Том 2, Выпуск 1
Стр. 16–30 (2024)

УДК 512, 517.987
MSC 06E75, 28A60, 81P10

# О классах симметричных и асимметричных логик множеств

А.М. Бикчентаев, М. Мохамед Али, Х. Фауаз

**Аннотация.** Уточнена аксиоматика асимметричных логик множеств. Для логик $X(km, k)$ – семейств всех подмножеств $km$-элементного множества $X$, число элементов которых кратно $k$, – полностью описаны случаи, когда $X(km, k)$ a) симметрична или b) асимметрична. Для бесконечного множества $\Omega$ и натурального числа $n \geq 2$ построены логики множеств $\mathcal{E}_{\Omega}^{n}$ и полностью описаны случаи, когда эти логики асимметричны. Для асимметричной логики $\mathcal{E}$ определено, когда и множество $A \in \mathcal{E}$, и его дополнение $A^c$ одновременно являются атомами логики $\mathcal{E}$. Пусть симметричная логика $\mathcal{E}$ подмножеств конечного множества $\Omega$ не является булевой алгеброй, пусть $\mathcal{A}$ – алгебра подмножеств $\Omega$ и $\mathcal{E} \subset \mathcal{A}$. Тогда существует мера на $\mathcal{E}$, которая не продолжается до меры на $\mathcal{A}$.

**Ключевые слова:** квантовая логика, логика множеств, атом, симметричная логика, асимметричная логика, заряд, мера.

**DOI:** 10.26907/2949-3919.2024.1.16-30

## Введение

Пусть $\Omega$ – непустое множество. Обозначим через $2^{\Omega}$ множество всех подмножеств множества $\Omega$. Семейство $\mathcal{E} \subseteq 2^{\Omega}$ называется *логикой множеств* на $\Omega$ (см. [1–3]), если выполнены условия:

(i) $\Omega \in \mathcal{E}$;

(ii) $A \in \mathcal{E} \Rightarrow A^c := \Omega \setminus A \in \mathcal{E}$;

(iii) $A \cup B \in \mathcal{E}$ для всех $A, B \in \mathcal{E}$ с $A \cap B = \emptyset$.

Логика множеств $\mathcal{E}$ называется *$\sigma$-классом*, если $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{E}$, $A_n \cap A_m = \emptyset$ $(n \neq m)$ $\Rightarrow \cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{E}$. *Зарядом* на логике множеств $\mathcal{E}$ называется отображение $\nu : \mathcal{E} \to \mathbb{R}$ такое, что $A, B \in \mathcal{E}$, $A \cap B = \emptyset \Rightarrow \nu(A \cup B) = \nu(A) + \nu(B)$. *Мерой* на $\mathcal{E}$ называется заряд $\nu$ такой, что $\nu(A) \geq 0$ для всех $A \in \mathcal{E}$. Если $\nu(\Omega) = 1$, то мера $\nu$ называется *состоянием* (или *вероятностной мерой*).

Благодарности. Работа выполнена в рамках реализации программы развития Научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа (соглашение № 075-02-2023-944).



Поступила: 19.01.2024. Принята: 27.02.2024. Опубликована: 11.04.2024.

Изучаемые нами $\sigma$-классы, а также заряды и меры на них относятся к “обобщенной теории меры” [2, 3], которую можно рассматривать как самую близкую к классической (здесь “классическая” означает на “$\sigma$-алгебрах множеств”) версию теории меры на квантовых логиках [1, 2]. О квантово-логическом подходе в аксиоматике физических систем см. [4, гл. VI, §5]. Если $\mathcal{E}$ – логика множеств, то множество $\mathcal{S}$ всех состояний на $\mathcal{E}$ полно и пара $(\mathcal{E}, \mathcal{S})$ удовлетворяет всем требованиям к модели физической системы [4, гл. VI, §6].

Мы продолжаем исследования, проведенные в [5–14], уделяя особое внимание классам a) симметричных и b) асимметричных логик множеств. В следствии 8 уточнена аксиоматика асимметричных логик. Для логик $X(km, k)$ – семейств всех подмножеств $km$-элементного множества $X$, число элементов которых кратно $k$, – полностью описаны случаи, когда $X(km, k)$ a) симметрична (предложение 17) или b) асимметрична (предложение 20). Для бесконечного множества $\Omega$ и натурального числа $n \geq 2$ построены логики множеств $\mathcal{E}^n_\Omega$ (лемма 21) и полностью описаны случаи, когда эти логики асимметричны (теорема 22). Для асимметричной логики $\mathcal{E}$ определено, когда и множество $A \in \mathcal{E}$, и $A^c$ одновременно являются атомами логики $\mathcal{E}$ (теорема 23). Также исследованы заряды и меры на логиках множеств.

## 1. Обозначения и определения

Положим $\Omega_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ для любого числа $n \in \mathbb{N}$. Хорошо известна

**Лемма 1.** *Если $\mathcal{E}$ – логика множеств, то выполнено условие*

(iv) $B \setminus A \in \mathcal{E}$ *для всех* $A, B \in \mathcal{E}$ *с* $A \subset B$.

Действительно, из $B^c \subset A^c$ имеем $A \cap B^c = \emptyset$. Поэтому $A \cup B^c \in \mathcal{E}$ в силу (iii) и

$$(A \cup B^c)^c = A^c \cap B = B \setminus A \in \mathcal{E}.$$

Семейство $\mathcal{E} \subset 2^\Omega$ является логикой множеств тогда и только тогда, когда оно удовлетворяет условиям (i) и (iv). Проверим достаточность (т. е. выполнение (ii) и (iii)).

(ii) Если $A \in \mathcal{E}$, то $A \subset \Omega \in \mathcal{E}$, поэтому $\Omega \setminus A = A^c \in \mathcal{E}$.

(iii) Если $A, B \in \mathcal{E}$ и $A \cap B = \emptyset$, то $A \subset B^c$ и $B^c \setminus A = B^c \cap A^c \in \mathcal{E}$, поэтому $A \cup B = (B^c \cap A^c)^c \in \mathcal{E}$.

