КАЗАНСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Институт физики

Р. К. Мухарлямов, Т. Н. Панкратьева

Теоретическая физика в тензорном представлении

Учебно-методическое пособие

Казань – 2023

Печатается по решению Учебно-методической комиссии
Института физики КФУ
Протокол № 10 от 15 июня 2023 г.

Рецензент – д.ф.-м.н., доцент Ситдиков А. С.

Мухарлямов Р. К., Панкратьева Т. Н.

Теоретическая физика в тензорном представлении: учебно-методическое пособие / Р. К. Мухарлямов, Т. Н. Панкратьева – Казань: Казан. ун-т, 2023. – 47 с.

В учебно-методическом пособии рассматриваются различные аспекты теоретической физики. Большое внимание уделяется представлению законов физики в тензорной форме. Учебно-методическое пособие предназначено для студентов института физики Казанского федерального университета, обучающихся по направлению "03.03.02 Физика" и является методическим обеспечением дисциплины "Астрофизика и космология", "Теория поля", а также по специальности "03.05.01 Астрономия" для дисциплин "Космология", "Теория поля" и "Теория гравитации".

Содержание

1 Тензоры

1.1 Определение

В теоретической физике используют различные типы систем функций многих переменных. Примером широко используемого вида системы функций является тензор. Физика имеет дело с физическими величинами, которые не зависят от выбора системы координат. Эти величины могут быть представлены тензорами. Тензоры являются обобщением ряда геометрических объектов. Как математический объект тензор существует независимо от системы координат. Однако в любой системе координат тензор можно задать системой функций (компоненты тензора). Естественно, что компоненты будут меняться и существовать при переходе к другой системе координат. Здесь мы будем определять тензор по трансформационному признаку, то есть по типу закона преобразования функций системы при переходе к другим координатам.

Тензорные уравнения, верные в одной системе координат, верны и в любой другой. Такая инвариантность тензорных уравнений является основным мотивом тензорного представления физических законов.

Тензоры будем рассматривать в n-мерном пространстве, где каждой точке взаимно однозначно соответствуют координаты $x =\{x^1, x^2, ..., x^n\}$ в заданной координатной системе.

Определение. Вещественная функция $\varphi(x)$ называется *скаляром*, если её значение в фиксированной точке не меняется при преобразовании координат:

$$\varphi'(x') = \varphi(x(x')) \, , \tag{1}$$

где x' — новые координаты, $x =x(x') =\{x^1(x'), x^2(x'), ..., x^n(x')\}$ — старые координаты, выраженные через новые.

Скаляр является однокомпонентным тензором. Другое название скаляра – *инвариант.*

Рассмотрим следующий объект — вектор.

Определение. Упорядоченная система

$$A_m(x) = \{A_1(x),\ A_2(x), ...,\ A_n(x)\}$$

из n вещественных функций называется *ковариантным вектором*, если при преобразовании координат $x = x(x')$ компоненты вектора преобразуются по закону

$$A'_m(x') = \frac{\partial x^k}{\partial x'^m} A_k(x(x'))\,. \qquad (2)$$

В правой части равенства (2) мы видим, что нижний и верхний индексы совпадают. Там подразумевается суммирование. Это называется *правилом суммирования Эйнштейна*:

$$\frac{\partial x^k}{\partial x'^m} A_k(x(x')) \equiv \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial x^k}{\partial x'^m} A_k(x(x')) =$$

$$= \frac{\partial x^1}{\partial x'^m} A_1(x(x')) + \frac{\partial x^2}{\partial x'^m} A_2(x(x')) + ... + \frac{\partial x^n}{\partial x'^m} A_n(x(x'))\,.$$

Определение. Упорядоченная система

$$B^m(x) = \{B^1(x),\ B^2(x), ...,\ B^n(x)\}$$

из n вещественных функций называется *контравариантным вектором*, если при преобразовании координат $x = x(x')$ компоненты вектора преобразуются по закону

$$B'^m(x') = \frac{\partial x'^m}{\partial x^k} B^k(x(x'))\,. \qquad (3)$$

Ковариантный вектор есть тензор с одним нижним индексом (ковариантный индекс), а контравариантный вектор — тензор с одним верхним индексом (контравариантный индекс).

Дадим общее определение тензора.

Определение. *Контравариантным r раз* и *ковариантным u раз тензором* $T^{j_1 j_2 \ldots j_r}_{i_1 i_2 \ldots i_u}$ называется упорядоченная совокупность n^{r+u} функций, которая при преобразовании координат $x = x(x')$ преобразуется по закону

$$T'^{\,j_1 j_2 \ldots j_r}_{\,i_1 i_2 \ldots i_u}(x') = \left(\frac{\partial x'^{j_1}}{\partial x^{k_1}} \cdot \frac{\partial x'^{j_2}}{\partial x^{k_2}} \cdot \ldots \cdot \frac{\partial x'^{j_r}}{\partial x^{k_r}} \right) \times$$

$$\times \left(\frac{\partial x^{m_1}}{\partial x'^{i_1}} \cdot \frac{\partial x^{m_2}}{\partial x'^{i_2}} \cdot \ldots \cdot \frac{\partial x^{m_u}}{\partial x'^{i_u}} \right) \cdot T^{k_1 k_2 \ldots k_r}_{m_1 m_2 \ldots m_u}(x(x')) \,. \tag{4}$$

Определение. Сумма чисел ковариантных и контравариантных индексов $r + u$ называется рангом тензора. Также говорят задан тензор ранга (u, r).

Следовательно, скаляр квалифицируется как тензор нулевого ранга, а векторы есть тензоры первого ранга.

Из равенства (4) следует, что если все компоненты тензора равны нулю в какой-то системе координат в некоторой точке, то все его компоненты равны нулю в этой точке в любой системе координат.

Какую бы систему координат и какой бы объект мы ни взяли, существует тензор, компоненты которого в данной системе координат совпадают с компонентами выбранного нами объекта. Это свойство тензоров называется *произвольностью*.

1.2 Алгебраические операции над тензорами

Существуют операции с тензорами, которые в результате дают снова тензоры. Здесь мы рассмотрим некоторые такие операции, а именно: сложение, умножение тензоров и свёртывание, перестановка тензорных индексов. Предполагается, что все тензоры в этих операциях рассматриваются в одной и той же точке пространства, иначе результат не будет тензором.

Определение. Рассмотрим в одной и той же точке два тензора $T^{k_1 k_2 \ldots k_r}_{m_1 m_2 \ldots m_u}(x)$ и $Q^{k_1 k_2 \ldots k_r}_{m_1 m_2 \ldots m_u}(x)$ с одинаковыми рангами. *Суммой* этих тензоров называется тензор $S^{k_1 k_2 \ldots k_r}_{m_1 m_2 \ldots m_u}(x)$, компоненты которого определяются сложением соответствующих компонент тензоров:

$$S^{k_1 k_2 \ldots k_r}_{m_1 m_2 \ldots m_u}(x) = T^{k_1 k_2 \ldots k_r}_{m_1 m_2 \ldots m_u}(x) + Q^{k_1 k_2 \ldots k_r}_{m_1 m_2 \ldots m_u}(x) \,.$$

Определение. *Произведением* тензора $T^{k_1 k_2 \ldots k_r}_{m_1 m_2 \ldots m_u}(x)$ ранга (u, r) на тензор $Q^{j_1 j_2 \ldots j_n}_{i_1 i_2 \ldots i_l}(x)$ ранга (l, n) называется тензор $F^{k_1 k_2 \ldots k_r j_1 j_2 \ldots j_n}_{m_1 m_2 \ldots m_u i_1 i_2 \ldots i_l}(x)$ ранга

$(u+l, r+n)$, компоненты которого в каждой локальной системе координат получаются перемножением соответствующих компонент сомножителей:

$$F^{k_1 k_2 \dots k_r j_1 j_2 \dots j_n}_{m_1 m_2 \dots m_u i_1 i_2 \dots i_l}(x) = T^{k_1 k_2 \dots k_r}_{m_1 m_2 \dots m_u}(x) Q^{j_1 j_2 \dots j_n}_{i_1 i_2 \dots i_l}(x)\,.$$

Если взять тензоры в произведении в разных точках, то результат не будет тензором.

Операция перестановки одноимённых (ковариантных или контравариантных) индексов тензора порождает новые тензоры. Ковариантный или контравариантный тензор ранга n перестановкой индексов может дать максимально $n!-1$ новых тензоров. Например, для тензора A_{ijk} их будет $3!-1=5$:

$$A^{(1)}_{ijk} = A_{jik}\,, A^{(2)}_{ijk} = A_{ikj}\,, A^{(3)}_{ijk} = A_{kji}\,, A^{(4)}_{ijk} = A_{kij}\,, A^{(5)}_{ijk} = A_{jki}\,.$$

Определение. Тензор называется *симметричным* по двум или более одноименным индексам, если он не меняется при операции перестановки этих индексов.

Определение. Тензор называется *антисимметричным* по двум или более одноимённым индексам, если при нечетных перестановках этих индексов тензор меняет знак.

Тензоры $A^{(1)}_{ijk}$, $A^{(2)}_{ijk}$, $A^{(3)}_{ijk}$ получены нечетными перестановками индексов у тензора A_{ijk}, тензоры $A^{(4)}_{ijk}$, $A^{(5)}_{ijk}$, $A^{(6)}_{ijk}$ — чётными.

На основе перестановки индексов определены операции симметрирования и альтернирования.

Операция *симметрирования* по n выбранным одноимённым индексам производится так. Из первоначального тензора всевозможными перестановками указанных n индексов получают $n!$ тензоров. Из этих тензоров составляется среднее арифметическое. Получается тензор, симметричный относительно любой перестановки n выбранных индексов.

Для операции *альтернирования* прежде чем брать среднее арифметическое, надо изменить знаки на противоположные у тензоров, полученных нечётными перестановками. Получается тензор, антисимметричный относительно перестановки любых двух индексов, по которым производится альтернирование.

Рассмотрим для примера тензор A^{ijmk}. Будем симметрировать по индексам i и k. Такие индексы помещают в круглые скобки, а другие безучастные индексы, попавшие внутрь скобок, выделяются вертикальными чёрточками:

$$A^{(i|jm|k)} = \frac{1}{2!}(A^{ijmk} + A^{kjmi})\,.$$

При альтернировании участвующие индексы помещаются в квадратные скобки:

$$A^{[i|jm|k]} = \frac{1}{2!}(A^{ijmk} - A^{kjmi})\,.$$

Операция *свёртки индексов* определена для тензоров, у которых есть хотя бы по одному ковариантному и контравариантному индексу. Если применить эту операцию к тензору ранга (u, r), то получится тензор ранга $(u-1, r-1)$. Для примера рассмотрим свёртку индексов α и β тензора $B^{\alpha jk}_{l\beta n}$. Результат обозначают той же буквой:

$$B^{\ jk}_{l\ n} = \sum_{i=1}^{n} B^{ijk}_{lin} \equiv B^{ijk}_{lin}\,.$$

Помимо алгебраических есть и другие типы операций над тензорами, например, дифференцирование. Но дифференцирование изначально содержит разность функции в *разных* точках. Для тензоров это критично — результат не будет тензорным. Возникает необходимость модификации, что приводит к понятию *ковариантной производной*. Для введения этой операции необходимо ознакомиться с понятием *метрического тензора* и других геометрических объектов.

