Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

Н. Р. Абубакиров, Л. А. Аксентьев, Прямые и обратные задачи для логарифмического потенциала простого слоя, *Изв. вузов. Матем.*, 2020, номер 11, 3–14

DOI: https://doi.org/10.26907/0021-3446-2020-11-3-14

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
http://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 178.213.240.13
2 февраля 2022 г., 16:03:41

Известия вузов. Математика *https://kpfu.ru/science/nauchnye-izdaniya/ivrm*
2020, № 11, с. 3–14 *e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru*

Н.Р. АБУБАКИРОВ, *Л.А. АКСЕНТЬЕВ*

ПРЯМЫЕ И ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ЛОГАРИФМИЧЕСКОГО ПОТЕНЦИАЛА ПРОСТОГО СЛОЯ

Аннотация. С помощью интегралов типа Коши приведен новый вывод интегральных уравнений для решения задач логарифмического потенциала. Проанализирована обратная задача с двумя звездообразными решениями, содержащими меньшее число параметров, чем в более сложных аналогичных примерах И.М.Рапопорта. Доказан критерий обращения в тождественную постоянную внутреннего потенциала простого слоя.

Ключевые слова: логарифмический потенциал простого слоя, условия выпуклости и звездообразности, интеграл типа Коши.

УДК: 517.956

DOI: 10.26907/0021-3446-2020-11-3-14

Введение. Данная статья является продолжением исследований авторов [1]–[4]. В ней будут использованы результаты И.М. Рапопорта [5] по обратной задаче для потенциала простого слоя

$$v(z) = \int_L \ln|t-z|^2|dt|,$$

где L — простая замкнутая кривая, которая делит комплексную плоскость на конечную и бесконечную области D^+ и D^-. После статьи [5] традиционный путь исследования логарифмического потенциала связан с переходом к аналитической функции в форме градиента $\frac{\partial v}{\partial z} = \alpha u(z)$ (например, [6]). Постоянная α является несущественной и ее можно считать равной (-1).

Интегральное представление для логарифмического потенциала после дифференцирования становится однозначным интегралом. В случае потенциала простого слоя этот интеграл выглядит так

$$u(z) = \int_L \frac{|dt|}{t-z}. \tag{1}$$

При $z \in D^\pm$ для $u(z)$ будем использовать обозначение $u^\pm(z)$.

В работах авторов [1]–[4] отмечена актуальность изучаемой тематики. Были указаны основополагающие работы И.М. Рапопорта, В.К. Иванова, В.Н. Страхова, А.В. Цирульского, их учеников и последователей, которые послужили базой для развития в статьях [1]–[4].

Поступила в редакцию 27.12.2019, после доработки 08.07.2020. Принята к публикации 01.10.2020.

Благодарности. Работа выполнена в рамках реализации программы развития Научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа, соглашение № 075-02-2020-1478.

Крупными достижениями по задачам логарифмического потенциала явились труды А.И. Прилепко и В.Г. Чередниченко. Подробная библиография этих работ указана в обзорной статье [7]. Два эффекта можно подчеркнуть в новых работах: отказ от знакопостоянства плотностей потенциалов и допущение расширенного класса несущих линий, в частности, фракталов [8].

Запишем такие постановки двух задач, которые являются традиционными (например, [9], [10]).

Прямая задача. При заданном аналитическом замкнутом контуре L найти по формуле (1) явный вид функции $u^-(z)$, $z \in D^-$. Явный вид означает либо класс элементарных функций, либо класс определенных интегралов от них (табулированные функции).

Обратная задача. По заданной аналитической функции $u^-(z)$ (в окрестности бесконечно удаленной точки) найти замкнутый аналитический контур L, для которого будет справедлива формула (1).

Желательно добиться такой же полноты анализа задач для потенциала простого слоя, как в случае областного логарифмического потенциала [4]. Сопоставление задач для двух видов логарифмического потенциала было предпринято А.А. Михеевой [11]. Другому подходу к полученным ею результатам посвятим часть нашей работы. (А.А. Михеева сменила фамилию. Несколько статей по близкой тематике были опубликованы ею под фамилией Чудинова А.А., [12], [13], [14].)

1. Пример с двумя параметрами из класса И.М. Рапопорта. Пусть $L : z = f(\zeta)$, $\zeta \in \partial E$, $E = \{\zeta : |\zeta| < 1\}$. Следуя [5], изучим класс отображающих функций в форме

$$f(\zeta) = \int_0^\zeta P_n^2(\omega)d\omega = \zeta Q_{2n}(\zeta)$$

— однолистный в замкнутом единичном круге многочлен степени $2n+1$,

$$|f'(\zeta)| = |P_n(\zeta)|^2 = P_n(\zeta)\overline{P_n(\zeta)},$$
$$P_n(\zeta) = a_n\zeta^n + a_{n-1}\zeta^{n-1} + \ldots + a_1\zeta + a_0,$$

$$\overline{P_n(\zeta)} = \bar{a}_n\bar{\zeta}^n + \bar{a}_{n-1}\bar{\zeta}^{n-1} + \ldots + \bar{a}_1\bar{\zeta} + \bar{a}_0 = \frac{1}{\zeta^n}(\bar{a}_n + \bar{a}_{n-1}\zeta + \ldots + \bar{a}_1\zeta^{n-1} + \bar{a}_0\zeta^n) = \frac{\tilde{P}_n(\zeta)}{\zeta^n} \text{ при } |\zeta| = 1.$$