**Пример 2.** Пусть $\mathcal{E} \subset 2^\Omega$ – логика множеств и $T \in \mathcal{E} \setminus \{\emptyset\}$. Тогда семейство

$$\mathcal{E}_T = \{A \in \mathcal{E} \mid A \subset T\}$$

является логикой множеств с наибольшим элементом $T$. Поскольку $T \in \mathcal{E}_T$, проверим (iv). Если $A, B \in \mathcal{E}_T$, $A \subset B$, то $A, B \in \mathcal{E}$ и $A \subset B \subset T$. Поэтому $B \setminus A \subset T$ и в силу леммы 1 $B \setminus A \in \mathcal{E}$, значит, $B \setminus A \in \mathcal{E}_T$.

*Атомом* в логике множеств $\mathcal{E}$ называется минимальный по включению элемент множества $\mathcal{E} \setminus \{\emptyset\}$. Множество всех атомов в $\mathcal{E}$ обозначим через $\alpha(\mathcal{E})$. Легко видеть, что $\mathcal{E}$

есть множество всех всевозможных сумм элементов множества $\alpha(\mathcal{E})$. (Суммой называем объединение семейства множеств, любые два из которых имеют пустое пересечение.) Для $A \in \mathcal{E}$ положим $\tilde{\mathcal{E}}(A) = \mathcal{E} \setminus \{\emptyset, \Omega, A, A^c\}$.

Состояние $m_x$ на логике $\mathcal{E}$ подмножеств $\Omega$ называется *сосредоточенным в точке* $x \in \Omega$, если для всех $A \in \mathcal{E}$

$$m_x(A) = \begin{cases} 1, & \text{если } \ x \in A; \\ 0, & \text{если } \ x \notin A. \end{cases}$$

Для $A, B \subset \Omega$ определим их симметрическую разность

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cap B^c) \cup (B \cap A^c) = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

Тогда $A^c \triangle B = A \triangle B^c = (A \triangle B)^c$ и $A^c \triangle B^c = A \triangle B$.

## 2. Симметричные и асимметричные логики множеств

**Предложение 3.** *Пусть $\mathcal{E}$ – логика множеств и $A, B \in \mathcal{E}$. Тогда*

$$A \cap B \in \mathcal{E} \Longleftrightarrow A \cup B \in \mathcal{E}.$$

*Доказательство.* "$\Leftarrow$". В силу леммы 1 имеем $(A \cup B) \setminus A = B \setminus A \in \mathcal{E}$. Следовательно, $B \setminus (B \setminus A) = A \cap B \in \mathcal{E}$ в силу леммы 1.

"$\Rightarrow$". Поскольку $A^c \cup B^c = (A \cap B)^c \in \mathcal{E}$, в силу вышедоказанного $A^c \cap B^c \in \mathcal{E}$ и $A \cup B = (A^c \cap B^c)^c \in \mathcal{E}$. □

**Следствие 4.** *Пусть $\mathcal{E}$ – логика множеств и $A, B \in \mathcal{E}$. Если $A \cap B \in \mathcal{E}$, то $A \triangle B \in \mathcal{E}$.*

*Доказательство.* Так как $A \cup B \in \mathcal{E}$, то $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) \in \mathcal{E}$ в силу леммы 1. □

**Следствие 5.** *Пусть $\mathcal{E}$ – логика множеств в $\Omega$ и $B \subset \Omega$. Имеем*

$$B \in \mathcal{E} \Longleftrightarrow \exists A \in \mathcal{E} \ \ (A \cap B, A \cup B \in \mathcal{E}).$$

*Доказательство.* "$\Rightarrow$". Можно выбрать $A \in \{B, B^c\}$.

"$\Leftarrow$". Для $C = A \cap B \in \mathcal{E}$ имеем $A \cap C = C \in \mathcal{E}$ и в силу следствия 4 получаем $A \triangle C = A \setminus B \in \mathcal{E}$. Теперь $B = (A \cup B) \setminus (A \setminus B) \in \mathcal{E}$ в силу леммы 1. □

**Определение 6.** Симметричной логикой называется логика множеств $\mathcal{E}$, удовлетворяющая условию

(v) $A \triangle B \in \mathcal{E}$ для всех $A, B \in \mathcal{E}$.

Семейство $\mathcal{E} \subset 2^{\Omega}$ является симметричной логикой множеств тогда и только тогда, когда оно удовлетворяет условиям (i) и (v) [9, предложение 1].

**Определение 7** ([11])**.** Асимметричной логикой называется логика множеств $\mathcal{E}$, удовлетворяющая условию

(vi) $A \cap B \in \mathcal{E} \Longleftrightarrow A \triangle B \in \mathcal{E}$ для всех $A, B \in \mathcal{E}$.

Из следствия 4 вытекает

**Следствие 8.** *Для логики множеств $\mathcal{E}$ равносильны условия:*

(vii) *если $A, B \in \mathcal{E}$ и $A \triangle B \in \mathcal{E}$, то $A \cap B \in \mathcal{E}$;*

(viii) *$\mathcal{E}$ – асимметричная логика.*

Логика множеств $\mathcal{E}$ является алгеброй множеств тогда и только тогда, когда $\mathcal{E}$ симметричная и асимметричная [11, предложение 4.5].

**Лемма 9.** *Пусть $\mathcal{E}$ – симметричная логика и отображение $\nu : \mathcal{E} \to \mathbb{R}$ удовлетворяет условию*

(ix) $\nu(A \triangle B) \le \nu(A) + \nu(B)$ *для всех $A, B \in \mathcal{E}$.*

*Тогда $\nu(A) \ge 0$ для всех $A \in \mathcal{E}$.*

*Доказательство.* Для $A = B = \emptyset$ из (ix) получаем $\nu(\emptyset) = \nu(\emptyset \triangle \emptyset) \le 2\nu(\emptyset)$, поэтому $\nu(\emptyset) \ge 0$. Теперь для каждого $A \in \mathcal{E}$ в силу (ix) имеем $0 \le \nu(\emptyset) = \nu(A \triangle A) \le 2\nu(A)$. □

Мера $\nu$ на симметричной логике $\mathcal{E}$ называется $\triangle$-*субаддитивной*, если она удовлетворяет условию (ix). Из леммы 9 следует, что всякий заряд $\nu$ на симметричной логике $\mathcal{E}$, удовлетворяющий условию (ix), является $\triangle$-субаддитивной мерой. Следующее утверждение известно (см. [9, лемма 1]); здесь приводится его новое доказательство.

