

УДК 004.4

## ЦИФРОВАЯ ЭКОСИСТЕМА OntoMath КАК ПОДХОД К ПОСТРОЕНИЮ ПРОСТРАНСТВА МАТЕМАТИЧЕСКИХ ЗНАНИЙ

А. М. Елизаров<sup>1</sup> [0000-0003-2546-6897], А. В. Кириллович<sup>2</sup> [0000-0001-9680-449X],  
Е. К. Липачёв<sup>3</sup> [0000-0001-7789-2332], О. А. Невзорова<sup>4</sup> [0000-0001-8116-9446]

<sup>1-4</sup>Казанский федеральный университет, ул. Кремлевская, 35, г. Казань, 420008

<sup>1, 2</sup>Казанское отделение Межведомственного суперкомпьютерного центра  
Российской академии наук, ул. Лобачевского, 2, г. Казань, 420008

<sup>1</sup>amelizarov@gmail.com, <sup>2</sup>al.kirillovich@gmail.com, <sup>3</sup>elipachev@gmail.com,

<sup>4</sup>onevzoro@gmail.com

### **Аннотация**

Представлены результаты по созданию методов управления математическим знанием в контексте цифровых математических библиотек. Программные инструменты, разработанные на основе этих методов, являются частью цифровой экосистемы OntoMath, в рамках которой осуществляется их взаимодействие. Приведено краткое описание архитектуры экосистемы OntoMath, выделены уровни предметных онтологий и внешних онтологий, а также уровень программных инструментов и сервисов. В отдельную категорию выделены семантические сервисы. Этим термином обозначены программные инструменты, в функционале которых используются запросы к предметным онтологиям для обеспечения управления объектами знаний. Даны общие описания разрабатываемых предметных онтологий: образовательной математической онтологии OntoMath<sup>Edu</sup> и онтологии профессиональной математики OntoMath<sup>PRO</sup>. Отражено развитие образовательной онтологии в направлении включения образовательных пререквизитных связей между классами. Среди программных инструментов цифровой экосистемы выделены сервисы поиска по математическим электронным коллекциям, сервис семантического аннотирования математических документов, инструменты семантической разметки образовательных математических документов, а также система автоматической генерации проверочных тестов по математическим образовательным дисциплинам.

В рамках цифровой экосистемы OntoMath развиваются рекомендательные системы специального назначения. В текущей версии экосистемы представлены рекомендательная система формирования списка близких статей, основанная на онтологии OntoMath<sup>PRO</sup>, рекомендательная система назначения экспертов для поддержки процесса научного рецензирования и рекомендательные системы подбора предметных классификаторов УДК и кодов Mathematics Subject Classification для математических документов. Приведены также результаты, полученные в направлении создания фабрики метаданных цифровой библиотеки, включающей сервисы и инструменты извлечения, уточнения, пополнения и нормализации метаданных документов электронных математических коллекций. Отметим, что экосистема OntoMath разрабатывается как технологическая основа цифровой математической библиотеки Lobachevskii-DML.

**Ключевые слова:** Цифровая экосистема, экосистема OntoMath, цифровая математическая библиотека, Lobachevskii-DML, онтология, математическая онтология OntoMath<sup>PRO</sup>, образовательная онтология OntoMath<sup>Edu</sup>.

## ВВЕДЕНИЕ

Повсеместное применение компьютерных технологий в научных исследованиях, наблюдаемое в настоящее время, привело к качественным изменениям в процессах распространения научных знаний. Отметим из них, как наиболее заметные, переход к электронным формам научных документов и возникновение сетевого научного пространства. Совокупность этих изменений ряд авторов определяет как Вторую научную революцию, по аналогии с Первой научной революцией, которую связывают с профессионализацией создания знаний (см., например, [1]).

В настоящее время компьютерные технологии используются на всех этапах жизненного цикла научного документа. Научные издательства и отдельные журналы разрабатывают и используют в своей практике специализированные информационные системы (например, [2, 3]). Получили распространение новые формы научных публикаций, для поддержки жизненного цикла которых разрабатываются новые информационные среды (см. [4, 5]). Существенно изменилась и инфраструктура современных научных изданий – речь уже идет не только о формах и средствах использования информационных технологий, но, прежде всего, о создании

программных платформ, предлагающих систему сервисов для работы с электронным научным контентом (например, [6]).

Особенности, присущие математическим текстам, оказывают влияние на эффективность использования универсальных программных инструментов, и, как правило, с их помощью не удастся достичь желаемых результатов. Формульная составляющая – наиболее заметная особенность математических документов. Научные результаты в статьях по математике во многих случаях выражаются именно в формулах, а текст играет вспомогательную роль. В качестве примера на Рис. 1 приведен фрагмент документа, целиком состоящий из формул и почти не содержащий текста. Отметим также, что совершенно одинаковые формулировки теорем могут иметь качественные различия по объявленным в них результатам, таковыми, например, являются теоремы об улучшении оценок приближений или справочники по специальным разделам математики. Поэтому для эффективной работы с математическими документами требуется разработка методов, использующих семантику не только текстов, но и формул [7, 8]. Также при обработке математических документов важно учитывать их логическую структуру. Она определяется строгой последовательностью объектов, таких как определения, леммы, теоремы, доказательства, следствия, примеры, в которых явно или латентно присутствуют связи с объектами других документов.

В рамках проекта построения Всемирной цифровой математической библиотеки (World Digital Mathematics Library – WDML) предложена парадигма управления математическими знаниями и представления математических документов на основе извлечения из них объектов знания и определения семантических связей между ними [9]. Сегодня на основе классификации математических объектов разрабатываются методы и интеллектуальные программные инструменты обработки математических документов. В частности, создаются сервисы, предназначенные для обработки математических формул (см., например, [10–13]). Имеется также ряд подходов к реализации поиска по формулам (например, [8, 14, 15]).

$$A_*^{(2)} = \begin{pmatrix} \Delta^6(\Delta + A)^3 & 0 & 0 & 0 \\ A_{*21}^{(2)} & \Delta^6(\Delta + A)^3 & 0 & 0 \\ A_{*31}^{(2)} & A_{*32}^{(2)} & \Delta^6(\Delta + A)^3 & 0 \\ A_{*41}^{(2)} & A_{*42}^{(2)} & A_{*43}^{(2)} & \Delta^6(\Delta + A)^3 \end{pmatrix}$$

where the elements of the matrices  $A_*^{(1)}$  and  $A_*^{(2)}$  have the view

$$\begin{aligned} A_{*11}^{(1)} &= A_{*22}^{(1)} = A_{*33}^{(1)} = A_{*44}^{(1)} = A_{*55}^{(1)} = \Delta^8(\Delta + A)^4, & A_{*21}^{(1)} &= -\frac{3}{h^2}\Delta^7(\Delta + A)^3(3\Delta + 2A), \\ A_{*12}^{(1)} &= A_{*13}^{(1)} = A_{*14}^{(1)} = A_{*15}^{(1)} = 0, & A_{*23}^{(1)} &= A_{*24}^{(1)} = A_{*25}^{(1)} = A_{*34}^{(1)} = A_{*35}^{(1)} = A_{*45}^{(1)} = 0, \\ A_{*31}^{(1)} &= -\frac{5}{h^2}\Delta^6(\Delta + A)^2\left[2\Delta(\Delta + A)(3\Delta + 2A) - \frac{21}{h^2}(6\Delta^2 + 8A\Delta + 3A^2)\right], \\ A_{*32}^{(1)} &= -\frac{35}{h^2}\Delta^7(\Delta + A)^3(3\Delta + 2A), & A_{*43}^{(1)} &= -\frac{99}{h^2}\Delta^7(\Delta + A)^3(3\Delta + 2A), \\ A_{*41}^{(1)} &= -\frac{21}{h^2}\Delta^5(\Delta + A)\left[\Delta^2(\Delta + A)^2(3\Delta + 2A) - \frac{60}{h^2}\Delta(\Delta + A)(6\Delta^2 + 8A\Delta + 3A^2)\right. \\ &+ \left.\frac{495}{h^4}(10\Delta^3 + 20A\Delta^2 + 15A^2\Delta + 4A^3)\right], & A_{*54}^{(1)} &= -\frac{195}{h^2}\Delta^7(\Delta + A)^3(3\Delta + 2A), \\ A_{*42}^{(1)} &= -\frac{45}{h^2}\Delta^6(\Delta + A)^2\left[2\Delta(\Delta + A)(3\Delta + 2A) - \frac{77}{h^2}(6\Delta^2 + 8A\Delta + 3A^2)\right], \\ A_{*51}^{(1)} &= -\frac{9}{h^2}\Delta^4\left[4\Delta^3(\Delta + A)^3(3\Delta + 2A) - \frac{770}{h^2}\Delta^2(\Delta + A)^2(6\Delta^2 + 8A\Delta + 3A^2)\right. \\ &+ \left.\frac{30030}{h^4}\Delta(\Delta + A)(10\Delta^3 + 20A\Delta^2 + 15A^2\Delta + 4A^3) - \frac{225225}{h^6}(15\Delta^4 + 40A\Delta^3\right. \\ &+ \left.45A^2\Delta^2 + 24A^3\Delta + 5A^4)\right], & A_{*52}^{(1)} &= -\frac{165}{h^2}\Delta^5(\Delta + A)\left[\Delta^2(\Delta + A)^2(3\Delta + 2A)\right. \\ &- \left.\frac{156}{h^2}\Delta(\Delta + A)(6\Delta^2 + 8A\Delta + 3A^2) + \frac{4095}{h^4}(10\Delta^3 + 20A\Delta^2 + 15A^2\Delta + 4A^3)\right], \\ A_{*53}^{(1)} &= -\frac{117}{h^2}\Delta^6(\Delta + A)^2\left[2\Delta(\Delta + A)(3\Delta + 2A) - \frac{165}{h^2}(6\Delta^2 + 8A\Delta + 3A^2)\right]; \\ A_{*11}^{(2)} &= A_{*22}^{(2)} = A_{*33}^{(2)} = A_{*44}^{(2)} = \Delta^6(\Delta + A)^3, & A_{*12}^{(2)} &= A_{*13}^{(2)} = A_{*14}^{(2)} = 0, \\ A_{*21}^{(2)} &= -\frac{15}{h^2}\Delta^5(3\Delta + 2A)(\Delta + A)^2, & A_{*23}^{(2)} &= A_{*24}^{(2)} = A_{*34}^{(2)} = 0, \\ A_{*31}^{(2)} &= -\frac{21}{h^2}\Delta^4(\Delta + A)\left[2\Delta(\Delta + A)(3\Delta + 2A) - \frac{45}{h^2}(6\Delta^2 + 8A\Delta + 3A^2)\right], \\ A_{*32}^{(2)} &= -\frac{63}{h^2}\Delta^5(\Delta + A)^2(3\Delta + 2A), & A_{*41}^{(2)} &= -\frac{27}{h^2}\Delta^3\left[3\Delta^2(\Delta + A)^2(3\Delta + 2A)\right. \\ &- \left.\frac{308}{h^2}\Delta(\Delta + A)(6\Delta^2 + 8A\Delta + 3A^2) + \frac{5005}{h^4}(10\Delta^3 + 20A\Delta^2 + 15A^2\Delta + 4A^3)\right]; \\ A_{*42}^{(2)} &= -\frac{77}{h^2}\Delta^4(\Delta + A)\left[2\Delta(\Delta + A)(3\Delta + 2A) - \frac{117}{h^2}(6\Delta^2 + 8A\Delta + 3A^2)\right]; \\ A_{*43}^{(2)} &= -\frac{143}{h^2}\Delta^5(3\Delta + 2A)(\Delta + A)^2. \end{aligned}$$

Applying the differential matrix operator  $A_*^{(I)T}$  from the left to the equations (2.27) and taking into account  $A_*^{(I)T}A^{(I)} = A^{(I)}A_*^{(I)T} = E^{(I)}|A^{(I)}|$ ,  $\langle I = 1, 2 \rangle$ , where  $E^{(1)}$  and  $E^{(2)}$  are the unit matrices of the fifth and fourth orders respectively, we will obtain decomposed systems of equations with respect to

Рис. 1. Фрагмент математического документа, содержание которого определяется формулами.

Методы выделения в Сети объектов научного знания, разрабатываемые в настоящее время, позволяют создавать новые структуры математических знаний,

в частности, графы научного сотрудничества, рекомендательные системы, автоматически формирующие списки «близких» (в определенном смысле) документов, выполняя при этом аннотирование как документов, так и объектов, извлеченных из них (например, [16–18]).

Важное направление в области семантического представления научных знаний связано с разработкой онтологий предметных областей, в частности, в области математического знания (см. [7, 19, 20]). Наиболее важные задачи в управлении математическими знаниями выделены в работах [7, 21, 22]. Как отмечено в ряде работ, определяющая часть этих задач может быть решена с помощью цифровых математических библиотек, построенных с использованием семантических технологий (см., например, [10, 23, 24]).

В [25, 26] введен термин Big Math для обозначения области создания методов и разработки программных систем поддержки математических исследований; проведена аналогия с широко известным термином Big Data, а также предложено рассматривать пять основных направлений разработки методов Big Math: *Выводимость (Inference)*, *Вычисления (Computation)*, *Табулирование (Tabulation)*, *Нарратив (Narration)*, *Организация (Organization)*. Направление *Выводимость* включает методы вывода утверждений путем дедукции, направление *Вычисления* объединяет алгоритмические преобразования представлений математических объектов в формы, более легкие для понимания. *Табулирование* обозначает создание статических, конкретных данных, относящихся к математическим объектам и структурам, которые можно легко хранить, запрашивать и совместно использовать. *Нарратив* включает методы приведения результатов в форму, которая может быть усвоена людьми, а *Организация* – методы модульной организации математических знаний.

Термин «экосистема» широко используется в научных публикациях для обозначения систем, имеющих признаки самоорганизации. Этот термин введен А. Тенсли в 1935 году в статье [27] для обозначения биологических систем, которые обладают способностью к изменениям, включая масштабируемость своей архитектуры, и не теряют при этом свойства надежности и способности решать сложные

динамические проблемы. В публикациях по информационным технологиям термин «цифровая экосистема» применяют к информационным системам как цифровой аналог биологических экосистем (см., например, [28–31]).

В работах [32, 33] описаны назначение и принципы организации цифровой математической библиотеки Lobachevskii Digital Mathematical Library (Lobachevskii-DML, <http://www.lobachevskii-dml.ru/>). Эта цифровая библиотека через систему сформированных метаданных и семантических отношений объединяет электронные коллекции математических документов и предоставляет сервисы навигации по понятиям и объектам, извлеченным из этих документов. Названные сервисы базируются на цифровой экосистеме OntoMath, которая в свою очередь обеспечивает взаимодействие онтологий, инструментов текстовой аналитики и приложений для управления объектами математического знания. Эта экосистема впервые была представлена в [34–36], в настоящей работе описано её текущее состояние.

## 1. СТРУКТУРА ЦИФРОВОЙ ЭКОСИСТЕМЫ OntoMath

Цифровая экосистема OntoMath — это экосистема онтологий, инструментов текстовой аналитики и сервисов для управления математическим знанием [36, 37]. Эта экосистема является технологической платформой цифровой математической библиотеки Lobachevskii-DML. Архитектура современной версии цифровой экосистемы OntoMath представлена на Рис. 2.



Рис. 2. Архитектура цифровой экосистемы OntoMath. Синим цветом обозначены онтологии, разработанные в рамках проекта OntoMath; серым цветом – внешние онтологии; зеленым цветом – платформа семантической публикации, коричневым – сервисы экосистемы. Компоненты, по уровню расположенные выше, базируются на нижестоящих.

Перечислим компоненты, составляющие основу цифровой экосистемы OntoMath.