При $z \in D^-$ получим

$$u^-(z) = \int_L \frac{|dt|}{t-z} = \int_0^{2\pi} \frac{|f'(e^{i\theta})|d\theta}{f(e^{i\theta}) - z} = \left\{ e^{i\theta} = \tau, d\theta = \frac{d\tau}{i\tau} \right\} = -i \int_{|\tau|=1} \frac{P_n(\tau)\tilde{P}_n(\tau)d\tau}{(\tau Q_{2n}(\tau) - z)\tau^{n+1}}.$$

Учтем, что при $\max_{0\le\theta\le 2\pi} |Q_{2n}(e^{i\theta})| = M$ и $|z| > M$ имеем

$$|\zeta Q_{2n}(\zeta) - z| \ge |z| - |\zeta Q_{2n}(\zeta)| > 0.$$

Поэтому единственной особой точкой функции $\dfrac{P_n(\zeta)\tilde{P}_n(\zeta)}{(\zeta Q_{2n}(\zeta) - z)\zeta^{n+1}}$ в круге является $\zeta = 0$ — полюс порядка $n+1$. Значит,

$$u^-(z) = 2\pi \text{выч}_0 \frac{P_n(\zeta)\tilde{P}_n(\zeta)}{(\zeta Q_{2n}(\zeta) - z)\zeta^{n+1}} = \frac{2\pi}{n!}\left[\frac{P_n(\zeta)\tilde{P}_n(\zeta)}{(\zeta Q_{2n}(\zeta) - z)}\right]^{(n)}|_{\zeta=0} = \frac{A_1}{z} + \ldots + \frac{A_{n+1}}{z^{n+1}}.$$

Полученная функция действует на всей комплексной плоскости в силу аналитического продолжения из области $|z| > M$.

Замечание. Если в обратной задаче будет известен градиент $u^-(z)$, т.е. величины A_k, $k=\overline{1,n+1}$, то из последнего равенства получим

$$A_k = A_k(a_0, a_1, \dots, a_n),\ k=\overline{1,n+1}.$$

Эта совокупность равенств служит системой уравнений для определения $a_0, a_1, \dots, a_n$, после нахождения которых (если это удастся сделать) запишется полином $P_n(\zeta)$ и искомая отображающая функция $f(\zeta) = \int_0^\zeta P_n^2(\omega)d\omega$. Уравнение контура представится в форме $z = f(e^{i\theta}),\ 0 \le \theta \le 2\pi$. Частный случай решения такой системы приведен в статье [5] со степенью $f(\zeta)$, равной пяти при $n=2$.

Изучим более простой вариант с $n=1$, на примере которого рассмотрим попадание однолистной функции $f(\zeta)$ в подклассы выпуклых S^0 и звездообразных S^* функций, а также неединственность решения сформулированной обратной задачи.

Итак, ищем $f(\zeta)$ в виде

$$f(\zeta) = \int_0^\zeta (c_0 + c_1\omega)^2 d\omega = b\int_0^\zeta (1+a\omega)^2 d\omega, \tag{2}$$

где $b = c_0^2 > 0$, $a = c_1/c_0 \in (0,1]$. При $a>1$ функция $f'(\zeta)$ обращается в нуль в круге $|\zeta|<1$ и, значит, $f(\zeta)$ неоднолистна. Так как параметр b определяет только подобие, то будем изучать функцию

$$\varphi(\zeta) = \frac{1}{b}f(\zeta) = \int_0^\zeta (1+a\omega)^2 d\omega.$$

Проверим условие выпуклости ([15], с. 203):

$$\varphi(\zeta)\in S^0 \ \Leftrightarrow\ \mathrm{Re}\frac{\zeta\varphi''(\zeta)}{\varphi'(\zeta)} \ge -1 \ \Leftrightarrow\ \mathrm{Re}\frac{2a\zeta}{1+a\zeta} \ge -1.$$

Круг $|\zeta|<1$ с помощью функции $\omega(\zeta) = \dfrac{2a\zeta}{1+a\zeta}$ отображается на круг, лежащий в полуплоскости $\mathrm{Re}\omega \ge \omega(-1) = -\dfrac{2a}{1-a}$. Значит, неравенство $-\dfrac{2a}{1-a} \ge -1 \ \Leftrightarrow\ a \le 1/3$ обеспечивает выпуклость функции $\varphi(\zeta)$.

Выполним условие звездообразности ([15], с. 202):

$$\varphi(\zeta)\in S^* \ \Leftrightarrow\ \Phi(\zeta) := \mathrm{Re}\frac{\zeta\varphi'(\zeta)}{\varphi(\zeta)} \ge 0,\ \zeta\in E.$$

Поскольку $\Phi(\zeta)$ непрерывна в замкнутом круге $\overline{E}$ и гармонична, достаточно установить, что $\Phi(\zeta)\ge 0$ при $\zeta = e^{i\theta}$, $0\le\theta\le 2\pi$. Непосредственным счетом нетрудно убедиться, что неравенство $\Phi(e^{i\theta})\ge 0$ эквивалентно неравенству $F(a,\cos\theta)\ge 0$, где

$$F(a,\cos\theta) := 8a^2\cos^2\theta + (5a^3+9a)\cos\theta + a^4 + 2a^2 + 3,$$

и если обозначить $x=\cos\theta$, то

$$F(a,x) = 8a^2\left(x^2 + \frac{5a^3+9a}{8a^2}x + \frac{a^4+2a^2+3}{8a^2}\right) = 8a^2\left[\left(x+\frac{5a^3+9a}{16a^2}\right)^2 + \frac{(7a^2-5)(a^2-3)}{256a^2}\right].$$

Условие $F(a,x)\ge 0$ выполняется при всех x, если $(7a^2-5)(a^2-3)/(256a^2)\ge 0$, что при $a\in(0,1]$ дает условие $0<a\le\sqrt{5/7}=a_0$. Далее $F(a,x)=0 \ \Leftrightarrow\ x = -\frac{5a^3+9a}{16a^2} = -x_0$ и $a=a_0$. Знак равенства можно достичь при $a>a_0$ за счет отрицательности второго слагаемого и положительности первого в квадратных скобках для $x\ne -x_0$. Но этот вариант нам не подходит, так как $F(a,-x_0)<0$ при $a>a_0$.

