Известия вузов. Математика
2023, №10, с. 77–82

https://kpfu.ru/science/nauchnye-izdaniya/ivrm
e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru

Краткое сообщение

А.М. БИКЧЕНТАЕВ

ОПЕРАТОР БЛОЧНОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ В АЛГЕБРЕ ИЗМЕРИМЫХ ОПЕРАТОРОВ

Аннотация. Пусть τ — точный нормальный полуконечный след на алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$. Исследован оператор блочного проектирования $\mathcal{P}_n$ $(n \geq 2)$ в *-алгебре $S(\mathcal{M}, \tau)$ всех τ-измеримых операторов. Показано, что $A \leq n\mathcal{P}_n(A)$ для каждого оператора $A \in S(\mathcal{M}, \tau)^+$. Если оператор $A \in S(\mathcal{M}, \tau)^+$ обратим в $S(\mathcal{M}, \tau)$, то $\mathcal{P}_n(A)$ обратим в $S(\mathcal{M}, \tau)$. Пусть $A = A^* \in S(\mathcal{M}, \tau)$. Тогда (i) если $\mathcal{P}_n(A) \leq A$ (или $\mathcal{P}_n(A) \geq A$), то $\mathcal{P}_n(A) = A$; (ii) $\mathcal{P}_n(A) = A$ тогда и только тогда, когда $P_kA = AP_k$ для всех $k = 1, \ldots, n$; (iii) если $A, \mathcal{P}_n(A) \in \mathcal{M}$ являются проекторами, то $\mathcal{P}_n(A) = A$. Получены четыре следствия. Уточнен и усилен один пример из работы "A. Bikchentaev, F. Sukochev, *Inequalities for the block projection operators*, J. Funct. Anal. **280** (7), article 108851, 18 p. (2021)".

Ключевые слова: гильбертово пространство, алгебра фон Неймана, след, измеримый оператор, оператор блочного проектирования.

УДК: 517.98

DOI: 10.26907/0021-3446-2023-10-77-82

Введение

Пусть τ — точный нормальный полуконечный след на алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$. Исследованы свойства оператора блочного проектирования $\mathcal{P}_n$ $(n \geq 2)$ в *-алгебре $S(\mathcal{M}, \tau)$ всех τ-измеримых операторов. Показано, что $A \leq n\mathcal{P}_n(A)$ для каждого оператора $A \in S(\mathcal{M}, \tau)^+$. Если оператор $A \in S(\mathcal{M}, \tau)^+$ обратим в $S(\mathcal{M}, \tau)$, то $\mathcal{P}_n(A)$ обратим в $S(\mathcal{M}, \tau)$ (теорема 1). Пусть $A = A^* \in S(\mathcal{M}, \tau)$. Тогда (i) если $\mathcal{P}_n(A) \leq A$ (или $\mathcal{P}_n(A) \geq A$), то $\mathcal{P}_n(A) = A$; (ii) $\mathcal{P}_n(A) = A$ тогда и только тогда, когда $P_kA = AP_k$ для всех $k = 1, \ldots, n$; (iii) если $A, \mathcal{P}_n(A) \in \mathcal{M}$ являются проекторами, то $\mathcal{P}_n(A) = A$ (теорема 2). Отсюда получены 4 следствия. В теореме 3 уточнен и усилен один пример из [1]. Для алгебры $\mathcal{M} = \mathcal{B}(\mathcal{H})$ и следа $\tau = \mathrm{tr}$ оператор $\mathcal{P}_n$ был исследован в книге [2]; для нормированных идеальных пространств τ-измеримых операторов на полуконечной алгебре фон Неймана — в [3]. В контексте C^*-алгебр оператор $\mathcal{P}_n$ был изучен в [4].

1. Обозначения, определения и предварительные сведения

Пусть $\mathcal{M}$ — алгебра фон Неймана операторов в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, $\mathcal{M}^{\mathrm{pr}}$ — решетка проекторов ($P = P^2 = P^*$) в $\mathcal{M}$, I — единица $\mathcal{M}$, $P^\perp = I - P$ для $P \in \mathcal{M}^{\mathrm{pr}}$,

Поступила в редакцию 26.08.2023, после доработки 26.08.2023. Принята к публикации 26.09.2023.

Благодарности. Работа выполнена за счет средств Программы стратегического академического лидерства Казанского (Приволжского) федерального университета ("ПРИОРИТЕТ-2030").