1.3 Метрический тензор

Рассмотрим симметричный ковариантный тензор второго ранга $g_{\alpha\beta}$. Сопоставим ему контравариантный тензор $g^{\alpha\beta}$ такой, что

$$g_{\alpha\beta}\, g^{\beta\mu} = \delta^{\mu}_{\alpha} \equiv \begin{cases} 0, & \mu \neq \alpha, \\ 1, & \mu = \alpha, \end{cases} \tag{5}$$

где δ^{μ}_{α} — так называемый *символ Кронекера*, который является тензором. Другими словами, компоненты тензора $g^{\alpha\beta}$ образуют матрицу, обратную матрице, составленной из компонент тензора $g_{\alpha\beta}$.

Определение. Тензор $g_{\alpha\beta}$ называется *метрическим*, если квадрат расстояния (интервала) ds^2 между двумя бесконечно близкими точками равен

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^{\alpha} dx^{\beta}. \tag{6}$$

Определение. Если в каждой точке n-мерного пространства задан метрический тензор, то это пространство называется *n-мерным римановым пространством.*

Метрический тензор определяется геометрией n-мерного пространства. Его компоненты могут быть найдены однозначно в любой системе координат, если задан квадрат интервала (6).

В любой фиксированной точке пространства квадрат интервала (6) есть квадратичная форма от дифференциалов dx^{α}. Теория квадратичных форм хорошо разработана.

В любой заданной точке неособенным преобразованием координат метрический тензор может быть приведен к диагональному виду:

$$g_{\alpha\beta} = \mathrm{diag}(\underbrace{+1, +1, \ldots}_{p}, \underbrace{-1, -1, \ldots}_{n-p})\,. \tag{7}$$

Распределение знаков диагональных компонент метрического тензора в каждой точке называется его *сигнатурой.* Если $n - p \neq 0$, то пространство принято называть *псевдоримановым.*

Компоненты $g_{\alpha\beta}$ и $g^{\alpha\beta}$ метрического тензора используют для поднятия и опускания индексов произвольных тензоров. Например,

$$A^{\alpha} = g^{\alpha\beta} A_{\beta}, \;\; A_{\alpha} = g_{\alpha\beta} A^{\beta} \, . \tag{8}$$

Скалярное произведение (AB) двух произвольных векторов A^{μ} и B^{μ} определяется по формуле

$$(AB) = g_{\mu\nu} A^{\mu} B^{\nu} = g^{\mu\nu} A_{\mu} B_{\nu} = A^{\mu} B_{\nu} = A_{\mu} B^{\nu}. \tag{9}$$

Квадрат любого вектора A_m равен

$$A^2 \equiv A_m A^m = g^{mk} A_m A_k = g_{mk} A^m A^k. \tag{10}$$

Квадрат интервала ds^2 есть квадрат вектора dx^{α}. В псевдоримановом пространстве квадрат вектора может принимать положительное, отрицательное или нулевое значение. В случае $A^2 > 0$ вектор A называется *времениподобным*, при $A^2 < 0$ — *пространственноподобным*, а для $A^2 = 0$ — *изотропным (светоподобным)*.

1.4 Ковариантное дифференцирование

Частные производные любой скалярной функции $f(x^{\mu})$ по координатам, $\dfrac{\partial f}{\partial x^{\mu}} \equiv \partial_{\mu} f$, образуют ковариантный вектор. Частные производные компонент тензора в общем случае не образуют тензора в силу нелинейного характера координатных преобразований. Для избежания нетензорных выражений и для тензорной записи физических законов производную необходимо переопределить. Так приходят к понятию ковариантной производной от тензора, результатом которой также является тензором:

$$\nabla_{\mu} A_{\nu} = \partial_{\mu} A_{\nu} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} A_{\alpha} \, , \;\; \nabla_{\mu} A^{\nu} = \partial_{\mu} A^{\nu} + \Gamma^{\nu}_{\mu\alpha} A^{\alpha} \, , \tag{11}$$

где величины $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$ не образуют тензор и называются символами Кристоффеля второго рода, или коэффициентами аффинной связности. Они зависят от метрического тензора:

$$\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\sigma\alpha} (\partial_{\nu} g_{\alpha\mu} + \partial_{\mu} g_{\alpha\nu} - \partial_{\alpha} g_{\mu\nu}). \tag{12}$$

Символы Кристоффеля симметричны по нижним индексам. Из (12) следует свёртка

$$\Gamma^{\nu}_{\mu\nu} = \partial_\mu(\ln\sqrt{|g|}),\ \ g = \det(g_{\mu\nu}).$$

Символы

$$\Gamma_{r,\mu\nu} = g_{r\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\partial_\nu g_{\mu r} + \partial_\mu g_{r\nu} - \partial_r g_{\mu\nu})$$

называются символами Кристоффеля первого рода. Ковариантная производная применима к тензорам любого ранга. Каждый индекс обрабатывается по правилам, представленным в (11). Например,

$$\nabla_\alpha T^{\nu}_{\mu} = \partial_\alpha T^{\nu}_{\mu} + \Gamma^{\nu}_{\alpha\beta}T^{\beta}_{\mu} - \Gamma^{\beta}_{\alpha\mu}T^{\nu}_{\beta}\,.$$

Метрический тензор ковариантно постоянен:

$$\nabla_\alpha g_{\mu\nu} = \nabla_\alpha g^{\mu\nu} = 0.$$

Перечислим некоторые свойства ковариантного дифференцирования:

1. Ковариантная производная от скаляра совпадает с частной производной:

$$\nabla_k f = \partial_k f.$$

2. Правило дифференцирования Лейбница:

$$\nabla_k(A\cdot B) = B\nabla_k A + A\nabla_k B,$$

где A и B — произвольные тензоры любого ранга. Если $A\cdot B$ — скаляр, например, $A\cdot B = U_i V^i$, то

$$\nabla_k(U_i V^i) \equiv \partial_k(U_i V^i) = V^i\partial_k U_i + U_i\partial_k V^i\,.$$

3. Ковариантная дивергенция от контравариантного вектора A^i равна

$$\nabla_i A^i = \frac{1}{\sqrt{|g|}}\,\partial_i(\sqrt{|g|}A^i)\,. \tag{13}$$

Обобщим это свойства для тензоров более высокого ранга.

4. Если контравариантный тензор $F^{i_1 i_2 \dots i_m}$ *абсолютно антисимметричный*, то есть

$$F^{i_1 i_2 \dots i_m} = -F^{i_2 i_1 \dots i_m} = -F^{i_1 i_2 \dots i_{p+1} i_p \dots i_m},\ \ p = 1...(m-1),$$

то дивергенция равна

$$\nabla_k F^{i_1 i_2 \dots i_{m-1} k} = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_k (\sqrt{|g|} F^{i_1 i_2 \dots i_{m-1} k}).$$

5. Для абсолютно антисимметричного ковариантного тензора $F_{i_1 i_2 \dots i_m}$ выполняется соотношение

$$\nabla_{[k} F_{i_1 i_2 \dots i_m]} = \partial_{[k} F_{i_1 i_2 \dots i_m]}. \qquad (14)$$

В частности, для вектора A_i :

$$\nabla_k A_i - \nabla_i A_k = \partial_k A_i - \partial_i A_k.$$

Свойство (14) выполняется, так как символы Кристоффеля симметричны по нижним индексам.

Рассмотрим свойства ковариантной производной второго порядка. Для дважды дифференцируемых функций две частные производные коммутируют:

$$\frac{\partial^2 A^n}{\partial x^i \partial x^j} = \frac{\partial^2 A^n}{\partial x^j \partial x^i} .$$

Коммутируют также ковариантные производные от скаляра:

$$(\nabla_i \nabla_k - \nabla_k \nabla_i) f = 0.$$

Применительно к вектору, коммутация ковариантных производных даёт дополнительные слагаемые:

$$(\nabla_\mu \nabla_\nu - \nabla_\nu \nabla_\mu) A_\rho = -R^\alpha{}_{\rho\mu\nu} A_\alpha ,$$

$$(\nabla_\mu \nabla_\nu - \nabla_\nu \nabla_\mu) A^\rho = R^\rho{}_{\alpha\mu\nu} A^\alpha .$$

Так как левая часть равенства и A_ρ есть тензоры, то $R^\alpha{}_{\rho\mu\nu}$ является тензором. Он называется *тензором кривизны* или *тензором Римана-Кристоффеля*:

$$R^\alpha{}_{\rho\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^\alpha_{\rho\nu} - \partial_\nu \Gamma^\alpha_{\rho\mu} + \Gamma^\alpha_{\mu\gamma} \Gamma^\gamma_{\rho\nu} - \Gamma^\alpha_{\nu\gamma} \Gamma^\gamma_{\rho\mu} .$$

Тензор кривизны играет главную роль в римановой геометрии. Именно он характеризует отличие заданной метрики от метрики плоского пространства, для которой все его компоненты равны нулю в произвольной системе координат.

Рассмотрим свойства тензора кривизны для полностью ковариантного вида, $R_{\mu\nu\rho\sigma} = g_{\mu\alpha} R^{\alpha}_{\ \nu\rho\sigma}$. Тензор кривизны антисимметричен относительно перестановки индексов внутри пар индексов $\mu\nu$ и $\rho\sigma$:

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = -R_{\nu\mu\rho\sigma} = -R_{\mu\nu\sigma\rho} = R_{\nu\mu\sigma\rho}\,.$$

Тензор симметричен по отношению к перестановке пар $\mu\nu$ и $\rho\sigma$ как целое:

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = R_{\rho\sigma\mu\nu}\,.$$

Также справедливо тождество Риччи

$$R_{\mu\alpha\beta\gamma} + R_{\mu\beta\gamma\alpha} + R_{\mu\gamma\alpha\beta} = 0\,,\ \text{или}\, R_{\mu[\alpha\beta\gamma]} = 0\,.$$

Операция альтернирования может проводиться по любым трём индексам, тождество будет выполняться. Из тензора кривизны может быть образован с помощью свёртки индексов единственный ненулевой тензор второго ранга с точностью до знака:

$$R_{\mu\nu} = g^{\sigma\alpha} R_{\sigma\mu\alpha\nu} = R^{\alpha}_{\ \mu\alpha\nu} =$$

$$= \partial_\alpha \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} - \partial_\nu \Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\Gamma^{\gamma}_{\alpha\gamma} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\gamma}\Gamma^{\gamma}_{\nu\alpha}\,,$$

который называют тензором Риччи. Величину

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$$

называют скалярной кривизной или скаляром Риччи.

Кроме алгебраических тождеств, есть также дифференциальные:

$$\nabla_{[\sigma} R_{\alpha\beta]\gamma\delta} = 0,$$

называемые тождествами Бьянки. Если дважды свернуть по паре индексов, то получим равенство

$$\nabla_\alpha G^{\alpha}_{\mu} = 0,\ G^{\alpha}_{\mu} \equiv R^{\alpha}_{\mu} - \frac{1}{2}\delta^{\alpha}_{\mu} R\,, \tag{15}$$

где G^{α}_{μ} — тензор Эйнштейна. Так как $R_{\mu\nu}$ симметричный тензор, то $G_{\mu\nu}$ также симметричен.