**Предложение 10.** *Для меры $\nu$ на симметричной логике $\mathcal{E}$ следующие условия эквивалентны*:

(x) *$\nu$ $\triangle$-субаддитивна*;

(xi) $\nu(A \triangle B) \le \nu(A \triangle C) + \nu(C \triangle B)$ *для всех $A, B, C \in \mathcal{E}$.*

*Доказательство.* (x)⇒(xi). В силу ассоциативности и коммутативности операции $\triangle$ симметрической разности имеем

$$\nu(A \triangle B) = \nu(A \triangle B \triangle (C \triangle C)) = \nu((A \triangle C) \triangle (B \triangle C)) \le \nu(A \triangle C) + \nu(C \triangle B)$$

для всех множеств $A, B, C \in \mathcal{E}$.

(xi)⇒(x). Предположим, что условие (xi) выполнено, но (x) не выполнено. Тогда найдутся множества $A, B \in \mathcal{E}$ такие, что $\nu(A \triangle B) > \nu(A) + \nu(B)$. Значит,

$$\nu(\Omega) - \nu(A \triangle B) < \nu(\Omega) - \nu(A) - \nu(B).$$

Поскольку $A^c \triangle B = (A \triangle B)^c$ и $\Omega \setminus A = A^c$, имеем

$$\begin{aligned} \nu(A^c \triangle B) + \nu(B) < \nu(A^c) &= \nu(A^c \triangle (C \triangle C)) = \nu((A^c \triangle C) \triangle C) \\ &\le \nu((A^c \triangle C) \triangle B) + \nu(B \triangle C) \\ &= \{\text{при } \ C = A^c\} = \nu(B) + \nu(B \triangle A^c). \end{aligned}$$

Получили противоречие. Предложение доказано. □

**Следствие 11.** *Для меры $\nu$ на симметричной логике $\mathcal{E}$ отображение*

$$(A, B) \mapsto d(A, B) := \nu(A \triangle B) \ \ (\mathcal{E} \times \mathcal{E} \to \mathbb{R}^+)$$

*задает псевдометрику $d$ на $\mathcal{E}$ тогда и только тогда, когда $\nu$ является $\triangle$-субаддитивной.*

**Пример 12.** Если в условиях примера 2 логика множеств $\mathcal{E}$ является симметричной (соответственно асимметричной), то и логика $\mathcal{E}_T$ является симметричной (соответственно асимметричной).

**Пример 13** ([11, пример 4.2])**.** Пусть $\Omega = \{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ – последовательность комплексных чисел и $\Omega \in \ell_1$, т. е. ряд $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ сходится абсолютно. Пусть $\Lambda \in \{\mathbb{Q}, \mathbb{R}\}$ и $z = \sum_{n=1}^{\infty} z_n$. Напомним, что каждая перестановка последовательности $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ сохраняет абсолютную сходимость и сумму $z$. Семейство

$$\mathcal{E}_{\Lambda,\Omega} = \left\{ I \subset \Omega \mid \sum_{x \in I} x = \lambda z \ \ \text{для некоторого} \ \ \lambda \in \Lambda \right\}$$

является асимметричной логикой. (Сумма пустой последовательности по определению равна нулю, поэтому $\emptyset \in \mathcal{E}_{\Lambda,\Omega}$.) Более того, $\mathcal{E}_{\mathbb{R},\Omega}$ – $\sigma$-класс и $\mathcal{E}_{\mathbb{Q},\Omega}$ – его подлогика.

**Пример 14** ([11, пример 4.3])**.** Пусть $\mathcal{A}$ – лебегова $\sigma$-алгебра на $\Omega = [0, 1]$, $\mu$ – линейная мера Лебега с $\mu(\Omega) = 1$. Тогда $\mathcal{E}_{\mathbb{Q},\mu} = \{A \in \mathcal{A} \mid \mu(A) \in \mathbb{Q}\}$ является асимметричной логикой.

**Пример 15** ([13, пример 4.4])**.** Пусть $\Omega$ – бесконечное множество. Положим

$$\mathcal{B} = \{A \subseteq \Omega \mid \operatorname{card}(A) \ \ \text{конечно или} \ \ \operatorname{card}(\Omega \setminus A) \ \ \text{конечно}\},$$

$$\mathcal{E}_{\Omega}^{\text{even}} = \{A \subseteq \Omega \mid \operatorname{card}(A) \ \ \text{четно или} \ \ \operatorname{card}(\Omega \setminus A) \ \ \text{четно}\} \subset \mathcal{B}.$$

Тогда $\mathcal{B}$ – алгебра подмножеств $\Omega$ и $\mathcal{E}_{\Omega}^{\text{even}}$ – симметричная логика.

Напомним, что на $\mathcal{E}_{\Omega}^{\text{even}}$ каждое состояние $\triangle$-субаддитивно [13, предложение 4.4].

**Определение 16** ([15])**.** Пусть числа $k, m \in \mathbb{N}$ и множество $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_{km}\}$. Обозначим через $X(km, k)$ семейство всех подмножеств $X$, число элементов которых кратно $k$:

$$X(km, k) = \{A \subset X \mid \operatorname{card}(A) = ik, i = 0, 1, 2, \ldots, m\}.$$

Тогда $\mathcal{E} = X(km, k)$ – логика множеств с $\alpha(\mathcal{E}) = \{A \subset X \mid \operatorname{card}(A) = k\}$.

Каждая функция $f : X \to \mathbb{R}$ определяет заряд $\nu_f$ на логике $X(km, k)$ по формуле

$$\nu_f(A) = \sum_{x \in A} f(x), \ \ A \in X(km, k).$$

Такие заряды называются *регулярными*. В [15] показано, что любая мера на логике множеств $X(km,k)$ имеет единственное продолжение до заряда на алгебре $2^X$. Доказательство этого факта опирается на интересную комбинаторную лемму, утверждающую, что в качестве образующих логики $X(km,k)$ можно выбрать $km-1$ некоторых $k$-элементных множеств. В [16] приведено прямое доказательство этого факта; также описаны крайние точки пространства состояний логики $X(km,k)$ и автоморфизмы этой логики. Показано, что для любого заряда $\nu$ на логике множеств $X(km,k)$ при $m \geq 3$ существует единственная функция $f : X \to \mathbb{R}$ такая, что $\nu = \nu_f$.