- Внешние онтологии:
    - онтология AKT Portal Ontology (<https://www.w3.org/archive/www.aktors.org/ontology/>) используется для представления метаданных научных статей, включая такие классы, как организации, университеты, исследователи и публикации, в формате Открытых связанных данных (Linked Open Data, LOD) (см., например, [38]);
    - онтология SALT Document Ontology (SALT – Semantically Annotated LaTeX), средствами которой определяется семантика отдельных сегментов научных документов, представленных в нотации LaTeX (см. [39–41]);
  - Онтология логической структуры математических документов Mocassin (<https://code.google.com/archive/p/mocassin/>) [42, 43];
  - Онтология профессиональной математики OntoMath<sup>PRO</sup> (<https://github.com/CLLKazan/OntoMathPro/>) [44];
  - Математическая образовательная онтология OntoMath<sup>Edu</sup> (<https://github.com/CLLKazan/OntoMathEdu>) [45–47];
  - Платформа семантической публикации [48];
  - Сервис семантического поиска по математическим формулам (<https://lobachevskii-dml.ru/mathsearch>) [8];
  - Рекомендательная система для коллекций физико-математических документов [17];
  - Сервисы категоризации и классификации математических документов, построенные с использованием предметных классификаторов УДК и кодов Mathematics Subject Classification 2020, а также основанные на применении этих классификаторов сервисы автоматизированного подбора экспертов в информационной журнальной системе (см. [49–54]);
  - Сервис семантической разметки математических учебных материалов и справочная база данных [47, 55];
  - Параллельный формальный/неформальный корпус математических утверждений [56];
  - Сервис автоматической генерации тестовых вопросов [57];
-

- Фабрика метаданных цифровой библиотеки, содержащая инструменты автоматизации формирования метаданных документов электронных математических коллекций [58–64].

## 2. ОНТОЛОГИИ ЦИФРОВОЙ ЭКОСИСТЕМЫ OntoMath

Опишем подробнее разработанные математические онтологии, включенные в цифровую экосистему OntoMath.

**Онтология OntoMath<sup>PRO</sup>** – онтология профессионального математического знания [44, 65], организованная в виде двух иерархий:

- иерархии разделов математики (*Математическая логика, Теория множеств, Алгебра, Геометрия, Топология* и т. д.);
- иерархии элементов математического знания (*Множество, Функция, Интеграл, Элементарное событие, Многочлен Лагранжа* и т. д.).

Фрагмент иерархии элементов математического знания представлен на Рис. 3. На Рис. 4 представлен один из разделов этой иерархии – таксономия «Элемент теории дифференциальных уравнений».

Онтология определяет пять типов отношений между концептами:

- Класс → Подкласс (*Уравнение смешанного типа → Уравнение Трикоми*);
- Область математики → Математический объект (*Теория дифференциальных уравнений → Уравнение Гельмгольца*);
- Определяется с помощью (*Символ Кристоффеля → Связность*);
- Ассоциативная связь (*Циклический итерационный метод Чебышева → Численное решение системы линейных уравнений*);
- Задача → Метод решения (*Система линейных уравнений → Метод Гаусса*).

Описание концепта содержит: название на русском и английском языках; определение; связи с другими концептами и ссылки на внешние ресурсы из наборов облака Открытых связанных данных (LOD).

В настоящее время идет работа над новой версией онтологии, основанной на новой архитектуре [65]. Архитектура новой версии онтологии была протестирована на практике при создании образовательной онтологии OntoMath<sup>Edu</sup> (см. следующий раздел).



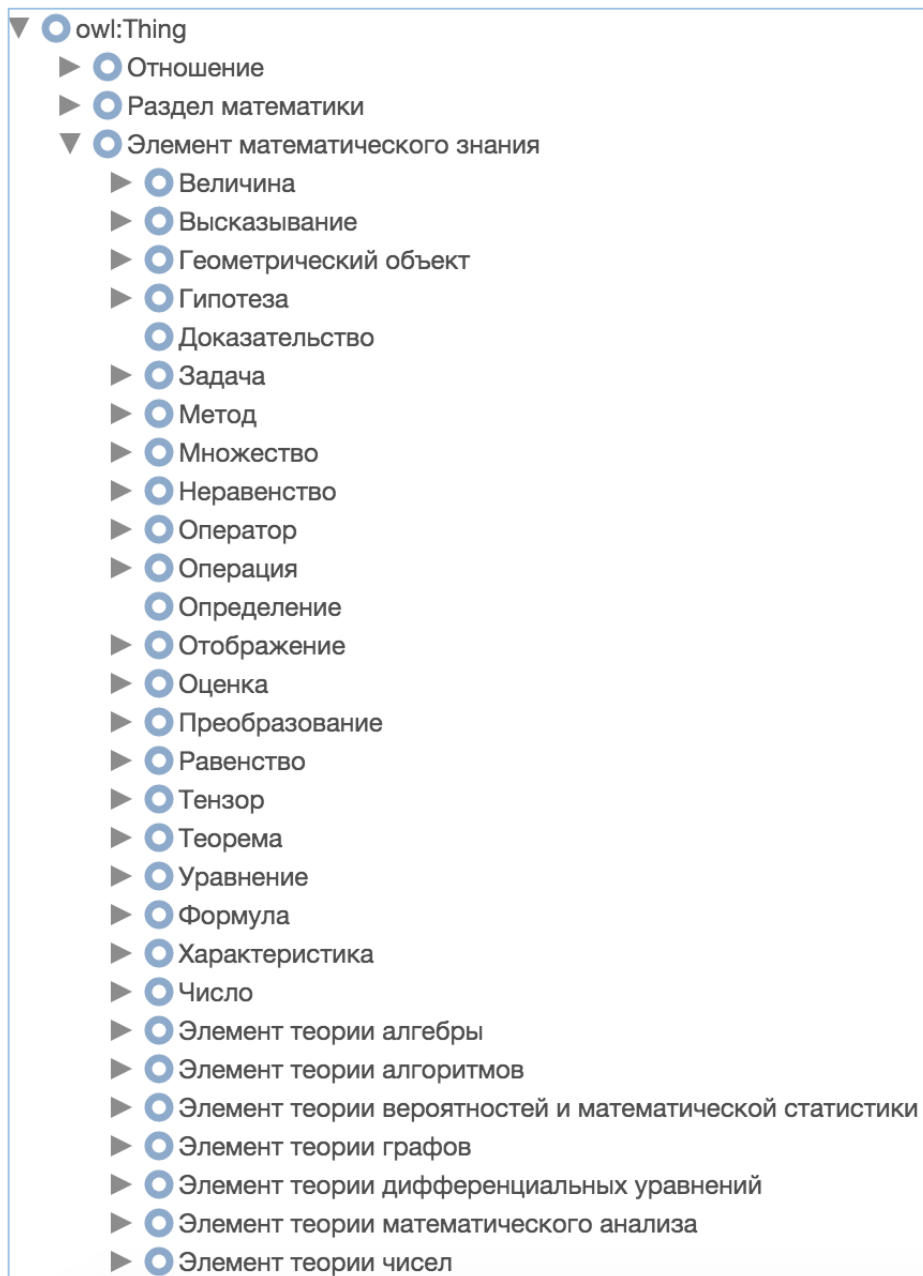


Рис. 3. Фрагмент иерархии элементов математического знания в онтологии  
OntoMath<sup>PRO</sup>

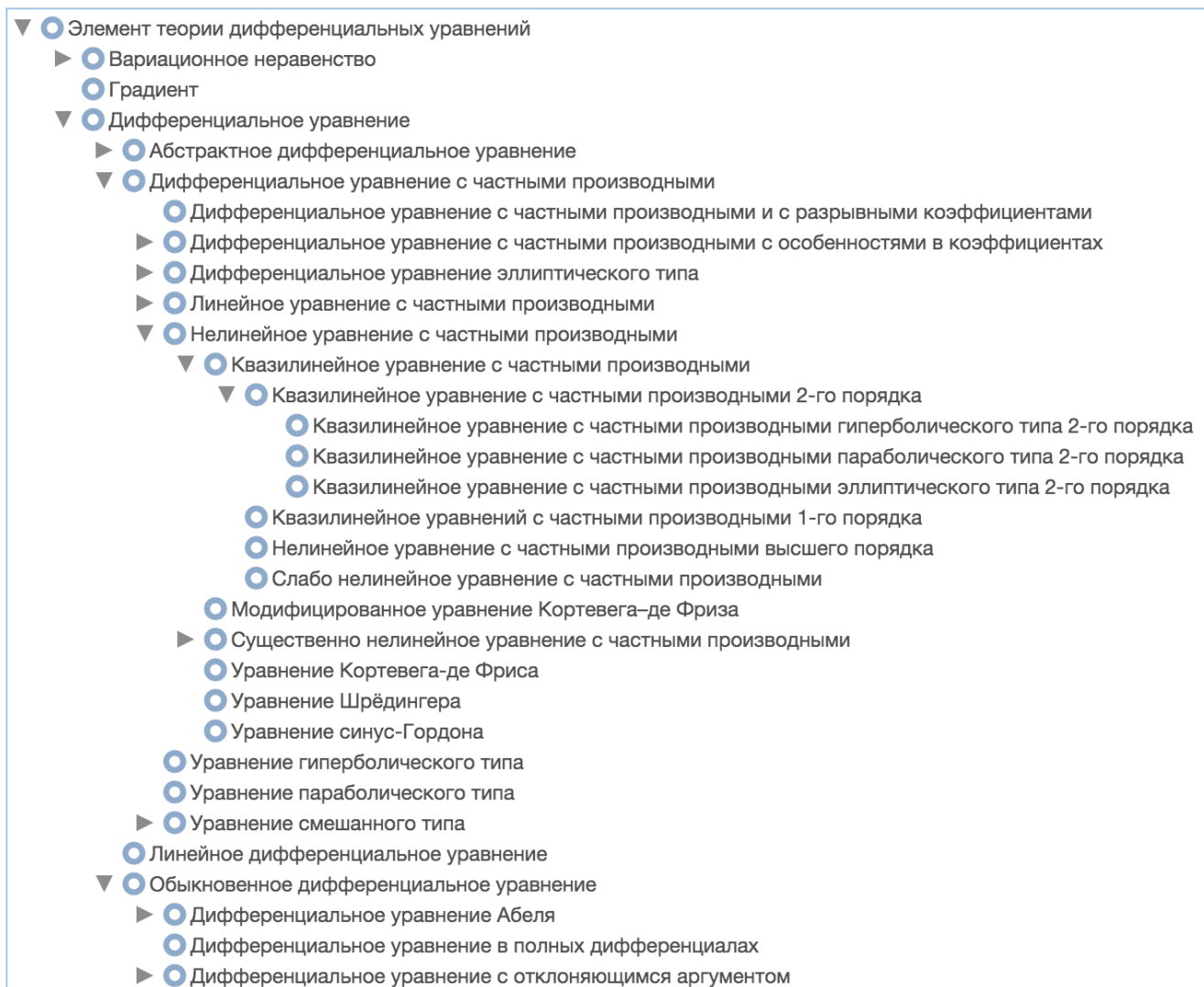


Рис. 4. Фрагмент одного из разделов иерархии элементов математического знания в онтологии OntoMath<sup>PRO</sup>

**Онтология OntoMath<sup>Edu</sup>** — образовательная математическая онтология [45–47]. Она организована в виде трех уровней: уровень предметной онтологии, лингвистический уровень и мета-онтологический уровень. Уровень предметной онтологии содержит независимые от языка концепты, относящиеся к школьной математике. Лингвистический уровень состоит из многоязычных лексиконов, которые содержат информацию о том, как концепты онтологии выражаются в естественном языке (русском, английском, татарском и испанском). Мета-онтологический уровень снабжает концепты мета-онтологическими аннотациями, определенными в онтологии верхнего уровня UFO [66]. Общая архитектура онтологии приведена на Рис. 5.

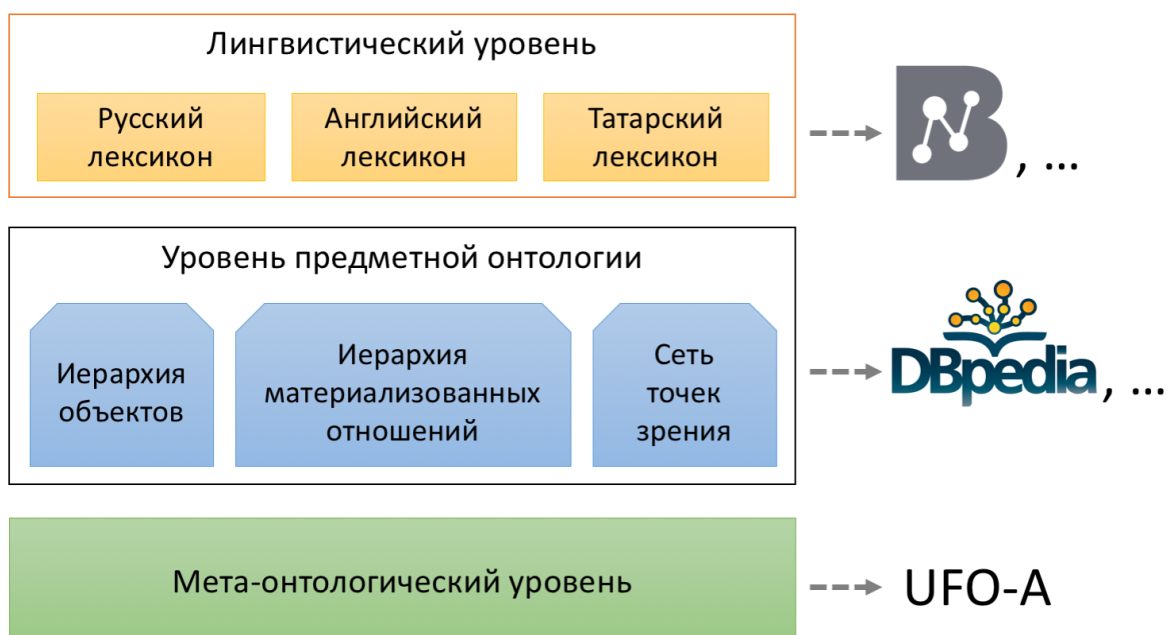


Рис. 5. Общая архитектура онтологии OntoMath<sup>Edu</sup>

Концепты уровня предметной онтологии организованы в две иерархии: иерархия объектов и иерархия материализованных отношений. На Рис. 6 приведен фрагмент иерархии объектов. На Рис. 7 приведен фрагмент иерархии материализованных отношений.

Чтобы эта онтология могла быть использована в образовательных приложениях, таксономические отношения между концептами были дополнены пререквизитными отношениями (см., например, [47, 67, 68]). Эти отношения отражают, каким образом концепты изучаются в актуальном образовательном процессе. Концепт *A* является пререквизитом концепта *B*, если для того, чтобы изучить концепт *B*, необходимо сначала изучить концепт *A*. Пререквизитные отношения являются независимыми по отношению к таксономическим отношениям и образуют независимую иерархию онтологии. Так, например, концепт *Натуральное число* является пререквизитом как для нижестоящего концепта *Простое число*, так и для вышестоящего концепта *Действительное число*.

На Рис. 8 представлен фрагмент сети пререквизитных отношений в курсе планиметрии российской средней школы.

