

Ю.Р. Агачев, А.В. Ожегова

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО РЕШЕНИЮ
КОНЕЧНОМЕРНЫХ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧ

Казань — 2022

Министерство образования и науки Российской Федерации
Казанский (Приволжский) федеральный университет

Рекомендовано к опубликованию и размещению на сайте Казанского (Приволжского) федерального университета Учебно-методической комиссией Института математики и механики им. Н.И.Лобачевского, протокол №1 от 8 сентября 2022 года

Рецензент: д.ф.-м.н., проф. Авхадиев Ф.Г.

Агачев Ю.Р. Методические рекомендации по решению конечномерных экстремальных задач. Учебно-методическое пособие / Ю.Р. Агачев, А.В. Ожегова. – Казань, 2022. – 42 с.

Учебно-методическое пособие призвано помочь студентам в освоении материала дисциплины "Вариационное исчисление и методы оптимизации", касающегося практического решения экстремальных задач в конечномерном пространстве.

Приводится необходимый теоретический материал для различных классов конечномерных экстремальных задач, его применение к исследованию конкретных примеров. В конце пособия содержатся задачи для самостоятельного решения.

Пособие предназначено для студентов-бакалавров старших курсов.

© Казанский (Приволжский) федеральный университет, 2022 г.

© Ю.Р. Агачев, А.В. Ожегова, 2022 г.

Введение	4
§ 1. Задачи безусловной гладкой оптимизации	5
§ 2. Задачи выпуклого программирования	8
2.1. Общая задача	
2.2. О безусловной оптимизации	
2.3. Примеры решения задач выпуклого программирования	
§ 3. Задачи математического программирования	16
3.1. Элементы теории	
3.2. Примеры решения задач математического программирования	
§ 4. Задачи линейного программирования	31
§ 5. Задачи для самостоятельного решения	39
Литература	42

Введение

С древних времен люди стремились к совершенству во всем. И сегодня в окружающем нас мире постоянно возникают различные задачи, требующие нахождения их оптимального решения. Если математическая модель этих задач сводится к исследованию на экстремум (минимум, максимум) некоторой функции конечного числа переменных, то говорят о конечномерной экстремальной задаче.

Пусть R^n ($n \in N$) – евклидово пространство с обычной нормой $\|\cdot\|$, $\Omega \subset R^n$ – произвольно фиксированное множество. Пусть задана некоторая функция $f: R^n \rightarrow R = R^1$.

Экстремальные задачи

$$f(x) \xrightarrow{x \in \Omega} \text{extr}, \quad (0.1)$$

$$f(x) \xrightarrow{x \in \Omega} \inf, \quad (0.2)$$

$$f(x) \xrightarrow{x \in \Omega} \sup \quad (0.3)$$

представляют собой общие конечномерные задачи.

Следует подчеркнуть, что задача (0.3) эквивалентна задаче минимизации на Ω функции $-f(x)$. При этом нас интересуют, в первую очередь, вопросы нахождения решения задач (0.1) и (0.2).

Произвольно фиксированную точку $x \in \Omega$ будем называть допустимой точкой в соответствующей задаче.

Определение 0.1. *Допустимую точку $\bar{x}$ назовем точкой локального минимума в задаче (2), если $\exists \varepsilon > 0$ такое, что для $\forall x \in \Omega, \|x - \bar{x}\| < \varepsilon$, выполняется неравенство:*

$$f(x) \geq f(\bar{x}). \quad (0.4)$$

Если для таких точек x имеет место

$$f(x) \leq f(\bar{x}), \quad (0.4')$$

то $\bar{x}$ называется точкой локального максимума в задаче (0.3). Точки локального минимума и максимума будем кратко называть точками локального экстремума в задаче (0.1).

Определение 0.2. *Если неравенство (0.4) (соответственно (0.4')) выполняется $\forall x \in \Omega$, то $\bar{x}$ называется точкой глобального минимума в задаче (0.2) (соответственно точкой глобального минимума в задаче (0.3)). Такие точки мы также будем называть решениями в соответствующих экстремальных задачах.*

Решение тех или иных экстремальных задач основано на применении необходимых и достаточных условий оптимальности. Поэтому для конкретных классов конечномерных экстремальных задач нами вначале будут приведены необходимые и достаточные условия оптимальности.