Тензор кривизны имеет ранг 4, следовательно в n-мерном пространстве будет всего n^4 компонент. В силу вышеуказанных симметрий в обще случае число независимых компонент равно $n^2(n^2-1)/12$. Тензор Риччи имеет $n(n+1)/2$ независимых компонент.

1.5 Псевдотензоры и интегрирование

В физике часто возникает необходимость применять другие объекты помимо тензоров.

Псевдотензоры преобразуются по закону

$$T'^{\,j_1 j_2 \ldots j_r}_{\,i_1 i_2 \ldots i_u}(x') = sgn(J) \cdot \left(\frac{\partial x'^{j_1}}{\partial x^{k_1}} \cdot \frac{\partial x'^{j_2}}{\partial x^{k_2}} \cdot \ldots \cdot \frac{\partial x'^{j_r}}{\partial x^{k_r}} \right) \times$$
$$\times \left(\frac{\partial x^{m_1}}{\partial x'^{i_1}} \cdot \frac{\partial x^{m_2}}{\partial x'^{i_2}} \cdot \ldots \cdot \frac{\partial x^{m_u}}{\partial x'^{i_u}} \right) \cdot T^{k_1 k_2 \ldots k_r}_{m_1 m_2 \ldots m_u}(x(x')) \,, \tag{16}$$

где $J = det \left\| \dfrac{\partial x'^m}{\partial x^k} \right\|$ — определитель Якоби,

$$sgn(J) = \begin{cases} 1, & J > 0, \\ -1, & J < 0. \end{cases}$$

Рассмотрим *символ Леви-Чивита* $e^{i_1 i_2 \ldots i_n}$, который не является истинным тензором, и абсолютно антисимметричен по индексам:

$$e^{i_1 i_2 \ldots i_n} = -e^{i_2 i_1 \ldots i_n} = -e^{i_1 i_2 \ldots i_{p+1} i_p \ldots i_n}, \; p = 1 \ldots (n-1).$$

Здесь n — размерность пространства. Как правило, полагают $e^{12\ldots n} = 1$. Если другая компонента получена из компоненты $e^{12\ldots n}$ чётной перестановкой индексов, то она равна 1. В случае нечётной, равна -1. Компоненты, у которых хотя бы два индекса совпадают, равны нулю. В линейной алгебре могут не различать компоненты $e^{12\ldots n}$ и $e_{12\ldots n}$. Символы используют для раскрытия определителя матрицы $\|a_{ik}\|$, не привлекая миноры:

$$e^{i_1 i_2 \ldots i_n} a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \ldots a_{i_n j_n} = e_{j_1 j_2 \ldots j_n} \det \|a_{ik}\|.$$

В физике, чтобы адаптировать применение в псевдоримановом пространстве, часто различают значения $e^{12\dots n}$ и $e_{12\dots n}$ по принципу $e_{12\dots n}{=}(-1)^{n-p}e^{12\dots n}$, где p — параметр сигнатуры (7).

Рассмотрим четырехмерное псевдориманово пространство-время с сигнатурой $(+ - --)$. В криволинейных координатах используется тензорное обобщение символа Леви-Чивита, которое называют *антисимметричным единичным тензором*:

$$E^{\alpha\beta\mu\nu} = \frac{e^{\alpha\beta\mu\nu}}{\sqrt{-g}}\,,$$

где индексы пробегают значения $0, 1, 2, 3$ и

$$e^{0123} = 1,\; e_{0123} = -1.$$

Так как индексы у $e^{\alpha\beta\mu\nu}$ опускаются по правилу

$$e^{\alpha\beta\mu\nu}g_{\alpha p}g_{\beta r}g_{\mu s}g_{\nu t} = -g e_{prst}\,,$$

то его ковариантные компоненты равны

$$E_{\alpha\beta\mu\nu} = \sqrt{-g}\, e_{\alpha\beta\mu\nu}\,.$$

В дальнейшем, для краткости, $E^{\alpha\beta\mu\nu}$ будем называть *тензором Леви-Чивита.*

3-мерный тензор Леви-Чивита определяется так:

$$E^{\alpha\beta\mu} = \frac{e^{\alpha\beta\mu}}{\sqrt{g}},\; E_{\alpha\beta\mu} = \sqrt{g}\, e_{\alpha\beta\mu},\; e^{123} = e_{123} = 1.$$

Здесь индексы пробегают значения $1, 2, 3$ и

$$e^{\alpha\beta\mu}g_{\alpha p}g_{\beta r}g_{\mu s} = g e_{prs}.$$

Комбинация $E_{\alpha\beta\mu}A^\alpha B^\beta C^\mu$ определяет смешанное произведение векторов A^α, B^β, C^μ. Как известно, смешанное произведение определяет объём параллелепипеда, построенного на трёх некомпланарных векторах. Объём малого параллелепипеда, заданного тремя векторами dx_1^α, dx_2^β, dx_3^μ, равен

$$dV = \left|E_{\alpha\beta\mu}dx_1^\alpha dx_2^\beta dx_3^\mu\right| = |\sqrt{g}\,\det\|dx_a^\beta\|\,|.$$

Следовательно, элементом интегрирования в криволинейных координатах является произведение $\sqrt{g}\,dx^1dx^2dx^3 \equiv \sqrt{g}\,d^3x$. В пространстве-времени имеем $\sqrt{-g}\,dx^0dx^1dx^2dx^3 \equiv \sqrt{-g}\,d^4x$, которое ведёт себя как инвариант при интегрировании по 4-объёму. Интеграл от скалярной функции $f(x)$ по некоторому объёму $\int_V f(x)\sqrt{-g}\,d^4x$ будет инвариантом.

1.6 Задачи

1. Выпишите в развёрнутом виде систему линейных равенств, задаваемую выражением $a_{rs}x^s = b_r$, где $r, s = 1, 2$.

   Ответ:

   $a_{11}x^1 + a_{12}x^2 = b_1$, $a_{21}x^1 + a_{22}x^2 = b_2$.

2. Напишите законы преобразования тензоров A^{rs} и B^r_{st}.

   Ответ:
$$A'^{rs}(x') = \frac{\partial x'^r}{\partial x^{k_1}} \cdot \frac{\partial x'^s}{\partial x^{k_2}} \cdot A^{k_1k_2}(x(x')),$$
$$B'^r_{st} = \frac{\partial x'^r}{\partial x^k} \cdot \frac{\partial x^l}{\partial x'^s} \cdot \frac{\partial x^m}{\partial x'^t} \cdot B^k_{lm}(x(x')).$$

3. Покажите, что если для тензоров имеет место соотношение $B^r_{st} = A^r_s C_t$ в некоторой системе координат, то то же самое соотношение имеет место в любой другой системе координат.

4. Доказать, что для ненулевых антисимметричного A_{ij} и симметричного B^{ij} тензоров выполняется равенство $A_{ij}B^{ij} = 0$. Обратно, если это равенство выполняется для любого симметричного тензора B^{ij}, то A_{ij} — антисимметричный тензор.

5. Доказать, что объект δ^r_s является тензором и $v^s\delta^r_s = v^r$.

6. Доказать, что градиент $\dfrac{\partial f}{\partial x^\mu}$ от скаляра $f(x)$ и дифференциал координат dx^ν образует тензоры.

7. В декартовых координатах трехмерного евклидова пространства метрический тензор имеет вид $g_{\alpha\beta} = \mathrm{diag}(1,1,1)$. Как изменится метрический тензор при переходе к цилиндрической системе координат $(x,y,z)\to(r,\varphi,z')$: $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $z = z'$? Найти компоненты $g'^{\alpha\beta}$.

   Ответ: $g'_{\alpha\beta} = \mathrm{diag}(1,r^2,1)$, $g'^{\alpha\beta} = \mathrm{diag}(1,1/r^2,1)$.

8. В сферической системе координат (r,θ,φ) евклидова пространства метрический тензор имеет вид $g_{\alpha\beta} = \mathrm{diag}(1,r^2,r^2\sin^2\theta)$. Найти символы Кристоффеля второго рода $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$.

   Ответ:

   $\Gamma^{r}_{\theta\theta} = -r$, $\Gamma^{r}_{\varphi\varphi} = -r\sin^2\theta$, $\Gamma^{\theta}_{\varphi\varphi} = -\sin\theta\cos\theta$,
   $\Gamma^{\theta}_{r\theta} = \Gamma^{\varphi}_{r\varphi} = 1/r$, $\Gamma^{\varphi}_{\theta\varphi} = \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$.

9. Убедиться в справедливости равенства для дивергенции:

$$\nabla_i A^i = \frac{1}{\sqrt{|g|}}\,\partial_i(\sqrt{|g|}A^i).$$

2 Пространства в физике

В этом разделе рассматриваются частные случаи риманова пространства, которые используются в физике.

2.1 Трёхмерное евклидово пространство

Уравнения физики выглядят наиболее просто в декартовых координатах инерциальной системы отсчета евклидова пространства с метрическим тензором

$$g_{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{17}$$

Ковариантная производная совпадает с частной производной. Переход между различными декартовыми координатами осуществляется с помощью линейных ортогональных преобразований. Им соответствует ортогональные матрицы Якоби $\dfrac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\beta}}$.

В физике, в рамках евклидова пространства, часто используют следующую вариацию понятия тензора.

Определение. Объект, преобразующейся по тензорному закону (4) при линейных ортогональных преобразованиях $x' = x'(x)$, называется *ортогональным тензором.*

Всякий тензор при линейных ортогональных преобразованиях является ортогональным тензором.

Обратное неверно: в общем случае ортогональный тензор при неортогональных преобразованиях может не быть тензором.

В декартовой системе координат операции поднятия и опускания индексов не меняют компоненты ортогонального тензора и тензора, поэтому можно не различать верхние и нижние индексы в этих системах.

Три объекта δ_{rs}, δ^{rs}, δ^r_s в литературе называют символами Кронекера, компоненты которых равны 1, если $r = s$, и равны 0, если $r \neq s$. Символ δ^r_s является тензором, а δ_{rs} и δ^{rs} являются только ортогональными тензорами.

Физические системы могут обладать различными пространственными симметриями, и полевые уравнения решаются эффективнее в соответствующей системе криволинейных координат. Следовательно, имеет смысл рассматривать уравнения физики в произвольных криволинейных координатах, а значит в тензорной форме. В этом случае метрический тензор имеет произвольный вид, и следовательно, символы Кристоффеля отличны от нуля. Операция частного дифференцирования заменяется на операцию ковариантного дифференцирования, которая применяется к тензорам. В евклидовом пространстве тензор кривизны $R^{\alpha}_{\ \beta\mu\nu} = 0$, поэтому ковариантные производные коммутируют: $(\nabla_\mu \nabla_\nu - \nabla_\nu \nabla_\mu) A^\rho = 0$.

Рассмотрим распространённые операции в произвольных криволинейных координатах.