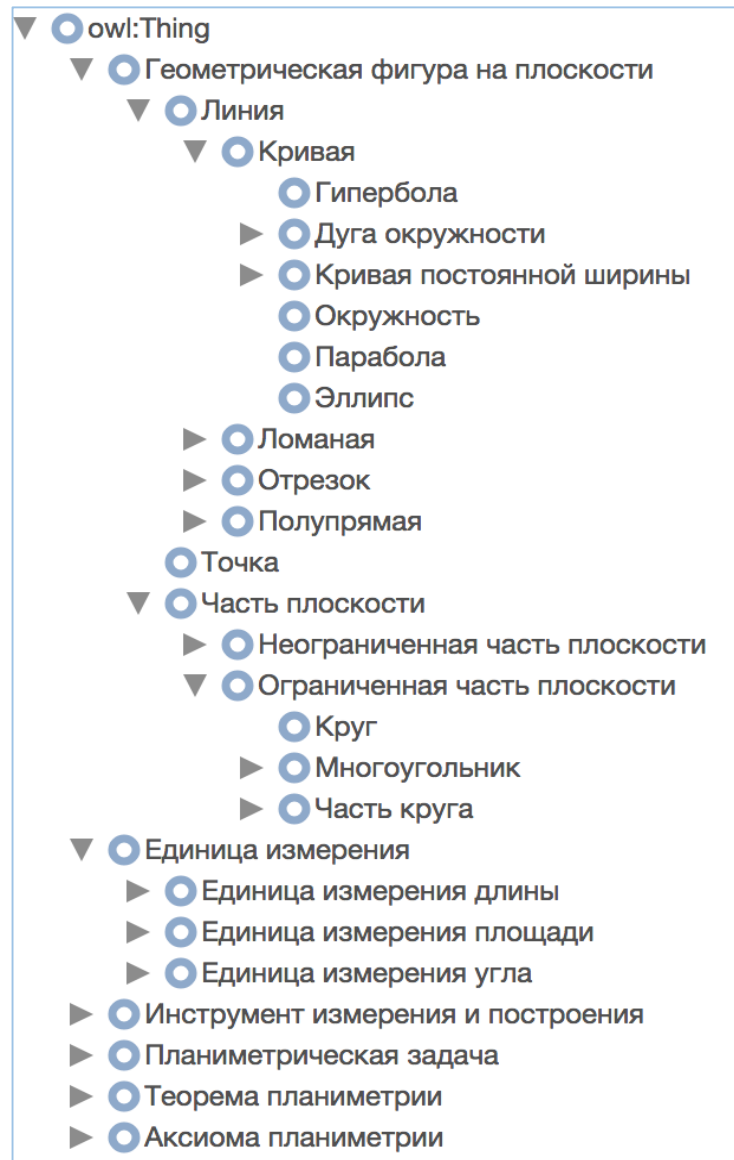


Рис. 6. Фрагмент иерархии объектов образовательной математической онтологии OntoMath<sup>Edu</sup>

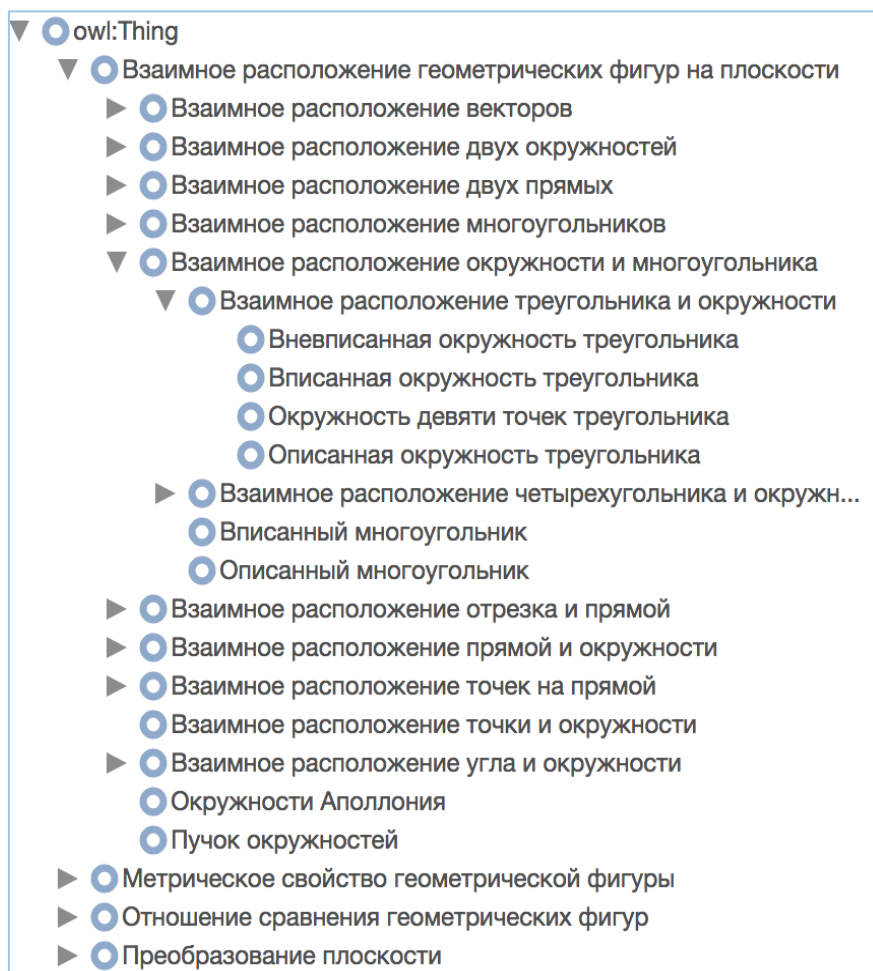


Рис. 7. Фрагмент иерархии материализованных отношений онтологии

OntoMath<sup>Edu</sup>

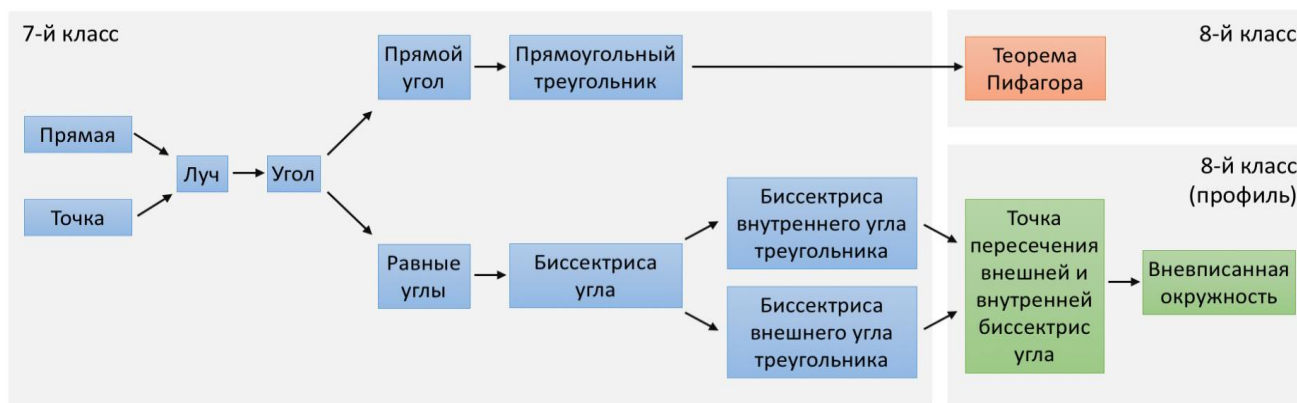


Рис. 8. Фрагмент сети пререквизитных отношений онтологии OntoMath<sup>Edu</sup>.

Концепты изображены в виде цветных прямоугольников; прямые пререквизитные отношения между концептами — в виде стрелок; образовательные уровни (7-й, 8-й и 8-й профильный классы) — в виде серых прямоугольников на заднем плане

В отличие от таксономических отношений пререквизитные отношения являются не универсальными, а привязанными к определенной образовательной программе. Так, согласно одной программе, концепт *A* может выступать в качестве пререквизита для концепта *B*, а согласно другой программе, наоборот, концепт *B* может выступать как пререквизит концепта *A*.

В текущей версии онтологии описаны сети пререквизитных отношений, соответствующие образовательным программам средней школы России и Великобритании.

В онтологии OntoMath<sup>Edu</sup> существуют два подхода для определения пререквизитных отношений: прямой и опосредованный. В соответствии с прямым подходом пререквизитные отношения устанавливаются напрямую между двумя концептами. В соответствии с опосредованным подходом пререквизитные отношения между концептами устанавливаются посредством распределения концептов онтологии по образовательным уровням.

Образовательные уровни — это упорядоченные сегменты образовательной программы, такие как классы в программе общеобразовательной школы, курсы в программе механико-математического факультета и т. д. Как и концепты, образовательные уровни связаны отношениями пререквизитов. Образовательный уровень *L1* является пререквизитом для образовательного уровня *L2*, если обучающийся должен изучить содержание уровня *L1* прежде чем приступить к изучению содержания уровня *L2*.

На Рис. 9. изображены некоторые образовательные уровни российской образовательной программы средней школы и пререквизитные отношения между ними.

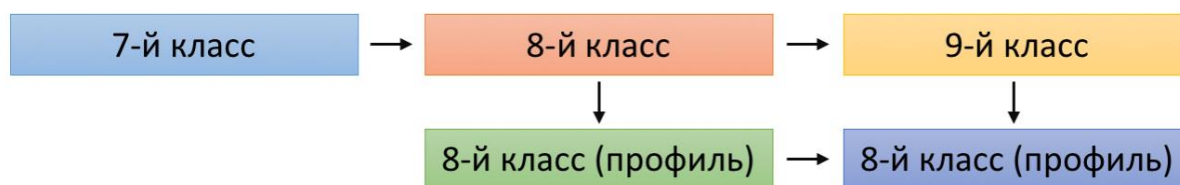


Рис. 9. Фрагмент сети образовательных уровней российской образовательной программы

Образовательные системы и образовательные уровни определены в онтологии как виды точек зрения, которые используются для релятивизации утверждений, не являющихся универсальными. Примерами точек зрения являются системы определений, т. к. один и тот же концепт может быть определен разными способами.

Онтология OntoMath<sup>Edu</sup> лежит в основе математической образовательной платформы Казанского федерального университета и используется в ряде сервисов экосистемы OntoMath, описанных ниже.

### 3. ПЛАТФОРМА СЕМАНТИЧЕСКОЙ ПУБЛИКАЦИИ

Центральным компонентом экосистемы OntoMath является программная платформа семантической публикации [48]. Эта платформа предназначена для построения RDF-набора Открытых связанных данных (Linked Open Data, <https://lod-cloud.net/>) по заданной коллекции математических научных статей в формате LaTeX. Построенный RDF-набор включает:

- метаданные документов, представленные на основе онтологии АКТ Portal [69];
- структурные элементы математических документов, представленные на основе онтологии Mocassin (<https://code.google.com/archive/p/mocassin/>);
- терминологию, представленную с помощью онтологии OntoMath<sup>PRO</sup>;
- формулы, привязанные к терминам.

Построение RDF-набора состоит из следующих шагов:

- 1) Конвертация исходных документов из формата LaTeX в формат XML.
- 2) Извлечение метаданных. Для формирования метаданных научных документов в терминах онтологии АКТ Portal разработан специализированный программный модуль, с помощью которого решаются следующие задачи: извлечение метаданных из заголовков статей (название, имена авторов и их места работы, название журнала, год публикации и номер журнала); создание идентификаторов для опубликованных статей; обработка библиографических описаний статей с использованием построенных идентификаторов.
- 3) Аннотирование текста. Данный шаг включает решение стандартных лингвистических задач, таких как токенизация, разделение предложений, морфологический анализ и извлечение именных групп.



4) Извлечение именованных математических сущностей. Для извлечения математической терминологии разработаны специальные программные инструменты, которые используют синтаксические модели именных групп для извлечения из научных статей математических именованных сущностей, привязанных к концептам онтологии OntoMath<sup>PRO</sup>.

5) Извлечение логической структуры документа. Элементы этой логической структуры размечаются в терминах онтологии Mocassin, которая описывает семантику типичных для научных математических статей структурных элементов, таких как теоремы, леммы, доказательства, определения, следствия и др. Каждый структурный элемент характеризуется своим расположением в тексте, текстовым и формульным содержанием, а также уникальной функциональной нагрузкой (см., например, [42, 43]).

6) Связывание именованных математических сущностей с формулами. Для обработки математических формул разработан программный сервис, с помощью которого осуществляются разбор математических формул в LaTeX-нотации, выделение переменных формулы и связывание выделенных переменных с математическими именованными сущностями, которые данные переменные обозначают.

7) Генерация RDF-набора данных.

8) Связывание RDF-набора с внешними ресурсами из облака Открытых связанных данных (LOD).

Сгенерированный RDF-набор имеет самостоятельную ценность и может использоваться для навигации [70], поиска, агрегирования данных и решения других задач. Кроме того, этот набор лежит в основе ряда сервисов экосистемы OntoMath, описанных далее.

#### 4. СИСТЕМА СЕРВИСОВ ЦИФРОВОЙ ЭКОСИСТЕМЫ OntoMath

Приведем краткое описание семантических сервисов, входящих в настоящее время в состав цифровой экосистемы OntoMath.

**Сервис семантического поиска по математическим формулам.** Сервис позволяет находить формулы, релевантные заданному математическому понятию, вне зависимости от его символического представления [8]. В качестве поискового



запроса пользователь вводит название интересующего его математического понятия (например, *Угол*, *Граф* или *Простое число*). Сервис возвращает список формул, которые содержат переменные, обозначающие данное понятие.

Пример применения названного поискового сервиса представлен в виде таблицы, в которой каждая строка соответствует найденной формуле (см. Рис. 10). Первая колонка таблицы содержит переменную, которая обозначает искомое понятие в найденной формуле. Вторая колонка содержит саму найденную формулу. Третья колонка содержит элемент логической структуры документа, в котором находится данная формула (например, теорема, доказательство, лемма, утверждение, и т. д.). Четвертая колонка содержит кнопку для отображения окна с метаданными формулы.

### Finding Concepts in Mathematical Formulas <sup>alpha</sup>

Get instances!

Examples: [Angle](#), [Ring](#), [Graph](#), [Open set](#), [Prime number](#), [Gamma function](#), [Space](#)

Axiom (0)

Claim (0)

Conjecture (0)

Corollary (0)

Definition (0)

Equation (0)

Example (0)

Lemma (0)

Proof (3)

Proposition (2)

Remark (0)

Theorem (7)

*Ring* concept instances (26):

Notation	Formula	Context	
$R$	$J(R)^2 \neq J(R)^3$	Theorem	<a href="#">Details...</a>
$R$	$J(R)^2 \neq 0$	Proof	<a href="#">Details...</a>
$R'$	$R[H]$	Proposition	<a href="#">Details...</a>
$\mathcal{K}$	$z \in \mathcal{K}^+$	Other	<a href="#">Details...</a>

Рис. 10. Результаты семантического поиска по запросу *Ring* – включают обозначения переменной, связанной с концептом *Ring*, формулы и контекст формул.

Пользовательский интерфейс сервиса позволяет фильтровать результаты поиска на основе элемента логической структуры документа, в котором они нахо-

дятся (например, отображать только те формулы, которые находятся в определениях и формулировках теорем). Сервис работает на базе RDF-набора, построенного платформой семантической публикации.

**Рекомендательная система для коллекций физико-математических документов.** Этот сервис работает с коллекцией математических документов и для каждого документа коллекции формирует список близких статей [17]. Список близких статей помогает пользователю, заинтересовавшемуся некоторой публикацией, найти другие публикации по схожей теме.

Построение списка близких статей происходит в несколько этапов. На первом этапе сервис извлекает из документов термины, определенные в онтологии OntoMath<sup>PRO</sup>. На втором этапе сервис размечает элементы логической структуры документов, определенные в онтологии Mocassin (такие, как теорема, доказательство, определение и т. д.). На третьем этапе сервис строит векторное представление документа, учитывающее терминологический состав, положение терминов в логической структуре и связи терминов в графе онтологии OntoMath<sup>PRO</sup>. Далее сервис вычисляет меру близости между векторами документов и на ее основе строит для каждого документа коллекции список близких к нему документов.

Сервис работает на базе RDF-набора, построенного платформой семантической публикации.

**Рекомендательная система назначения классификаторов УДК** математическим статьям [49]. Классификация документов с присвоением кодов-классификаторов является традиционным способом систематизации и поиска документов по определенной тематике. Универсальная десятичная классификация (УДК) лежит в основе систематизации знаний, представленных в библиотеках, базах данных и других хранилищах информации. В России УДК является обязательным реквизитом всей книжной продукции и информации по естественным и техническим наукам. Выбор классификационных кодов связан с анализом структуры дерева классификатора и традиционно выполняется автором научной статьи. Разработанная рекомендательная система автоматически выполняет подбор классификационного кода УДК для математической статьи на основе онтологии OntoMath<sup>PRO</sup> с помощью создания «кодовых карт» для каждого классифицирующего кода в дереве УДК в области математики. Под «кодовой картой» понимается взвешенный набор всех

математических именованных сущностей, извлеченных с помощью онтологии OntoMath<sup>PRO</sup> из коллекции статей с заданным кодом УДК. Создание «кодовых карт» основано на гипотезе о том, что выбор кода УДК обусловлен определённым набором классифицирующих признаков, которые можно представить классами из онтологии OntoMath<sup>PRO</sup>. Названная гипотеза проверена и подтверждена в ряде экспериментов, проведенных на коллекции математических статей, опубликованных в журнале «Известия ВУЗов. Математика» за 1999–2009 гг.