**Предложение 17.** *Логика множеств* $X(km,k)$ *на* $X$ *является симметричной логикой тогда и только тогда, когда* a) $m=1$ *и* $k \in \mathbb{N}$ *любое или* b) $k \in \{1,2\}$ *и* $m \in \mathbb{N}$ *любое.*

*Доказательство.* При условии a) имеем $X = \{x_1,\ldots,x_k\}$ и логика множеств $X(km,k) = \{\emptyset, X\}$ симметрична. При условии b) рассмотрим отдельно случаи $k=1$ и $k=2$.

*Случай* I. Пусть $k=1$ и $m \in \mathbb{N}$ – произвольное число. Тогда $X = \{x_1,\ldots,x_m\}$ и логика $X(km,k) = 2^X$, очевидно, симметрична.

*Случай* II. Пусть $k=2$ и $m \in \mathbb{N}$ – произвольное число (в силу уже разобранного случая a), считаем $m \geq 2$). Тогда $X = \{x_1,x_2,\ldots,x_{2m}\}$ и логика $X(km,k)$ изоморфна хорошо известной симметричной логике $\mathcal{E} = \{A \subset \Omega_{2m} \mid \mathrm{card}(A) \text{ четно}\}$.

Теперь покажем, что логика множеств $X(km,k)$ не является симметричной в случае $k \geq 3, m > 1$.

Так как $m \geq 2$, то $\mathrm{card}(X) \geq 2k$ и в логике $X(km,k)$ существуют два непересекающиеся атома $A_1 = \{a_1,a_2,a_3,\ldots,a_k\}$ и $B_1 = \{b_1,b_2,b_3,\ldots,b_k\}$. Положим $A = \{x,a_2,a_3,\ldots,a_k\}$ и $B = \{x,b_2,b_3,\ldots,b_k\}$. Тогда

$$A \triangle B = (A \backslash (A \cap B)) \cup (B \backslash (A \cap B)) = \{a_2,a_3,\ldots,a_k,b_2,b_3,\ldots,b_k\}$$

и $\mathrm{card}(A \triangle B) = 2k-2$. Так как $k \geq 3$, то $k < \mathrm{card}(A \triangle B) = 2k-2 < 2k$. Это значит, что $k$ не является делителем натурального числа $2k-2$. Следовательно, $A \triangle B \notin X(km,k)$. □

**Следствие 18.** *На симметричной логике* $X(2m,2)$ $(m \geq 2)$ *существует не* $\triangle$*-субаддитивное состояние.*

*Доказательство.* Пусть $\mathcal{E}$ – конечная симметричная логика со свойством:

"каждое состояние на $\mathcal{E}$, являющееся аффинной комбинацией сосредоточенных состояний, $\triangle$-субаддитивно".

Тогда $\mathcal{E}$ – булева алгебра [11, теорема 4.17]. В частности, если на конечной симметричной логике $\mathcal{E}$ каждое состояние $\triangle$-субаддитивно, то $\mathcal{E}$ – булева алгебра [13, теорема 4.3]. Но логика $X(2m,2)$ $(m \geq 2)$ не является булевой алгеброй. □

Если симметричная логика не является булевой алгеброй, то она содержит подлогику, изоморфную $X(4,2)$ [11, следствие 4.6]. Из леммы 1 следует, что если $\nu$ – мера на асимметричной логике $\mathcal{E}$, то $\nu(A \triangle B) \leq \nu(A) + \nu(B)$ для всех $A, B \in \mathcal{E}$ с $A \triangle B \in \mathcal{E}$.

**Следствие 19.** *Пусть симметричная логика $\mathcal{E}$ подмножеств конечного множества $\Omega$ не является булевой алгеброй, пусть $\mathcal{A}$ – алгебра подмножеств $\Omega$ и $\mathcal{E} \subset \mathcal{A}$. Тогда существует мера на $\mathcal{E}$, которая не продолжается до меры на $\mathcal{A}$.*

*Доказательство.* Всякая мера на булевой алгебре множеств $\triangle$-субаддитивна. □

**Предложение 20.** *Логика множеств $X(km, k)$ на $X$ является асимметричной тогда и только тогда, когда* a) $m = 1$ *и* $k \in \mathbb{N}$ *любое или* b) $k$ *нечетное и* $m \in \mathbb{N}$ *любое.*

*Доказательство.* При условии a) имеем $X = \{x_1, \ldots, x_k\}$ и логика множеств $X(km, k) = \{\emptyset, X\}$, очевидно, асимметрична.

Рассмотрим условие b).

*Случай* I. Если $k$ нечетно, то покажем, что логика множеств $X(km, k)$ асимметрична. В силу следствия 8 достаточно доказать, что для произвольных $A, B \in X(km, k)$ таких, что $A\triangle B \in X(km, k)$, пересечение $A \cap B$ также лежит в $X(km, k)$. Так как $A, B, A\triangle B \in X(km, k)$, то $\mathrm{card}(A) = s_1 k$, $\mathrm{card}(B) = s_2 k$, $\mathrm{card}(A\triangle B) = s_3 k$, где $s_i \in \mathbb{N}, 0 \le s_i \le m$, $i = 1, 2, 3$. Имеем

$$\begin{aligned}\mathrm{card}(A\triangle B) &= \mathrm{card}[(A\backslash(A\cap B)) \cup (B\backslash(A\cap B))] = \mathrm{card}(A\backslash(A\cap B)) + \mathrm{card}(B\backslash(A\cap B))\\ &= \mathrm{card}(A) - \mathrm{card}(A\cap B) + \mathrm{card}(B) - \mathrm{card}(A\cap B)\\ &= \mathrm{card}(A) + \mathrm{card}(B) - 2\mathrm{card}(A\cap B),\end{aligned}$$

значит, $s_3 k = s_1 k + s_2 - 2\mathrm{card}(A\cap B)$ и $\mathrm{card}(A\cap B) = \dfrac{(s_1+s_2-s_3)k}{2} = \dfrac{s_4 k}{2}$, где $s_4 \in \mathbb{N}$, $s_4 = s_1 + s_2 - s_3$. Пусть $\mathrm{card}(A\cap B) = n$, где $n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$. Если $n = 0$, то $A\cap B = \emptyset \in X(km, k)$. Если $n > 0$, то $\mathrm{card}(A\cap B) = \dfrac{s_4 k}{2} = n$, поэтому $s_4 k = 2n$. Это значит, что $s_4 k$ – четное число. Так как число $k$ нечетно, то $s_4$ четно. Тогда $s_4 = 2j$ и $\dfrac{s_4}{2} = j$, где $j \in \mathbb{N}$. Следовательно, $\mathrm{card}(A\cap B) = \dfrac{s_4}{2}k = jk$, $A\cap B \in X(km, k)$ и логика $X(km, k)$ асимметрична.