$\mathcal{M}^+$ — конус положительных элементов из $\mathcal{M}$. Отображение $\varphi : \mathcal{M}^+ \to [0, +\infty]$ называется *следом*, если $\varphi(X+Y) = \varphi(X) + \varphi(Y)$, $\varphi(\lambda X) = \lambda\varphi(X)$ для всех $X, Y \in \mathcal{M}^+$, $\lambda \geq 0$ (при этом $0 \cdot (+\infty) \equiv 0$) и $\varphi(Z^*Z) = \varphi(ZZ^*)$ для всех $Z \in \mathcal{M}$. След φ называется

- *точным*, если $\varphi(X) > 0$ для всех $X \in \mathcal{M}^+$, $X \neq 0$;
- *нормальным*, если $X_i \nearrow X$ $(X_i, X \in \mathcal{M}^+) \Rightarrow \varphi(X) = \sup \varphi(X_i)$;
- *полуконечным*, если $\varphi(X) = \sup\{\varphi(Y) : \ Y \in \mathcal{M}^+, \ Y \leq X, \ \varphi(Y) < +\infty\}$ для каждого $X \in \mathcal{M}^+$ (см. [5]). Оператор в $\mathcal{H}$ (не обязательно ограниченный или плотно определенный) называется *присоединенным к алгебре фон Неймана* $\mathcal{M}$, если он перестановочен с любым унитарным оператором из коммутанта $\mathcal{M}'$ алгебры $\mathcal{M}$. Далее всюду τ — точный нормальный полуконечный след на $\mathcal{M}$. Замкнутый оператор X, присоединенный к $\mathcal{M}$, имеющий всюду плотную в $\mathcal{H}$ область определения $\mathcal{D}(X)$, называется *τ-измеримым*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такой $P \in \mathcal{M}^{\mathrm{pr}}$, что $P\mathcal{H} \subset \mathcal{D}(X)$ и $\tau(P^\perp) < \varepsilon$. Множество $S(\mathcal{M}, \tau)$ всех τ-измеримых операторов является *-алгеброй относительно перехода к сопряженному оператору, умножению на скаляр и операций сильного сложения и умножения, получаемых замыканием обычных операций. Для семейства $\mathcal{L} \subset S(\mathcal{M}, \tau)$ обозначим через $\mathcal{L}^+$ и $\mathcal{L}^{\mathrm{h}}$ его положительную и эрмитову части соответственно. Частичный порядок в $S(\mathcal{M}, \tau)^{\mathrm{h}}$, порожденный собственным конусом $S(\mathcal{M}, \tau)^+$, будем обозначать через $\leq$. Если $X \in S(\mathcal{M}, \tau)$ и $X = U|X|$ — полярное разложение X, то $U \in \mathcal{M}$ и $|X| = \sqrt{X^*X} \in S(\mathcal{M}, \tau)^+$. Через $S_0(\mathcal{M}, \tau)$ обозначим идеал всех τ-компактных операторов в $S(\mathcal{M}, \tau)$.

2. Неравенства для оператора блочного проектирования

Пусть $P_1, \ldots, P_n \in \mathcal{M}$ — проекторы с $P_1 + \ldots + P_n = I$. Определим оператор блочного проектирования $\mathcal{P}_n : S(\mathcal{M}, \tau) \to S(\mathcal{M}, \tau)$ формулой

$$\mathcal{P}_n(X) = \sum_{k=1}^{n} P_k X P_k \quad (X \in S(\mathcal{M}, \tau)).$$

Лемма 1. *Имеем $A \leq n\mathcal{P}_n(A)$ для каждого оператора $A \in S(\mathcal{M}, \tau)^+$.*

Поскольку $(X - Y)(X - Y)^* \geq 0$ для всех $X, Y \in S(\mathcal{M}, \tau)$, получаем

$$P_k A P_j + P_j A P_k = P_k A^{1/2}(P_j A^{1/2})^* + P_j A^{1/2}(P_k A^{1/2})^* \leq P_k A P_k + P_j A P_j$$

для всех $k, j = 1, \ldots, n$. Следовательно,

$$A - \mathcal{P}_n(A) = \sum_{k,j=1;k<j}^{n} P_k A P_j + P_j A P_k \leq \sum_{k,j=1;k<j}^{n} P_k A P_k + P_j A P_j = (n-1)\mathcal{P}_n(A).$$