Исследуем однолистность функции

$$\varphi(\zeta) = \int_0^\zeta (1+a\omega)^2 d\omega = \frac{1}{3a}(1+a\zeta)^3 - \frac{1}{3a}.$$

Она будет однолистной тогда и только тогда, когда образ круга $|\zeta| < 1$ под действием отображения $s = 1+a\zeta$ будет лежать в секторе $|\arg s| \le \dfrac{\pi}{3}$. С помощью простых геометрических построений это дает неравенство $a \le \sin\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Подытожим наши рассуждения: функция (2) при любом $b > 0$ и неотрицательных a будет выпуклой $\Leftrightarrow a \le 1/3$, звездообразной $\Leftrightarrow a \le \sqrt{5/7}$, однолистной $\Leftrightarrow a \le \sqrt{3}/2$.

Градиент потенциала простого слоя для функции (2) имеет вид

$$u^-(z) = \int_{|\zeta|=1} \frac{|f'(\zeta)||d\zeta|}{f(\zeta)-z} = \frac{1}{i}\int_{|\zeta|=1} \frac{b(1+a\zeta)(\zeta+a)d\zeta}{\left[b\left(\zeta + a\zeta^2 + \frac{a^2}{3}\zeta^3\right) - z\right]\zeta^2} =$$

$$= 2\pi\text{выч}_0 \frac{b(1+a\omega)(\omega+a)}{\left[b\left(\omega + a\omega^2 + \frac{a^2}{3}\omega^3\right) - z\right]\omega^2} = 2\pi b\left[\frac{(1+a\omega)(\omega+a)}{b\left(\omega + a\omega^2 + \frac{a^2}{3}\omega^3\right) - z}\right]'_{\omega=0} =$$

$$= -2\pi b\left(\frac{a^2+1}{z} + \frac{ab}{z^2}\right) = \frac{A_1}{z} + \frac{A_2}{z^2}.$$

Получаем систему

$$A_1 = -2\pi b(a^2+1),\ A_2 = -2\pi b^2 a.$$

Отсюда имеем $a = -\dfrac{A_2}{2\pi b^2}$ и приходим к уравнению

$$2\pi b^3 A_1 + A_2^2 = -4\pi^2 b^4.$$

В данном случае прямая задача для градиента потенциала состоит в следующем: по известным a и b найти A_1 и A_2. Обратная задача состоит в нахождении a и b по известным A_1 и A_2.

Исследуем вопрос о числе положительных решений уравнения $2\pi b^3 A_1 + A_2^2 = -4\pi^2 b^4$ при известных A_1, $A_2 < 0$. Введем функцию $g(b) = b^4 - cb^3 + d$, где

$$c = -\frac{A_1}{2\pi} > 0,\ d = \left(\frac{A_2}{2\pi}\right)^2.$$

Ветви графика функции $g(b)$ направлены вверх, точка $b_1 = 3c/4$ является точкой минимума, $b_2 = 0$ и $b_3 = c/2$ — точки перегиба. Вывод: исследуемое уравнение относительно b не имеет положительных корней, если $g(3c/4) > 0$, имеет один положительный корень при $g(3c/4) = 0$ и имеет два положительных корня при $g(3c/4) < 0$.

Возвращаясь к коэффициентам A_1 и A_2, получим

a) при $4\pi^2 A_2^2 > (27/256)A_1^4$ обратная задача не имеет решений;

b) при $4\pi^2 A_2^2 = (27/256)A_1^4$ обратная задача имеет одно решение;

c) при $4\pi^2 A_2^2 < (27/256)A_1^4$ обратная задача имеет два различных решения.

Получим два звездообразных решения обратной задачи для A_1 и A_2, которые соответствуют значениям $b_1 = 2$, $b_2 = 3$. Величины A_1, A_2 найдем из системы

$$\begin{array}{l} 2\pi 8A_1 + A_2^2 = -4\pi^2 16, \\ 2\pi 27A_1 + A_2^2 = -4\pi^2 81 \end{array} \Rightarrow A_1 = -2\pi\frac{65}{19},\ A_2 = -2\pi\sqrt{\frac{8\cdot 27}{19}}.$$

Далее по $b_1 = 2$ находим $a_1 = 3\sqrt{3}/\sqrt{38}$ и по $b_2 = 3$ находим $a_2 = 2\sqrt{2}/\sqrt{57}$. Пары (a_k, b_k), $k = 1, 2$, порождают решения $f_1(\zeta) = 2\int_0^\zeta \left(1 + \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{38}}\zeta\right)^2 d\zeta$ и $f_2(\zeta) = 3\int_0^\zeta \left(1 + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{57}}\zeta\right)^2 d\zeta$. Эти решения звездообразны, так как $a_1, a_2 < \sqrt{5/7}$.