*Случай* II. Если $k$ четно, то $k = 2t$ с $t \in \mathbb{N}$. Покажем, что логика множеств $X(km, k)$ не является асимметричной (в силу уже разобранного случая a) считаем $m \ge 2$). Так как $m \ge 2$, то $\mathrm{card}(X) \ge 2k$ и в логике $X(km, k)$ существуют два непересекающиеся атома $A_1 = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{2t}\}$ и $B_1 = \{b_1, b_2, b_3, \ldots, b_{2t}\}$. Положим

$$A = \{x_1, \ldots, x_t, a_{t+1}, \ldots, a_{2t}\}, \quad B = \{x_1, \ldots, x_t, b_{t+1}, \ldots, b_{2t}\}, \quad \text{тогда}$$

$$A\triangle B = (A\backslash(A\cap B)) \cup (B\backslash(A\cap B)) = \{a_{t+1}, \ldots, a_{2t}, b_{t+1}, \ldots, b_{2t}\},$$

$\mathrm{card}(A\triangle B) = 2t = k$ и $A\triangle B \in X(km, k)$. Но $A\cap B = \{x_1, \ldots, x_t\}$ и $\mathrm{card}(A\cap B) = t = \dfrac{1}{2}k$. Следовательно, $A\cap B \notin X(km, k)$ и логика $X(km, k)$ не является асимметричной. □

**Лемма 21.** *Пусть $\Omega$ – бесконечное множество и натуральное число $n \ge 2$. Тогда семейство*

$$\mathcal{E}_\Omega^n = \{A \subset \Omega : \mathrm{card}(A) = ns \ \textit{или}\ \mathrm{card}(A^c) = ns,\ \textit{где}\ s \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$$

*является логикой множеств.*

*Доказательство.* Очевидно, $\Omega \in \mathcal{E}_\Omega^n$ и $A \in \mathcal{E}_\Omega^n \iff A^c \in \mathcal{E}_\Omega^n$, т. е. выполнены условия (i) и (ii) определения логики множеств. Покажем (iv): для $A, B \in \mathcal{E}_\Omega^n$ с $A \subset B$ проверим, что $B \setminus A \in \mathcal{E}_\Omega^n$. Возможны три случая: a) $\mathrm{card}(A) = ns_1, \mathrm{card}(B) = ns_2$ с $s_1, s_2 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$; тогда $s_1 \le s_2$ и $\mathrm{card}(B \setminus A) = ns_2 - ns_1 = n(s_2 - s_1)$, поэтому $B \setminus A \in \mathcal{E}_\Omega^n$; b) $\mathrm{card}(A) = ns_1$, $\mathrm{card}(B) = +\infty$ с $s_1 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$; c) $\mathrm{card}(A) = \mathrm{card}(B) = +\infty$.

При b) имеем $\mathrm{card}(B^c) = ns_2$ и $(B \setminus A)^c = (B \cap A^c)^c = B^c \cup A$, причем $B^c \cap A = \emptyset$. Поэтому $\mathrm{card}((B \setminus A)^c) = \mathrm{card}(B^c) + \mathrm{card}(A) = n(s_1 + s_2)$ и $B \setminus A \in \mathcal{E}_\Omega^n$.

При c) имеем $\mathrm{card}(A^c) = ns_1$, $\mathrm{card}(B^c) = ns_2$ и $s_1 \ge s_2$ в силу включения $B^c \subset A^c$. Так как

$$B \setminus A = B \triangle A = B^c \triangle A^c = A^c \setminus B^c,$$

то $\mathrm{card}(B \setminus A) = \mathrm{card}(A^c \setminus B^c) = n(s_1 - s_2)$ и $B \setminus A \in \mathcal{E}_\Omega^n$. □

Очевидно, что логика $\mathcal{E}_\Omega^n$ лежит в алгебре $\mathcal{B}$ подмножеств $\Omega$ из примера 15.

**Теорема 22.** *Пусть $\Omega$ – бесконечное множество и натуральное число $n \ge 3$ нечетно. Тогда $\mathcal{E}_\Omega^n$ является асимметричной логикой.*

*Доказательство.* Пусть $A, B, A \triangle B \in \mathcal{E}_\Omega^n$. В силу следствия 8 нужно проверить, что множество $A \cap B$ лежит в $\mathcal{E}_\Omega^n$. Считаем, что $A \cap B \ne \emptyset$ и $A \ne B$. Возможны три случая:

a) $\mathrm{card}(A) = ns_1, \mathrm{card}(B) = ns_2$ с $s_1, s_2 \in \mathbb{N}$;

b) $\mathrm{card}(A) = ns_1, \mathrm{card}(B) = +\infty$ с $s_1 \in \mathbb{N}$;

c) $\mathrm{card}(A) = \mathrm{card}(B) = +\infty$.

При a) имеем $\mathrm{card}(A \triangle B) < +\infty$ и $\mathrm{card}(A \cap B) < +\infty$. Так как $A \triangle B \in \mathcal{E}_\Omega^n$, то существует $s_3 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ такое, что $\mathrm{card}(A \triangle B) = ns_3$. Тогда $\mathrm{card} A + \mathrm{card} B - 2\mathrm{card}(A \cap B) = ns_3$, и поэтому

$$\mathrm{card}(A \cap B) = \frac{\mathrm{card}(A) + \mathrm{card}(B) - ns_3}{2} = \frac{n(s_1 + s_2 - s_3)}{2} = \frac{ns^*}{2} \in \mathbb{N}.$$

Поскольку НОД$(2, n) = 1$, число $s^*$ делится на 2. Положим $\dfrac{s^*}{2} = s^{**}$, тогда $\mathrm{card}(A \cap B) = ns^{**}$, и $A \cap B \in \mathcal{E}_\Omega^n$.