Из спектральной теоремы и определения τ-измеримого оператора вытекает

Лемма 2. *Оператор $A \in S(\mathcal{M}, \tau)^+$ обратим в $S(\mathcal{M}, \tau)$ тогда и только тогда, когда*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0 \ \ \exists P \in \mathcal{M}^{\mathrm{pr}} \quad (\tau(P^\perp) < \varepsilon, \ \ PAP \geq \delta P).$$

Теорема 1. *Если оператор $A \in S(\mathcal{M}, \tau)^+$ обратим в $S(\mathcal{M}, \tau)$ (соответственно в $\mathcal{M}$), то $\mathcal{P}_n(A)$ обратим в $S(\mathcal{M}, \tau)$ (соответственно в $\mathcal{M}$).*

Пусть число $\varepsilon > 0$ — произвольно и оператор $A \in S(\mathcal{M}, \tau)^+$ обратим в $S(\mathcal{M}, \tau)$. В силу леммы 2 найдется число $\delta > 0$ и проектор $P \in \mathcal{M}$ такие, что $\tau(P^\perp) < \varepsilon$ и $PAP \geq \delta P$. В силу леммы 1 имеем $\mathcal{P}_n(A) \geq n^{-1}A$. Умножив обе стороны этого неравенства на проектор P слева и справа, с учетом соотношения $PAP \geq \delta P$ получаем

$$P\mathcal{P}_n(A)P \geq n^{-1}PAP \geq \frac{\delta}{n}P.$$

Следовательно, $\mathcal{P}_n(A)$ обратим в $S(\mathcal{M},\tau)$ в силу леммы 2.

Пример. Если $Q \in \mathcal{M}^{\mathrm{pr}}$ и $P_kQP_k \geq \lambda_k P_k$ с некоторым $\lambda_k > 0$ для всех $k = 1,\ldots,n$, то $\mathcal{P}_n(Q)$ обратим в $\mathcal{M}$. Для $\lambda = \min_{1\leq k\leq n}\lambda_k$ имеем

$$\mathcal{P}_n(Q) = \sum_{k=1}^{n} P_kQP_k \geq \sum_{k=1}^{n} \lambda_k P_k \geq \sum_{k=1}^{n} \lambda P_k = \lambda I.$$

В частности, $\mathcal{P}_n(Q) = \dfrac{1}{n} I$ в $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ для одномерных проекторов

$$P_k = \mathrm{diag}(\underbrace{0,\ldots,0,}_{k-1}1,0,\ldots,0), \quad Q = [q_{ij}]_{i,j=1}^n, \;\; q_{ij} = \frac{1}{n}, \;\; i,j,k = 1,\ldots,n.$$

Таким образом, $\mathcal{P}_n(Q)$ является обратимым, и не существует константы $c > 0$ такой, что $\mathcal{P}_n(Q) \leq cQ$ (ср. с леммой 1).

Теорема 2. *Пусть* $A \in S(\mathcal{M},\tau)^{\mathrm{h}}$, $n \geq 2$.
 (i) *Если* $\mathcal{P}_n(A) \leq A$ *(или* $\mathcal{P}_n(A) \geq A$*), то* $\mathcal{P}_n(A) = A$.
 (ii) *Имеем* $\mathcal{P}_n(A) = A$ *тогда и только тогда, когда* $P_kA = AP_k$ *для всех* $k = 1,\ldots,n$.
 (iii) *Если* $A, \mathcal{P}_n(A) \in \mathcal{M}^{\mathrm{pr}}$, *то* $\mathcal{P}_n(A) = A$.

Схема доказательства. (i) Воспользуемся индукцией. Для $n = 2$ имеем

$$\mathcal{P}_2(A) = P_1AP_1 + P_1^{\perp}AP_1^{\perp} = \frac{1}{2}(A + SAS)$$

с унитарным оператором $S = 2P_1 - I \in \mathcal{M}^{\mathrm{sa}}$. Из неравенства $\mathcal{P}_2(A) \leq A$ выводим $SAS \leq A$. Умножив обе стороны этого неравенства на S слева и справа, получаем $A \leq SAS$. Таким образом, $A = SAS$ и $\mathcal{P}_2(A) = A$.