Необходимые условия оптимальности – это те условия, которые необходимо выполняются в соответствующей точке локального экстремума (минимума, максимума). Эти условия представляют собой необходимые условия локального экстремума (минимума, максимума).

Достаточные условия – те условия, при выполнении которых допустимая точка является по крайней мере точкой локального минимума (максимума).

Любая точка R^n , для которой выполняются необходимые условия локального экстремума в задаче (1), называется критической точкой в этой задаче.

§1. Задачи безусловной гладкой оптимизации

Задача безусловной оптимизации (или, безусловная экстремальная задача) – это задача, в которой отсутствуют ограничения. Последнее означает, что речь идет о задаче исследования на экстремум (минимум, максимум) функции на всем конечно-мерном евклидовом пространстве R^n :

$$f(x) \xrightarrow{x \in R^n} \text{extr} \quad (1.1)$$

$$f(x) \xrightarrow{x \in R^n} \inf, \quad (1.2)$$

$$f(x) \xrightarrow{x \in R^n} \sup. \quad (1.3)$$

Отметим, что задача (1.3) эквивалентна задаче минимизации функции $-f(x)$ на R^n . Поэтому для задач (1.1) и (1.2) приведем известные необходимые и достаточные условия оптимальности в точках дифференцируемости функции $f(x)$.

Теорема 1.1 (о необходимом условии локального экстремума).

Пусть $\bar{x} \in R^n$ – фиксированная точка, $\exists f'(\bar{x})$. Если $\bar{x}$ – точка локального экстремума в задаче (1.1), то $f'(\bar{x}) = 0$.

Теорема 1.2 (о необходимых условиях локального минимума).

Пусть $\bar{x} \in R^n$ – фиксированная точка и $\exists f''(\bar{x})$. Если $\bar{x}$ – точка локального минимума в задаче (1.2), то

$$1) \quad f'(\bar{x}) = 0;$$

$$2) \quad f''(\bar{x}) \geq 0.$$

Условие 2) означает, что квадратичная форма $(x, f''(\bar{x})x)$, определяемая скалярным произведением в R^n , неотрицательна для $\forall x \in R^n$.

Отметим, что условия 1) и 2) не обеспечивают, что точка $\bar{x}$ является точкой локального минимума в задаче (1.2). Об этом свидетельствует следующий простой пример.

$f(x) = (x^2 - 1)^3$, $x \in R \equiv R^1$. Имеем: $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0, \pm 1$, при этом $f''(\pm 1) = 0$, $f''(0) = 6 > 0$.

Таким образом, условия 1) и 2) теоремы 1.2 для всех трех точек выполнены. Однако, точки ± 1 не являются точками локального минимума.

Этот пример можно легко распространить на n -мерный случай, если взять функцию $f(x) = (\|x\|^2 - 1)^3$, где $\|\cdot\|$ – обычная евклидова норма.

Теорема 1.3 (о достаточных условиях локального минимума).

Пусть $\bar{x} \in R^n, \exists f''(\bar{x})$. Если на $\bar{x}$ выполнены:

$$1) f'(\bar{x}) = 0;$$

$$2) f''(\bar{x}) > 0,$$

то $\bar{x}$ – точка локального минимума в задаче (1.2).

Замечание. Если в теоремах 1.2 и 1.3 условия из п. 2) заменить соответственно на $f''(\bar{x}) \leq 0$ и $f''(\bar{x}) < 0$, то мы получим необходимые и достаточные условия локального максимума в задаче (1.3).

Теоремы 1.1–1.3, с учетом замечания, позволяют проводить полное исследование гладких задач безусловной оптимизации. Приведем примеры решения таких задач безусловной оптимизации.

Пример 1.1.

$$f(x) = (x_1 - x_2 + 2x_3)^2 + x_1(x_2 - x_3) + 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 \xrightarrow{x \in R^3} \text{extr.}$$

По теореме 1 для нахождения критических точек выпишем систему:

$$\begin{cases} f'_{x_1} = 0, \\ f'_{x_2} = 0, \\ f'_{x_3} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2(x_1 - x_2 + 2x_3) + x_2 - x_3 + 2 = 0, \\ -2(x_1 - x_2 + 2x_3) + x_1 - 3 = 0, \\ 4(x_1 - x_2 + 2x_3) - x_1 + 3 = 0. \end{cases}$$

Умножив второе уравнение на 2 и сложив с третьим, получим $x_1 = 3$. Тогда придем к системе двух уравнений для определения двух оставшихся координат:

$$\begin{cases} -x_2 + 3x_3 + 8 = 0, \\ x_2 - 2x_3 - 3 = 0. \end{cases}$$

Решив систему, получим единственную критическую точку $\bar{x} = (3, -7, -5)$.