Ранее в первой главе мы рассматривали вопрос об образовании нового тензора ковариантным дифференцированием исходного тензора. Ковариантная производная ассоциируется с производной по координатам. Рассмотрим теперь операцию дифференцирование по некоторому параметру t. В качестве такого параметра может быть, например, время. Производная от скаляра $\dfrac{d\varphi}{dt}$ есть снова скаляр: $\bar{\varphi} = \varphi \Rightarrow \dfrac{d\varphi}{dt} = \dfrac{d\bar{\varphi}}{dt}$. Ковариантный вектор A_r, определённый на некоторой кривой, будет зависеть от параметра t. Производная $\dfrac{dA_r}{dt}$ не является ковектором. Переопределим операцию следующим образом [3]:

$$\frac{\delta A_r}{\delta t} \equiv \frac{dA_r}{dt} - \Gamma^m_{rn} A_m \frac{dx^n}{dt},$$

которая называется абсолютной производной вектора A_r по t и даёт уже ковектор. Для контравариантного вектора A^r имеем

$$\frac{\delta A^r}{\delta t} \equiv \frac{dA^r}{dt} + \Gamma^r_{mn} A^m \frac{dx^n}{dt}.$$

Для тензора со смешанными индексами:

$$\frac{\delta A^r_s}{\delta t} \equiv \frac{dA^r_s}{dt} + \Gamma^r_{mn} A^m_s \frac{dx^n}{dt} - \Gamma^m_{sn} A^r_m \frac{dx^n}{dt}.$$

Правила нахождения абсолютной производной суммы и произведения тензоров те же самые, что и для функций. При нахождении абсолютной производной любой комбинации тензоров метрический тензор и символы Кронекера можно рассматривать как постоянные.

Векторное произведение двух векторов $\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$ имеет ковариантные и контравариантные компоненты

$$C_j = E_{ikj} A^i B^k,\ C^j = E^{ikj} A_i B_k.$$

Компоненты $\mathrm{rot}\mathbf{A}$ имеют вид

$$(\mathrm{rot}\,\mathbf{A})^j = E^{ikj} \nabla_i A_k,\ (\mathrm{rot}\,\mathbf{A})_j = g_{jl} E^{ikl} \nabla_i A_k.$$

Ковариантные компоненты градиента скалярной функции φ равны

$$(\operatorname{grad}\varphi)_i = \nabla_i\varphi = \partial_i\varphi.$$

Дивергенция вектора $\mathbf{A}$ определяется как свёртка:

$$\operatorname{div}\mathbf{A} = \nabla_i A^i = \frac{1}{\sqrt{g}}\,\partial_i(\sqrt{g}A^i).$$

Лапласиан скалярной функции получается из выражения $\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi$:

$$\triangle\varphi = \nabla_i\nabla^i\varphi = \frac{1}{\sqrt{g}}\,\partial_i(\sqrt{g}g^{ik}\partial_k\varphi).$$

Когда говорят о компонентах вектора A^α, A_α в произвольной системе координат, имеют в виду *геометрические* компоненты. Только в декартовых или в ортогональных криволинейных координатах можно ввести так называемые *физические* компоненты вектора $\tilde{A}_\alpha$, для которых:

$$\tilde{A}_\alpha = \tilde{A}^\alpha,$$

$$A^2 = \tilde{A}^2 = \tilde{A}_1^2 + \tilde{A}_2^2 + \tilde{A}_3^2. \tag{18}$$

Физические и геометрические компоненты связаны так:

$$\tilde{A}^\alpha = \tilde{A}_\alpha = \sqrt{|g^{\alpha\alpha}|}A_\alpha = \sqrt{|g_{\alpha\alpha}|}A^\alpha,$$

где суммирования по α нет. В произвольной системе координат квадрат A^2 не будет равен (18) и в общем случае будет определятся формулой (10). Понятие физической компоненты определяется не только для вектора, но и для тензора любого ранга [3].

2.2 Пространство-время Минковского

Специальная теория относительности (СТО) разработана в рамках пространства-времени Минковского (четырёхмерное псевдоевклидово пространство-время). Особое внимание к пространству-времени Минковского вызвано тем, что при "отключении" гравитационных эффектов (при малых значениях) геометрия "реального" пространства-времени совпадает с геометрией Минковского.

В физике существует привилегированный класс координат, выбор которых означает переход к инерциальной системе отсчета (ИСО). В этом случае метрический тензор в декартовой системе координат приводится к галилеевскому виду:

$$g_{ik} = g^{ik} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{19}$$

соответственно, квадрат интервала:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2, \tag{20}$$

где c — скорость света, пространственная часть (x^1, x^2, x^3) соответствует декартовым координатам. Поскольку для геометрии Минковского тензор кривизны равен нулю, преобразованием координат $x = x(x')$ можно привести метрику к виду (19) сразу во всех точках. Рассматривая сечение t=const пространства-времени Минковского, мы получим евклидово пространство (17). Из определения (12) и вида метрики (19) следует, что в декартовых координатах ИСО псевдоевклидова пространства-времени все символы Кристоффеля равны нулю. В таком случае ковариантные производные совпадает с частными производными и физические соотношения имеют наиболее простой вид.

Преобразование Лоренца и другие (пространственно-временные трансляции, пространственные повороты), связывающие две произвольные ИСО, оставляет инвариантным интервал (20):

$$ds^2 = c^2 dt^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 =$$

$$= ds'^2 = c^2 dt'^2 - (dx'^1)^2 - (dx'^2)^2 - (dx'^3)^2.$$

Используя правило (8), опускание индекса у *4-вектора* $A^i = (A^0, A^1, A^2, A^3)$ даёт ковектор $A_i = (A_0, A_1, A_2, A_3) = (A^0, -A^1, -A^2, -A^3)$.

Компонента A^0 называется *временной*, а A^1, A^2, A^3 называют пространственными. Скалярное произведение (AB) двух произвольных 4-векторов A^μ и B^μ согласно (9) и метрике (19) определяется так:

$$(AB) = A^0B_0 + A^1B_1 + A^2B_2 + A^3B_3 =$$

$$= A_0B^0 + A_1B^1 + A_2B^2 + A_3B^3 =$$

$$= A_0B_0 - A_1B_1 - A_2B_2 - A_3B_3 =$$

$$= A^0B^0 - A^1B^1 - A^2B^2 - A^3B^3.$$

При пространственных поворотах (ось времени не затрагивается) компонента A^0 представляет собой трёхмерный скаляр, и совокупность $(A^1, A^2, A^3) \equiv \mathbf{A}$ преобразуется как контравариантный 3-вектор. Поэтому принято 4-вектор представлять так:

$$A^i = (A^0, \mathbf{A}),\ \ A_i = (A^0, -\mathbf{A}).$$

Квадрат вектора перепишется в виде $A^2 = (A^0)^2 - \mathbf{A}^2$.

4-тензор A^{ij} распадается на скаляр A^{00}, два вектора $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ и 3-тензор второго ранга D:

$$A^{ij} = \begin{pmatrix} A^{00} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & D \end{pmatrix}, \tag{21}$$

где $\mathbf{B} = (A^{01}, A^{02}, A^{03})$ и

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} A^{10} \\ A^{20} \\ A^{30} \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} A^{11} & A^{12} & A^{13} \\ A^{21} & A^{22} & A^{23} \\ A^{31} & A^{32} & A^{33} \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим антисимметричный 4-тензор A^{ik}. В силу свойства $A^{ik} = -A^{ki}$ диагональные элементы равны нулю, и тензор распадается на блоки:

$$A^{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{P} \\ -\mathbf{P}^{tr} & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & p_x & p_y & p_z \\ -p_x & 0 & -a_z & a_y \\ -p_y & a_z & 0 & -a_x \\ -p_z & -a_y & a_x & 0 \end{pmatrix}, \tag{22}$$

где $\mathbf{P} = (p_x, p_y, p_z)$ есть *полярный* вектор, то есть вектор, компоненты которого меняют знак при отражении системы координат (изменение знака всех координат); $\mathbf{A} = (a_x, a_y, a_z)$ — *аксиальный* вектор (псевдовектор). Он может быть представлен как векторное произведение двух полярных векторов. Псевдовекторы ведут себя как тензоры при всех преобразованиях координат, за исключением тех, которые не могут быть сведены к поворотам, т.е. за исключением отражений — изменений знаков координат, не сводимых к вращениям. Антисимметричный 4-тензор представляют так:

$$A^{ik} = (\mathbf{P}, \mathbf{A}),\ A_{ik} = (-\mathbf{P}, \mathbf{A}).$$

Выпишем некоторые операции в пространстве-времени Минковского с метрикой вида (19). 4-градиент от скаляра φ и дивергенция есть

$$(\operatorname{grad}_4 \varphi)_i = \nabla_i \varphi = \left(\frac{1}{c}\, \partial_t \varphi, \partial_\alpha \varphi \right),\ \alpha = 1, 2, 3.$$

$$\operatorname{div}_4 \mathbf{A} = \frac{1}{c}\, \partial_t A^0 + \operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{1}{c}\, \partial_t A^0 + \partial_\alpha A^\alpha,\ \alpha = 1, 2, 3.$$

Лапласиан имеет вид:

$$\nabla_i \nabla^i \varphi = \frac{1}{c^2}\, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \triangle \varphi.$$

В четырёхмерном пространстве ротор определяется как антисимметричный тензор:

$$(\operatorname{rot}_4 \mathbf{A})_{ij} = \nabla_i A_j - \nabla_j A_i.$$

2.3 Неинерциальные системы отсчёта

Наблюдатели, лаборатории редко находятся в "идеальных условиях". Например, земные лаборатории слабонеинерциальные, так как Земля вращается вокруг своей оси. Не всегда можно пренебречь влиянием слабого неинерциального движения на физические явления. Явления в неинерциальных системах отсчёта (НСО) удобно изучать и описывать с использованием четырёхмерного тензорного анализа.

Примером НСО является вращающаяся система отсчёта. Пусть (t, x^1, x^2, x^3) есть координаты исходной ИСО с метрикой (19). Рассмотрим другую систему отсчёта, оси x^1 и x^2 которой вращаются вокруг оси x^3 с постоянной угловой частотой Ω. Координаты ИСО связаны с координатами (t', x'^1, x'^2, x'^3) вращающейся системы отсчета следующим образом:

$$x^1 = x'^1 \cos \Omega t' - x'^2 \sin \Omega t',$$

$$x^2 = x'^1 \sin \Omega t' + x'^2 \cos \Omega t',$$

$$x^3 = x'^3,\ t = t'. \tag{23}$$

Квадрат интервала изменится:

$$ds^2 = c^2 \left[1 - \frac{\Omega^2((x'^1)^2 + (x'^2)^2)}{c^2}\right] dt'^2 + 2\Omega x'^2 dx'^1 dt' - 2\Omega x'^1 dx'^2 dt' -$$

$$-(dx'^1)^2 - (dx'^2)^2 - (dx'^3)^2. \tag{24}$$

Как видно, в новой системе отсчёта появились недиагональные элементы метрического тензора и его компоненты стали функциями координат. Некоторые символы Кристоффеля уже будут отличны от нуля.

2.4 Задачи

1. Доказать, что символы δ_{rs} и δ^{rs} являются только ортогональными тензорами.

2. Доказать равенства:

$$\frac{d}{dt} g_{mn} X^m X^n = 2 g_{mn} X^m \frac{\delta X^n}{\delta t},$$
$$\frac{d}{dt}(X^m Y_m) = \frac{\delta X^m}{\delta t} Y_m + X^m \frac{\delta Y_m}{\delta t}.$$

3. Для метрики пространства-времени Минковского в сферической системе координат $g_{ik} = diag(1, -1, -r^2, -r^2 \sin^2\theta)$ найти Лапласиан от скалярной функции.

