерывность операторных функций в топологиях, связанных со следом на алгебре Неймана // *Изв. вузов. Математика*. 1987. №1. С. 77–79. [Math-Net](#)
20. *Тихонов О.Е.* О сходимости функций нормальных операторов в сильной операторной топологии // *Функц. анализ и его прил.* 2007. Т. 41, №3. С. 93–95. 