**Система сервисов уточнения предметных классификаторов.** Для реализации этого сервиса создан словарь терминов, ассоциированных с классификаторами УДК, относящимися к физико-математическим областям знания. Словарь содержит как классификаторы УДК, так и наборы ключевых терминов, по которым производятся систематизация и классификация материала (см. [71–73]). Большая часть этих терминов была получена путем автоматизированной обработки физико-математических коллекций Общероссийского математического портала MathNet.Ru (<https://www.mathnet.ru/>). Извлечение терминов из документов электронных коллекций производится с помощью разработанных программных инструментов, учитывающих стилевые и структурные особенности документов (см., например, [62, 63, 74, 75]).

**Автоматизированный подбор экспертов в информационной журнальной системе.** В редакции журнала Lobachevskii Journal of Mathematics (<https://ljm.kpfu.ru/>) на протяжении ряда лет разрабатывается система автоматического подбора экспертов для проведения научного рецензирования статей, поступающих в редакцию журнала (см. [50–54, 76]). Текущая версия сервиса автоматического поиска рецензентов инкапсулирована в информационную журнальную систему Open Journal System (см., например, [77]). Алгоритм работы сервиса основан на использовании таксономии Mathematics Subject Classification 2020 с возможностью преобразования кодов из предыдущих версий этой математической системы классификации (см., например, [78 – 80]).

**Сервис семантического аннотирования учебных материалов и справочная база данных.** Этот сервис находит в тексте учебных материалов упоминания математических концептов из онтологии OntoMath<sup>Edu</sup> и связывает найденные упомина-

ния ссылками на соответствующие страницы справочной базы данных. Пользователь, заинтересовавшийся некоторым концептом, может перейти по ссылке и открыть соответствующую страницу [55]. Страница справочной базы данных содержит подробную информацию о концепте, в том числе название концепта, его определение, положение в иерархии концептов и связи с другими концептами [47]. На Рис. 11 изображена страница концепта *Параллелограмм*.

7-й класс 8-й класс 8-й класс (профиль) **9-й класс** 9-й класс (профиль) Доп. программа

[Четырехугольник](#) [Выпуклый многоугольник](#)

## Параллелограмм

[Прямоугольник](#) [Ромб](#)

**Определение:** Параллелограмм — это четырехугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны и равны.

**Внешние ресурсы:** [Wikipedia](#), [Википедия](#), [MathsFun](#), [Якласс](#)

**Части и зависимые концепты:** [Вершина параллелограмма](#), [Сторона параллелограмма](#)

**Утверждения:** [Признак параллелограмма](#), [Признак параллелограмма по диагоналям](#), [Признак параллелограмма по равенству и параллельности двух противоположных сторон](#), [Признак параллелограмма по равенству противоположных сторон](#), [Признак параллелограмма по равенству противоположных углов](#)

**Отношения:** [Площадь параллелограмма](#)

Рис. 11. Страница концепта *Параллелограмм* в справочной базе данных. Представление концепта соответствует образовательному уровню *9-й класс*

По умолчанию, на странице концепта отображается не вся информация о нем, а только та информация, которая соответствует текущему образовательному уровню пользователя. Например, на Рис. 11 страница концепта *Параллелограмм* содержит информацию об этом концепте, соответствующую образовательному уровню *9-й класс*. В частности, список подклассов этого концепта содержит концепты *Прямоугольник* и *Ромб*, которые изучаются в *9-м классе* или ранее, но не

содержит концепт *Параллелограмм Вариньона*, который изучается только в 9-м профильном классе. С помощью меню, размещенному наверху страницы, пользователь может переключиться на представления концепта, относящиеся к другим образовательным уровням.

В качестве источника информации о концепте и образовательных уровнях справочная база данных использует онтологию *OntoMath<sup>Edu</sup>*.

**Параллельный формальный/неформальный корпус математических утверждений.** Данный ресурс содержит математические утверждения, представленные одновременно с тремя разными степенями формализации [56]. Корпус представляет собой коллекцию записей, каждая из которых содержит следующие поля:

1. математическое утверждение на естественном языке, извлеченное из учебных математических текстов;
2. представление этого утверждения в виде формулы в формате LaTeX;
3. формализация формулы в формате представления семантики математических объектов *OpenMath* (<https://openmath.org/>) [81], где в качестве контентных словарей *OpenMath* (*OpenMath content dictionaries*) использована онтология *OntoMath<sup>Edu</sup>*.

На Рис. 12. представлен пример записи «Сумма углов треугольника равна 180°» из указанного корпуса.

Утверждение на естественном языке	Представление утверждения в виде формулы (в визуальном виде)	Представление утверждения в виде формулы (LaTeX-код)	Формализация формулы в формате <i>OpenMath</i> (в визуальном виде)
Сумма углов треугольника равна 180°.	$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$ , где ABC – треугольник; $\angle A$ , $\angle B$ и $\angle C$ – углы треугольника.	$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$ , где $\angle A$ , $\angle B$ и $\angle C$ – углы треугольника.	$\forall ABC_{\text{type:Triangle}}, A_{\text{type:Angle}}, B_{\text{type:Angle}}, C_{\text{type:Angle}}.$ $\text{isAngleOf}(A, ABC) \wedge$ $\text{isAngleOf}(B, ABC) \wedge$ $\text{isAngleOf}(C, ABC) \wedge$ $A \neq B \wedge B \neq C \wedge A \neq C \rightarrow$ $\text{degreeMeasure}(A) +$ $\text{degreeMeasure}(B) +$ $\text{degreeMeasure}(C) = 180.$

Рис. 12. Пример записи из параллельного формального/неформального корпуса образовательных математических текстов.

В качестве исходных математических текстов были использованы учебные материалы по курсу планиметрии средней школы. Представления утверждений в форматах LaTeX и OpenMath были построены вручную. Сформированный корпус математических утверждений может быть использован в качестве тестовой коллекции при разработке методов автоматической формализации математических документов на естественном языке. Кроме того, на базе этого корпуса работает сервис для автоматической генерации тестовых вопросов, описанный ниже.

**Сервис автоматической генерации тестовых вопросов для проверки математических знаний.** Этот сервис базируется на параллельном формальном-неформальном корпусе математических учебных материалов [57]. Для генерации тестового вопроса инструмент извлекает из корпуса OpenMath-утверждение, выражающее функциональную зависимость между переменными, и заменяет независимые переменные сгенерированными значениями. Область определения переменных определяется на основе символов, представленных в онтологии OntoMath<sup>Edu</sup>. Задача обучающегося при прохождении теста состоит в том, чтобы на основе предъявленных значений независимых переменных найти значение зависимой. Сервис автоматически проверяет правильность ответа путем выполнения OpenMath-выражения.

**Фабрика метаданных цифровой библиотеки.** Управление контентом цифровых библиотек основано на использовании метаданных документов (см., например, [82]). Программные инструменты, обеспечивающие основные операции с метаданными, объединяются в систему, которую называют фабрикой метаданных по аналогии с привычным термином из промышленного производства, основанного на применении машин (например, [58, 83]).

В цифровой математической библиотеке Lobachevskii-DML разрабатывается фабрика метаданных, включающая программные инструменты извлечения метаданных из документов с помощью анализа их структурных и стилевых особенностей, а также с использованием методов обработки естественного языка [59]. Созданы сервисы уточнения метаданных, а также, сервисы пополнения обязательного набора метаданных в случаях отсутствия необходимой информации. Для реализации сервисов пополнения метаданных создана система SPARQL-запросов к Wikidata и другим открытым внешним сетевым ресурсам (см., например, [84–89]). Представление метаданных документов в цифровой библиотеке Lobachevskii-DML

---

основано на схемах NISO JATS (например, [90]). Разработаны сервисы нормализации метаданных, обеспечивающие их преобразование по xml-схемам агрегирующих научных библиотек (см. [60, 91–93]).

### **ЗАКЛЮЧЕНИЕ**

Представлены разработанный подход и новые направления развития цифровой экосистемы OntoMath, которая является технологической основой цифровой математической библиотеки Lobachevskii-DML. Сервисы, входящие в состав этой экосистемы, основаны на использовании онтологий OntoMath<sup>PRO</sup> и OntoMath<sup>Edu</sup>, что позволяет учитывать семантику предметных областей. Разработанные сервисы применены в практике работы редколлегии математических журналов, издаваемых в Казанском федеральном университете (КФУ). На основе образовательной онтологии OntoMath<sup>Edu</sup> в КФУ созданы также учебные курсы в системе дистанционного обучения.

### **Благодарности**

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 21-11-00105).

### **СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. *Bartling S., Friesike S.* Towards Another Scientific Revolution // S. Bartling and S. Friesike (Eds.) *Opening Science: The Evolving Guide on How the Internet is Changing Research, Collaboration and Scholarly Publishing.* Springer, Cham, 2014. P. 3–15. [https://doi.org/10.1007/978-3-319-00026-8\\_1](https://doi.org/10.1007/978-3-319-00026-8_1).
2. *Елизаров А.М., Зуев Д.С., Липачёв Е.К.* Управление жизненным циклом электронных публикаций в информационной системе научного журнала // *Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Системный анализ и информационные технологии.* 2014. № 4. С. 81–88.
3. *Елизаров А.М., Зуев Д.С., Липачёв Е.К.* Сервисы поддержки жизненного цикла электронных научных публикаций // *Научный сервис в сети Интернет: многообразие суперкомпьютерных миров. Труды Международной суперкомпьютерной конференции. Российская академия наук. Суперкомпьютерный консорциум университетов России.* 2014. С. 436–438.
4. *Heller L., The R., Bartling S.* Dynamic Publication Formats and Collaborative

Authoring // S. Bartling and S. Friesike (Eds.) *Opening Science: The Evolving Guide on How the Internet is Changing Research, Collaboration and Scholarly Publishing*. Springer, Cham, 2014. P. 191–211. [https://doi.org/10.1007/978-3-319-00026-8\\_13](https://doi.org/10.1007/978-3-319-00026-8_13).

5. Горбунов-Посадов М. Живая публикация // *Открытые системы*. СУБД. 2011. № 4. С. 48.

6. Елизаров А.М., Липачёв Е.К. Цифровые платформы и цифровые научные библиотеки // *International Journal of Open Information Technologies*. 2020. Vol. 8. No. 11. P. 80–90.

7. Elizarov A., Kirillovich A., Lipachev E., Nevzorova O., Solovyev V., Zhiltsov N. *Mathematical Knowledge Representation: Semantic Models and Formalisms* // *Lobachevskii J. of Mathematics*. 2014. V. 35 (4). P. 347–353. <https://doi.org/10.1134/S1995080214040143>.

8. Elizarov A., Kirillovich A., Lipachev E., Nevzorova O. *Semantic Formula Search in Digital Mathematical Libraries* // *Proceedings of the 2nd Russia and Pacific Conference on Computer Technology and Applications (RPC 2017)*, Vladivostok, Russia, 25–29 September, 2017. IEEE, 2017. P. 39–43. <https://doi.org/10.1109/RPC.2017.8168063>.

9. *Developing a 21st Century Global Library for Mathematics Research*. The National Academies Press, Washington, 2014. 142 p. <https://doi.org/10.17226/18619>.

10. SearchOnMath Site. URL: <https://www.searchonmath.com/>.

11. MathWebSearch: Searching Math on the Web. URL: <https://search.mathweb.org/>.

12. The zbMATH Open formula search. URL: <https://zbmath.org/formulae/>.

13. Berčič K, Carette J., Farmer W.M., Kohlhase M., Dennis Müller D., Rabe F., Sharoda Y. *The Space of Mathematical Software Systems – A Survey of Paradigmatic Systems* // arXiv: 2002.04955v1 [cs.MS] 12 Feb 2020.

14. Kohlhase M., Sucan I. *A Search Engine for Mathematical Formulae* // J. Calmet et al. (Eds.). *Proceedings of the 8th International Conference on Artificial Intelligence and Symbolic Computation (AISC 2006)*, Beijing, China, September 20–22, 2006. *Lecture Notes in Computer Science*, Vol. 4120. Springer, Berlin, Heidelberg, 2006. P. 241–253. [https://doi.org/10.1007/11856290\\_21](https://doi.org/10.1007/11856290_21).

15. Guidi F., Sacerdoti Coen C. *A Survey on Retrieval of Mathematical Knowledge* // *Math. Comput. Sci*. 2016. Vol. 10. P. 409–427.



16. *Pechnikov A., Chebukov D., Nwohiri A.* Communication of Scientists Through Scientific Publications: Math-Net.Ru as a Case Study // M. Gorbunov-Posadov et al. (Eds.). Proceedings of the 22nd Conference on Scientific Services & Internet (SSI-2020), Novorossiysk–Abrau, Russia, September 21–25, 2020. CEUR Workshop Proceedings. CEUR-WS, 2020. Vol. 2784. P. 234–244.

<https://ceur-ws.org/Vol-2784/rpaper19.pdf>.

17. *Елизаров А.М., Жижченко А.Б., Жильцов Н.Г., Кириллович А.В., Липачёв Е.К.* Онтология математического знания и рекомендательная система для коллекций физико-математических документов // Доклады Академии наук. 2016. Т. 467 (4). P. 392–395 (2016). <https://doi.org/10.7868/S0869565216100042>.

18. *Kozicyn A.S., Afonin S.A., Shachnev D.A.* The Use of Thematic Analysis Methods in Scientometric Systems // M. Gorbunov-Posadov et al. (Eds.). Proceedings of the 22nd Conference on Scientific Services & Internet (SSI-2020), Novorossiysk–Abrau, Russia, September 21–25, 2020. CEUR Workshop Proceedings. CEUR-WS, 2020. Vol. 2784. P. 178–188. <https://ceur-ws.org/Vol-2784/rpaper14.pdf>.

19. *Abecker A., van Elst L.* Ontologies for Knowledge Management // S. Staab and R. Studer (Eds.) Handbook on Ontologies. Springer, Berlin, Heidelberg, 2009. P. 713–734. [https://doi.org/10.1007/978-3-540-92673-3\\_32](https://doi.org/10.1007/978-3-540-92673-3_32).

20. *Lange Ch.* Ontologies and Languages for Representing Mathematical Knowledge on the Semantic Web // Semantic Web Journal. 2013. Vol. 4 (2). P. 119–158. <https://doi.org/10.3233/SW-2012-0059>.

21. *Hazewinkel M.* Mathematical Knowledge Management: Mathematical knowledge management is needed // arXiv:cs/0410055 [cs.IR] Oct 2004.

22. *Carette J., Farmer W.M.* A Review of Mathematical Knowledge Management // J. Carette et al. (Eds.). Proceedings of the International Conference on Intelligent Computer Mathematics (CICM 2009), Grand Bend, Canada, July 6-12, 2009. Lecture Notes in Computer Science. Springer, 2009. Vol. 5625. P. 233–246.

[https://doi.org/10.1007/978-3-642-02614-0\\_21](https://doi.org/10.1007/978-3-642-02614-0_21).

23. *Elizarov A.M., Lipachev E.K., Zuev D.S.* Digital Mathematical Libraries: Overview of implementations and content management services // L. Kalinichenko et al. (Eds.) Selected Papers of the XIX International Conference on Data Analytics and Management in Data Intensive Domains (DAMDID/RCDL 2017), Moscow, Russia, October 9–

13, 2017. CEUR Workshop Proceedings. CEUR-WS, 2017. Vol. 2022. P. 317–325.

<https://ceur-ws.org/Vol-2022/paper49.pdf>.

24. *Borwein J., Rocha E.M., Rodrigues J.F.* Communicating Mathematics in the Digital Era. A K Peters/CRC Press, 2008.

25. *Carette J., Farmer W.M., Kohlhase M., Rabe F.* Big Math and the One-Brain Barrier. A Position Paper and Architecture Proposal // arXiv:1904.10405v1 [cs.MS] 23 Apr 2019.

26. *Carette J., Farmer W.M., Kohlhase M., Rabe F.* Big Math and the One-Brain Barrier: The Tetrapod Model of Mathematical Knowledge. Math Intelligencer. 2021. Vol. 43. P. 78–87. <https://doi.org/10.1007/s00283-020-10006-0>.