   Ответ:

$$\nabla_i \nabla^i f = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - \frac{1}{r^2}\partial_r (r^2 \partial_r f) - \frac{1}{r^2}\left(\frac{1}{\sin\theta}\partial_\theta (\sin\theta\, \partial_\theta f) + \frac{1}{\sin^2\theta}\partial^2_{\varphi\varphi} f\right).$$

4. Для квадрата интервала (24) найти ненулевые символы Кристоффеля второго рода.
   Ответ: $\Gamma^1_{00} = -\dfrac{\Omega^2 x'^1}{c^2}$, $\Gamma^1_{02} = -\dfrac{\Omega}{c}$, $\Gamma^2_{00} = -\dfrac{\Omega^2 x'^2}{c^2}$, $\Gamma^2_{01} = \dfrac{\Omega}{c}$.

3 Динамика материальной точки

3.1 Классический случай

Рассмотрим материальную точку, движущуюся в пространстве по некоторой траектории, описываемой уравнениями $x^\alpha = x^\alpha(t)$. Будем полагать, что в общем случае система координат криволинейная. При переходе к новым координатам $x' = x'(x)$ компоненты объекта

$$v^\alpha \equiv \frac{dx^\alpha}{dt} \tag{25}$$

преобразуются как компоненты контравариантного вектора:

$$v'^\alpha = \frac{dx'^\alpha}{dt} = \frac{dx'^\alpha}{dx^\beta} \cdot \frac{dx^\beta}{dt} = \frac{dx'^\alpha}{dx^\beta} v^\beta.$$

Таким образом, (25) представляет собой тензор. В декартовой системе координат компоненты v^α есть составляющие скорости точки по координатным осям.

Определение. Тензор (25) называется *вектором обобщённой скорости* материальной точки.

Определение. Контравариантный вектор

$$a^r \equiv \frac{\delta v^r}{\delta t} = \frac{d^2 x^r}{dt^2} + \Gamma^r_{mn} \frac{dx^m}{dt} \cdot \frac{dx^n}{dt} \tag{26}$$

называется *вектором обобщённого ускорения* точки.

В декартовой системе координат ($\Gamma^r_{mn} = 0$) компоненты равны $a^r = d^2 x^r / dt^2$, то есть a^r есть составляющие ускорения точки по координатным осям в этой системе.

Второй закон Ньютона в тензорной форме:

$$ma^r = F^r, \tag{27}$$

где F^r — *вектор обобщённой силы*, m — масса материальной точки (является скаляром). Система (27) является совокупностью уравнений движения в криволинейных координатах. В декартовой системе координат уравнения принимают известную форму $F^r = m\dfrac{d^2x^r}{dt^2}$, где F^1, F^2 и F^3 есть составляющие силы вдоль трёх координатных осей.

Утверждение. *Если скорость материальной точки постоянна по модулю, то ускорение должно либо равняться нулю, либо быть ортогональным к вектору скорости.*

Докажем. Из условия теоремы следует

$$\frac{\delta(v^2)}{\delta t} = \frac{d(v^2)}{dt} = 2v\frac{dv}{dt} = 0,\ v \neq 0.$$

Здесь абсолютная производная совпадает с обычной производной по времени, так как модуль $v = \sqrt{g_{mn}v^m v^n}$ есть скаляр. С другой стороны, получаем

$$\frac{\delta(v^2)}{\delta t} = 2g_{nm}v^n\frac{\delta(v^m)}{\delta t} = 2g_{nm}v^n a^m = 2va\cos\theta,$$

где θ — угол между векторами скорости и ускорения. Это скалярное произведение (va) $(v \neq 0)$ равно нулю, если либо ускорение равняется нулю, либо оно ортогонально вектору скорости. Что и требовалось доказать.

Используя правило (8), сопоставляются ковариантные вектора обобщённой скорости, обобщённого ускорения и обобщённой силы в криволинейных координатах x^r:

$$v_r = g_{rq}v^q,\ a_r = g_{rq}a^q,\ F_r = g_{rq}F^q.$$

При перемещении тела из точки x^r в точку $x^r + \delta x^r$, сила F^r совершает работу $F_r\delta x^r$. Если сумма $F_r dx^r$ образует полный дифференциал, то сила F^r называется потенциальной. Компоненты ковариантного вектора обобщённой потенциальной силы определяются через *потенциальную функцию* V (скаляр):

$$F_r = -\frac{\partial V}{\partial x^r}. \tag{28}$$

Кинетическая энергия материальной точки равна

$$T = \frac{1}{2} m \cdot v^2 = \frac{1}{2} m \cdot g_{mn} v^m v^n = \frac{1}{2} m \cdot g_{mn} \dot{x}^m \dot{x}^n,$$

где сделано переобозначение $v^m = \dot{x}^m \equiv dx^m/dt$. Составим комбинацию производных:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}^r}\right) - \frac{\partial T}{\partial x^r} =$$
$$= m\left\{g_{rm}\ddot{x}^m + \frac{1}{2}\left(\partial_n g_{rm} + \partial_m g_{rn} - \partial_r g_{mn}\right)\dot{x}^m \dot{x}^n\right\} =$$
$$= m(g_{rm}\ddot{x}^m + \Gamma_{r,mn}\dot{x}^m\dot{x}^n) = m g_{rs}(\ddot{x}^s + \Gamma^s_{mn}\dot{x}^m\dot{x}^n).$$

Теперь вспоминаем определение (26) и $a_r = g_{rs}a^s$:

$$m\, a_r = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}^r}\right) - \frac{\partial T}{\partial x^r}.$$

Левая часть равенства есть тензор, следовательно комбинация в правой части представляет собой тензор. По этой формуле можно найти ковариантные составляющие вектора обобщённого ускорения в выбранной системе координат. Уравнения движения (27) можно переписать в ковариантной форме:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}^r}\right) - \frac{\partial T}{\partial x^r} = F_r\,. \tag{29}$$

Уравнения (29) называют уравнениями Лагранжа второго рода.

В случае потенциальных сил (28) имеем

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}^r}\right) - \frac{\partial (T - V)}{\partial x^r} = 0$$

или

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^r}\right) - \frac{\partial L}{\partial x^r} = 0, \tag{30}$$

где $L = T - V$ называется *функцией Лагранжа.*

3.2 Элементы релятивистской механики точки в СТО

Если в нерелятивистской физике используются трёхмерные векторы для описания ряда физических величин, то в СТО вводятся их четырёхмерные аналоги. Для характеристики движения материальной точки или элемента среды используется 4-вектор скорости:

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{ds}\,,\; ds = \sqrt{g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta}.$$

Этот вектор нормирован:

$$u^\mu u_\mu = 1. \tag{31}$$

В декартовых координатах ИСО (19) компоненты 4-вектора скорости u^μ выражаются через трёхмерный вектор скорости $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$ следующим образом:

$$u^\mu = \left(u^0 = \gamma,\, \mathbf{u} = \frac{\gamma\mathbf{v}}{c}\right),\; \gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\,. \tag{32}$$

Для релятивистской частицы 4-вектор импульса по определению равен

$$p^\mu = m_0 c u^\mu = (E/c, \mathbf{p}),$$

где m_0 — масса покоя частицы, E — энергия частицы. В декартовых координатах ИСО из (32) имеем

$$p^\mu = (\gamma m_0 c,\, \gamma m_0 \mathbf{v}),\; E = \gamma m_0 c^2,\; \mathbf{p} = \gamma m_0 \mathbf{v}.$$

При малых скоростях, $v \ll c$, получаем

$$E \approx m_0 c^2 + \frac{m_0 v^2}{2},\; \mathbf{p} \approx m_0 \mathbf{v},$$

то есть полная энергия свободной частицы включает кроме классической кинетической энергии энергию покоя $m_0 c^2$.

В декартовых координатах ИСО 4-вектор ускорения определён так:

$$a^\mu = \frac{du^\mu}{ds},$$

и компоненты a^μ равны:

$$a^\mu = \left(\frac{\gamma^4 \mathbf{a}\mathbf{v}}{c^3},\, \frac{\gamma^2 \mathbf{a}}{c^2} + \frac{\gamma^4 (\mathbf{a}\mathbf{v})\mathbf{v}}{c^4}\right),\; \mathbf{a} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}. \tag{33}$$

Ковариантное (абсолютное) дифференцирование тензора u^μ по s даёт выражение 4-вектора ускорения a^μ в произвольных криволинейных координатах:

$$a^\mu = \frac{Du^\mu}{Ds} \equiv \frac{du^\mu}{ds} + \Gamma^\mu_{kp} u^k u^p. \tag{34}$$

Вследствии (31) векторы u^μ и a^μ ортогональны: $u^\mu a_\mu = 0$.

Если на материальную точку массы m_0 действует трёхмерная сила $\mathbf{f}$, то уравнение её движения имеет вид:

$$m_0 c^2 a^\mu = F^\mu, \tag{35}$$

где F^μ — 4-вектор силы. Её компоненты в декартовых координатах ИСО равны

$$F^\mu = \left(\frac{\gamma \mathbf{f}\mathbf{v}}{c}, \, \gamma \mathbf{f} \right). \tag{36}$$

Действие свободной частицы имеет вид $S = -mc \int ds$. В декартовых координатах получаем

$$S = -mc^2 \int \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \, dt.$$

Варьируя S по $x^i(t)$, $i = 1, 2, 3$, получим

$$\frac{d}{dt} \frac{v^i}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = 0 \Rightarrow v^i = const\,.$$

Получаем ожидаемое равномерное прямолинейное движение. В произвольной системе координат тензорная форма уравнения движения свободной частицы есть

$$\frac{Du^\mu}{Ds} = 0 \Rightarrow \frac{du^\mu}{ds} + \Gamma^\mu_{kp} u^k u^p = 0.$$

Пример 1. Выразим ускорение $\mathbf{a}$ через трёхмерную скорость $\mathbf{v}$ и трёхмерную силу $\mathbf{f}$. Для этого распишем по компонентам уравнение (35) с учётом (33) и (36):

$$\gamma^3 \mathbf{a}\mathbf{v} = \frac{\mathbf{f}\mathbf{v}}{m_0}\,,$$

$$\gamma \mathbf{a} + \frac{\gamma^3 (\mathbf{a}\mathbf{v})\mathbf{v}}{c^2} = \frac{\mathbf{f}}{m_0}.$$

Отсюда,

$$\mathbf{a} = \frac{1}{m_0\gamma}\left[\mathbf{f} - \frac{(\mathbf{fv})\mathbf{v}}{c^2}\right] = \frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{m_0}\left[\mathbf{f} - \frac{(\mathbf{fv})\mathbf{v}}{c^2}\right]. \tag{37}$$

Получаемое под действием постоянной силы $\mathbf{f}$ ускорение частицы стремится к нулю в пределе $v \to c$. Таким образом, скорость света недостижима для любой массивной частицы.