2. Условия, при которых внутренний градиент тождественно равен нулю. В книге Дэвиса [16] доказана формула для аналитической линии L, $|dt| = \sqrt{S'(t)}dt$, $t \in L$, в которой $S(t)$ является функцией Шварца, причем $L : \bar{t} = S(t)$. Формула для $|dt|$ ($d\bar{t} = S'(t)dt \;\Rightarrow\; |dt|^2 = S'(t)(dt)^2 \;\Rightarrow\; |dt| = \sqrt{S'(t)}dt$) дает возможность записать градиент потенциала простого слоя в виде интеграла типа Коши

$$u(z) = \int_L \frac{|dt|}{t - z} = \int_L \frac{\sqrt{S'(t)}dt}{t - z}.$$

Используем известные формулы в случае замкнутых аналитических линий L и гёльдеровских функций $\sqrt{S'(t)}$. Именно,

$$u(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{2\pi i\sqrt{S'(t)}dt}{t - z},\; D^+ \cup L \cup D^- = \mathbf{C},\; \infty \in D^-.$$

В силу формул Сохоцкого предельные значения $u^\pm$ функции u из областей $D^\pm$ на контуре L удовлетворяют условию

$$u^+(t) - u^-(t) = 2\pi i\sqrt{S'(t)}. \tag{3}$$

Справедлива

Теорема 1. *В случае аналитического контура L с функцией Шварца $S(z)$ внутренний градиент $u^+(z) \equiv 0$ тогда и только тогда, когда $\sqrt{S'(z)}$ будет функцией, регулярной в области D^- с нулем целого порядка в бесконечно удаленной точке.*

Для доказательства учтем, что из формулы (3) получаются такие эквивалентные переходы $u^+(z) \equiv 0 \;\Leftrightarrow\; u^+(t) \equiv 0 \;\Leftrightarrow\; -u^-(t) = 2\pi i\sqrt{S'(t)} \;\Leftrightarrow\; \sqrt{S'(z)} = F^-(z)$ — функция, регулярная в области D^-. Кроме того, функция $F^-(z)$ представлена интегралом типа Коши и поэтому имеет на бесконечности нуль целого порядка, большего или равного единице.

Пример 1. Для окружности $|t| = R$ имеем $\bar{t} = R^2/t = S(t)$ и

$$Rd\theta = |dt| = \sqrt{S'(t)}Re^{i\theta}id\theta = i\sqrt{S'(t)}td\theta \;\Rightarrow\; \sqrt{S'(t)} = -i\frac{R}{t}$$

— граничное значение функции $-iR/z$, регулярной в области $|z| > 1$. Поэтому $u^+(z) \equiv 0$.

К такому же результату можно прийти непосредственным вычислением интеграла через вычеты.

Пример 2. Для эллипса $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ имеем

$$\bar{t} = S(t) = \left[(a^2 + b^2)t - 2ab\sqrt{t^2 - c^2}\right]/c^2.$$

Тогда $S'(t) = \left[(a^2 + b^2) - \frac{2abt}{\sqrt{t^2 - c^2}}\right]/c^2$ и

$$|dt| = \left[(a^2 + b^2) - \frac{2abt}{\sqrt{t^2 - c^2}}\right]^{1/2}\frac{dt}{c}. \tag{4}$$

Другим путем формула (4) получена в книге Ю.В. Обносова ([17], с. 18, (1.8)).

Функция $S'(z)$ обращается в нуль в двух вещественных точках: $\pm(a^2+b^2)/c$, расположенных вне эллипса. Проверим это:

$$S'(z)=0 \;\Rightarrow\; (z^2-c^2)(a^2+b^2)^2=4a^2b^2z^2,\; z^2c^4=(a^2+b^2)^2,\; z^2=(a^2+b^2)^2/c^2;$$
$$3a^2b^2+b^4>0 \;\Rightarrow\; (a^2+b^2)^2>a^2c^2.$$

Следовательно, точки $\pm(a^2+b^2)/c$ будут точками ветвления функции $\sqrt{S'(z)}$, и поэтому она не может быть регулярной функцией вне эллипса. Значит, обращение в тождественный нуль $u^+(z)$ для любого эллипса невозможно.

Покажем, как выглядит градиент потенциала простого слоя эллипса, который мало отличается от окружности. Рассмотрим эллипс с уравнением

$$\frac{x^2}{(1+\varepsilon)^2}+\frac{y^2}{(1-\varepsilon)^2}=1.$$

Так как $c^2=(1+\varepsilon)^2-(1-\varepsilon)^2=4\varepsilon$, то его фокусы находятся в точках $\pm 2\sqrt{\varepsilon}$, точка на эллипсе

$$\tau=(1+\varepsilon)\cos\theta+i(1-\varepsilon)\sin\theta \;\Rightarrow\; |d\tau|=\sqrt{dx^2+dy^2}=\sqrt{1+\varepsilon^2-2\varepsilon\cos 2\theta}d\theta.$$

Обозначая градиент потенциала простого слоя для данного эллипса через $u(\varepsilon,z)$, получим

$$u(\varepsilon,z)=\int_0^{2\pi}\frac{\sqrt{1+\varepsilon^2-2\varepsilon\cos 2\theta}d\theta}{(1+\varepsilon)\cos\theta+i(1-\varepsilon)\sin\theta-z}. \tag{5}$$