27. *Tansley A.G.* The Use and Abuse of Vegetational Concepts and Terms // Ecology. 1935. Vol. 16 (3). P. 284–307.

<https://doi.org/10.2307/1930070>. <https://www.jstor.org/stable/1930070>.

28. *Briscoe G., De Wilde P.* Digital ecosystems: self-organisation of evolving agent populations // Proceedings of the International Conference on Management of Emergent Digital EcoSystems (MEDES '09), Lyon, France, October 27–30, 2009. ACM, 2009. P. 44–48. <https://doi.org/10.1145/1643823.1643832>.

29. *Kurz T., Eder R., and Heistracher T.* Knowledge Resources – A Knowledge Management Approach for Digital Ecosystems // F.A. Basile Colugnati et al. (Eds.) Revised Selected Papers of the 3rd International Conference on Digital Eco-Systems (OPAALS 2010), Aracujú, Sergipe, Brazil, March 22–23, 2010. Lecture Notes of the Institute for Computer Sciences, Social Informatics and Telecommunications Engineering. Springer, Berlin, Heidelberg, 2010. Vol. 67. P. 131–145.

[https://doi.org/10.1007/978-3-642-14859-0\\_11](https://doi.org/10.1007/978-3-642-14859-0_11).

30. *Bosch J.* Speed, Data, and Ecosystems. Excelling in a Software-Driven World. CRC Press. Taylor & Francis Group, 2017.

31. *Szoniecky S., Bouhai N. (Eds.)* Collective Intelligence and Digital Archives: Towards Knowledge Ecosystems. ISTE Ltd and John Wiley & Sons, Inc., 2017.

32. *Elizarov A.M., Lipachev E.K.* Lobachevskii DML: Towards a Semantic Digital Mathematical Library of Kazan University // L. Kalinichenko et al. (Eds.) Selected Papers of the XIX International Conference on Data Analytics and Management in Data Intensive Domains (DAMDID/RCDL 2017), Moscow, Russia, October 9–13, 2017. CEUR Workshop Proceedings. CEUR-WS, 2017. Vol. 2022. P. 326–333.

<https://ceur-ws.org/Vol-2022/paper50.pdf>.

33. *Elizarov A., Lipachev E.* Big Math Methods in Lobachevskii-DML Digital Library // A. Elizarov et al. (Eds.) Selected Papers of the XXI International Conference on Data Analytics and Management in Data Intensive Domains (DAMDID/RCDL 2019), Kazan, Russia, October 15–18, 2019. CEUR-WS, 2019. Vol. 2523. P. 59–72.

<https://ceur-ws.org/Vol-2523/invited08.pdf>.

34. *Елизаров А.М., Кириллович А.В., Липачёв Е.К., Невзорова О.А.* Управление математическими знаниями: онтологические модели и цифровые технологии // Сборник статей XVIII международной конференции «Аналитика и управление данными в областях с интенсивным использованием данных» (DAMDID/RCDL'2016). М.: ФИЦ ИУ РАН, 2016. С. 95–101.

35. *Elizarov A.M., Kirilovich A.V., Lipachev E.K., Nevzorova O.A.* Mathematical Knowledge Management: Ontological Models and Digital Technology // L. Kalinichenko, et al. (Eds.) Selected Papers of the XVIII International Conference on Data Analytics and Management in Data Intensive Domains (DAMDID/RCDL 2016), Ershovo, Moscow, Russia, October 11–14, 2016. CEUR Workshop Proceedings. CEUR-WS, 2016. Vol. 1752. P. 44–50. <https://ceur-ws.org/Vol-1752/paper08.pdf>.

36. *Elizarov A., Kirillovich A., Lipachev E., Nevzorova O.* Digital Ecosystem OntoMath: Mathematical Knowledge Analytics and Management // L. Kalinichenko, S. Kuznetsov, and Y. Manolopoulos (Eds.) Revised Selected Papers of the XVIII International Conference on Data Analytics and Management in Data Intensive Domains (DAMDID/RCDL 2016), Ershovo, Moscow, Russia, October 11–14, 2016. Communications in Computer and Information Science. Springer, 2017. Vol. 706. P. 33–46.

[https://doi.org/10.1007/978-3-319-57135-5\\_3](https://doi.org/10.1007/978-3-319-57135-5_3).

37. *Elizarov A.M., Zhiltsov N.G., Kirillovich A.V., Lipachev E.K., Nevzorova O.A., and Solovyev V.D.* The OntoMath ecosystem: Ontologies and applications for math knowledge management // Semantic Representation of Mathematical Knowledge Workshop, Fields Institute, Toronto, Canada, February 5, 2016.

URL: <https://video-archive.fields.utoronto.ca/view/4698>.

38. *d'Aquin M., Motta E.* Visualizing consensus with online ontologies to support quality in ontology development // EKAW 2010 Workshop on Ontology Quality, 15 Oct 2010, Lisbon, Portugal, 2010.

URL: [https://www.researchgate.net/publication/267562537\\_Visualizing\\_Consensus\\_with\\_Online\\_Ontologies\\_to\\_Support\\_Quality\\_in\\_Ontology\\_Development](https://www.researchgate.net/publication/267562537_Visualizing_Consensus_with_Online_Ontologies_to_Support_Quality_in_Ontology_Development).

39. Groza T., Handschuh S., Möller K., Decker S. SALT – Semantically Annotated LaTeX for Scientific Publications // E. Franconi et al. (Eds.). Proceedings of the 4th European Semantic Web Conference (ESWC 2007), Innsbruck, Austria, June 3–7, 2007. Lecture Notes in Computer Science. Springer, 2007. Vol 4519. P. 518–532.

[https://doi.org/10.1007/978-3-540-72667-8\\_37](https://doi.org/10.1007/978-3-540-72667-8_37).

40. Groza T., Handschuh S. SALT Document Ontology. DERI, 2009. URL: <https://web.archive.org/web/20100516153736/http://salt.semanticauthoring.org/ontologies/sdo>.

41. Невзорова О.А, Буряльцев Е.В., Жильцов Н.Г. Коллекции математических текстов: аннотирование и применение в поисковых задачах // Искусственный интеллект и принятие решений. 2012. № 3. С. 51–62.

42. Solovyev V., Zhiltsov N. Logical structure analysis of scientific publications in mathematics // R. Akerkar (Ed.). Proceedings of the International Conference on Web Intelligence, Mining and Semantics (WIMS 2011), Sogndal, Norway May 25–27, 2011. ACM, 2011. Article No. 21. <https://doi.org/10.1145/1988688.1988713>.

43. Елизаров А. М., Липачёв Е. К., Невзорова О. А., Соловьев В. Д. Методы и средства семантического структурирования электронных математических документов // Доклады Академии наук. 2014. Т. 457, № 6. С. 642–645.

<https://doi.org/10.7868/S0869565214240049>.

44. Nevzorova O., Zhiltsov N., Kirillovich A., Lipachev E. OntoMath<sup>PRO</sup> Ontology: A Linked Data Hub for Mathematics // P. Klinov and D. Mouromstev (Eds.). Proceedings of the 5th International Conference on Knowledge Engineering and Semantic Web (KESW 2014), Kazan, Russia, September 29–October 1, 2014. Communications in Computer and Information Science. Springer, Cham, 2014. Vol. 468. P. 105–119.

[https://doi.org/10.1007/978-3-319-11716-4\\_9](https://doi.org/10.1007/978-3-319-11716-4_9).

45. Kirillovich A., Nevzorova O., Falileeva M., Lipachev E., and Shakirova L. OntoMath<sup>Edu</sup>: A Linguistically Grounded Educational Mathematical Ontology // C. Benz Müller and B. Miller (Eds.). Proceedings of the 13th International Conference on Intelligent Computer Mathematics (CICM 2020), Bertinoro, Italy, July 26–31, 2020. Lecture Notes in Computer Science. Springer, 2020. Vol. 12236. P. 157–172.

[https://doi.org/10.1007/978-3-030-53518-6\\_10](https://doi.org/10.1007/978-3-030-53518-6_10).

---

46. Kirillovich A., Nevzorova O., Falileeva M., Lipachev E., and Shakirova L. OntoMath<sup>Edu</sup>: Towards an Educational Mathematical Ontology // E. Brady et al. (Eds.). Workshop Papers at 12th Conference on Intelligent Computer Mathematics (CICM-WS 2019), Prague, Czech Republic, 8–12 July 2019. CEUR Workshop Proceedings. CEUR-WS, 2020. Vol. 2634. URL: <https://ceur-ws.org/Vol-2634/WiP1.pdf>.

47. Kirillovich A., Nevzorova O., Falileeva M., Lipachev E., Dyupina A., Shakirova L. Prerequisite Relationships of the OntoMath<sup>Edu</sup> Educational Mathematical Ontology // J.C. Figueroa-García et al. (Eds.). Proceedings of the 8th Workshop on Engineering Applications (WEA 2021), Medellín, Colombia, October 6–8, 2021. Communications in Computer and Information Science. Springer, 2021. Vol. 1431. P. 517–524. [https://doi.org/10.1007/978-3-030-86702-7\\_44](https://doi.org/10.1007/978-3-030-86702-7_44).

48. Nevzorova O., Zhiltsov N., Zaikin D., Zhibrik O., Kirillovich A., Nevzorov V., Birialtsev E. Bringing Math to LOD: A Semantic Publishing Platform Prototype for Scientific Collections in Mathematics // Harith Alani et al. (Eds.). Proceedings of the 12th International Semantic Web Conference (ISWC 2013), Sydney, NSW, Australia, October 21–25, 2013. Lecture Notes in Computer Science. Springer, 2013. Vol. 8218. P. 379–394. [https://doi.org/10.1007/978-3-642-41335-3\\_24](https://doi.org/10.1007/978-3-642-41335-3_24).

49. Nevzorova O., Almukhametov D. Towards a Recommender System for the Choice of UDC Code for Mathematical Articles // A. Pozanenko et al. (Eds.). Supplementary Proceedings of the XXIII International Conference on Data Analytics and Management in Data Intensive Domains (DAMDID/RCDL 2021), Moscow, Russia, October 26–29, 2021. CEUR Workshop Proceedings. CEUR-WS, 2021. Vol. 3036. P. 54–62. URL: <https://ceur-ws.org/Vol-3036/paper04.pdf>.

50. Глухов В.А., Елизаров А.М., Липачёв Е.К., Малахальцев М.А. Электронные научные издания: переход на технологии семантического веба // Электронные библиотеки. 2007. Т. 10. № 1. С. 2.

51. Елизаров А.М., Липачёв Е.К., Малахальцев М.А. Веб-технологии в работе электронного математического журнала Lobachevskii Journal of Mathematics // Научный сервис в сети Интернет: многоядерный компьютерный мир. 15 лет РФФИ. Труды Всероссийской научной конференции. Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Южный федеральный университет, Институт вычислительной математики РАН. 2007. С. 355–356.

52. Ахметов Д.Ю., Елизаров А.М., Липачев Е.К. Автоматизация редакционных процессов в информационной системе управления электронными научными журналами // Электронные библиотеки. 2015. Т. 18. № 1–2. С. 32–45.

53. Elizarov A.M., Khaydarov S.M., Lipachev E.K. The Formation Method of Recommendations in the Process of Scientific Peer Review of Mathematical Papers // M. Gorbunov-Posadov et al. (Eds.). Proceedings of the 21st Conference on Scientific Services & Internet (SSI-2019), Novorossiysk–brau, Russia, September 23–28, 2019. CEUR Workshop Proceedings. CEUR-WS, 2020. Vol. 2543. P. 126–135.

URL: <https://ceur-ws.org/Vol-2543/rpaper12.pdf>.

54. Елизаров А.М., Липачёв Е.К., Хайдаров Ш.М. Рекомендательная система поиска экспертов для проведения научного рецензирования в математическом журнале // Электронные библиотеки. 2020. Т. 23. № 4. С. 708–732.

<https://doi.org/10.26907/1562-5419-2020-23-4-708-732>.

55. Николаев К.С., Невзорова О.А. Метод автоматической семантической разметки математических образовательных текстов // Информационные технологии в образовании и науке (ИТОН–2022) и II International Workshop “Digital Technologies for Teaching and Learning” (DTTL). Материалы III Международного форума по математическому образованию: Международной научно-практической конференции и II Международного научного семинара. Казань, 2022. С. 181–190.

56. Kirillovich A., Nevzorova O., Nikolaev K., and Galiaskarova K. Towards a Parallel Informal-Formal Corpus of Educational Mathematical Texts in Russian // Zhengbing Hu et al. (Eds.). Proceedings of the 2019 International Symposium on Computer Science, Digital Economy and Intelligent Systems (CSDEIS 2019), Moscow, Russia, on 4–6 October 2019. Advances in Intelligent Systems and Computing. Springer, 2020. Vol. 1127. P. 325–334. [https://doi.org/10.1007/978-3-030-39216-1\\_29](https://doi.org/10.1007/978-3-030-39216-1_29).

57. Nikolaev K., Kirillovich A., and Nevzorova O. A Corpus-Based Approach to Elementary Geometry Knowledge Test Generation // L. Gómez Chova et al. (Eds.). Proceedings of the 14th International Technology, Education and Development Conference (INTED 2020), Valencia, Spain, 2–4 March 2020. IATED, 2020. P. 6342–6348.

58. Elizarov A., Lipachev E. Digital Library Metadata Factories // R.V. Bolgov et al. (Eds.). Proceedings of the International Conference on Internet and Modern Society (IMS-2020), St. Petersburg, Russia, 17–20 June 2020. CEUR Workshop Proceedings. CEUR-WS, 2021. Vol. 2813. P. 13–21. URL: <https://ceur-ws.org/Vol-2813/rpaper01.pdf>.

59. Гафурова П.О., Елизаров А.М., Липачёв Е.К. Базовые сервисы фабрики метаданных цифровой математической библиотеки Lobachevskii-DML // Электронные библиотеки. 2020. Т. 23. № 3. С. 336–381.

<https://doi.org/10.26907/1562-5419-2020-23-3-336-381>.

60. Герасимов А.Н., Елизаров А.М., Липачёв Е.К. Формирование метаданных для международных баз цитирования в системе управления электронными научными журналами // Электронные библиотеки. 2015. Т. 18. № 1–2. С. 6–31.

61. Гафурова П.О., Елизаров А.М., Липачёв Е.К. Алгоритмы формирования метаданных математических ретро-коллекций на основе анализа структурных особенностей документов // Электронные библиотеки. 2021. Т. 24. № 2. С. 238–271.  
<https://doi.org/10.26907/1562-5419-2021-24-2-238-270>.

62. Elizarov A.M., Lipachev E.K., Khaydarov S.M. Automated System of Services for Processing of Large Collections of Scientific Documents // L. Kalinichenko, S. Kuznetsov, and Y. Manolopoulos (Eds.). Revised Selected Papers of the XVIII International Conference on Data Analytics and Management in Data Intensive Domains (DAMDID/RCDL 2016), Ershovo, Moscow, Russia, October 11–14, 2016. Communications in Computer and Information Science. Springer, 2017. Vol. 706. P. 58–64.  
URL: <https://ceur-ws.org/Vol-1752/paper10.pdf>.

63. Elizarov A., Khaydarov S., Lipachev E. Scientific Documents Ontologies for Semantic Representation of Digital Libraries // Proceedings of the 2nd Russia and Pacific Conference on Computer Technology and Applications (RPC 2017), Vladivostok, Russia, 25–29 September, 2017. IEEE, 2017. P. 1–5.  
<https://doi.org/10.1109/RPC.2017.8168064>.

64. Elizarov A.M., Lipachev E.K. Methods of Processing Large Collections of Scientific Documents and the Formation of Digital Mathematical Library // M. Gorbunov-Posadov et al. (Eds.). Proceedings of the 21st Conference on Scientific Services & Internet (SSI-2019), Novorossiysk–Abrau, Russia, September 23–28, 2019. CEUR Workshop Proceedings. SSI 2019 – Proceedings of the 21st Conference on Scientific Services and Internet. CEUR-WS, 2020. Vol. 2543. P. 354–360.  
URL: <https://ceur-ws.org/Vol-2543/spaper05.pdf>.