Пример 2. Пусть на точку действует трёхмерная сила, постоянная по величине и направлению, $\mathbf{f} = (0, 0, f_z) = \mathrm{const}$. Такое движение называется релятивистским равноускоренным движением. Найдём закон движения. Из формулы (37) следует дифференциальное уравнение

$$z''_{tt} = \left(1 - \frac{z_t'^2}{c^2}\right)^{3/2} \frac{f_z}{m_0}.$$

Решая его с начальными условиями $\mathbf{r}(0) = 0$, $\mathbf{v}(0) = 0$, получаем

$$z = \frac{c}{b}\left[\sqrt{1+b^2t^2} - 1\right],\ b \equiv \frac{f_z}{m_0 c}.$$

Переход к новой системе координат по закону

$$t = t',\ x = x',\ y = y',\ z = z' + \frac{c}{b}\left[\sqrt{1+b^2t^2} - 1\right]$$

означает переход от ИСО к НСО, называемой *релятивистски равноускоренной системой отсчёта*. Квадрат интервала примет вид

$$ds^2 = \frac{c^2dt'^2}{1+b^2t'^2} - \frac{2bct'dt'dz'}{\sqrt{1+b^2t'^2}} - dx'^2 - dy'^2 - dz'^2. \tag{38}$$

Как видно, метрический тензор зависит от времени:

$$g'_{00} = \frac{1}{1+b^2t'^2},\ g'_{0z} = -\frac{bt'}{\sqrt{1+b^2t'^2}},\ g'_{xx} = g'_{yy} = g'_{zz} = -1.$$

Это приводит к одному ненулевому символу Кристоффеля:

$$\Gamma^z_{00} = \frac{b}{c(1+b^2t'^2)^{3/2}}.$$

Для расчёта ускорения a^μ нужно использовать уже формулу (34).

В НСО ряд законов механики перестают работать. Эффект неинерциальности проявляется, например, в том, что для удержания тела в покое нужно прикладывать силу. Покажем это на примере. Для метрики (38) распишем уравнения движения (35) с учётом (34):

$$m_0c^2\,\frac{du^0}{ds} = F^0,\; m_0c^2\,\frac{du^x}{ds} = F^x,\; m_0c^2\,\frac{du^y}{ds} = F^y,$$

$$m_0c^2\left[\frac{du^z}{ds} + \Gamma^z_{00}u^0u^0\right] = F^z. \qquad (39)$$

Условие состояния покоя означает $\mathbf{v}' = d\mathbf{r}'/dt' = 0$, а значит

$$ds = \left[\frac{c^2}{1+b^2t'^2} - \frac{2bct'v'_z}{\sqrt{1+b^2t'^2}} - v'^2_x - v'^2_y - v'^2_z\right]^{1/2} dt' = c\sqrt{g'_{00}}dt',$$

и $u^x = u^y = u^z = 0$. Условие нормировки $g'_{ik}u^iu^k = 1$ даст $u^0 = 1/\sqrt{g'_{00}}$. Система уравнений (39) даёт

$$F^0 = \frac{m_0c}{\sqrt{g'_{00}}}\frac{d(g'_{00})^{-1/2}}{dt'},\; F^x = F^y = 0,\; F^z = \frac{m_0c^2}{g'_{00}}\Gamma^z_{00},$$

Далее,

$$F^0 = m_0cb^2t',\; F^x = F^y = 0,\; F^z = \frac{m_0bc}{\sqrt{1+b^2t'^2}}.$$

В результате мы видим, что есть компоненты 4-силы, которая удерживает тело в покое в релятивистски равноускоренной системе отсчета, отличные от нуля и зависящие от времени. Квадрат силы $F^2 = F^iF^kg_{ik} = -m_0^2c^2b^2 = -f_z^2$ не зависит от времени.

3.3 Задачи

1. В НСО с квадратом интервала (24) найти уравнение движения с 4-вектором силы $F^i = 0$.

   Ответ: $x' = (v_{0x}t' + x_0)\cos\Omega t' + (v_{0y}t' + y_0)\sin\Omega t'$,
   $y' = -(v_{0x}t' + x_0)\sin\Omega t' + (v_{0y}t' + y_0)\cos\Omega t'$, $z' = v_{0z}t' + z_0$,
   v_{0x}, v_{0y}, v_{0z}, x_0, y_0, z_0 — константы интегрирования. Такая зависимость

есть закон свободного движения точки во вращающейся системе отсчёта. Она соответствует прямолинейному равномерному движению точки в ИСО.

2. Найти 4-вектор силы F^i, которая удерживает массивное тело в покое в точке $x = R$, $y = z = 0$ вращающейся системы отсчета.

   Ответ: Если брать метрику (38) и ввести в плоскости $x'Oy'$ полярную систему координат (r, φ), то

$$F^r = -\frac{m_0 c^2 \Omega^2 R}{c^2 - \Omega^2 R^2},\ F^0 = F^z = F^\varphi = 0.$$

4 Механика сплошных сред

Классическая механика оперирует идеализированным понятием материальной точки — тело с массой, формами и размерами которого пренебрегают. Задав начальные условия, из уравнений движения можно получить закон её движения. Такой подход работает для механических систем, содержащих небольшое количество тел. В этом случае количество уравнений движения для точек "обозримо" . В многочастичных системах используется другой подход. В механике сплошной среды неделимым объектом является частица, содержащая большое количество, по сравнению с единицей, молекул среды, но количество их мало по сравнению с числом молекул всей среды. Объём этой частицы предполагается малым по сравнению с объёмом всей среды. Предполагают, что вещество непрерывно распределено по всему занимаемому им объёму и целиком заполняет этот объём. Большое число молекул среды описывается усредненными физическими величинами. Они являются полевыми функциями, то есть функциями точки пространства и времени, которые полагают кусочно-непрерывными. Далее мы будем рассматривать в евклидовом пространстве примеры тензорных полей, характеризующих сплошную среду.

4.1 Тензор деформации

При деформировании среды радиус-вектор между бесконечно близкими частицами изменятся:

$$dx'^{\alpha} = dx^{\alpha} + Du^{\alpha} = dx^{\alpha} + \nabla_{\beta} u^{\alpha} dx^{\beta}, \tag{40}$$

где $dx^{\alpha} = \{dx^1, dx^2, dx^3\}$ — радиус-вектор до деформации, u^{α} — вектор деформации (вектор смещения частицы), Du^{α} — ковариантный (абсолютный) дифференциал. Квадрат расстояния между бесконечно близкими частицами до деформации и после деформации равны, соответственно:

$$dl^2 = g_{\alpha\beta} dx^{\alpha} dx^{\beta},$$

$$dl'^2 = g_{\alpha\beta} dx'^{\alpha} dx'^{\beta} = [g_{\alpha\beta} + u_{\alpha\beta}] dx^{\alpha} dx^{\beta}.$$

Симметричный тензор

$$u_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}[\nabla_{\beta} u_{\alpha} + \nabla_{\alpha} u_{\beta} + g^{\mu\nu} \nabla_{\alpha} u_{\mu} \nabla_{\alpha} u_{\nu}] \tag{41}$$

называется лагранжевым тензором конечных деформаций сплошной среды.

Разность $\triangle l = dl' - dl$ для двух соседних частиц определяет меру деформации некоторой окрестности этих частиц между начальным и конечным состояниями. Если $\triangle l \equiv 0$ для всех соседних частиц, то говорят о перемещении сплошной среды как абсолютно твёрдого тела. Приведём к виду

$$\triangle l = \sqrt{[g_{\alpha\beta} + u_{\alpha\beta}] dx^{\alpha} dx^{\beta}} - dl = \sqrt{dl^2 + u_{\alpha\beta} dx^{\alpha} dx^{\beta}} - dl =$$

$$= \left[\sqrt{1 + u_{\alpha\beta} \frac{dx^{\alpha}}{dl} \frac{dx^{\beta}}{dl}} - 1\right] dl = \left[\sqrt{1 + u_{\alpha\beta} n^{\alpha} n^{\beta}} - 1\right] dl,$$

где n^{α} — единичный вектор ($g_{\alpha\beta} n^{\alpha} n^{\beta} = 1$), направленный вдоль вектора смещения dx^{α}. Перепишем последнее равенство

$$\frac{\triangle l}{dl} = \sqrt{1 + u_{\alpha\beta} n^{\alpha} n^{\beta}} - 1,$$

где отношение $\dfrac{\triangle l}{dl}$ называется коэффициентом относительного удлинения между любыми бесконечно близкими частицами сплошной среды. При малых деформациях получим:

$$\frac{\triangle l}{dl} \approx \frac{1}{2} U_{\alpha\beta}\, n^{\alpha} n^{\beta}, \tag{42}$$

где $U_{\alpha\beta}$ — лагранжев тензор бесконечно малых деформаций:

$$U_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}[\nabla_\beta u_\alpha + \nabla_\alpha u_\beta]. \tag{43}$$

При малых деформациях слагаемое $g^{\mu\nu}\nabla_\alpha u_\mu \nabla_\alpha u_\nu$ мало в выражении (41) по сравнению с другими.

Рассмотрим интерпретацию $U_{\alpha\beta}$ в декартовой системе координат. Формула (42) описывает коэффициент относительного удлинения линейного элемента, первоначально имевшего направляющие косинусы $n^\mu = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$. Диагональные компоненты U_{11}, U_{22}, U_{33} представляют собой коэффициенты относительного удлинения вдоль осей координат. Недиагональные компоненты U_{12}, U_{13}, U_{23} равны половине изменения углов между двумя первоначально ортогональными линейными элементами. Такие компоненты деформации называются деформациями сдвига. Например, U_{12} — половина изменения угла между линейными элементами на оси 1 и оси 2.

Таким образом, зная тензор деформации $u_{\alpha\beta}$, можно определить относительное удлинение между любыми бесконечно близкими частицами сплошной среды.

4.2 Тензор напряжения

Силы, которые действуют на элемент граничной или внутренней поверхности среды, называют поверхностными силами. Объёмная плотность таких сил (сила, отнесённая к единице объёма) может быть представлена в виде дивергенции от некоторого тензора $\sigma^{\alpha\beta}$:

$$F^\alpha = \nabla_\beta \sigma^{\alpha\beta}.$$

Тензор $\sigma^{\alpha\beta}$ называется *тензором напряжения*, а сила F^α — *сила внутреннего напряжения*. Тензор $\sigma^{\alpha\beta}$ определён с точностью до дивергенции $\nabla_\nu \mu^{\alpha\beta\nu}$ от антисимметричного тензора $\mu^{\alpha\beta\nu} = -\mu^{\alpha\nu\beta}$. Действительно, в силу тождества $\nabla_\beta\nabla_\nu\mu^{\alpha\beta\nu} \equiv 0$ (в плоском пространстве ковариантные производные коммутируют) получаем:

$$\nabla_\beta \sigma'^{\alpha\beta} = \nabla_\beta(\sigma^{\alpha\beta} - \nabla_\nu\mu^{\alpha\beta\nu}) = \nabla_\beta\sigma^{\alpha\beta} = F^\alpha.$$

Эта степень свободы используется для симметризации тензора напряжения: $\sigma^{\alpha\beta} = \sigma^{\beta\alpha}$.

Компонента $\sigma^{\alpha\beta}$ совпадает с α-ой компонентой силы, действующей на единицу поверхности, перпендикулярной к оси x^{β}. Компоненты имеют размерность силы, делённой на размерность площади. В декартовой системе координат компоненты σ^{11}, σ^{22}, σ^{33}, соответствующие перпендикулярным к координатным плоскостям силам, называются нормальными напряжениями. Недиагональные компоненты, действующие в касательных плоскостях, называются касательными напряжениями (или напряжениями сдвига).