Если $e^{i\theta}=t$, то

$$d\theta=\frac{dt}{it},\; \cos 2\theta=\frac{t^4+1}{2t^2},\; 1+\varepsilon^2-2\varepsilon\cos 2\theta=-\varepsilon\frac{t^4+1}{t^2}+1+\varepsilon^2=\frac{(t^2-\varepsilon)(1-\varepsilon t^2)}{t^2}.$$

Подставляя все в (5), имеем

$$u(\varepsilon,z)=\frac{1}{i}\int_{|t|=1}\frac{\sqrt{(t^2-\varepsilon)(1-\varepsilon t^2)}dt}{(t^2+1)(1+\varepsilon)+(t^2-1)(1-\varepsilon)-2tz}\frac{2t}{t^2}=\frac{1}{i}\int_{|t|=1}\frac{\sqrt{(t^2-\varepsilon)(1-\varepsilon t^2)}}{t(t-z)+\varepsilon}\frac{dt}{t}.$$

Разложим функцию

$$F(\varepsilon;t,z)=\frac{\sqrt{(t^2-\varepsilon)(1-\varepsilon t^2)}}{t[t(t-z)+\varepsilon]}$$

в ряд по степеням ε: $F(\varepsilon;t,z)=F(0;t,z)+\varepsilon F'_\varepsilon(0;t,z)+\frac{\varepsilon^2}{2}F''_{\varepsilon\varepsilon}(0;t,z)+\dots$. Этот ряд сходится при

$$\varepsilon<\min_{t,z}\left(|t|^2,\frac{1}{|t|^2},\frac{1}{|t(t-z)|}\right).$$

С помощью теорем о вычетах найдем

$$u^+(\varepsilon,z)=-\pi z\varepsilon-\frac{\pi z^3}{2}\varepsilon^2+\dots,\; z\in D^+,$$
$$u^-(\varepsilon,z)=-\frac{2\pi}{z}-\frac{3\pi}{z^3}\varepsilon+\dots,\; z\in D^-.$$

Кроме эллипса, можно отметить еще множество замкнутых аналитических линий L, для которых $u^+(z)\neq 0$. Эти линии характеризуются такими функциями Шварца $S(z)$, которые имеют изолированные точки ветвления в области D^-, причем $S(D^-)$ — конечнолистная риманова поверхность. Тогда у $\sqrt{S'(z)}$ точки ветвления перейдут от $S(z)$ и возможно добавятся новые точки ветвления в D^-. Поэтому $\sqrt{S'(z)}$ не может быть регулярной функцией в $D^-\Rightarrow u^+(z)\neq 0$.

Остается проанализировать вариант, когда у $S(z)$ в области D^- нет точек ветвления, но имеются нули у $S'(z)$ с поведением $S'(z) = (z-a)^n f_a(z)$, $f_a(a) \neq 0$, около точки a. При нечетном $n = 2m+1$ у функции $\sqrt{S'(z)}$ будет точка ветвления, значит, $\sqrt{S'(z)}$ не будет регулярной функцией и $u^+(z) \neq 0$.

Если же $n = 2m$, то a не будет точкой ветвления для $\sqrt{S'(z)}$. Примеры потенциалов с такими n авторами пока не построены.

В заключение отметим, что два нуля у $S'(z)$ для эллипса имеют порядок $n = 1$, так как

$$S''\left(\frac{a^2+b^2}{c}\right) = c^5/4a^2b^2 \neq 0.$$

3. Случай неоднолистной области D, приводящей к $u^+(z) \equiv 0$. Исследуем вопрос о равенстве $u^+(z) \equiv 0$ для класса функций, рассмотренных И.М. Рапо-портом. Среди линий L с уравнением

$$t = f(\tau) = \int_0^\tau P_n^2(\omega)d\omega,\ \tau = e^{i\theta},\ 0 \le \theta \le 2\pi, \tag{6}$$

где $P_n(\zeta) = a_n\zeta^n + \ldots + a_1\zeta + a_0$, найдем те, для которых

$$u^+(z) = \int_L \frac{|dt|}{t-z} \equiv 0 \tag{7}$$

при $z \in D^+$, $\partial D^+ = L$. Неоднолистную функцию нельзя назвать решением обратной задачи, но можно считать неоднолистным расширением формулы (6).

Так как

$$\frac{1}{t-z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{t^{k+1}},$$

причем этот ряд сходится при всех $t \in L$ в круге $|z| < \varepsilon$ при достаточно малом ε, то равенство (7) будет выполнено, если окажутся нулями все интегралы $J_k = \int_L \frac{|dt|}{t^{k+1}}$, $k = 0, 1, \ldots$.

В случае функций (6) эти интегралы запишутся в виде

$$J_k = \frac{1}{i}\int_{|\tau|=1} \frac{|P_n(\tau)|^2 d\tau}{\left(\int_0^\tau P_n^2(\omega)d\omega\right)^{k+1}} = \Big\{\overline{P_n(\tau)} = \bar{a}_n\bar{\tau}^n + \bar{a}_{n-1}\bar{\tau}^{n-1} + \ldots + \bar{a}_1\bar{\tau} + \bar{a}_0 = \tau^{-n}\tilde{P}_n(\tau),$$

$$\tilde{P}_n(\tau) = \bar{a}_n + \ldots + \bar{a}_1\tau^{n-1} + \bar{a}_0\tau^n\Big\} = \frac{1}{i}\int_{|\tau|=1} \frac{P_n(\tau)\tilde{P}_n(\tau)d\tau}{(\tau Q_{2n}(\tau))^{k+1}\,\tau^n} =$$

$$= -2\pi\text{выч}_\infty \frac{P_n(\zeta)\tilde{P}_n(\zeta)}{Q_{2n}^{k+1}(\zeta)\zeta^{n+k+1}} = 0,$$

если все нули полинома $Q_{2n}(\zeta)$ степени $2n$ расположены в круге $|\zeta| < 1$. Так как в круге $|\zeta| < 1$ у функции $f(\zeta) = \zeta Q_{2n}(\zeta)$ находится не менее трех нулей ($1 + 2n \ge 3$ при $n \ge 1$), то функция $f(\zeta)$ будет не менее чем трехлистной. Поэтому образ круга $|\zeta| < 1$ под действием $f(\zeta)$ будет неоднолистной областью, ее граница окажется кривой с самопересечениями.

