

1.2.2.

<sup>1</sup>Р.Н. Тазмеева, <sup>2</sup>Б.Х. Тазмеев

<sup>1</sup>Казанский федеральный университет, Набережночелнинский институт

<sup>2</sup>Набережночелнинский государственный педагогический университет,  
Набережные Челны, tazmееva@mail.ru

### МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДУГИ В ПЛАЗМОТРОНЕ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМ РАСХОДОМ ГАЗА

*Разработана математическая модель электрической дуги в цилиндрическом канале плазмотрона с распределенным расходом газа. Получены формулы для расчета тепловых и электрических характеристик плазмотрона.*

Ключевые слова: плазмотрон, модель дуги, ламинарная дуга, электродуговой нагрев газа.

Как известно, распределенный расход газа позволяет улучшить многие параметры электродуговых плазмотронов. При распределенном вдуве газа существенно повышается тепловой к.п.д., увеличивается объемная плотность энергии в разрядном канале и т.д. [1-3]. Поэтому плазмотроны с распределенным расходом газа перспективны для многих энергоемких технологий. В данной работе приводится модель дуги, которая позволяет изучить влияние распределенного вдува газа на свойства дуги в канале плазмотрона. В построение модели использованы предпосылки и упрощения, традиционные для теоретического описания газовых разрядов [2-5]. Согласно модели дуги, известной как каналовая, предельный участок состоит из проводящей области с радиусом  $\xi$  и пристеночной непроводящей области. Через поверхность единицы длины предельного участка в канал плазмотрона поступает газ массовой скоростью  $\dot{G}$ . Некоторая часть этого газа  $\dot{G}^*$  проникает в проводящую область. В данной работе считается, что

$$\dot{G}^* = k\bar{\xi}^2\dot{G}, \#(1)$$

где  $k$  - коэффициент внутреннего вдува, зависящий от интенсивности вдува, тока и ряда других параметров дуги.

При таком подходе к задаче предельный участок дуги описывается уравнениями баланса энергии

$$\frac{\rho V_r h_s}{R} \cdot \frac{dS}{d\bar{r}} = \frac{1}{R^2 \bar{r}} \cdot \frac{d}{d\bar{r}} \cdot \left( \bar{r} \cdot \frac{dS}{d\bar{r}} \right) + \sigma_s E^2 S - W_{rs} S, \#(2)$$

закона Ома

$$I = 2\pi R^2 \sigma_s E \int_0^{\bar{\xi}} S \bar{r} d\bar{r}, \#(3)$$

неразрывности потока газа

$$\frac{R}{l} \cdot \frac{\partial}{\partial z} \cdot (\rho V_z) + \frac{1}{\bar{r}} \cdot \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \cdot (\bar{r} \rho V_r) = 0, \#(4)$$

Сложная зависимость  $\rho V_z$  по радиусу канала может быть аппроксимирована ступенчатой функцией (рис. 1а), причем

$$\rho V_{zII} = \varepsilon \rho V_{zI}. \#(5)$$

Здесь коэффициент  $\varepsilon \geq 1$ .

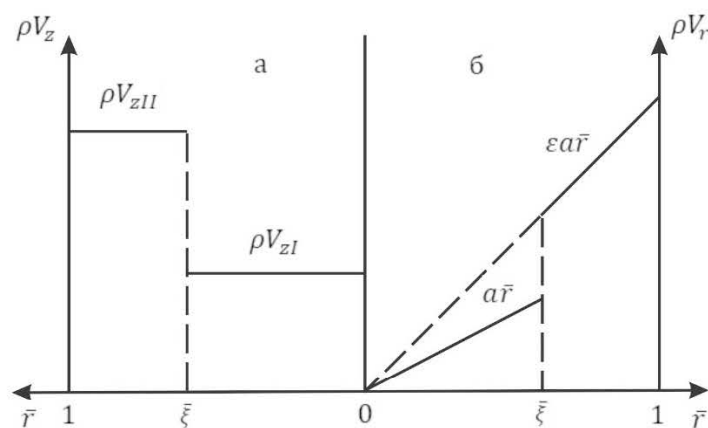


Рис.1 - Распределение по сечению канала плотностей осевого (а) и радиального (б) потоков массы

На предельном участке разрядного канала  $\rho V_{zI}$  меняется вдоль оси  $z$  по линейному закону

$$\rho V_{zI} = \frac{1}{\pi R^2 \bar{\xi}^2} \cdot (G_0^* + \dot{G}^* l \bar{z}). \#(6)$$

На оси канала

$$V_r(0, \bar{z}) = 0, \#(7)$$

$$\frac{\partial S}{\partial \bar{r}}(0, \bar{z}) = 0. \#(8)$$

Значение функции теплопроводности  $S$  на границе областей I и II равняется нулю, а на оси канала задается, т.е.

$$S(\bar{\xi}, \bar{z}) = 0, \quad S(0, \bar{z}) = S_0 \#(9)$$

Таким образом уравнений (2 - 4) решаются при условиях (5 - 9).