Предположение индукции: пусть неравенство $\mathcal{P}_{n-1}(B) \leq B$ влечет равенство $\mathcal{P}_{n-1}(B) = B$ для каждой алгебры фон Неймана $\mathcal{N}$ с произвольным точным нормальным полуконечным следом φ для всех $B \in S(\mathcal{N},\varphi)^{\mathrm{h}}$, и $P_1,\ldots,P_{n-1} \in \mathcal{N}^{\mathrm{pr}}$ с $P_1 + \ldots + P_{n-1} = I_{\mathcal{N}}$. Пусть $A \in S(\mathcal{M},\tau)^{\mathrm{h}}$, $P_1,\ldots,P_n \in \mathcal{M}^{\mathrm{pr}}$ с $P_1 + \ldots + P_n = I_{\mathcal{M}}$ и

$$A \geq \sum_{k=1}^{n} P_kAP_k. \tag{1}$$

Рассмотрим проектор $P = P_1 + \ldots + P_{n-1} = P_n^{\perp}$ и редуцированную алгебру фон Неймана $\mathcal{N} = \mathcal{M}_P = P\mathcal{M}P$ с редуцированным точным нормальным полуконечным следом $\tau_P = \tau(P\,\cdot\,P)$. Тогда $P = I_{\mathcal{N}}$ и $S(\mathcal{N},\tau_P) = PS(\mathcal{M},\tau)P$. Умножив обе стороны соотношения (1) на проектор P слева и справа, получаем

$$PAP \geq \sum_{k=1}^{n-1} PP_kAP_kP = \sum_{k=1}^{n-1} P_k \cdot PAP \cdot P_k,$$

т. е. $\mathcal{P}_{n-1}(PAP) \leq PAP$. По предположению индукции для редуцированной алгебры $\mathcal{M}_P$ с редуцированным следом τ_P выводим, что

$$PAP = \mathcal{P}_{n-1}(PAP) = \sum_{k=1}^{n-1} P_k \cdot PAP \cdot P_k = \sum_{k=1}^{n-1} P_kAP_k.$$

Следовательно, для унитарного оператора $S = 2P_n - I$ имеем

$$PAP + P^{\perp}AP^{\perp} = \frac{1}{2}(A + SAS) = \sum_{k=1}^{n} P_k A P_k, \tag{2}$$

и в силу неравенства $A \geq \mathcal{P}_n(A)$ получаем $SAS \leq A$. Умножив обе стороны этого неравенства на унитарный оператор S слева и справа, получаем $A \leq SAS$. Таким образом, $A = SAS$ и в силу (2) заключаем, что $\mathcal{P}_n(A) = A$.

Для случая $\mathcal{P}_n(A) \geq A$ рассмотрим $B = -A$.

(ii) Умножив обе стороны равенства $\mathcal{P}_n(A) = A$ на проектор P_k слева (соответственно справа), получаем $P_kAP_k = P_kA$ (соответственно $P_kAP_k = AP_k$) для всех $k = 1, \ldots, n$. Поэтому $P_kA = AP_k$ для всех $k = 1, \ldots, n$.

(iii) Для каждого оператора $A \in S(\mathcal{M}, \tau)$ и числа $n \geq 2$ выполнено следующее представление:

$$\mathcal{P}_n(A) = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} S_k A S_k, \tag{3}$$

где унитарные операторы $S_k \in \mathcal{M}^{\rm sa}$ имеют вид $P_1 \pm P_2 \pm \ldots \pm P_n$ (см. [3], лемма 2; [1], доказательство теоремы 3.1). Следовательно, проектор $\mathcal{P}_n(A)$ является выпуклой комбинацией проекторов S_kAS_k, $k = 1, \ldots, 2^{n-1}$. Поскольку $\mathcal{M}^{\rm pr}$ лежит в множестве $\mathrm{extr}\{X \in \mathcal{M}^+ : \|X\| \leq 1\}$ крайних точек положительной части единичного шара алгебры $\mathcal{M}$ ([6], гл. 2, 2.8.14), выводим, что $\mathcal{P}_n(A) = S_kAS_k$ для всех $k = 1, \ldots, 2^{n-1}$. Положим $S_1 = P_1 + \ldots + P_n = I$ в (3). Таким образом, $\mathcal{P}_n(A) = A$.

Заметим, что из представления (3) следует следующая ослабленная версия леммы 1: $A \leq 2^{n-1}\mathcal{P}_n(A)$ для всех $A \in S(\mathcal{M}, \tau)^+$ и $n \geq 2$.