Авторами пока не найдены линии L без самопересечений, которые решают поставленный вопрос о $u^+(z) \equiv 0$.

4. Новый вывод интегрального уравнения для градиента потенциала простого слоя. Дадим вывод уравнения А.А. Михеевой, более прозрачный, чем в статье [11].

Пусть $z = z(t)$ — функция, отображающая круг $E = \{|t| < 1\}$ на область D, $\partial D = L$. Предполагаем, что $z(0) = 0$, $z'(0) = c_1 > 0$. Обозначим $z(\tau) = \zeta$, $z(\tilde{\tau}) = \tilde{\zeta}$ для $\tau, \tilde{\tau} \in \partial E = \Gamma$.

Градиент потенциала простого слоя с постоянной плотностью ν представим в виде интеграла типа Коши

$$u^{\pm}(z) = \int_L \frac{\nu|d\tilde{\zeta}|}{\tilde{\zeta} - z} = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{2\pi i\nu\left(|d\tilde{\zeta}|/d\tilde{\zeta}\right)d\tilde{\zeta}}{\tilde{\zeta} - z}$$

при $z \in D^{\pm}$.

Запишем известную формулу для разности граничных значений интеграла типа Коши

$$u^{+}(\zeta) - u^{-}(\zeta) = 2\pi i\nu\frac{|d\zeta|}{d\zeta} \;\Rightarrow\; u^{+}(\zeta)d\zeta - u^{-}(\zeta)d\zeta = 2\pi i\nu|d\zeta|.$$

Перейдем от $\zeta \in L$ к $\tau \in \Gamma$ по формуле $\zeta = z(\tau)$, $\tau = e^{i\theta}$. Умножаем полученное равенство в форме

$$u^{+}(z(\tau))z'(\tau)d\tau - u^{-}(z(\tau))z'(\tau)d\tau = 2\pi i\nu|z'(\tau)||d\tau|$$

на $\frac{1}{2\pi i}\frac{\tau}{\tau - t}$ $(\sqrt{z'(0)} = \sqrt{c_1})$ и интегрируем по Γ. Получим

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{u^{+}(z(\tau))\tau\sqrt{z'(\tau)}d\tau}{\tau - t} - \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{u^{-}(z(\tau))\tau\sqrt{z'(\tau)}d\tau}{\tau - t} = \int_\Gamma \frac{\nu\sqrt{z'(\tau)}\tau|d\tau|}{\tau - t}.$$

Если $|t| > 1$, то первый интеграл в левой части последнего равенства будет равен нулю по теореме Коши.

Введем обозначение $h(t) = z'(1/\bar{t})$. Тогда интеграл в правой части легко выразить через вычеты, если ввести функцию $\sqrt{h(t)}$, регулярную при $|t| > 1$, причем $\sqrt{h(t)}|_{t=\infty} = \sqrt{c_1}$. Тогда

$$\int_\Gamma \frac{\sqrt{z'(\tau)}\tau|d\tau|}{\tau - t} = \frac{1}{i}\int_\Gamma \frac{\sqrt{h(\tau)}d\tau}{\tau - t} = -2\pi\left[\text{выч}_t\frac{\sqrt{h(\omega)}}{\omega - t} + \text{выч}_\infty\frac{\sqrt{h(\omega)}}{\omega - t}\right] =$$

$$= -2\pi\left(\sqrt{h(t)} - \sqrt{c_1}\right).$$

После этой процедуры интегральное уравнение приобретает вид

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{u^{-}(z(\tau))\tau\sqrt{z'(\tau)}d\tau}{\tau - t} = 2\pi\nu\left(\sqrt{h(t)} - \sqrt{c_1}\right). \tag{8}$$

Полученное уравнение несущественно (постоянным множителем в правой части) отличается от уравнения А.А. Михеевой [11].

5. Дополнения к результатам А.А. Михеевой. Уравнение (8) используем для доказательства результата А.А. Михеевой [11], дополненного следствием.

Теорема 2. *Если $u^{-}(z)$ является полиномом степени $n+1$ от $1/z$ и решение обратной задачи существует, то это решение имеет вид $L = z(\partial D)$, $\partial E = \{e^{i\theta}, 0 \le \theta \le 2\pi\}$ с функцией $z = \int_0^\zeta P_n^2(\omega)d\omega$, где $P_n(\zeta)$ — полином степени n от ζ.*

Наоборот, если функция, отображающая круг $E = \{\zeta : |\zeta| < 1\}$ на область D, имеет указанный вид с полиномом $P_n(\zeta)$, то $u^{-}(z)$ в виде (1) с $L = \partial D$ является полиномом степени $n+1$ от $1/z$.