Из (4) находим

$$\rho V_{rI} = -\frac{\dot{G}^*}{2\pi R \bar{\xi}^2} \cdot \bar{r}$$

С учетом (1)  $\rho V_{rI}$  можно представить в виде

$$\rho V_{rI} = a \bar{r}, \#(10)$$

где

$$a = -\frac{k \dot{G}^*}{2\pi R}$$

Таким образом, в данной модели, как и в [2], плотность радиального потока массы  $\rho V_r$  меняется по радиусу проводящей области линейно (рис. 1б).

Предположим, что в области II плотность радиального потока массы также меняется пропорционально радиусу

$$\rho V_{rII} = \varepsilon a \bar{r}. \#(11)$$

При этом коэффициенты  $\varepsilon$  и  $k$  будут связаны соотношением

$$\varepsilon k = 1. \#(12)$$

С учетом (10) уравнение сохранения энергии (2) для области I можно записать в виде

$$\frac{1}{\bar{r}} \cdot \frac{d}{d\bar{r}} \left( \bar{r} \frac{dS}{d\bar{r}} \right) + \frac{k \dot{G}^* h_s}{2\pi} \bar{r} \frac{dS}{d\bar{r}} + \sigma_s R^2 E^2 S - W_{rs} R^2 S = 0.$$

Введением замены переменной  $\theta = \bar{r}/\bar{\xi}$  и полагая  $S = S_0 \Phi$ , получим

$$\frac{1}{\theta} \cdot \frac{d}{d\theta} \left( \theta \frac{d\Phi}{d\theta} \right) + \frac{\beta}{2} \cdot \theta \frac{d\Phi}{d\theta} + \mu^2 \Phi = 0. \#(13)$$

Здесь

$$\beta = \frac{k \bar{\xi}^2 \dot{G}^* h_s}{\pi}, \#(14)$$

$$\mu^2 = \sigma_s R^2 \bar{\xi}^2 E^2 - W_{rs} R^2 \bar{\xi}^2. \#(15)$$

Решение уравнения (13) представляется в виде ряда [1]

$$\Phi_n(\mu_n, \theta) = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} a_{2m}^n \theta^{2m},$$

$$a_{2m}^n = (-1)^m \cdot \frac{\mu_n^2(\mu_n^2 + \beta)(\mu_n^2 + 2\beta) \dots [\mu_n^2 + (m-1)\beta]}{2^{2m}(m!)^2}, \#(16)$$

где  $\mu_n$  - корни уравнения  $\Phi(\mu, I) = 0$ . Следовательно, для распределения  $S$  имеем

$$S = S_0 \Phi_1(\mu_1, \theta) = S_0 \left\{ 1 + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \cdot \frac{\mu_1^2(\mu_1^2 + \beta) \dots [\mu_1^2 + (m-1)\beta]}{2^{2m}(m!)^2} \cdot \theta^{2m} \right\}. \#(17)$$

Величины  $I$  и  $E$ , удовлетворяющие решению (17), находятся из (3) и (15).

$$I = 2\pi R \bar{\xi} S_0 \gamma_1 \sqrt{\sigma_s(\mu_1^2 + W_{rs} \bar{\xi}^2 R^2)}, \#(18)$$

$$E = \sqrt{\frac{\mu_1^2}{\sigma_s \bar{\xi}^2 R^2} + \frac{W_{rs}}{\sigma_s}}, \#(19)$$

где

$$\gamma_1 = \int_0^1 \Phi_1(\mu_1, \theta) \theta d\theta. \#(20)$$

Значения  $\mu_1$ ,  $\gamma_1$  и функции  $\Phi_1$  для различных  $\beta$  приведены в [5].