4.3 Уравнения движения в механике сплошных сред

Внутренние силы в сплошной среде — это поверхностные силы. Их действие сосредоточено в тонком слое. Это является следствием того, что межмолекулярные силы имеют малый радиус действия. Кроме них есть внешние силы, которые действуют почти одинаково на все элементы объёма сплошной среды. Их называют массовыми или объёмными силами. Примером являются силы гравитации и инерции. В механике материальной точки закон изменения импульса имеет вид:

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F},$$

m — масса, $\mathbf{F}$ — сила. В сплошной среде существует аналогичный закон для частицы среды:

$$\rho\frac{dv^{\alpha}}{dt} = \nabla_{\beta}\sigma^{\alpha\beta} + \rho f^{\alpha}.$$

Как видим, изменение плотности импульса происходит под действием внутренних сил $\nabla_{\beta}\sigma^{\alpha\beta}$ и плотности внешних сил f^{α}, приходящихся на единицу массы. Так как мы рассматриваем полевые функции от времени и точки, то полная производная по времени в декартовых координатах равна:

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v_{\alpha}\,\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}.$$

Производная $\dfrac{\partial}{\partial t}$ определяет локальное изменение полей со временем в фиксированной точке (локальная производная). Второе слагаемое $v_\alpha \dfrac{\partial}{\partial x^\alpha}$ образуется за счёт изменения координат точки (конвективная производная).

В механике сплошных сред есть и другие уравнения. Плотность среды $\rho(t, \mathbf{r})$ удовлетворяет уравнению непрерывности:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla_\beta(\rho v^\beta) = 0. \tag{44}$$

Уравнение для плотности внутренней энергии Π имеет вид:

$$\rho \frac{d\Pi}{dt} = \sigma^{\alpha\beta} V_{\alpha\beta} - \nabla_\beta q^\beta\,,$$

где q^α — плотность потока тепла; $V_{\alpha\beta}$ — тензор скоростей деформаций среды:

$$V_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\nabla_\alpha v_\beta + \nabla_\beta v_\alpha).$$

Изменение энтропии s определяется уравнением

$$\rho T \frac{ds}{dt} = -\nabla_\alpha q^\alpha + D,$$

где T — абсолютная температура, D — механическая работа, которая необратимо переходит в тепло в единице объёма и в единицу времени.

Для идеальной жидкости тензор напряжения представляется в виде

$$\sigma^{\alpha\beta} = -p g^{\alpha\beta},$$

где p — изотропное давление. В этом случае, пренебрегая тепловыми явлениями, получаем управляющую систему уравнений для идеальной жидкости:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla_\beta(\rho v^\beta) = 0\,,$$

$$\rho\, g_{\alpha\beta} \frac{dv^\beta}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x^\alpha} + \rho f_\alpha,$$

$$\rho\, \frac{d\Pi}{dt} = -p \nabla_\beta v^\beta,$$

$$\Pi = \Pi(\rho, T),\ \ p = p(\rho, T).$$

Последние равенства представляют собой уравнения состояния, характеризующие свойства конкретной среды.

Задача. Используя формулу (43), выразить компоненты тензора бесконечно малых деформаций $U_{\alpha\beta}$ через вектор деформации u_α в декартовой и сферической системах координат евклидова пространства.

Ответ:

В декартовых координатах:

$U_{xx} = \dfrac{\partial u_x}{\partial x}$, $U_{yy} = \dfrac{\partial u_y}{\partial y}$, $U_{xy} = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{\partial u_x}{\partial y} + \dfrac{\partial u_y}{\partial x}\right]$, $U_{zz} = \dfrac{\partial u_z}{\partial z}$, $U_{xz} = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{\partial u_x}{\partial z} + \dfrac{\partial u_z}{\partial x}\right]$, $U_{yz} = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{\partial u_z}{\partial y} + \dfrac{\partial u_y}{\partial z}\right]$.

В сферических координатах:

$U_{rr} = \dfrac{\partial u_r}{\partial r}$, $U_{\varphi\varphi} = \dfrac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + u_\theta \sin\theta\cos\theta + r u_r \sin^2\theta$, $U_{\theta\theta} = \dfrac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + r u_r$, $U_{r\theta} = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{\partial u_r}{\partial \theta} + \dfrac{\partial u_\theta}{\partial r}\right] - \dfrac{u_\theta}{r}$, $U_{\theta\varphi} = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{\partial u_\varphi}{\partial \theta} + \dfrac{\partial u_\theta}{\partial \varphi}\right] - \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta} u_\varphi$, $U_{r\varphi} = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \dfrac{\partial u_\varphi}{\partial r}\right] - \dfrac{u_\varphi}{r}$.

5 Релятивистская электродинамика

Взаимодействие частицы с электромагнитным полем определяется скалярной величиной, называемой *зарядом* частицы e. Само электромагнитное поле описывается 4-потенциалом A_i. Два поля тождественны физически, если они характеризуются одним и тем же антисимметричным тензором второго ранга

$$F_{ik} = \nabla_i A_k - \nabla_k A_i, \tag{45}$$

называемым тензором электромагнитного поля. Потенциал A_i однозначно определяет поле F_{ik}. Обратное не верно: одному и тому же полю могут соответствовать различные потенциалы. В уравнения движения входит именно тензор F_{ik}. В декартовых координатах ИСО псевдоевклидова пространства-времени компоненты тензора электромагнитного поля выражаются так через компоненты векторов напряжённостей электрического $\mathbf{E}=(E_x, E_y, E_z)$ и магнитного $\mathbf{H}$=(H_x, H_y, H_z) полей:

$$F_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -H_z & H_y \\ -E_y & H_z & 0 & -H_x \\ -E_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix}.$$

Более короткая запись: $F_{ik} = (\mathbf{E}, \mathbf{H})$, $F^{ik} = (-\mathbf{E}, \mathbf{H})$. Потенциал выражается так: $A^i = (\varphi, \mathbf{A})$, $A_i = (\varphi, -\mathbf{A})$, где φ — скалярный потенциал, $\mathbf{A}$ — трёхмерный векторный потенциал.

Рассмотрим действие

$$S = -\int_b^a \left(m_0 c\, ds + \frac{e}{c} A_i dx^i\right). \tag{46}$$

Принцип наименьшего действия $\delta S = 0$ даёт уравнение движения заряженной частицы во внешнем электромагнитном поле в электродинамике Максвелла:

$$m_0 c \left[\frac{du^n}{ds} + \Gamma^n_{ik} u^i u^k\right] = \frac{e}{c} F^{nk} u_k\,, \tag{47}$$

где u^k — 4-вектор скорости частицы.

Рассмотрим более сложное действие:

$$S = -\frac{1}{16\pi c}\int F^{ik} F_{ik} \sqrt{-g} d^4x - \frac{1}{c^2}\int_{V_4} A_i j^i \sqrt{-g} d^4 x, \tag{48}$$

где $j^i = (c\rho, \mathbf{j})$ — 4-вектор плотности тока заряженных частиц, ρ — плотность заряда, $\mathbf{j}$ — трёхмерная плотность тока. Действие даёт уравнения Максвелла при наличии в вакууме заряженных частиц:

$$\nabla_k F^{ik} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^k}[\sqrt{-g} F^{ik}] = -\frac{4\pi}{c} j^i. \tag{49}$$

Из этого уравнения следует закон сохранения электрического заряда:

$$\nabla_\mu j^\mu = 0 \Rightarrow \partial_\mu(\sqrt{-g} j^\mu) = 0\,. \tag{50}$$

В силу определения (45) выполняется тензорное уравнение

$$\nabla_i F_{kn} + \nabla_k F_{ni} + \nabla_n F_{ik} = 0. \tag{51}$$

Уравнения (49), (51) имеют известные трёхмерные аналоги в декартовых координатах ИСО евклидова пространства:

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\mathbf{j},\ \operatorname{div}\mathbf{E} = 4\pi\rho, \tag{52}$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t},\ \operatorname{div}\mathbf{H} = 0. \tag{53}$$

В материальной среде система уравнений (49), (51) неприменима. Она заменяется системой

$$\nabla_k Q^{ik} \equiv \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^k}[\sqrt{-g}Q^{ik}] = -\frac{4\pi}{c}j^i, \tag{54}$$

$$\nabla_i F_{kn} + \nabla_k F_{ni} + \nabla_n F_{ik} = 0. \tag{55}$$

В декартовых координатах ИСО тензоры F_{ik}, Q_{ik} имеют вид:

$$F_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix},$$

$$Q_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & D_x & D_y & D_z \\ -D_x & 0 & -H_z & H_y \\ -D_y & H_z & 0 & -H_x \\ -D_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix},$$

где $\mathbf{D}$ — трёхмерный вектор электрической индукции, $\mathbf{B}$ — индукция магнитного поля; j^i — усреднённый 4-вектор плотности тока свободных зарядов. В трёхмерной форме:

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\mathbf{j},\ \operatorname{div}\mathbf{D} = 4\pi\rho, \tag{56}$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t},\ \operatorname{div}\mathbf{B} = 0. \tag{57}$$

Количество уравнений в системе недостаточно для определения всех неизвестных. Добавляются так называемые материальные уравнения $\mathbf{D}=\mathbf{D}(\mathbf{E})$,

$\mathbf{B}$=$\mathbf{B}(\mathbf{H})$, определяемые электромагнитными свойствами вещества. Частным случаем являются зависимости (трёхмерный тензорный вид):

$$D^\alpha = \varepsilon^{\alpha\beta} E_\beta,\ B^\alpha = \mu^{\alpha\beta} H_\beta,$$

характерные для линейных сред и малых электромагнитных полей. Здесь $\varepsilon^{\alpha\beta}$ и $\mu^{\alpha\beta}$ — тензоры диэлектрической и магнитной проницаемостей среды.

Пример. Представим уравнения (47) в декартовых координатах ИСО псевдоевклидова пространства-времени (20). Для квадрата интервала (20) выполняется

$$\Gamma^n_{ik} = 0,\ \frac{d}{ds} = \frac{\gamma}{c} \cdot \frac{d}{dt}$$

и вектор u^k имеет компоненты (32). Преобразуем правую часть уравнения (47):

$$F^{nk} u_k = F^{nk} g_{kj} u^j = F^{n\cdot}_{\cdot j} u^j.$$

Компоненты $F^{n\cdot}_{\cdot j}$ образуют матрицу

$$F^{n\cdot}_{\cdot j} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ E_x & 0 & H_z & -H_y \\ E_y & -H_z & 0 & H_x \\ E_z & H_y & -H_x & 0 \end{pmatrix}.$$

Вектор $F^{n\cdot}_{\cdot j} u^j$ имеет компоненты:

$$F^{0\cdot}_{\cdot j} u^j = \frac{\gamma}{c} \cdot (\mathbf{vE}),\ F^{\alpha\cdot}_{\cdot j} u^j = \frac{\gamma}{c} \cdot (cE^\alpha + ([\mathbf{vH}])^\alpha),\ \alpha = 1, 2, 3,$$

где $[\mathbf{vH}]$ — векторное произведение. В результате система (47) распадается на уравнения:

$$\frac{d}{dt} \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = e(\mathbf{vE}),$$

$$\frac{d}{dt} \frac{m_0 \mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c}[\mathbf{vH}].$$

Правая часть $\mathbf{f} = e\mathbf{E} + \dfrac{e}{c}[\mathbf{vH}]$ в последнем уравнении есть сила Лоренца, которая действует на запряженную частицу в электромагнитном поле.