Доказательство. Первое утверждение теоремы доказывается подстановкой в формулу (8) выражения

$$u^-[z(\zeta)] = \frac{A_1}{z(\zeta)} + \ldots + \frac{A_{n+1}}{z(\zeta)^{n+1}}.$$

Функция $F(\zeta) = u^-[z(\zeta)]\zeta\sqrt{z'(\zeta)}/(\zeta - t)$ при $|t| > 1$ будет иметь в круге E полюс порядка n в нуле. Поэтому

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial E} F(\tau)d\tau = \frac{1}{(n-1)!}\left[F(\zeta)\zeta^n\right]^{(n-1)}|_{\zeta=0} = \frac{\widetilde{a}_1}{t} + \ldots + \frac{\widetilde{a}_n}{t^n}.$$

Из формулы (8) выразим

$$\sqrt{\overline{h(t)}} = \sqrt{c_1} + \frac{a_1}{t} + \ldots + \frac{a_n}{t^n},\ a_k = \frac{\widetilde{a}_k}{2\pi\nu},\ k = \overline{1,n}.$$

После этого получим

$$z'(\zeta) = (\sqrt{c_1} + \bar{a}_1\zeta + \ldots + \bar{a}_n\zeta^n)^2 = P_n^2(\zeta)$$

и, окончательно, $z = \int_0^\zeta P_n^2(\omega)d\omega$. Второе утверждение теоремы 2 доказано в пункте 1 данной статьи. □

Следствие. Если $z'(\zeta)$ не представляется в виде квадрата многочлена, то градиент потенциала (1) не может быть многочленом по степеням $1/z$. Наоборот, если градиент (1) является бесконечным рядом по степеням $1/z$, то соответствующая отображающая функция не может иметь производную в виде квадрата многочлена.

Доказательство получается способом от противного с использованием теоремы 2.

6. Связь результатов В.К. Иванова и А.А. Михеевой. Обоснование теоремы 2 аналогично обоснованию результата В.К. Иванова [18] о полиномах в качестве решения обратной задачи для областного логарифмического потенциала. Центральным моментом в доказательстве является интегральное уравнение В.К. Иванова. Вывод этого уравнения можно дать с помощью формулы для предельных значений интеграла типа Коши (аналогично выводу уравнения (8)).

Запишем градиент областного потенциала в виде интеграла типа Коши [4]

$$u(z) = -\frac{2}{\pi}\int\int_D \frac{ds_\tau}{\tau - z} = -\frac{1}{\pi i}\int_{\partial D}\frac{\overline{\tau}d\tau}{\tau - z}.$$

Используем известную формулу, связывающую краевые значения этого интеграла

$$u^+(\omega) - u^-(\omega) = -2\overline{\omega},\ \omega \in \partial D. \tag{9}$$

Перейдем от (9) к уравнению на окружности $|t| = 1$ с помощью функции $\omega(\tau)$, конформно отображающей круг $|\tau| < 1$ на область $D \ni 0$ с нормировкой $\omega(0) = 0$. Граничные значения $\omega(\tau)$ этой функции подставим в (9):

$$u^+[\omega(t)] - u^-[\omega(t)] = -2\overline{\omega}(t) = -2\overline{\omega(1/\overline{t})}.$$

Полученное равенство вставим в интегральное соотношение

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{u^+[\omega(t)]dt}{t-\tau} - \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{u^-[\omega(t)]dt}{t-\tau} = -\frac{2}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\overline{\omega(1/\overline{t})}dt}{t-\tau},$$

где Γ — единичная окружность ∂E, а $\omega^{-1}(\overline{D}) = \overline{E}$. Рассмотрим функцию $\omega^*(t) = \overline{\omega(1/\overline{t})}$, заданную во внешности единичного круга. Тогда по теореме Коши первый интеграл в левой

части равен нулю, а интеграл в правой части окажется равным $\omega^*(\tau) = \overline{\omega(1/\bar{\tau})}$, так как $\omega^*(\infty) = \omega(0) = 0$. Получим уравнение

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{u^-[\omega(t)]dt}{t-\tau} = 2\omega^*(\tau), \tag{10}$$

которое отличается от уравнения В.К. Иванова [18] множителем (-2). Совпадение с уравнением в [18] будет обеспечено, если $u(z)$ взять в форме

$$u(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} \frac{\bar{\tau}d\tau}{\tau - z}.$$

С помощью интегрального уравнения (10) В.К. Ивановым получен следующий великолепный результат.

Теорема 3 ([19]). *Пусть $u^-(z)$ — рациональная функция, имеющая полюсы кратностей $k_1, k_2, \ldots, k_s$ $(k_1 + \ldots + k_s = n)$ в точках $z_1, z_2, \ldots, z_s$ и для нее существует решение обратной задачи с областным логарифмическим потенциалом. Тогда для отображающей функции $z(\zeta)$, $z(E) = D$ — искомая область, справедлива формула*

$$\overline{h(\zeta)} = \frac{P_{n-1}(\zeta)}{(\zeta-\zeta_1)^{k_1}\ldots(\zeta-\zeta_s)^{k_s}}, \ |\zeta| > 1, \tag{11}$$

где $P_{n-1}(\zeta)$ — полином степени $n-1$, а ζ_k — прообразы z_k при конформном отображении $z(\zeta)$, $k = \overline{1,s}$.