Выясним, на что подозревать полученную точку. Для этого построим матрицу Гессе (матрицу из вторых частных производных):

$$f''(x) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & -4 \\ 3 & -4 & 8 \end{pmatrix}$$

Квадратичная форма, построенная по этой матрице, имеет вид:

$$\varphi(x) = 2(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2 + 3x_1x_3 - 4x_2x_3 + 4x_3^2), \quad x \in R^3.$$

Так как при $x = (1, 4, 2)$ значение $\varphi(x) = 18 > 0$, а при $x = (-1, 4, 2) - \varphi(x) = -2 < 0$, то необходимое условие второго порядка (условие 2) теоремы 1.2) не выполняется (квадратичная форма на R^3 не знакопостоянна!).

Это означает, что точка $\bar{x} = (3, -7, -5)$, с учетом замечания, не является ни точкой минимума, ни точкой максимума в данной задаче безусловной оптимизации. Поскольку мы имеем единственную критическую точку, то целевая функция задачи неограничена как снизу, так и сверху в пространстве R^3 .

Пример 1.2.

$$f(x) = 2x_1 - x_1^2 + x_1x_2 - 2x_2^2 \xrightarrow{x \in R^2} \text{extr}$$

Для нахождения критических точек выпишем систему:

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + 2 = 0, \\ x_1 - 4x_2 = 0. \end{cases}$$

Решив систему, получим единственную критическую точку $\bar{x} = (8/3, 2/3)$.

Выясним, на что подозревать полученную точку. Для этого построим матрицу Гессе:

$$f''(x) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$$

По критерию Сильвестра эта матрица отрицательно определена (главный минор первого порядка отрицателен, а второго – положителен!). Поэтому, по замечанию к теоремам 1.2 и 1.3, точка $\bar{x} = (8/3, 2/3)$ является точкой локального максимума в данной задаче безусловной оптимизации. Поскольку $f(x)$ на всем пространстве R^2 вогнутая функция, то полученная точка одновременно представляет собой точку глобального максимума. При этом, в силу единственности критической точки, задача минимизации не имеет решения.

Пример 1.3.

$$f(x) = x_1^3 - 2x_1^2x_2 + 3x_1x_2 + x_2^2 + 2x_2 \xrightarrow{x \in R^2} \text{extr}.$$

Для нахождения критических точек выпишем систему:

$$\begin{cases} 3x_1^2 - 4x_1x_2 + 3x_2 = 0, \\ -2x_1^2 + 3x_1 + 2x_2 + 2 = 0. \end{cases}$$

Умножив первое уравнение на 2, второе – на 3, а затем их сложив, получим связь между координатами точки (заметим, что $x_1 \neq 3/2$):

$$x_2 = \frac{9x_1 + 6}{8x_1 - 12}.$$

После подстановки значения x_2 во второе уравнение системы получим нелинейное уравнение для определения первой координаты точки:

$$8x_1^3 - 24x_1^2 + x_1 + 6 = 0.$$

Корнями уравнения являются значения:

$$x_1^{(1)} \approx 0.525; \quad x_1^{(2)} \approx -0.448; \quad x_1^{(3)} \approx 2.865.$$

Этим значениям соответствуют

$$x_2^{(1)} \approx -1.375; x_2^{(2)} \approx -0.126; x_2^{(3)} \approx 2.911.$$

Итак, имеем три критических точек

$$\bar{x}^{(1)} \approx (0.525, -1.375), \bar{x}^{(2)} \approx (-0.448, -0.126), \bar{x}^{(3)} \approx (2.865, 2.911).$$

Выясним, являются ли полученные точки точками локального экстремума. Для этого построим для каждой точки матрицу Гессе:

1) Для точки $\bar{x}^{(1)} \approx (0.525, -1.375)$:

$$f''(\bar{x}^{(1)}) = \begin{pmatrix} 8.65 & 0.9 \\ 0.9 & 2 \end{pmatrix}$$

По критерию Сильвестра эта матрица положительно определена. Поэтому точка $\bar{x}^{(1)}$ является точкой локального минимума в данной задаче безусловной оптимизации.