Среднемассовое значение функции теплопроводности проводящей области I определяется как

$$S_{1c}(\bar{z}) = S_* + \frac{2\pi R^2}{\bar{\xi}^2(G_0^* + \dot{G}^* l \bar{z})} \cdot \int_0^{\bar{\xi}} \rho V_{zI} S \bar{r} d\bar{r}.$$

Расчет с использованием (6), (17) и (20) дает

$$S_{1c} = S_* + 2S_0 \gamma_1. \#(21)$$

Среднемассовые значения энтальпии внутри проводящей области и на выходе из разрядного канала рассчитываются по формулам

$$h_c^* = h_* + 2S_c h_s \gamma_1, \quad h_c = h_w + \frac{IE \bar{\xi}^2}{\pi \beta} h_s. \#(22)$$

Поток тепла на границе проводящей области I равен

$$q_* = -2\pi \left. \frac{dS}{d\theta} \right|_{\theta=1}. \#(23)$$

А поток энергии излучения вычисляется по формуле

$$q_{\wedge} = 2\pi R^2 \int_0^{\bar{\xi}} W_{rs} S \bar{r} d\bar{r}. \#(24)$$

С учетом (17) и (20) формула (24) приводится к виду

$$q_{\wedge} = 2\pi R^2 \bar{\xi}^2 W_{rs} S_0 \gamma_1. \#(25)$$

Как видно из формул (17) - (25), для расчета тепловых и электрических свойств предельного участка столба дуги необходимо знать безразмерный радиус дуги  $\bar{\xi}$ . Значение  $\bar{\xi}$  находится из условия непрерывности теплового потока на границе областей I и II. Запишем уравнение сохранения энергии (2) для области II с учетом (11) в виде

$$\theta \frac{d^2 S}{d\theta^2} + \left( 1 + \frac{\varepsilon \beta \theta^2}{2} \right) \cdot \frac{dS}{d\theta} = 0. \#(26)$$

Интегрируя однократно уравнение (26), получаем

$$\theta \frac{dS}{d\theta} = \frac{dS}{d\theta} \Big|_{\theta=1} \cdot \exp \left[ \frac{\varepsilon \beta}{4} (1 - \theta^2) \right]. \#(27)$$

Интегрирование уравнения сохранения энергии (13) для проводящей области после некоторых преобразований приводит к формуле

$$\left. \frac{dS}{d\theta} \right|_{\theta=1} = -(\mu_1^2 - \beta)S_0\gamma_1. \#(28)$$

Из (27) и (28) получаем для непроводящей области II выражение

$$S(\theta) = \int_1^\theta (\beta - \mu_1^2) S_0\gamma_1 \exp\left[\frac{\varepsilon\beta}{4}(1 - \theta^2)\right] \frac{d\theta}{\theta}. \#(29)$$

С учетом условия на стенке канала  $S(l, \bar{\xi}) = S_w - S_*$  из формулы (29) находим уравнение для определения  $\bar{\xi}$

$$(\mu_1^2 - \beta)\gamma_1 \int_1^{\frac{1}{\bar{\xi}}} \exp\left[\frac{\varepsilon\beta}{4}(1 - \theta^2)\right] \frac{d\theta}{\theta} - A = 0, \#(30)$$

где  $A = (S_* - S_w)/S_0$ ,  $S_*$ ,  $S_w$  - значения функции теплопроводности, соответственно, на границе проводящей области и на стенке канала.

Таким образом, получены формулы для расчета тепловых и электрических характеристик плазмотрона с распределенным расходом газа.

#### **Список литературы**

1. Генерация низкотемпературной плазмы и плазменные технологии: Проблемы и перспективы / Г.Ю.Даутов, А.Н.Тимошевский, Б.А.Урюков и др. - Новосибирск: Наука, 2004. - 464 с. - (Низкотемпературная плазма; Т.20)
2. Галимарданов М.Ш., Даутов Г.Ю., Исмагилов Р.Х., Киямов Х.Г. // Физика и химия обработки материалов, 1975, № 6, с. 13-16.
3. Даутов Г.Ю., Дзюба В.А., Карп И.Н. Плазмотроны со стабилизированными электрическими дугами. Киев: Наук. думка, 1984. -168 с.
4. Тазмеев Б.Х., Тазмеева Р.Н. // Научно-технический вестник Поволжья. 2015. № 5. С. 58-60.
5. Tazmееv A.K., Tazmееva R.N. // J. Phys.: Conf. Ser., 2018. V. 1058. P. 012036
6. Gibadullina G.R., Tazmееv A.K., Tazmееva R.N. // Journal of Fundamental and Applied Sciences. 2017. T. 9. № 1S. С. 1779-1789.
7. Тазмеев Г.Х., Тимеркаев Б.А., Тазмеев Х.К., Арсланов И.М. // Прикладная физика. 2016. № 1. С. 72-76.