При b) имеем $\mathrm{card}(A) = ns_1$, $\mathrm{card}(B^c) = ns_2$, $\mathrm{card}((A \triangle B)^c) = \mathrm{card}(A \triangle B^c) < +\infty$ и $\mathrm{card}(A \cap B) < +\infty$. Пусть $\mathrm{card}((A \triangle B)^c) = \mathrm{card}(A \triangle B^c) = ns_3$, тогда

$$\mathrm{card}(A) + \mathrm{card}(B^c) - 2\mathrm{card}(A \cap B^c) = ns_3, \quad \mathrm{card}(A \cap B^c) = \frac{n(s_1 + s_2 - s_3)}{2} = \frac{ns^*}{2} = ns^{**},$$

поскольку НОД$(2, n) = 1$. Отсюда получаем

$$\mathrm{card}(A \cap B) = \mathrm{card}(A \setminus (A \cap B^c)) = \mathrm{card}(A) - \mathrm{card}(A \cap B^c) = 3s_1 - 3s^{**} = 3(s_1 - s^{**}) = 3s_4,$$

и $A\cap B\in\mathcal{E}^n_\Omega$.

При c) имеем $\mathrm{card}(A^c)=ns_1$, $\mathrm{card}(B^c)=ns_2$. Тогда

$$\mathrm{card}((A\cap B)^c)=\mathrm{card}(A^c\cup B^c)\leqslant\mathrm{card}(A^c)+\mathrm{card}(B^c)<+\infty.$$

Так как $\mathrm{card}(A\triangle B)=\mathrm{card}(A^c\triangle B^c)=ns_3$, где $s_3\in\mathbb{N}$, то

$$\mathrm{card}(A^c)+\mathrm{card}(B^c)-2\mathrm{card}(A^c\cap B^c)=ns_3,\ \ \mathrm{card}(A^c\cap B^c)=\frac{n(s_1+s_2-s_3)}{2}=\frac{ns^*}{2}=ns^{**},$$

поскольку НОД$(2,n)=1$. Тогда

$$\begin{aligned}\mathrm{card}((A\cap B)^c)&=\mathrm{card}(A^c\cup B^c)=\mathrm{card}(A^c\triangle B^c)+\mathrm{card}(A^c\cap B^c)\\&=ns_3+ns^{**}=n(s_3+s^{**})=ns_4.\end{aligned}$$

Следовательно, $A\cap B\in\mathcal{E}^n_\Omega$.

Если натуральное число $n\geq 2$ четно, то логика $\mathcal{E}^n_\Omega$ не асимметрична (это проверяется аналогично случаю II в доказательстве предложения 20). $\square$

**Теорема 23.** *Пусть $\mathcal{E}$ – логика множеств и $A\in\mathcal{E}$. Если $A\triangle B\notin\mathcal{E}$ для всех $B\in\tilde{\mathcal{E}}(A)$, то $A,A^c\in\alpha(\mathcal{E})$. Обратное утверждение верно для асимметричной логики $\mathcal{E}$.*

*Доказательство.* Поскольку

$$A\in\mathcal{E}\Leftrightarrow A^c\in\mathcal{E}\ \text{ и }\ A\triangle B\in\mathcal{E}\Leftrightarrow A^c\triangle B=(A\triangle B)^c\in\mathcal{E},$$

достаточно показать, что $A^c\in\alpha(\mathcal{E})$. Если $A\triangle B\notin\mathcal{E}$ для всех $B\in\tilde{\mathcal{E}}(A)$, то множество $(A\triangle B)^c=A^c\triangle B$ не лежит в логике $\mathcal{E}$ для всех $B\in\tilde{\mathcal{E}}(A)$. В частности, не существует множества $B\in\tilde{\mathcal{E}}(A)$ с $B\subset A^c$ (в противном случае $A^c\triangle B=A^c\setminus B\in\mathcal{E}$ в силу леммы 1). Следовательно, $A^c\in\alpha(\mathcal{E})$.

Пусть теперь $\mathcal{E}$ – асимметричная логика и $A,A^c\in\alpha(\mathcal{E})$. Не существует множества $B\in\mathcal{E}\setminus\{\emptyset\}$ с $B\subset A^c, B\neq A^c$ (так как $A^c$ – атом), т. е. для каждого множества $B\in\tilde{\mathcal{E}}(A)$ выполнено в точности одно из следующих условий:

1) $B\cap A^c=A^c$ или 2) $B\cap A^c\notin\mathcal{E}$ и $B\cap A^c\neq A^c$.

В случае 1) $B\supset A^c$ и $B\neq A^c$, поэтому $A\supset B^c$ и $A\neq B^c\neq\emptyset$. Поскольку $A$ – атом, имеем $A=B^c$. Значит, $B=A^c$ – получили противоречие.

В случае 2) в силу асимметричности логики $\mathcal{E}$ имеем $B\triangle A^c\notin\mathcal{E}$. Следовательно, $A\triangle B=(B\triangle A^c)^c\notin\mathcal{E}$. $\square$

**Пример 24.** Логика множеств $\mathcal{E}=X(8,4)$ не симметрична и не асимметрична (см. предложения 17 и 20). Пусть $X=\Omega_8$ и $A=\{1,2,3,5\}$. Тогда $A,A^c\in\alpha(\mathcal{E})$, причем для $B=\{1,2,7,8\}\in\tilde{\mathcal{E}}(A)$ имеем $A\triangle B\in\mathcal{E}$.

**Пример 25.** Для симметричной логики $\mathcal{E}=X(4,2)$ имеем $A,A^c\in\alpha(\mathcal{E})$ для всех множеств $A\in\mathcal{E}\setminus\{\emptyset,X\}$.

**Предложение 26.** *Если* $\mathcal{E}$ *– конечная симметричная логика, то* $\operatorname{card}(\mathcal{E}) = 2^n$ *для некоторого* $n \in \mathbb{N}$. *В частности,* $\operatorname{card}(X(2m,2)) = 2^{2m-1}$ *для всех* $m \in \mathbb{N}$.