6 Общая теория относительности

В общей теории относительности (ОТО) полевыми функциями, характеризующими гравитационное поле, являются компоненты метрического тензора $g_{\mu\nu}$ четырехмерного псевдориманова пространства-времени с сигнатурой $(+---)$. Уравнения ОТО выводятся из действия

$$S = \int \frac{R}{2\kappa}\sqrt{-g}\, d^4x + S_m,$$

где S_m — действие вещества и всех полей, кроме гравитационного, $\kappa = 8\pi G/c^4$ — гравитационная постоянная Эйнштейна, G — ньютоновская гравитационная постоянная. Условие $\delta S = 0$ приводит к уравнению Гильберта-Эйнштейна

$$G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}\,. \tag{58}$$

Здесь $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \dfrac{1}{2}g_{\mu\nu}R$ — тензор Эйнштейна, $T_{\mu\nu}$ — тензор энергии-импульса (ТЭИ):

$$T_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S_m}{\delta g^{\mu\nu}}\,. \tag{59}$$

Его полагают симметричным: $T_{\mu\nu} = T_{\nu\mu}$.

Система (58) содержит 10 нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных не выше второго порядка. Выбирая систему координат, можно наложить 4 равенства на компоненты тензора $g_{\mu\nu}$. Из 10 остаётся 6 независимых уравнений. Свёрнутые тождества Бьянки (15) принципиально новых уравнений не дают, они являются следствием уравнений Эйнштейна.

В классических теориях поля уравнения движения источников поля вводят отдельно от уравнений поля. В ОТО уравнения движения материи следуют из полевых уравнений. Действительно, в силу (15) из (58) следуют равенства

$$\nabla_\alpha T^\alpha_\mu = 0, \tag{60}$$

которые содержат уравнения движения источников рассматриваемой физической системы. Равенства называют законами сохранения, хотя они не приводят к интегральным законам сохранения чего бы то ни было в ОТО. Это связано с тем, что ТЭИ не содержит вклада от гравитационного поля, а законы сохранения должны выполняться для материи вместе с гравитационным полем. В рамках СТО равенство (60) также имеет место. В декартовых координатах ИСО псевдоевклидова пространства-времени оно принимает вид

$$\partial_\alpha T^\alpha_\mu = 0. \tag{61}$$

Равенство (61) приводит к сохранению 4-вектора

$$P^i = \frac{1}{c}\int T^{ik} dS_k. \tag{62}$$

Он представляет собой интеграл по гиперповерхности в пространстве-времени, то есть по трёхмерному многообразию. Остановимся на этой операции подробно. Объём параллелепипеда в трёхмерном пространстве равен определителю 3-го порядка, составленного из координат трёх 3-векторов, на которых построен этот параллелепипед. В четырёхмерном пространстве также рассматривается определитель, но на основе 4-векторов dx^i, dx'^i, dx''^i:

$$dS^{ikl} = \begin{vmatrix} dx^i & dx'^i & dx''^i \\ dx^k & dx'^k & dx''^k \\ dx^l & dx'^l & dx''^l \end{vmatrix}.$$

Этот полностью антисимметричный 4-тензор выражает проекции объёма "параллелепипеда", то есть "площади" гиперповерхности. 4-вектор dS^i равен

$$dS^i = -\frac{1}{6} e^{iklm} dS_{klm},$$

перпендикулярен к элементу гиперповерхности и по модулю равен "площади" этого элемента. Например, $dS^0 = dS^{123} = dxdydz = dV$ равен элементу трёхмерного объёма — проекция элемента гиперповерхности на гиперплоскость $t = \text{const}$.

Интеграл (62) на гиперповерхности $t = \text{const}$ принимает вид

$$P^i = \frac{1}{c}\int T^{i0} dV. \tag{63}$$

Временная компонента $P^0 = \dfrac{1}{c}\int T^{00} dV$ есть энергия системы, поделённая на скорость c, а $\varepsilon = T^{00}$ — плотность энергии. Компоненты $P^\alpha = \dfrac{1}{c}\int T^{\alpha 0} dV$

($\alpha = 1, 2, 3$) есть компоненты трёхмерного вектора импульса системы, а $\frac{1}{c}T^{\alpha 0}$ образуют плотность импульса. Таким образом, вектор P^i есть 4-импульс системы.

Перепишем (61) следующим образом:

$$\frac{1}{c}\partial_t T^{00} + \partial_\alpha T^{0\alpha} = 0,\ \frac{1}{c}\partial_t T^{\alpha 0} + \partial_\beta T^{\alpha\beta} = 0,\ \alpha, \beta = 1, 2, 3.$$

Проинтегрируем по пространственному объёму:

$$\frac{1}{c}\partial_t \int T^{00} dV + \int \partial_\alpha T^{0\alpha} dV = 0,\ \frac{1}{c}\partial_t \int T^{\alpha 0} dV + \int \partial_\beta T^{\alpha\beta} dV = 0.$$

Используя теорему Гаусса ко вторым слагаемым уравнений, получим:

$$\partial_t \int T^{00} dV = -c \oint T^{0\alpha} df_\alpha, \tag{64}$$

$$\frac{1}{c}\partial_t \int T^{\alpha 0} dV = -\oint T^{\alpha\beta} df_\beta, \tag{65}$$

где интегралы в правой части берутся по поверхности, ограничивающей объём, $d\mathbf{f}= (df_x, df_y, df_z)$ — вектор элемента поверхности. Он направлен перпендикулярно к элементу поверхности и по модулю равен его площади. В левых частях (64) и (65) стоит изменение в единицу времени энергии и импульса системы в объёме, соответственно. Следовательно, правая часть (64) есть количество энергии, протекающей через границу объёма, а вектор

$$\mathbf{S} = (cT^{01}, cT^{02}, cT^{01})$$

равен плотности потока энергии (количество энергии, проходящей в единицу времени через единицу поверхности). Ранее было сказано, что $\frac{1}{c}T^{\alpha 0}$ есть плотность импульса. Таким образом, плотность потока энергии равна плотности импульса, умноженной на c^2. Выражение $\oint T^{\alpha\beta} df_\beta$ из (65) равно количеству импульса, вытекающего в единицу времени из объёма, а $T^{\alpha\beta} = -\sigma_{\alpha\beta}$ — 3-тензор плотности потока импульса, $\sigma_{\alpha\beta}$ — тензор напряжения, о котором ранее говорилось. Компонента $T_{\alpha\beta}$ равна количеству импульса компоненты α, протекающего в единицу времени через единицу поверхности, перпендикулярную к оси x^β. Учитывая вышесказанное, запишем ТЭИ в матричной форме:

$$T^{ik} = \begin{pmatrix} \varepsilon & S_x/c & S_y/c & S_z/c \\ S_x/c & -\sigma_{xx} & -\sigma_{xy} & -\sigma_{xz} \\ S_y/c & -\sigma_{yx} & -\sigma_{yy} & -\sigma_{yz} \\ S_z/c & -\sigma_{zx} & -\sigma_{zy} & -\sigma_{zz} \end{pmatrix}.$$

Закон сохранения массы выражается в нерелятивистской гидродинамике уравнением непрерывности (44). В СТО и ОТО масса не сохраняется. Аналоги уравнения непрерывности выписываются для сохраняющихся величин. Для электрического заряда — это уравнение (50). Если отсутствует рождение и поглощение частиц, то закон сохранения числа частиц имеет вид

$$\nabla_\mu(nu^\mu) = 0.$$

Вектор $n^\mu = nu^\mu$ — ток числа частиц, где n — плотность числа частиц в сопутствующей системе отсчёта (жидкость относительно неё покоится).

ТЭИ в ОТО получаются обобщением соответствующих выражений из СТО. Рассмотрим различные примеры ТЭИ в ОТО. ТЭИ идеальной жидкости имеет вид:

$$T_{\mu\nu} = (\varepsilon + p)u_\mu u_\nu - pg_{\mu\nu}$$

или в смешанных компонентах

$$T_\mu^\nu = (\varepsilon + p)u^\nu u_\mu - p\delta_\mu^\nu\,, \tag{66}$$

где u_μ — 4-вектор скорости частицы жидкости, $\varepsilon = \rho c^2$ — её плотность энергии, p — давление. Подставим (66) в (60):

$$\nabla_\nu T_\mu^\nu = (\partial_\nu w)u_\mu u^\nu + w\nabla_\nu(u_\mu u^\nu) - \partial_\mu p = 0\,, \tag{67}$$

сумма $w = \varepsilon + p$ называется тепловой функцией жидкости. Вследствии равенства (60) справедливо тождество $\nabla_\nu T_\mu^\nu - u^\nu u_\mu \nabla_\lambda T_\nu^\lambda = 0$. Подставляя в него равенство (67), получим уравнение движения идеальной жидкости — общерелятивистское обобщение уравнения Эйлера:

$$wu^\nu\nabla_\nu u_\mu = \partial_\mu p - u_\mu u^\nu \partial_\nu p\,.$$

Действие для скалярного поля ϕ с потенциалом $V(\phi)$ имеет вид

$$S_{sm} = \int \left(-\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi + V(\phi) \right) \sqrt{-g}\, d^4x.$$

Из формулы (59) следует

$$T^{(sm)}_{\mu\nu} = \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi - g_{\mu\nu} \left(\frac{1}{2} \nabla^\alpha \phi \nabla_\alpha \phi - V(\phi) \right).$$

Вариация S_{sm} по ϕ даёт уравнение движения для скалярного поля (уравнение Клейна-Гордона):

$$\nabla^\alpha \nabla_\alpha \phi + \frac{dV}{d\phi} = 0.$$

ТЭИ электромагнитного поля имеет вид

$$T^{(em)}_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} - F_{\mu\gamma} F_\nu{}^\gamma \right).$$

Список литературы

[1] Денисова И. П. Введение в тензорное исчисление и его приложения. Учебное пособие / И. П. Денисова – 2-е изд., стер.– М.: Издательство УНЦ ДО, 2004. – 230 с.

[2] Ландау Л. Д. Теоретическая физика. В 10 т. Том II. Теория поля / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 536 с.

[3] Мак-Коннел А. Дж. Введение в тензорный анализ с приложениями к геометрии, механике и физике / А. Дж. Мак-Коннел – М.: ФИЗМАТЛИТ, 1963. – 412 с.

[4] Седов Л. И. Механика сплошной среды (в 2-х томах) / Л. И. Седов – М.: Наука, 1994. т.1 – 528 с.; т.2 – 560 с.

[5] Аминова А. В. Сборник задач и упражнений по векторному и тензорному анализу / А. В. Аминова – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 2020, 63 с.

[6] Анчиков А. М. Основы вектрного и тензорного анализа. Учебно-методическое пособие / А. М. Анчиков – 2-е изд., испр. и доп. – Казань: КГУ, 2006, 161 с.

[7] Бронников К. А. Лекции по гравитации и космологиии. Учебное пособие / К. А. Бронников, С. Г. Рубин – М.: МИФИ, 2008, 460 с.

Мухарлямов Руслан Камилевич, Панкратьева Татьяна Николаевна

Теоретическая физика в тензорном представлении

Учебно-методическое пособие

Отпечатано в полном соответствии с предоставленным оригинал-макетом