Действуя по схеме, аналогичной предложенной В.К. Ивановым в доказательстве теоремы 3, А.А. Михеева [11] получила для случая потенциала простого слоя переход

$$u^-(z) = \frac{Q_{n-1}(z)}{(z-z_1)^{n_1}\ldots(z-z_n)^{n_s}} \ \Rightarrow \ \sqrt{\overline{h(t)}} = \sqrt{c_1} + \frac{P_{n-1}(t)}{(t-t_1)^{n_1}\ldots(t-t_n)^{n_s}}$$

с полиномами $Q_{n-1}(z)$ и $P_{n-1}(t)$ степени $n-1$.

После этого перехода в статье [11] делается **неправильный** вывод о том, что $z(\zeta)$ будет рациональной функцией. На самом деле, в выражении для $z(\zeta)$ кроме рациональной части будет и логарифмическая часть. Для сохранения однозначности функции $z(\zeta)$ нужно выполнить условие

$$\sum_{k=1}^{s} \text{выч}_{t_k} z'(t) = 0,$$

получающееся при интегрировании функции $z'(\zeta)$. Рациональность функции $z(\zeta)$ в теореме 3 следует из формулы (11) нетрудной заменой $1/\zeta$ на ω. Именно

$$z(\omega) = \frac{\omega^n P_{n-1}(1/\omega)}{(1-\bar{\zeta}_1\omega)^{k_1}\ldots(1-\bar{\zeta}_s\omega)^{k_s}}.$$

Такую формулу для потенциала простого слоя получить нельзя.

Авторы благодарят рецензента за конструктивные замечания, учтенные в окончательном варианте статьи.

Литература

[1] Абубакиров Н.Р., Аксентьев Л.А. *О конечных решениях обратной задачи логарифмического потенциала*, Изв. вузов. Матем., №10, 65–69 (2016).

[2] Abubakirov N.R., Aksentev L.A. *Classes of finite solutions to the inverse problem of the logarithmic potential*, Lobachevskii J. Math., **39**, 151–160 (2018).

[3] Абубакиров Н.Р., Аксентьев Л.А. *О прямых и обратных задачах логарифмического потенциала с конечным числом параметров*, Изв. вузов. Матем., №8, 75–82 (2018).
[4] Abubakirov N.R., Aksentev L.A.*On Capabilities of Schwarz Function in the Problems of Logarithmic Potential*, Lobachevskii J. Math., **40** (8), 1146–1156 (2019).
[5] Рапопорт И.М. *Об одной задаче теории потенциала*, Укр. матем. журн., **2** (2), 48–55 (1950).
[6] Иванов В.К. *Избранные научные труды. Математика* (Физматлит, М., 2008).
[7] Прилепко А.И., Чередниченко В.Г. *Об одном классе обратных краевых задач для аналитических функций*, Дифференц.уравнения, **17** (10), 1900–1907 (1981).
[8] Пономарев С.П. *О логарифмическом потенциале, определяемом кривой Ван Коха*, СМЖ, **50** (5), 1137–1147 (2009).
[9] Жданов М.С. *Аналоги интеграла типа Коши в теории геофизических полей* (Наука, М., 1984).
[10] Цирульский А.В. *Функции комплексного переменного в теории и методах потенциальных геофизических полей*, УрО АН СССР, Свердловск, 1990.
[11] Михеева А.А. *Интегральное уравнение обратной задачи логарифмического потенциала простого слоя*, Учен. зап. Уральск. гос. ун-та, вып. 23, 10–14 (1960).
[12] Иванов В.К., Чудинова А.А. *Об одном способе нахождения гармонических моментов возмущающих масс.* Изв. АН СССР, Физика Земли, №3, 55–62 (1966).
[13] Чудинова А.А. *Обратная задача потенциала простого слоя для тела, близкого данному.* Изв. вузов. Матем., №5, 140–150 (1965).
[14] Чудинова А.А. *Обратная задача электроразведки.* Изв. вузов. Матем., №6, 150–155 (1965).
[15] Голузин Г.М. *Геометрическая теория функций комплексного переменного* (Наука, М., 1966).
[16] Davis Ph.J. *The Schwarz function and its applications*, Carus Math. Monographs, №17 (1974).
[17] Обносов Ю.В. *Краевые задачи теории гетерогенных сред* (Казань, 2009).
[18] Иванов В.К. *Интегральное уравнение обратной задачи логарифмического потенциала*, ДАН СССР, **105** (3), 409–411 (1955).
[19] Иванов В.К. *О разрешимости обратной задачи логарифмического потенциала в конечном виде*, ДАН СССР, **106** (4), 598–599 (1956).

Наиль Ренатович Абубакиров

Казанский федеральный университет,
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия,

e-mail: nail.abubakirov@kpfu.ru

Леонид Александрович Аксентьев

Казанский федеральный университет,
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия,

e-mail: laksente@gmail.com

N.R. Abubakirov and L.A. Aksent'ev

Direct and inverse problems for the simple layer logarithmic potential

Abstract. With the help of Cauchy-type integrals, a new derivation of integral equations for solving logarithmic potential problems is given. The inverse problem is analyzed with two star-shaped solutions containing a smaller number of parameters than in the more difficult similar examples of I.M. Rapoport. The criterion of conversion to the identical constant of the internal potential of a simple layer is proved.

Keywords: logarithmic potential of a simple layer, convexity and star-like conditions, Cauchy-type integral.

Nail' Renatovich Abubakirov

Kazan Federal University,
18 Kremlyovskaya str., Kazan, 420008 Russia,

e-mail: nail.abubakirov@kpfu.ru

Leonid Aleksandrovich Aksent'ev
Kazan Federal University,
18 Kremlyovskaya str., Kazan, 420008 Russia,

e-mail: laksente@gmail.com