*Доказательство.* Назовем элементы $A, B, \ldots$ симметричной логики $\mathcal{E}$ векторами и определим сумму векторов $A$ и $B$ как $A \triangle B$. Определим операцию умножения векторов на элементы поля $\mathbb{Z}_2 = \{0,1\}$ по формуле $0 \times A = \emptyset$, $1 \times A = A$ $(A \in \mathcal{E})$. Легко проверить, что выполнены все аксиомы линейного пространства над полем $\mathbb{Z}_2$. По условию наше пространство конечномерно; выберем в нем базис $e_1, \ldots, e_n$. Тогда все векторы пространства суть всевозможные линейные комбинации $e_1, \ldots, e_n$, их $2^n$ штук.

Для каждого $k \in \mathbb{N}$ в силу бинома Ньютона получаем

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} = (1+1)^k = 2^k, \quad \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} = (1-1)^k = 0.$$

Следовательно, $\operatorname{card}(X(2m,2)) = \displaystyle\sum_{i=0}^{2m} \binom{2m}{2i} = 2^{2m-1}$, $m \in \mathbb{N}$. □

**Предложение 27.** *Пусть* $\mathcal{E}$ *– логика множеств в* $\Omega$, $B \subset \Omega$ *и* $A \in \mathcal{E}$ *с* $A \triangle B \in \mathcal{E}$. *Если* a) $A = \{x\}$ *или* b) $\mathcal{E}$ *асимметрична, то* $B \in \mathcal{E}$.

*Доказательство.* Если $A \cap B = \emptyset$, то $A \triangle B = A \cup B \in \mathcal{E}$ и $B = (A \cup B) \setminus A \in \mathcal{E}$ в силу леммы 1. Пусть теперь $A \cap B \neq \emptyset$. При условии a) имеем $A \cap B = A$, т.е. $A \subset B$ и $x \in B$. По предположению $A \triangle B = B \setminus \{x\} \in \mathcal{E}$ . Поэтому

$$B = (B \setminus \{x\}) \cup \{x\} \in \mathcal{E}$$

в силу аксиомы (iii) логики множеств.

При условии b) имеем $A \cap B \in \mathcal{E}$ и $A \setminus (A \cap B) = A \cap B^c \in \mathcal{E}$ в силу леммы 1. По предположению $A \triangle B \in \mathcal{E}$, поэтому $B \cap A^c = (A \triangle B) \setminus (A \cap B^c) \in \mathcal{E}$ в силу леммы 1. Следовательно,

$$B = (B \cap A^c) \cup (B \cap A) \in \mathcal{E}$$

в силу аксиомы (iii) логики множеств. □

## Список литературы

[1] А.Н. Шерстнев, *О булевских логиках*, Учен. зап. Казан. ун-та **128** (2), 48–62 (1968). URL: https://www.mathnet.ru/rus/uzku/v128/i2/p48

[2] S.P. Gudder, *Stochastic methods in quantum mechanics*, North-Holland Series in Probability and Applied Mathematics. North-Holland, New York–Oxford, 1979.

[3] S.P. Gudder, *An extension of classical measure theory*, SIAM Rev. **26** (1), 71–89 (1984).
DOI: https://doi.org/10.1137/1026002

[4] Г.Д. Луговая, А.Н. Шерстнев, *Функциональный анализ: специальные курсы*, Editorial URSS, M., 2019.

[5] П.Г. Овчинников, *Соответствие Галуа, связанное с продолжением зарядов на $\sigma$-классе подмножеств конечного множества*, Изв. вузов. Матем. (5), 36–40 (1994).
URL: https://www.mathnet.ru/rus/ivm/y1994/i5/p36

[6] P.G. Ovchinnkov, F.F. Sultanbekov, *Finite concrete logics: their structure and measures on them*, Internat. J. Theoret. Phys. **37** (2), 147–153 (1998).
DOI: https://doi.org/10.1023/A:1026681710332

[7] P.G. Ovchinnkov, *Measure on finite concrete logics*, Proc. Amer. Math. Soc. **127** (7), 1957–1966 (1999).
URL: https://www.ams.org/journals/proc/1999-127-07/S0002-9939-99-04761-9

[8] P. Pták, *Concrete quantum logics*, Internat. J. Theoret. Phys. **39** (3), 827–837 (2000).
DOI: https://doi.org/10.1023/A:1003626929648

[9] A.M. Bikchentaev, *States on symmetric logics: conditional probability and independence*, Lobachevskii J. Math. **30** (2), 101–106 (2009).
DOI: https://doi.org/10.1134/S1995080209020024

[10] A. Bikchentaev, R. Yakushev, *States on symmetric logics: conditional probability and independence*. II, Internat. J. Theoret. Phys. **53** (2), 397–408 (2014).
DOI: https://doi.org/10.1007/s10773-013-1824-8

[11] A. Bikchentaev, M. Navara, R. Yakushev, *Quantum logics of idempotents of unital rings*, Internat. J. Theoret. Phys. **54** (6), 1987–2000 (2015).
DOI: https://doi.org/10.1007/s10773-014-2405-1

[12] A. De Simone, M. Navara, P. Pták, *States on systems of sets that are closed under symmetric difference*, Math. Nachr. **288** (17–18), 1995–2000 (2015).
DOI: https://doi.org/10.1002/mana.201500029

[13] A. Bikchentaev, M. Navara, *States on symmetric logics: extensions*, Math. Slovaca **66** (2), 359–366 (2016).
DOI: https://doi.org/10.1515/ms-2015-0141

[14] V. Voráček, P. Pták, *A symmetric-difference-closed orthomodular lattice that is stateless*, Order **40** (2), 397–402 (2023).
DOI: https://doi.org/10.1007/s11083-022-09621-7

[15] R.E. Prather, *Generating the $k$-subsets of an $n$-set*, Amer. Math. Monthly **87** (9), 740–743 (1980).
DOI: https://doi.org/10.2307/2321866

[16] Ф.Ф. Султанбеков, *Заряды и автоморфизмы одного класса конечных логик множеств*, Конструктивная теория функций и функц. анализ, Вып. 8, 57–68 (Изд-во Казанск. ун-та, Казань, 1992).
DOI: https://www.mathnet.ru/rus/kuktf/v8/p57

**Айрат Мидхатович Бикчентаев**
Казанский (Приволжский) федеральный университет,
Научно-образовательный математический центр ПФО,
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия,
*e-mail:* Airat.Bikchentaev@kpfu.ru