Следствие 1. Пусть $A, B \in S(\mathcal{M}, \tau)^{\rm h}$, $A \geq B$ и $\mathcal{P}_n(A) \leq B$. Тогда $A = B$ и $\mathcal{P}_n(A) = A$.

Умножив обе стороны неравенства $A \geq B$ на проектор P_k слева и справа, получаем $P_kAP_k \geq P_kBP_k$ для всех $k = 1, \ldots, n$. Затем умножив обе стороны неравенства $\mathcal{P}_n(A) \leq B$ на проектор P_k слева и справа, имеем $P_kAP_k \leq P_kBP_k$ для всех $k = 1, \ldots, n$. Значит, $P_kAP_k = P_kBP_k$ для всех $k = 1, \ldots, n$, т.е. $P_k(A - B)P_k = |\sqrt{A - B}P_k|^2 = 0$ для всех $k = 1, \ldots, n$. Таким образом, $\sqrt{A - B}P_k = 0$ для всех $k = 1, \ldots, n$. Суммируя эти равенства для $k = 1, \ldots, n$, получаем $\sqrt{A - B} = 0$, т. е. $A = B$ и $\mathcal{P}_n(A) = A$. Поэтому $P_kA = AP_k$ для всех $k = 1, \ldots, n$.

Следствие 2. Пусть $A, B \in S(\mathcal{M}, \tau)^{\rm h}$, $A \geq B$ и $\mathcal{P}_n(A) = \mathcal{P}_n(B)$. Тогда $A = B$. В частности, если $A \in S(\mathcal{M}, \tau)^+$ и $\mathcal{P}_n(A) = 0$, то $A = 0$.

Следствие 3. Если $P_1, \ldots, P_n$ — проекторы из $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ с $P_1 + \ldots + P_n = I$ и $P_1\mathcal{H}, \ldots, P_n\mathcal{H}$ являются инвариантными подпространствами оператора $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, то $P_kA = AP_k$ для всех $k = 1, \ldots, n$.

Поскольку $AP_k = P_kAP_k$ для всех $k = 1, \ldots, n$, имеем

$$\mathcal{P}_n(A) = \sum_{k=1}^{n} P_kAP_k = \sum_{k=1}^{n} AP_k = A\sum_{k=1}^{n} P_k = A.$$

В силу (3) имеем $\tau(\mathcal{P}_n(A)) = \tau(A)$ для всех $A \in S(\mathcal{M}, \tau)^+$; также $\varphi(\mathcal{P}_n(A)) = \varphi(A)$ для всех следов φ на $\mathcal{M}$ и $A \in \mathcal{M}^+$.

Следствие 4. Если $\mathcal{M} = \mathbb{M}_m(\mathbb{C})$ с $2 \leq n \leq m$ и $\tau = \mathrm{tr}$, то выполнено соотношение для определителей: $\det(\exp(\mathcal{P}_n(A))) = \exp(\mathrm{tr}(A))$ для всех $A \in \mathcal{M}$.

Достаточно применить равенство ([7], гл. I, §4.16, формула (1))

$$\det(\exp(A)) = \exp(\mathrm{tr}(A)) \ \text{ для всех } \quad A \in \mathcal{M}.$$

Теорема 3. *Существуют алгебра фон Неймана $\mathcal{M}$ с точным нормальным полуконечным следом τ, последовательность $\{P_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{M}^{\mathrm{pr}}$ с $P_iP_j = 0$ при $i \neq j$, оператор $Y \in S_0(\mathcal{M}, \tau)$ такие, что $\sum\limits_{k=1}^{\infty} P_k Y P_k \notin S(\mathcal{M}, \tau)$.*

Схема доказательства. Шаг 1. Для каждой алгебры фон Неймана $\mathcal{N}$, для каждой последовательности $\{P_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{N}^{\mathrm{pr}}$ с $P_iP_j = 0$ при $i \neq j$ имеем $\sum\limits_{k=1}^{\infty} P_k A P_k \in \mathcal{N}$ для каждого оператора $A \in \mathcal{N}$ (см. [8]).

Шаг 2. Для каждой алгебры фон Неймана $\mathcal{M}$ с точным нормальным полуконечным следом τ имеем разложения $S(\mathcal{M}, \tau) = \mathcal{M} + S_0(\mathcal{M}, \tau)$ и $S(\mathcal{M}, \tau)^+ = \mathcal{M}^+ + S_0(\mathcal{M}, \tau)^+$, т. е. каждый оператор $A \in S(\mathcal{M}, \tau)$ можно представить в виде $X + Y$ с $X \in \mathcal{M}$ и $Y \in S_0(\mathcal{M}, \tau)$ (см. [9]).