65. Elizarov A.M., Kirillovich A.V., Lipachev E.K., Nevzorova O.A. OntoMath<sup>PRO</sup>: An Ontology of Mathematical Knowledge // Doklady Mathematics. 2022. Vol. 106 (3).

P. 29–35. <https://doi.org/10.1134/S1064562422700016>.

66. *Guizzardi G., Botti Benevides A., Fonseca C.M., Porello D., Almeida J.P.A., Prince Sales T.* UFO: Unified Foundational Ontology // *Applied Ontology*. 2022. 17 (1), P. 167–210. <https://doi.org/10.3233/AO-210256>.

67. *Фалилеева М.В., Кириллович А.В., Невзорова О.А., Шакирова Л.Р., Липачёв Е.К., Дюпина А.Э.* Системы образовательных проекций, уровней и пререквизитов математической онтологии *OntoMath<sup>Edu</sup>* // *Электронные библиотеки*. 2021. Т. 24. № 3. С. 505–530. <https://doi.org/10.26907/1562-5419-2021-24-3-505-530>.

68. *Муромцев Д.И.* Модели и методы индивидуализации электронного обучения в контексте онтологического подхода // *Онтологии проектирования*. 2020. Т. 10, № 1. С. 34–49. <https://doi.org/10.18287/2223-9537-2020-10-1-34-49>.

69. *Schraefel M., Shadbolt N., Gibbins N.* CS AKTive Space: Representing Computer Science on the Semantic Web // *Proceedings of the 13th international conference on World Wide Web (WWW 2004)*, New York, USA, May 17–20, 2004. N.Y.: ACM Press New York, 2004. P. 384–392. <https://doi.org/10.1145/988672.988724>.

70. *Kirillovich A. and Nikolaev K.* Adapting the LodView RDF Browser for Navigation over the Multilingual Linguistic Linked Open Data Cloud // *Proceedings of the 9th IEEE International Conference on Sciences of Electronics, Technologies of Information and Telecommunications (SETIT 2022)*, Genova, Italy & Sfax, Tunisia, 28–30 May 2022. IEEE, 2022. P. 143–149. <https://doi.org/10.1109/SETIT54465.2022.9875628>.

71. *Хайдаров Ш.М., Ямалутдинова Г.Ш.* Алгоритм формирования словарей рекомендующей системы подбора классификаторов научной информации // *Ученые записки Института социально-гуманитарных знаний*. 2017. Т. 15. № 1. С. 552–557.

72. *Khaydarov S.M., Yamalutdinova G.S.* Recommender system of physical and mathematical documents classification // V. Voevodin et al. (Eds.). *Proceedings of the 20th Conference Scientific Services & Internet (SSI-2018)*, Novorossiysk–Abrau, Russia, September 17–22, 2018. *CEUR Workshop Proceedings*. CEUR-WS, 2018. Vol. 2260. P. 480–486. URL: [https://ceur-ws.org/Vol-2260/57\\_480-486.pdf](https://ceur-ws.org/Vol-2260/57_480-486.pdf).

73. *Хайдаров Ш.М., Ямалутдинова Г.Ш.* Рекомендательная система классификации физико-математических документов // *Труды XX Всероссийской научной конференции «Научный сервис в сети Интернет»*, 17–22 сентября 2018, г. Новороссийск. М.: ИПМ им. М.В. Келдыша, 2018. С. 480–486.



74. Биряльцев Е.В., Елизаров А.М., Жильцов Н.Г., Липачёв Е.К., Невзорова О.А., Соловьев В.Д. Методы анализа семантических данных математических электронных коллекций // Научно-техническая информация. Серия 2: Информационные процессы и системы. 2014. № 4. С. 12–17.

75. Biryal'tsev E., Elizarov A., Zhil'tsov N., Lipachev E., Nevzorova O., Solov'ev V. Methods for Analyzing Semantic Data of Electronic Collections in Mathematics // Automatic Documentation and Mathematical Linguistics. 2014. V. 48. No. 2. P. 81–85.

76. Ахметов Д.Ю., Елизаров А.М., Липачёв Е.К., Хайдаров Ш.М. Программный комплекс формирования рекомендаций по подбору рецензентов для научных документов в информационных издательских системах // Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ RU 2018611617, 02.02.2018.

77. MacGregor J., Stranack K. and Willinsky J. The Public Knowledge Project: Open Source Tools for Open Access to Scholarly Communication // S. Bartling and S. Friesike (Eds.) Opening Science: The Evolving Guide on How the Internet is Changing Research, Collaboration and Scholarly Publishing. Springer, Cham, 2014. P. 165–175. [https://doi.org/10.1007/978-3-319-00026-8\\_11](https://doi.org/10.1007/978-3-319-00026-8_11).

78. Mathematics Subject Classification (MSC2010). <https://mathscinet.ams.org/mathscinet/msc/pdfs/classifications2010.pdf>.

79. MSC2020-Mathematics Subject Classification System. <https://mathscinet.ams.org/msnhtml/msc2020.pdf>.

80. MSC Conversion Table. <https://mathscinet.ams.org/mathscinet/msc/conv.html?from=2010>.

81. Buswell S. et al. (Eds.) The OpenMath Standard. Version: 2.0r2. The OpenMath Society, July 2019. URL: <https://openmath.org/standard/om20-2019-07-01/omstd20.html>.

82. Xie I, Matusiak K. Discover Digital Libraries: Theory and Practice. Elsevier, 2016.

83. Bouche T., Labbe O. The New Numdam Platform // H. Geuvers et al. (Eds.). Proceedings of the 10th International Conference on Intelligent Computer Mathematics (CICM 2017), Edinburgh, UK, July 17–21, 2017. Lecture Notes in Computer Science. Springer, Cham, 2017. Vol. 10383. P. 70–82. [https://doi.org/10.1007/978-3-319-62075-6\\_6](https://doi.org/10.1007/978-3-319-62075-6_6).

---

URL: <https://zenodo.org/record/581405>.

84. *Erleben F., Günther M., Krötzsch M., Mendez J., Vrandečić D.* Introducing Wikidata to the Linked Data Web // P. Mika et al. (Eds.). Proceedings of the 13th International Semantic Web Conference (ISWC 2014), Riva del Garda, Italy, October 19–23, 2014, Part I. Lecture Notes in Computer Science. Springer, Cham, 2014. Vol. 8796. P. 50–65. [https://doi.org/10.1007/978-3-319-11964-9\\_4](https://doi.org/10.1007/978-3-319-11964-9_4).

85. *Vrandečić D., Krötzsch M.* Wikidata: a free collaborative knowledgebase. Communications of the ACM. 2014. Vol. 57, Issue 10, October 2014. P. 78–85. <https://doi.org/10.1145/2629489>.

86. *Scharpf Ph., Schubotz M., Gipp B.* Mathematics in Wikidata // L.-A. Kaffee et al. (Eds.). Proceedings of the 2nd Wikidata Workshop (Wikidata 2021) co-located with the 20th International Semantic Web Conference (ISWC 2021), October 24, 2021. CEUR Workshop Proceedings. CEUR-WS, 2021. Vol. 2982.

URL: <http://ceur-ws.org/Vol-2982/paper-1.pdf>.

87. *Андреичев М.Д., Гафурова П.О., Елизаров А.М., Липачёв Е.К.* Пополнение метаданных документов математических цифровых ретро-коллекций методом семантических сетей // Труды XXIII Всероссийской научной конференции «Научный сервис в сети Интернет». М.: ИПМ им. М.В. Келдыша, 2021. С. 22–33. <https://doi.org/10.20948/abrau-2021-22>.

88. *Harris S. et al. (Eds.)* SPARQL 1.1 Query Language. W3C Recommendation, 21 March 2013. URL: <https://www.w3.org/TR/sparql11-query/>.

89. *Гафурова П.О., Елизаров А.М., Липачёв Е.К.* Извлечение знаний из Wikidata для формирования метаданных документов электронных математических коллекций // Электронные библиотеки. 2021. Т. 24. № 6. С. 1023–1059. <https://doi.org/10.26907/1562-5419-2021-24-6-1023-1059>.

90. Journal Article Tag Suite. URL: <https://jats.nlm.nih.gov/about.html>.

91. EuDML metadata schema specification (v2.0–final). <https://initiative.eudml.org/eudml-metadata-schema-specification-v20-final>.

92. *Jost M., Bouche T., Goutorbe C., Jorda J.P.* D3.2: The EuDML metadata schema. Revision: 1.6 as of 15th December 2010.

URL: <http://www.mathdoc.fr/publis/d3.2-v1.6.pdf>.

93. *Gafurova P.O., Elizarov A.M., Lipachev E.K., Khammatova D.M.* Metadata Normalization Methods in the Digital Mathematical Library // M. Gorbunov-Posadov et

al. (Eds.). Proceedings of the 21st Conference on Scientific Services & Internet (SSI-2019), Novorossiysk–Abrau, Russia, September 23–28, 2019. CEUR Workshop Proceedings. CEUR-WS, 2020. Vol. 2543. P. 136–148.

URL: <https://ceur-ws.org/Vol-2543/rpaper13.pdf>.

---

## **DIGITAL ECOSYSTEM OntoMath AS AN APPROACH TO BUILDING THE SPACE OF MATHEMATICAL KNOWLEDGE**

**A. M. Elizarov**<sup>1</sup> [0000-0003-2546-6897], **A. V. Kirillovich**<sup>2</sup> [0000-0001-9680-449X],  
**E. K. Lipachev**<sup>3</sup> [0000-0001-7789-2332], **O. A. Nevzorova**<sup>4</sup> [0000-0001-8116-9446]

<sup>1-4</sup> *Kazan Federal University, ul. Kremlyovskaya, 35, Kazan, 420008*

<sup>1, 2</sup> *Joint Supercomputer Center of the Russian Academy of Sciences, Kazan, Russia*

<sup>1</sup>amelizarov@gmail.com, <sup>2</sup>alik.kirillovich@gmail.com, <sup>3</sup>elipachev@gmail.com,

<sup>4</sup>onevzoro@gmail.com

### **Abstract**

The results on the creation of methods for managing mathematical knowledge in the context of digital mathematical libraries are presented. The software tools developed on the basis of these methods are part of the OntoMath digital ecosystem, within which they interact. A brief description of the architecture of the OntoMath ecosystem is given, the levels of subject ontologies and external ontologies are highlighted, as well as the level of software tools and services. Semantic services are separated into a separate category. This term denotes software tools, in the functionality of which queries to subject ontologies are used to ensure the management of knowledge objects. General descriptions of developed subject ontologies are given: educational mathematical ontology OntoMath<sup>Edu</sup> and ontology of professional mathematics OntoMath<sup>PRO</sup>. The development of educational ontology is reflected in the direction of including educational prerequisite links between classes. Among the software tools of the digital ecosystem, search services for mathematical electronic collections, a service for semantic annotation of mathematical documents, tools for semantic marking of educational mathematical documents, as well as a system for automatically generating testing tests in mathematical educational disciplines are

---

highlighted. As part of the OntoMath digital ecosystem, special-purpose recommender systems are being developed. The current version of the ecosystem includes a recommender system for generating a list of related articles based on the OntoMath<sup>PRO</sup> ontology, a recommender system for appointing experts to support the scientific review process, and recommender systems for selecting subject classifiers UDC and Mathematics Subject Classification codes for mathematical documents. The results are also presented in the direction of creating a digital library metadata factory, which includes services and tools for extracting, refining, replenishing and normalizing the metadata of electronic mathematical collections. Note that the OntoMath ecosystem is being developed as the technological basis for the Lobachevskii Digital Mathematical Library.

**Keywords:** *Digital Ecosystem, OntoMath Ecosystem, Digital Mathematical Library, Lobachevskii-DML, Ontology, OntoMath<sup>PRO</sup>, OntoMath<sup>Edu</sup>.*

## REFERENCES

1. *Bartling S., Friesike S.* Towards Another Scientific Revolution // S. Bartling and S. Friesike (Eds.) *Opening Science: The Evolving Guide on How the Internet is Changing Research, Collaboration and Scholarly Publishing.* Springer, Cham, 2014. P. 3–15. [https://doi.org/10.1007/978-3-319-00026-8\\_1](https://doi.org/10.1007/978-3-319-00026-8_1).
2. *Elizarov A.M., Zuev D.S., Lipachev E.K.* Lifecycle management of Electronic Publications in Information Systems Scientific Journal // *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Sistemnyj analiz i informacionnye tekhnologii.* 2014. № 4. S. 81–88.
3. *Elizarov A.M., Zuev D.S., Lipachev E.K.* Servisy podderzhki zhiznennogo cikla elektronnyh nauchnyh publikacij // *Nauchnyj servis v seti Internet: mnogoobrazie superkomp'yuternyh mirov. Trudy Mezhdunarodnoj superkomp'yuternoj konferencii. Rossijskaya akademiya nauk Superkomp'yuternyj konsorcium universitetov Rossii.* 2014. S. 436–438.
4. *Heller L., The R., Bartling S.* Dynamic Publication Formats and Collaborative Authoring // S. Bartling and S. Friesike (Eds.) *Opening Science: The Evolving Guide on How the Internet is Changing Research, Collaboration and Scholarly Publishing.* Springer, Cham, 2014. P. 191–211. [https://doi.org/10.1007/978-3-319-00026-8\\_13](https://doi.org/10.1007/978-3-319-00026-8_13).
5. *Gorbunov-Posadov M.* Zhivaya publikaciya // *Otkrytye sistemy.* SUBD. 2011.

№ 4. S. 48.

6. *Elizarov A.M., Lipachev E.K.* Digital Platforms and Digital Science Libraries // International Journal of Open Information Technologies. 2020. Vol. 8. No. 11. P. 80–90.

7. *Elizarov A., Kirillovich A., Lipachev E., Nevzorova O., Solovyev V., Zhiltsov N.* Mathematical Knowledge Representation: Semantic Models and Formalisms // Lobachevskii J. of Mathematics. 2014. V. 35 (4). P. 347–353.  
<https://doi.org/10.1134/S1995080214040143>.

8. *Elizarov A., Kirillovich A., Lipachev E., Nevzorova O.* Semantic Formula Search in Digital Mathematical Libraries // Proceedings of the 2nd Russia and Pacific Conference on Computer Technology and Applications (RPC 2017), Vladivostok, Russia, 25–29 September, 2017. IEEE, 2017. P. 39–43.  
<https://doi.org/10.1109/RPC.2017.8168063>.

9. Developing a 21st Century Global Library for Mathematics Research. The National Academies Press, Washington, 2014. 142 p. <https://doi.org/10.17226/18619>.

10. SearchOnMath Site. URL: <https://www.searchonmath.com/>.

11. MathWebSearch: Searching Math on the Web.  
URL: <https://search.mathweb.org/>.

12. The zbMATH Open formula search. URL: <https://zbmath.org/formulae/>.

13. *Berčič K, Carette J., Farmer W.M., Kohlhase M., Dennis Müller D., Rabe F., Sharoda Y.* The Space of Mathematical Software Systems – A Survey of Paradigmatic Systems // arXiv: 2002.04955v1 [cs.MS] 12 Feb 2020.

14. *Kohlhase M., Sucan I.* A Search Engine for Mathematical Formulae // J. Calmet et al. (Eds.). Proceedings of the 8th International Conference on Artificial Intelligence and Symbolic Computation (AISC 2006), Beijing, China, September 20–22, 2006. Lecture Notes in Computer Science, Vol. 4120. Springer, Berlin, Heidelberg, 2006. P. 241–253. [https://doi.org/10.1007/11856290\\_21](https://doi.org/10.1007/11856290_21).

15. *Guidi F., Sacerdoti Coen C.* A Survey on Retrieval of Mathematical Knowledge // Math. Comput. Sci. 2016. Vol. 10. P. 409–427.

16. *Pechnikov A., Chebukov D., Nwohiri A.* Communication of Scientists Through Scientific Publications: Math-Net.Ru as a Case Study // M. Gorbunov-Posadov et al. (Eds.). Proceedings of the 22nd Conference on Scientific Services & Internet (SSI-

2020), Novorossiysk–Abrau, Russia, September 21–25, 2020. CEUR Workshop Proceedings. CEUR-WS, 2020. Vol. 2784. P. 234–244.