2) Для точки $\bar{x}^{(2)} \approx (-0.448, -0.126)$:

$$f''(\bar{x}^{(2)}) = \begin{pmatrix} -2.184 & 4.792 \\ 4.792 & 2 \end{pmatrix}$$

Квадратичная форма, построенная по этой матрице, не является знакопостоянной на всем пространстве R^2 . Поэтому точка $\bar{x}^{(2)}$ не является точкой локального экстремума.

3) Для точки $\bar{x}^{(3)} \approx (2.865, 2.911)$:

$$f''(\bar{x}^{(3)}) = \begin{pmatrix} 5.546 & -8.46 \\ -8.46 & 2 \end{pmatrix}$$

Квадратичная форма, построенная по этой матрице, не является знакопостоянной и, следовательно, точка $\bar{x}^{(3)}$ также не является точкой локального экстремума.

Остается выяснить точку $\bar{x}^{(1)} \approx (0.525, -1.375)$ на точку глобального минимума. Для этого исследуем поведение функции $f(x)$ на бесконечности.

Рассмотрим

$$\lim_{x_1=x_2 \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x_1 \rightarrow -\infty} x_1^3 \left(-1 + \frac{4}{x_1} + \frac{2}{x_1^2} \right) = -\infty.$$

Это означает, что $\bar{x}^{(1)} \approx (0.525, -1.375)$ не является точкой глобального минимума в исследованной задаче безусловной оптимизации.

§2. Задачи выпуклого программирования

Задачей выпуклого программирования (кратко: ЗВП) называется задача минимизации выпуклой функции на выпуклом множестве. С учетом эквивалентности задачи максимизации соответствующей задаче минимизации, задачей выпуклого программирования будет также задача максимизации вогнутой функции на выпуклом множестве. Поскольку линейная функция одновременно выпукла и вогнута, то задача

исследования на экстремум линейной функции на выпуклом множестве всегда представляет собой задачу выпуклого программирования.

Определение 2.1. *Выпуклым множеством называется множество, содержащее вместе со своими любыми двумя точками и соединяющий их отрезок.*

Пусть $\Omega \subset R^n$. Множество Ω выпукло, если $\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \in \Omega, \forall x_1, x_2 \in \Omega, \forall \lambda \in (0, 1)$.

Заметим, что в случае односвязного множества при доказательстве выпуклости достаточно взять $\lambda = 1/2$.

Следующие свойства выпуклых множеств помогают на практике исследовать множества на выпуклость.

- 1) Если множество Ω выпукло, то и его внутренность $\overset{\circ}{\Omega}$ выпукло.
- 2) Если Ω выпукло, то и замыкание $\bar{\Omega}$ выпукло.
- 3) Если $\Omega_1, \Omega_2 \subset R^n$ – выпуклые множества, то их пересечение $\Omega_1 \cap \Omega_2$ также выпукло.
- 4) Если $\Omega_1, \Omega_2 \subset R^n$ – выпуклые, то их разность

$$\Omega = \Omega_1 - \Omega_2 \equiv \{x \in R^n \mid x = x_1 - x_2, x_1 \in \Omega_1, x_2 \in \Omega_2\}$$

также является выпуклым множеством.

Определение 2.2. *Функцию $f(x)$, определенную на выпуклом множестве $\Omega \subset R^n$, назовем выпуклой, если она удовлетворяет неравенству Йенсена:*

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2), \forall x_1, x_2 \in \Omega, \forall \lambda \in (0, 1).$$

Если в неравенстве Йенсена для любых двух различных точек имеет место строгое неравенство, то функцию $f(x)$ будем называть строго выпуклой на Ω .

Следующие свойства помогают исследовать функции на выпуклость (при этом множество Ω предполагается выпуклым). При этом свойство 4) полезно при исследовании на выпуклость множеств, так как имеются простые критерии выпуклости дифференцируемых функций.