Шаг 3. Существуют алгебра фон Неймана $\mathcal{M}$ с точным нормальным полуконечным следом τ, последовательность $\{P_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{M}^{\mathrm{pr}}$ с $P_iP_j = 0$ при $i \neq j$, оператор $A \in S(\mathcal{M}, \tau)$ такие, что $\sum\limits_{k=1}^{\infty} P_k A P_k \notin S(\mathcal{M}, \tau)$ (см. [1], приложение).

Шаг 4. Для $A \in S(\mathcal{M}, \tau)$ и $\{P_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{M}^{\mathrm{pr}}$ из шага 3 применяем шаги 2 и 1.

Литература

[1] Bikchentaev A., Sukochev F. *Inequalities for the block projection operators*, J. Funct. Anal. **280** (7), article 108851, 18 p. (2021).

[2] Гохберг И.Ц., Крейн М.Г. *Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве* (Наука, М., 1965).

[3] Бикчентаев А.М. *Оператор блочного проектирования в нормированных идеальных пространствах измеримых операторов*, Изв. вузов. Матем. (2), 86–91 (2012).

[4] Bikchentaev A. *Trace inequalities for Rickart C^*-algebras*, Positivity **25** (5), 1943–1957 (2021).

[5] Takesaki M. *Theory of operator algebras*. I. *Encyclopaedia of Mathematical Sciences,* 124. *Operator Algebras and Non-commutative Geometry,* 5 (Springer-Verlag, Berlin, 2002).

[6] Kadison R.V., Ringrose J.R. *Fundamentals of the theory of operator algebras.* Vol. I. *Elementary theory.* (*Graduate Studies in Mathematics,* 15) (Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1997).

[7] Маркус М., Минк Х. *Обзор по теории матриц и матричных неравенств* (Наука, М., 1972).

[8] Chilin V., Krygin A., Sukochev F. *Extreme points of convex fully symmetric sets of measurable operators*, Integr. Equat. Oper. Theory **15** (2), 186–226 (1992).

[9] Ströh A., West G.P. *τ-compact operators affiliated to a semifinite von Neumann algebra*, Proc. Roy. Irish Acad. Sect. A **93** (1), 73–86 (1993).

Айрат Мидхатович Бикчентаев

Казанский федеральный университет,
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия,

e-mail: Airat.Bikchentaev@kpfu.ru

A.M. Bikchentaev

A block projection operator in the algebra of measurable operators

Abstract. Let τ be a faithful normal semifinite trace on a von Neumann algebra $\mathcal{M}$. We investigate the block projection operator $\mathcal{P}_n$ $(n \geq 2)$ in the *-algebra $S(\mathcal{M}, \tau)$ of all τ-measurable operators. We show that $A \leq n\mathcal{P}_n(A)$ for any operator $A \in S(\mathcal{M}, \tau)^+$. If an operator $A \in S(\mathcal{M}, \tau)^+$ is invertible in $S(\mathcal{M}, \tau)$ then $\mathcal{P}_n(A)$ is invertible in $S(\mathcal{M}, \tau)$. Consider $A = A^* \in S(\mathcal{M}, \tau)$. Then (i) if $\mathcal{P}_n(A) \leq A$ (or if $\mathcal{P}_n(A) \geq A$) then $\mathcal{P}_n(A) = A$; (ii) $\mathcal{P}_n(A) = A$ if and only if $P_k A = AP_k$ for all $k = 1, \ldots, n$; (iii) if $A, \mathcal{P}_n(A) \in \mathcal{M}$ are projections then $\mathcal{P}_n(A) = A$. We obtain 4 corollaries. We also refined and reinforced one example from the paper "A. Bikchentaev, F. Sukochev, *Inequalities for the block projection operators*, J. Funct. Anal. **280** (7), article 108851, 18 p. (2021)".

Keywords: Hilbert space, von Neumann algebra, trace, measurable operator, block projection operator.

Airat Midkhatovich Bikchentaev

Kazan Federal University,
18 Kremlyovskaya str., Kazan, 420008 Russia,

`e-mail:` Airat.Bikchentaev@kpfu.ru