<https://ceur-ws.org/Vol-2784/rpaper19.pdf>.

17. *Elizarov A.M., Kirillovich A.V., Lipachev E.K., Zhizhchenko A.B., and Zhil'tsov N.G.* Mathematical Knowledge Ontologies and Recommender Systems for Collections of Documents in Physics and Mathematics // *Doklady Mathematics*. 2016. Vol. 93 (2). P. 231–233. <https://doi.org/10.1134/S1064562416020174>.

18. *Kozicyn A.S., Afonin S.A., Shachnev D.A.* The Use of Thematic Analysis Methods in Scientometric Systems // M. Gorbunov-Posadov et al. (Eds.). *Proceedings of the 22nd Conference on Scientific Services & Internet (SSI-2020)*, Novorossiysk–Abrau, Russia, September 21–25, 2020. CEUR Workshop Proceedings. CEUR-WS, 2020. Vol. 2784. P. 178–188. <https://ceur-ws.org/Vol-2784/rpaper14.pdf>.

19. *Abecker A., van Elst L.* Ontologies for Knowledge Management // S. Staab and R. Studer (Eds.) *Handbook on Ontologies*. Springer, Berlin, Heidelberg, 2009. P. 713–734. [https://doi.org/10.1007/978-3-540-92673-3\\_32](https://doi.org/10.1007/978-3-540-92673-3_32).

20. *Lange Ch.* Ontologies and Languages for Representing Mathematical Knowledge on the Semantic Web // *Semantic Web Journal*. 2013. Vol. 4 (2). P. 119–158. <https://doi.org/10.3233/SW-2012-0059>.

21. *Hazewinkel M.* Mathematical Knowledge Management: Mathematical knowledge management is needed // *arXiv:cs/0410055 [cs.IR]* Oct 2004.

22. *Carette J., Farmer W.M.* A Review of Mathematical Knowledge Management // J. Carette et al. (Eds.). *Proceedings of the International Conference on Intelligent Computer Mathematics (CICM 2009)*, Grand Bend, Canada, July 6-12, 2009. *Lecture Notes in Computer Science*. Springer, 2009. Vol. 5625. P. 233–246. [https://doi.org/10.1007/978-3-642-02614-0\\_21](https://doi.org/10.1007/978-3-642-02614-0_21).

23. *Elizarov A.M., Lipachev E.K., Zuev D.S.* Digital Mathematical Libraries: Overview of implementations and content management services // L. Kalinichenko et al. (Eds.) *Selected Papers of the XIX International Conference on Data Analytics and Management in Data Intensive Domains (DAMDID/RCDL 2017)*, Moscow, Russia, October 9–13, 2017. CEUR Workshop Proceedings. CEUR-WS, 2017. Vol. 2022. P. 317–325. <https://ceur-ws.org/Vol-2022/paper49.pdf>.

24. *Borwein J., Rocha E.M., Rodrigues J.F.* *Communicating Mathematics in the Digital Era*. A K Peters/CRC Press, 2008.

25. *Carette J., Farmer W.M., Kohlhase M., Rabe F.* Big Math and the One-Brain Barrier. A Position Paper and Architecture Proposal // arXiv:1904.10405v1 [cs.MS] 23 Apr 2019.

26. *Carette J., Farmer W.M., Kohlhase M., Rabe F.* Big Math and the One-Brain Barrier: The Tetrapod Model of Mathematical Knowledge. *Math Intelligencer*. 2021. Vol. 43. P. 78–87. <https://doi.org/10.1007/s00283-020-10006-0>.

27. *Tansley A.G.* The Use and Abuse of Vegetational Concepts and Terms // *Ecology*. 1935. Vol. 16 (3). P. 284–307. <https://doi.org/10.2307/1930070>. <https://www.jstor.org/stable/1930070>.

28. *Briscoe G., De Wilde P.* Digital ecosystems: self-organisation of evolving agent populations // *Proceedings of the International Conference on Management of Emergent Digital EcoSystems (MEDES '09)*, Lyon, France, October 27–30, 2009. ACM, 2009. P. 44–48. <https://doi.org/10.1145/1643823.1643832>.

29. *Kurz T., Eder R., and Heistracher T.* Knowledge Resources – A Knowledge Management Approach for Digital Ecosystems // F.A. Basile Colugnati et al. (Eds.) *Revised Selected Papers of the 3rd International Conference on Digital Eco-Systems (OPAALS 2010)*, Aracujú, Sergipe, Brazil, March 22–23, 2010. *Lecture Notes of the Institute for Computer Sciences, Social Informatics and Telecommunications Engineering*. Springer, Berlin, Heidelberg, 2010. Vol. 67. P. 131–145. [https://doi.org/10.1007/978-3-642-14859-0\\_11](https://doi.org/10.1007/978-3-642-14859-0_11).

30. *Bosch J.* *Speed, Data, and Ecosystems. Excelling in a Software-Driven World*. CRC Press. Taylor & Francis Group, 2017.

31. *Szoniecky S., Bouhai N. (Eds.)* *Collective Intelligence and Digital Archives: Towards Knowledge Ecosystems*. ISTE Ltd and John Wiley & Sons, Inc., 2017.

32. *Elizarov A.M., Lipachev E.K.* Lobachevskii DML: Towards a Semantic Digital Mathematical Library of Kazan University // L. Kalinichenko et al. (Eds.) *Selected Papers of the XIX International Conference on Data Analytics and Management in Data Intensive Domains (DAMDID/RCDL 2017)*, Moscow, Russia, October 9–13, 2017. *CEUR Workshop Proceedings*. CEUR-WS, 2017. Vol. 2022. P. 326–333. <https://ceur-ws.org/Vol-2022/paper50.pdf>.

33. *Elizarov A., Lipachev E.* Big Math Methods in Lobachevskii-DML Digital Library // A. Elizarov et al. (Eds.) *Selected Papers of the XXI International Conference on*

Data Analytics and Management in Data Intensive Domains (DAMDID/RCDL 2019), Kazan, Russia, October 15–18, 2019. CEUR-WS, 2019. Vol. 2523. P. 59–72.

<https://ceur-ws.org/Vol-2523/invited08.pdf>.

34. *Elizarov A.M., Kirillovich A.V., Lipachev E.K., Nevzorova O.A.* Upravlenie matematicheskimi znaniyami: ontologicheskie modeli i cifrovye tekhnologii // *Analitika i upravlenie dannymi v oblastyakh s intensivnym ispol'zovaniem dannyh. XVIII mezhdunarodnaya konferenciya.* 2016. S. 95–101.

35. *Elizarov A.M., Kirilovich A.V., Lipachev E.K., Nevzorova O.A.* Mathematical Knowledge Management: Ontological Models and Digital Technology // L. Kalinichenko, et al. (Eds.) Selected Papers of the XVIII International Conference on Data Analytics and Management in Data Intensive Domains (DAMDID/RCDL 2016), Ershovo, Moscow, Russia, October 11–14, 2016. CEUR Workshop Proceedings. CEUR-WS, 2016. Vol. 1752. P. 44–50. <https://ceur-ws.org/Vol-1752/paper08.pdf>.

36. *Elizarov A., Kirillovich A., Lipachev E., Nevzorova O.* Digital Ecosystem OntoMath: Mathematical Knowledge Analytics and Management // L. Kalinichenko, S. Kuznetsov, and Y. Manolopoulos (Eds.) Revised Selected Papers of the XVIII International Conference on Data Analytics and Management in Data Intensive Domains (DAMDID/RCDL 2016), Ershovo, Moscow, Russia, October 11–14, 2016. Communications in Computer and Information Science. Springer, 2017. Vol. 706. P. 33–46. [https://doi.org/10.1007/978-3-319-57135-5\\_3](https://doi.org/10.1007/978-3-319-57135-5_3).

37. *Elizarov A.M., Zhiltsov N.G., Kirillovich A.V., Lipachev E.K., Nevzorova O.A., and Solovyev V.D.* The OntoMath ecosystem: Ontologies and applications for math knowledge management // Semantic Representation of Mathematical Knowledge Workshop, Fields Institute, Toronto, Canada, February 5, 2016. URL: <https://video-archive.fields.utoronto.ca/view/4698>.

38. *d'Aquin M., Motta E.* Visualizing consensus with online ontologies to support quality in ontology development // EKAW 2010 Workshop on Ontology Quality, 15 Oct 2010, Lisbon, Portugal, 2010.

URL: [https://www.researchgate.net/publication/267562537\\_Visualizing\\_Consensus\\_with\\_Online\\_Ontologies\\_to\\_Support\\_Quality\\_in\\_Ontology\\_Development](https://www.researchgate.net/publication/267562537_Visualizing_Consensus_with_Online_Ontologies_to_Support_Quality_in_Ontology_Development).

39. *Groza T., Handschuh S., Möller K., Decker S.* SALT – Semantically Annotated LaTeX for Scientific Publications // E. Franconi et al. (Eds.). Proceedings of the 4th Euro-



pean Semantic Web Conference (ESWC 2007), Innsbruck, Austria, June 3–7, 2007. Lecture Notes in Computer Science. Springer, 2007. Vol 4519. P. 518–532.

[https://doi.org/10.1007/978-3-540-72667-8\\_37](https://doi.org/10.1007/978-3-540-72667-8_37).

40. Groza T., Handschuh S. SALT Document Ontology. DERI, 2009. URL: <https://web.archive.org/web/20100516153736/http://salt.semanticauthoring.org/ontologies/sdo>.

41. Nevzorova O.A, Biryal'cev E.V., Zhil'cov N.G. Kollekcii matematicheskikh tekstov: annotirovanie i primenenie v poiskovyh zadachah // Iskusstvennyj intellekt i prinyatie reshenij. 2012. № 3. S. 51–62.

42. Solovyev V., Zhiltsov N. Logical structure analysis of scientific publications in mathematics // R. Akerkar (Ed.). Proceedings of the International Conference on Web Intelligence, Mining and Semantics (WIMS 2011), Sogndal, Norway May 25–27, 2011. ACM, 2011. Article No. 21. <https://doi.org/10.1145/1988688.1988713>.

43. Elizarov A.M., Lipachev E.K., Nevzorova O.A., Solovyev V.D. Methods and means for semantic structuring of electronic mathematical documents// Doklady Mathematics. 2014. Vol. 90, No. 1. P. 521–524. <https://doi.org/10.1134/S1064562414050275>.

44. Nevzorova O., Zhiltsov N., Kirillovich A., Lipachev E. OntoMath<sup>PRO</sup> Ontology: A Linked Data Hub for Mathematics // P. Klinov and D. Mouromstev (Eds.). Proceedings of the 5th International Conference on Knowledge Engineering and Semantic Web (KESW 2014), Kazan, Russia, September 29–October 1, 2014. Communications in Computer and Information Science. Springer, Cham, 2014. Vol. 468. P. 105–119. [https://doi.org/10.1007/978-3-319-11716-4\\_9](https://doi.org/10.1007/978-3-319-11716-4_9).

45. Kirillovich A., Nevzorova O., Falileeva M., Lipachev E., and Shakirova L. OntoMath<sup>Edu</sup>: A Linguistically Grounded Educational Mathematical Ontology // C. Benzmüller and B. Miller (Eds.). Proceedings of the 13th International Conference on Intelligent Computer Mathematics (CICM 2020), Bertinoro, Italy, July 26–31, 2020. Lecture Notes in Computer Science. Springer, 2020. Vol. 12236. P. 157–172. [https://doi.org/10.1007/978-3-030-53518-6\\_10](https://doi.org/10.1007/978-3-030-53518-6_10).

46. Kirillovich A., Nevzorova O., Falileeva M., Lipachev E., and Shakirova L. OntoMath<sup>Edu</sup>: Towards an Educational Mathematical Ontology // E. Brady et al. (Eds.). Workshop Papers at 12th Conference on Intelligent Computer Mathematics (CICM-WS 2019), Prague, Czech Republic, 8–12 July 2019. CEUR Workshop Proceedings. CEUR-WS,

2020. Vol. 2634. URL: <https://ceur-ws.org/Vol-2634/WiP1.pdf>.

47. Kirillovich A., Nevzorova O., Falileeva M., Lipachev E., Dyupina A., Shakirova L. Prerequisite Relationships of the OntoMath<sup>Edu</sup> Educational Mathematical Ontology // J.C. Figueroa-García et al. (Eds.). Proceedings of the 8th Workshop on Engineering Applications (WEA 2021), Medellín, Colombia, October 6–8, 2021. Communications in Computer and Information Science. Springer, 2021. Vol. 1431. P. 517–524. [https://doi.org/10.1007/978-3-030-86702-7\\_44](https://doi.org/10.1007/978-3-030-86702-7_44).

48. Nevzorova O., Zhiltsov N., Zaikin D., Zhibrik O., Kirillovich A., Nevzorov V., Birialtsev E. Bringing Math to LOD: A Semantic Publishing Platform Prototype for Scientific Collections in Mathematics // Harith Alani et al. (Eds.). Proceedings of the 12th International Semantic Web Conference (ISWC 2013), Sydney, NSW, Australia, October 21–25, 2013. Lecture Notes in Computer Science. Springer, 2013. Vol. 8218. P. 379–394. [https://doi.org/10.1007/978-3-642-41335-3\\_24](https://doi.org/10.1007/978-3-642-41335-3_24).

49. Nevzorova O., Almukhametov D. Towards a Recommender System for the Choice of UDC Code for Mathematical Articles // A. Pozanenko et al. (Eds.). Supplementary Proceedings of the XXIII International Conference on Data Analytics and Management in Data Intensive Domains (DAMDID/RCDL 2021), Moscow, Russia, October 26–29, 2021. CEUR Workshop Proceedings. CEUR-WS, 2021. Vol. 3036. P. 54–62. URL: <https://ceur-ws.org/Vol-3036/paper04.pdf>.

50. Gluhov V.A., Elizarov A.M., Lipachev E.K., Malahal'cev M.A. Elektronnye nauchnye izdaniya: perekhod na tekhnologii semanticheskogo veba // Elektronnye biblioteki. 2007. T. 10. № 1. S. 2.

51. Elizarov A.M., Lipachev E.K., Malahal'cev M.A. Veb-tekhnologii v rabote elektronnoy matematicheskoy zhurnala Lobachevskii Journal of Mathematics // Nauchnyj servis v seti Internet: mnogoyadernyy komp'yuternyy mir. 15 let RFFI. Trudy Vserossiyskoy nauchnoy konferencii. Moskovskiy gosudarstvennyy universitet im. M.V. Lomonosova, Yuzhnyy federal'nyy universitet, Institut vychislitel'noy matematiki RAN. 2007. S. 355–356.

52. Akhmetov D.Yu., Elizarov A.M., Lipachev E.K. Information systems of electronic scientific journals and editorial process automation // Russian Digital Libraries Journal. 2015. Vol. 18. No 1-2. P. 32-45.

53. Elizarov A.M., Khaydarov S.M., Lipachev E.K. The Formation Method of Recommendations in the Process of Scientific Peer Review of Mathematical Papers //

M. Gorbunov-Posadov et al. (Eds.). Proceedings of the 21st Conference on Scientific Services & Internet (SSI-2019), Novorossiysk–brau, Russia, September 23–28, 2019. CEUR Workshop Proceedings. CEUR-WS, 2020. Vol. 2543. P. 126–135.

URL: <https://ceur-ws.org/Vol-2543/rpaper12.pdf>.

54. *Elizarov A.M., Lipachev E.K., Khaydarov S.M.* Recommender system in the process of scientific peer review in mathematical journal // *Russian Digital Libraries Journal*. 2020. Vol. 23. No 4. P. 708–732.

<https://doi.org/10.26907/1562-5419-2020-23-4-708-732>.

55. *Nikolaev K.S., Nevzorova O.A.* Metod avtomaticheskoy semanticheskoy razmetki matematicheskikh obrazovatel'nyh tekstov // *Informacionnye tekhnologii v obrazovanii i nauke (ITON – 2022) i II International Workshop "Digital Technologies for Teaching and Learning (DTTL)"*. Materialy III Mezhdunarodnogo foruma po matematicheskomu obrazovaniyu: Mezhdunarodnoj nauchno-prakticheskoy konferencii i II Mezhdunarodnogo nauchnogo seminara. Kazan', 2022. S. 181–190.