- 1) f_1, f_2 – выпуклые на $\Omega \Rightarrow \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2$ – выпуклая, $\forall \alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0$.
- 2) $f_1 \geq 0$ – выпуклая на $\Omega \Rightarrow f_1^2$ – выпуклая функция на Ω .
- 3) f_1, f_2 – выпуклые функции на $\Omega, f(x) = \max(f_1(x), f_2(x)), x \in \Omega \Rightarrow f$ – выпуклая на Ω .

Частный случай. f_1 – выпуклая на $\Omega, f(x) = \max(f_1(x), 0) \Rightarrow f$ – выпуклая на Ω функция.

- 4) $f(x)$ – выпуклая на Ω функция, $\alpha \in R^1$ – произвольно фиксированное,
 $\Omega_\alpha \equiv \{x \in \Omega \mid f(x) \leq \alpha\} \Rightarrow \Omega_\alpha$ – выпуклое множество.
- 5) f – выпуклая на Ω функция $\Rightarrow f$ – непрерывная в $\overset{\circ}{\Omega}$.
- 6) $\Omega \subset R^n$ – выпуклое множество, $f : \Omega \rightarrow R^1, \bar{x} \in \Omega$, для фиксированных $\bar{d} \in R^n$ и $\lambda > 0 : \bar{x} + \lambda \bar{d} \in \Omega \Rightarrow \bar{x} + \alpha \bar{d} \in \Omega, \forall \alpha \in (0; \lambda)$.

Определение 2.3.

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0+} \frac{f(\bar{x} + \alpha \bar{d}) - f(\bar{x})}{\alpha} = f'(\bar{x}; \bar{d})$$

будем называть производной функции $f(x)$ в точке $\bar{x}$ по направлению $\bar{d}$.

Если $f : \Omega \rightarrow R^1$, $\bar{x} \in \overset{\circ}{\Omega}$, то $\exists f'(\bar{x}, \bar{d}) \forall \bar{d} \in R^n$, т.е. всякая выпуклая функция во внутренней точке имеет производную по любому направлению.

Пусть $\exists f'(\bar{x})$, $\bar{x} \in \overset{\circ}{\Omega}$, $\bar{d} \in R^n$ – произвольный вектор $\Rightarrow f'(\bar{x}; \bar{d}) = (f'(\bar{x}), \bar{d})$.

7. Пусть f_2 – выпуклая на $\Omega \subset R^n$, $f_1 : R^1 \rightarrow R^1$ – выпуклая и монотонная. Тогда функция $f = f_1 \circ f_2 \equiv f_1(f_2)$ является выпуклой на Ω .

8. Любая линейная функция на выпуклом множестве Ω выпуклая.

2.1. Общая ЗВП

Пусть $\Omega \subset R^n$ – выпуклое множество, $f(x)$ – заданная выпуклая функция на Ω . Тогда экстремальная задача

$$f(x) \xrightarrow{x \in \Omega} \inf \quad (2.1)$$

представляет собой общую задачу выпуклого программирования в конечномерном пространстве.

Обращаем внимание на следующие свойства точек минимума в задаче (2.1).

Теорема 2.1. В ЗВП (2.1) любая точка локального минимума является одновременно и точкой глобального минимума.

Теорема 2.2. Пусть в ЗВП (2.1) $f(x)$ строго выпуклая на Ω . Тогда точка локального минимума является единственной точкой глобального минимума.

Заметим, что в общей ЗВП может и не быть точек глобального минимума. Теорема 2.2 указывает, что ЗВП со строго выпуклой функцией имеет не более одного решения.

Определение 2.4. Пусть Ω – выпуклое на R^n множество, $f : \Omega \rightarrow R^1$. Функцию $f(x)$ назовем сильно выпуклой с константой сильной выпуклости $l > 0$, если

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2) - l \frac{\lambda(1 - \lambda)}{2} \|x_1 - x_2\|^2, \forall x_1, x_2 \in \Omega, \forall \lambda \in (0, 1).$$

Теорема 2.3. Пусть в ЗВП (2.1) $f(x)$ – сильно выпуклая функция с константой сильной выпуклости $l > 0$. Тогда существует единственная точка $\bar{x} \in \Omega$, являющаяся точкой глобального минимума.

Для ЗВП имеются эффективные критерии оптимальности в терминах градиента и субградиента функции. Прежде чем привести эти критерии, приведем сначала понятие субградиента функции.