**Мунтадхер Мохамед Али**
Казанский (Приволжский) федеральный университет,
Институт математики и механики им. Н. И. Лобачевского,
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия,
*e-mail:* grenday343@gmail.com

**Хаттаб Фауаз**
Казанский государственный энергетический университет,
Кафедра высшей математики,
ул. Красносельская, д. 51, г. Казань, 420066, Россия,
*e-mail:* khattab1058@hotmail.com

Volume 2, Issue 1
pp. 16–30 (2024)

UDC 512, 517.987
MSC 06E75, 28A60, 81P10

# On classes of symmetric and asymmetric concrete logics

A.M. Bikchentaev, M. Mohamed Ali, Khattab Fawwaz

**Abstract.** We refined the axiomatics of asymmetric logics. For logics $X(km, k)$ of family subsets of the $km$-element set $X$, which cardinal numbers are multiples of $k$ we completely described the cases in which $X(km, k)$ a) is symmetric or b) is asymmetric. For an infinite set $\Omega$ and a natural number $n \geq 2$ we constructed the concrete logics $\mathcal{E}_\Omega^n$ and completely described the cases in which these logics are asymmetric. For asymmetric logics $\mathcal{E}$ we determine when both the set $A \in \mathcal{E}$ and its complement $A^c$ are atoms of the logic $\mathcal{E}$. Let a symmetric logic $\mathcal{E}$ of a finite set $\Omega$ be not a Boolean algebra, and let $\mathcal{A}$ be an algebra of subsets from $\Omega$, and assume that $\mathcal{E} \subset \mathcal{A}$. Then there exists a measure on $\mathcal{E}$, that does not admit an extension to a measure on $\mathcal{A}$.

**Keywords:** quantum logics, concrete logics, atom, symmetric logics, asymmetric logics, charge, measure.

**DOI:** 10.26907/2949-3919.2024.1.16-30

## References

[1] A.N. Sherstnev, *On Boolean logics*, Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta, **128** (2) Kazan Univ., Kazan, 1968, 48–62 [in Russian].
DOI: https://www.mathnet.ru/eng/uzku/v128/i2/p48

[2] S.P. Gudder, *Stochastic methods in quantum mechanics*, North-Holland Series in Probability and Applied Mathematics. North-Holland, New York–Oxford, 1979.

[3] S.P. Gudder, *An extension of classical measure theory*, SIAM Rev. **26** (1), 71–89 (1984).
DOI: https://doi.org/10.1137/1026002

[4] G.D. Lugovaya, A.N. Sherstnev, *Functional analysis: special courses*, Editorial URSS, Moscow, 2019 [in Russian].

[5] P.G. Ovchinnikov, *Galois correspondence associated with the extension of charges on the $\sigma$-class of subsets of a finite set*, Russian Math. (Iz. VUZ), **38** (5), 34–38 (1994).
URL: https://www.mathnet.ru/eng/ivm/y1994/i5/p36

Acknowledgements. The work is performed under the development program of Volga Region Mathematical Center (agreement no. 075-02-2023-944).

Received: 19 January 2024. Accepted: 27 February 2024. Published: 11 April 2024.

[6] P.G. Ovchinnkov, F.F. Sultanbekov, *Finite concrete logics: their structure and measures on them*, Internat. J. Theoret. Phys. **37** (2), 147–153 (1998).
DOI: https://doi.org/10.1023/A:1026681710332

[7] P.G. Ovchinnkov, *Measure on finite concrete logics*, Proc. Amer. Math. Soc. **127** (7), 1957–1966 (1999).
URL: https://www.ams.org/journals/proc/1999-127-07/S0002-9939-99-04761-9

[8] P. Pták, *Concrete quantum logics*, Internat. J. Theoret. Phys. **39** (3), 827–837 (2000).
DOI: https://doi.org/10.1023/A:1003626929648

[9] A.M. Bikchentaev, *States on symmetric logics: conditional probability and independence*, Lobachevskii J. Math. **30** (2), 101–106 (2009).
DOI: https://doi.org/10.1134/S1995080209020024

[10] A. Bikchentaev, R. Yakushev, *States on symmetric logics: conditional probability and independence.* II, Internat. J. Theoret. Phys. **53** (2), 397–408 (2014).
DOI: https://doi.org/10.1007/s10773-013-1824-8

[11] A. Bikchentaev, M. Navara, R. Yakushev, *Quantum logics of idempotents of unital rings*, Internat. J. Theoret. Phys. **54** (6), 1987–2000 (2015).
DOI: https://doi.org/10.1007/s10773-014-2405-1

[12] A. De Simone, M. Navara, P. Pták, *States on systems of sets that are closed under symmetric difference*, Math. Nachr. **288** (17–18), 1995–2000 (2015).
DOI: https://doi.org/10.1002/mana.201500029

[13] A. Bikchentaev, M. Navara, *States on symmetric logics: extensions*, Math. Slovaca **66** (2), 359–366 (2016).
DOI: https://doi.org/10.1515/ms-2015-0141

[14] V. Voráček, P. Pták, *A symmetric-difference-closed orthomodular lattice that is stateless*, Order **40** (2), 397–402 (2023).
DOI: https://doi.org/10.1007/s11083-022-09621-7

[15] R.E. Prather, *Generating the $k$-subsets of an $n$-set*, Amer. Math. Monthly **87** (9), 740–743 (1980).
DOI: https://doi.org/10.2307/2321866

[16] F.F. Sultanbekov, *Charges and automorphisms of a class of finite set logics*, Constructive theory of functions and functional analysis (8), 57–68, Kazan. Gos. Univ., Kazan, 1992 [in Russian].
URL: https://www.mathnet.ru/eng/kuktf/v8/p57

**Airat Midkhatovich Bikchentaev**
Kazan Federal University,
Volga Region Mathematical Center,
18 Kremlyovskaya str., Kazan 420008, Russia,
*e-mail:* Airat.Bikchentaev@kpfu.ru

**Muntadher Mohamed Ali**
Kazan Federal University,
N. I. Lobachevskii Institute of Mathematics and Mechanics,
18 Kremlyovskaya str., Kazan 420008, Russia,
*e-mail:* grenday343@gmail.com

**Khattab Fawwaz**
Kazan State Power Engineering University,
Department of Higher Mathematics,
51 Krasnoselskaya str., Kazan 420066, Russia,
*e-mail:* khattab1058@hotmail.com