56. *Kirillovich A., Nevzorova O., Nikolaev K., and Galiaskarova K.* Towards a Parallel Informal-Formal Corpus of Educational Mathematical Texts in Russian // Zhengbing Hu et al. (Eds.). Proceedings of the 2019 International Symposium on Computer Science, Digital Economy and Intelligent Systems (CSDEIS 2019), Moscow, Russia, on 4–6 October 2019. *Advances in Intelligent Systems and Computing*. Springer, 2020. Vol. 1127. P. 325–334. [https://doi.org/10.1007/978-3-030-39216-1\\_29](https://doi.org/10.1007/978-3-030-39216-1_29).

57. *Nikolaev K., Kirillovich A., and Nevzorova O.* A Corpus-Based Approach to Elementary Geometry Knowledge Test Generation // L. Gómez Chova et al. (Eds.). Proceedings of the 14th International Technology, Education and Development Conference (INTED 2020), Valencia, Spain, 2–4 March 2020. IATED, 2020. P. 6342–6348.

58. *Elizarov A., Lipachev E.* Digital Library Metadata Factories // R.V. Bolgov et al. (Eds.). Proceedings of the International Conference on Internet and Modern Society (IMS-2020), St. Petersburg, Russia, 17–20 June 2020. CEUR Workshop Proceedings. CEUR-WS, 2021. Vol. 2813. P. 13–21. URL: <https://ceur-ws.org/Vol-2813/rpaper01.pdf>.

59. *Gafurova P.O., Elizarov A.M., Lipachev E.K.* Basic services of factory metadata digital mathematical library Lobachevskii-DML // *Russian Digital Libraries Journal*. 2020. Vol. 23. No 3. P. 336–381.

<https://doi.org/10.26907/1562-5419-2020-23-3-336-381>.

60. *Gerasimov A.N., Elizarov A.M., Lipachev E.K.* Subsystem of formation metadata for science index databases on management platform electronic scientific journals // Russian Digital Libraries Journal. 2015. Vol. 18. No 1–2. P. 6–31.

61. *Gafurova P.O., Elizarov A.M., Lipachev E.K.* Algorithms for formation of metadata mathematical retro collections based on analysis of structural features of documents // Russian Digital Libraries Journal. 2021. Vol. 24. No 2. P. 238–271.

<https://doi.org/10.26907/1562-5419-2021-24-2-238-270>.

62. *Elizarov A.M., Lipachev E.K., Khaydarov S.M.* Automated System of Services for Processing of Large Collections of Scientific Documents // L. Kalinichenko, S. Kuznetsov, and Y. Manolopoulos (Eds.). Revised Selected Papers of the XVIII International Conference on Data Analytics and Management in Data Intensive Domains (DAMDID/RCDL 2016), Ershovo, Moscow, Russia, October 11–14, 2016. Communications in Computer and Information Science. Springer, 2017. Vol. 706. P. 58–64.

URL: <https://ceur-ws.org/Vol-1752/paper10.pdf>.

63. *Elizarov A., Khaydarov S., Lipachev E.* Scientific Documents Ontologies for Semantic Representation of Digital Libraries // Proceedings of the 2nd Russia and Pacific Conference on Computer Technology and Applications (RPC 2017), Vladivostok, Russia, 25–29 September, 2017. IEEE, 2017. P. 1–5.

<https://doi.org/10.1109/RPC.2017.8168064>.

64. *Elizarov A.M., Lipachev E.K.* Methods of Processing Large Collections of Scientific Documents and the Formation of Digital Mathematical Library // M. Gorbunov-Posadov et al. (Eds.). Proceedings of the 21st Conference on Scientific Services & Internet (SSI-2019), Novorossiysk–Abrau, Russia, September 23-28, 2019. CEUR Workshop Proceedings. SSI 2019 – Proceedings of the 21st Conference on Scientific Services and Internet. CEUR-WS, 2020. Vol. 2543. P. 354–360.

URL: <https://ceur-ws.org/Vol-2543/spaper05.pdf>.

65. *Elizarov A.M., Kirillovich A.V., Lipachev E.K., Nevzorova O.A.* OntoMath<sup>PRO</sup>: An Ontology of Mathematical Knowledge // Doklady Mathematics. 2022. Vol. 106 (3). P. 29–35. <https://doi.org/10.1134/S1064562422700016>.

66. *Guizzardi G., Botti Benevides A., Fonseca C.M., Porello D., Almeida J.P.A., Prince Sales T.* UFO: Unified Foundational Ontology // Applied Ontology. 2022. 17 (1), P. 167–210. <https://doi.org/10.3233/AO-210256>.

67. *Falileeva M.V., Kirillovich A.V., Nevzorova O.A., Shakirova L.R.,*

*Lipachev E.K., Dyupina A.E.* Educational projection systems, levels and prerequisites of mathematical ontology OntoMath<sup>Edu</sup> // *Russian Digital Libraries Journal*. 2021. Vol. 24. No 3. P. 505–530. <https://doi.org/10.26907/1562-5419-2021-24-3-505-530>.

68. *Mouromtsev D.* Models and methods of e-learning individualization in the context of ontological approach // *Ontology of Designing*. 2020. Vol. 10, No 1. P. 34–49. <https://doi.org/10.18287/2223-9537-2020-10-1-34-49>.

69. *Schraefel M., Shadbolt N., Gibbins N.* CS AKTive Space: Representing Computer Science on the Semantic Web // *Proceedings of the 13th international conference on World Wide Web (WWW 2004)*, New York, USA, May 17–20, 2004. N.Y.: ACM Press New York, 2004. P. 384–392. <https://doi.org/10.1145/988672.988724>.

70. *Kirillovich A. and Nikolaev K.* Adapting the LodView RDF Browser for Navigation over the Multilingual Linguistic Linked Open Data Cloud // *Proceedings of the 9th IEEE International Conference on Sciences of Electronics, Technologies of Information and Telecommunications (SETIT 2022)*, Genova, Italy & Sfax, Tunisia, 28–30 May 2022. IEEE, 2022. P. 143–149. <https://doi.org/10.1109/SETIT54465.2022.9875628>.

71. *Khaydarov S.M., Yamalutdinova G.S.* Algoritm formirovaniya slovarej rekomenduyushchej sistemy podbora klassifikatorov nauchnoj informacii // *Uchenye zapiski ISGZ*. 2017. T. 15. № 1. S. 552–557.

72. *Khaydarov S.M., Yamalutdinova G.S.* Recommender system of physical and mathematical documents classification // V. Voevodin et al. (Eds.). *Proceedings of the 20th Conference Scientific Services & Internet (SSI-2018)*, Novorossiysk–Abrau, Russia, September 17–22, 2018. CEUR Workshop Proceedings. CEUR-WS, 2018. Vol. 2260. P. 480–486. URL: [https://ceur-ws.org/Vol-2260/57\\_480-486.pdf](https://ceur-ws.org/Vol-2260/57_480-486.pdf).

73. *Khaydarov S.M., Yamalutdinova G.S.* Rekomendatel'naya sistema klassifikacii fiziko-matematicheskikh dokumentov // *Nauchnyj servis v seti Internet*. 2018. № 20. S. 480–486.

74. *Biryal'cev E.V., Elizarov A.M., Zhil'cov N.G., Lipachev E.K., Nevzorova O.A., Solov'ev V.D.* Metody analiza semanticheskikh dannyh matematicheskikh elektronnyh kollekcij // *Nauchno-tekhnicheskaya informaciya. Seriya 2: Informacionnye processy i sistemy*. 2014. № 4. S. 12–17.

75. *Biryal'tsev E., Elizarov A., Zhil'tsov N., Lipachev E., Nevzorova O., Solov'ev V.*

Methods for Analyzing Semantic Data of Electronic Collections in Mathematics // Automatic Documentation and Mathematical Linguistics. 2014. V. 48. No. 2. P. 81–85.

76. *Ahmetov D.Yu., Elizarov A.M., Lipachev E.K., Hajdarov Sh.M.* Programmnyj kompleks formirovaniya rekomendacij po podboru recenzentov dlya nauchnyh dokumentov v informacionnyh izdatel'skih sistemah // Svidetel'stvo o registracii programmy dlya EVM RU 2018611617, 02.02.2018.

77. *MacGregor J., Stranack K. and Willinsky J.* The Public Knowledge Project: Open Source Tools for Open Access to Scholarly Communication // S. Bartling and S. Friesike (Eds.) Opening Science: The Evolving Guide on How the Internet is Changing Research, Collaboration and Scholarly Publishing. Springer, Cham, 2014. P. 165–175. [https://doi.org/10.1007/978-3-319-00026-8\\_11](https://doi.org/10.1007/978-3-319-00026-8_11).

78. Mathematics Subject Classification (MSC2010). <https://mathscinet.ams.org/mathscinet/msc/pdfs/classifications2010.pdf>.

79. MSC2020-Mathematics Subject Classification System. <https://mathscinet.ams.org/msnhtml/msc2020.pdf>.

80. MSC Conversion Table. <https://mathscinet.ams.org/mathscinet/msc/conv.html?from=2010>.

81. *Buswell S. et al.* (Eds.) The OpenMath Standard. Version: 2.0r2. The OpenMath Society, July 2019. URL: <https://openmath.org/standard/om20-2019-07-01/omstd20.html>.

82. *Xie I, Matusiak K.* Discover Digital Libraries: Theory and Practice. Elsevier, 2016.

83. *Bouche T., Labbe O.* The New Numdam Platform // H. Geuvers et al. (Eds.). Proceedings of the 10th International Conference on Intelligent Computer Mathematics (CICM 2017), Edinburgh, UK, July 17–21, 2017. Lecture Notes in Computer Science. Springer, Cham, 2017. Vol. 10383. P. 70–82. [https://doi.org/10.1007/978-3-319-62075-6\\_6](https://doi.org/10.1007/978-3-319-62075-6_6). URL: <https://zenodo.org/record/581405>.

84. *Erleben F., Günther M., Krötzsch M., Mendez J., Vrandečić D.* Introducing Wikidata to the Linked Data Web // P. Mika et al. (Eds.). Proceedings of the 13th International Semantic Web Conference (ISWC 2014), Riva del Garda, Italy, October 19–23, 2014, Part I. Lecture Notes in Computer Science. Springer, Cham, 2014. Vol. 8796. P. 50–65. [https://doi.org/10.1007/978-3-319-11964-9\\_4](https://doi.org/10.1007/978-3-319-11964-9_4).

---

85. *Vrandečić D., Krötzsch M.* Wikidata: a free collaborative knowledgebase. *Communications of the ACM*. 2014. Vol. 57, Issue 10, October 2014. P. 78–85. <https://doi.org/10.1145/2629489>.
86. *Scharpf Ph., Schubotz M., Gipp B.* Mathematics in Wikidata // L.-A. Kaffee et al. (Eds.). *Proceedings of the 2nd Wikidata Workshop (Wikidata 2021) co-located with the 20th International Semantic Web Conference (ISWC 2021), October 24, 2021. CEUR Workshop Proceedings. CEUR-WS, 2021. Vol. 2982.* URL: <http://ceur-ws.org/Vol-2982/paper-1.pdf>.
87. *Andreichev M.D., Gafurova P.O., Elizarov A.M., Lipachev E.K.* Popolnenie metadannyh dokumentov matematicheskikh cifrovyyh retro-kollekcij metodom semanticheskikh setej // *Nauchnyj servis v seti Internet: trudy XXIII Vserossiyskoj nauchnoj konferencii*. M.: IPM im. M.V. Keldysha, 2021. S. 22–33. <https://doi.org/10.20948/abrau-2021-22>. <https://keldysh.ru/abrau/2021/theses/22.pdf>.
88. *Harris S. et al. (Eds.)*. SPARQL 1.1 Query Language. W3C Recommendation, 21 March 2013. URL: <https://www.w3.org/TR/sparql11-query/>.
89. *Gafurova P.O., Elizarov A.M., Lipachev E.K.* Extraction of Wikidata knowledge for the metadata formation for documents of digital mathematical collections // *Russian Digital Libraries Journal*. 2021. Vol. 24. No 6. P. 1023–1059. <https://doi.org/10.26907/1562-5419-2021-24-6-1023-1059>.
90. Journal Article Tag Suite. URL: <https://jats.nlm.nih.gov/about.html>.
91. EuDML metadata schema specification (v2.0–final). <https://initiative.eudml.org/eudml-metadata-schema-specification-v20-final>.
92. *Jost M., Bouche T., Goutorbe C., Jorda J.P.* D3.2: The EuDML metadata schema. Revision: 1.6 as of 15th December 2010. URL: <http://www.mathdoc.fr/publis/d3.2-v1.6.pdf>.
93. *Gafurova P.O., Elizarov A.M., Lipachev E.K., Khammatova D.M.* Metadata Normalization Methods in the Digital Mathematical Library // M. Gorbunov-Posadov et al. (Eds.). *Proceedings of the 21st Conference on Scientific Services & Internet (SSI-2019), Novorossiysk–Abrau, Russia, September 23–28, 2019. CEUR Workshop Proceedings. CEUR-WS, 2020. Vol. 2543. P. 136–148.* URL: <https://ceur-ws.org/Vol-2543/rpaper13.pdf>.

## СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ



**ЕЛИЗАРОВ Александр Михайлович** – доктор физико-математических наук, профессор, заслуженный деятель науки Республики Татарстан и Российской Федерации, профессор кафедры программной инженерии Института информационных технологий и интеллектуальных систем Казанского федерального университета.

Научные интересы: цифровые библиотеки, единое пространство научных математических знаний, интеллектуальный анализ данных, рекомендательные системы, облачные вычисления, технологии извлечения знаний.

**Alexander ELIZAROV** – Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Honored Scientist of the Republic of Tatarstan and the Russian Federation, Professor of the Department of Software Engineering of the Institute of Information Technologies and Intelligent Systems of Kazan Federal University.

Research interests: digital libraries, common space of scientific mathematical knowledge, data mining, recommender systems, cloud computing, knowledge extraction technologies.

email: amelizarov@gmail.com;

ORCID: 0000-0003-2546-6897



**КИРИЛЛОВИЧ Александр Витальевич** – кандидат технических наук, научный сотрудник Института информационных технологий и интеллектуальных систем Казанского федерального университета.

Научные интересы: онтологическое моделирование, Semantic Web, лингвистические открытые связанные данные, управление математическим знанием.

**Alexander KIRILLOVICH** – Ph.D. in Computer Science, worked as a researcher of the Institute of Information Technologies and Intelligent Systems of Kazan Federal University.

Research interests: ontology engineering, Semantic Web, Linguistic Linked Data, mathematical knowledge management.

e-mail: alik.kirillovich@gmail.com.

ORCID: 0000-0001-9680-449X





**ЛИПАЧЁВ Евгений Константинович** – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры Интеллектуальных технологий поиска Института информационных технологий и интеллектуальных систем Казанского федерального университета.

Научные интересы: цифровые библиотеки, единое пространство научных математических знаний, интеллектуальный анализ данных, рекомендательные системы, облачные вычисления, технологии извлечения знаний.

**Evgeny Konstantinovich LIPACHEV** – Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Kazan Federal University.

Research interests: digital libraries, common space of scientific mathematical knowledge, data mining, recommender systems, cloud computing, knowledge extraction technologies.

email: elipachev@gmail.com;

ORCID: 0000-0001-7789-2332



**НЕВЗОРОВА Ольга Авенировна** – кандидат технических наук, доцент кафедры информационных систем Института вычислительной математики и информационных технологий Казанского федерального университета.

Научные интересы: онтологическое моделирование, Semantic Web, лингвистические открытые связанные данные, управление математическим знанием.

**Olga NEVZOROVA** – Candidate of Technical Sciences, Associate Professor of the Information Systems Department of the Institute of Computational Mathematics and Information Technologies of the Kazan Federal University.

Research interests: ontology engineering, Semantic Web, Linguistic Linked Data, mathematical knowledge management.

email: onevzoro@gmail.com.

ORCID: 0000-0001-8116-9446.

*Материал поступил в редакцию 21 ноября 2022 года*

*Переработанная версия – 6 марта 2023 года*