Определение 2.5. Пусть заданы $\Omega \subset R^n$, $f : \Omega \rightarrow R^1$, $\bar{x} \in \Omega$ – фиксированная точка. Вектор $\bar{\xi} \in R^n$ будем называть **субградиентом** f в точке $\bar{x}$, если

$$f(x) \geq f(\bar{x}) + (\bar{\xi}, x - \bar{x}), \forall x \in \Omega. \quad (2.2)$$

Заметим, что выпуклая функция на выпуклом множестве в каждой внутренней точке имеет субградиент. Если же выпуклая функция дифференцируема в точке $\bar{x} \in \overset{\circ}{\Omega}$, то производная в точке $\bar{x}$ представляет собой единственный субградиент этой функции в данной точке. Это означает, что понятие субградиента обобщает соответствующее понятие производной (градиента).

Теорема 2.4 (Общий критерий оптимальности в терминах субградиента.) Пусть Ω – выпуклое на R^n множество, $f : R^n \rightarrow R^1$ – выпуклая функция, $\bar{x} \in \Omega$ – фиксированная точка.

Для того, чтобы $\bar{x}$ была точкой глобального минимума в задаче (2.1), необходимо и достаточно, чтобы $f(x)$ имела в точке $\bar{x}$ субградиент $\bar{\xi}$, обладающий свойством:

$$(\bar{\xi}, x - \bar{x}) \geq 0; \forall x \in \Omega.$$

Следствие. В условиях теоремы 2.4 $\bar{x} \in \overset{\circ}{\Omega}$ есть точка глобального минимума в задаче (2.1) тогда и только тогда, когда функция $f(x)$ имеет в точке $\bar{x}$ субградиент $\bar{\xi}$, равный нулю.

Теорема 2.5 (критерий оптимальности в случае открытого множества.) Пусть в ЗВП (2.1) множество Ω – открытое ($\Omega = \overset{\circ}{\Omega}$), $\bar{x} \in \Omega$.

Тогда $\bar{x}$ – точка глобального минимума в задаче (2.1) тогда и только тогда, когда $f(x)$ в точке $\bar{x}$ имеет субградиент $\bar{\xi} = 0$.

Теорема 2.6 (общий критерий оптимальности в терминах градиента.) Пусть Ω – выпуклое множество, $f : R^n \times R^1$ – выпуклая, $\bar{x} \in \Omega, \exists f'(\bar{x})$.

Тогда $\bar{x}$ – точка глобального минимума в задаче (2.1) тогда и только тогда, когда $(f'(\bar{x}), x - \bar{x}) \geq 0, \forall x \in \Omega$.

Следствие. В условиях теоремы 2.6 $\bar{x} \in \overset{\circ}{\Omega}$ есть точка глобального минимума в задаче (2.1) тогда и только тогда, когда $f'(\bar{x}) = 0$.

Теорема 2.7. Пусть в ЗВП (2.1) $\Omega = \overset{\circ}{\Omega}, \bar{x} \in \Omega, \exists f'(\bar{x})$.

Тогда $\bar{x}$ – точка глобального минимума в (2.1) тогда и только тогда, когда $f'(\bar{x}) = 0$.

Замечание. Теоремы 2.5 и 2.7 представляют собой усиление следствий к теоремам 2.4 и 2.6 соответственно на случай открытого множества.

2.2. О безусловной оптимизации

Рассмотрим экстремальную задачу

$$f(x) \xrightarrow{x \in R^n} \inf, n \in N. \quad (2.3)$$

Так как все пространство является выпуклым множеством, в случае выпуклой функции $f(x)$ задача (2.3) представляет собой частный случай задачи выпуклого программирования.

С другой стороны, пространство R^n – открытое множество. Поэтому критерии оптимальности из теорем 2.5 и 2.7 для задачи (2.3) остаются в силе.

2.3. Примеры решения задач выпуклого программирования

Рассмотрим несколько примеров применения критериев оптимальности при решении задач выпуклого программирования.

Пример 2.1.

$$f(x) = x_1^4 - 2x_1^2x_2^2 + x_2^4 - 4x_2 \xrightarrow{x \in R^2} \inf.$$

Матрица Гессе в данной задаче безусловной оптимизации

$$f''(x) = \begin{pmatrix} 12x_1^2 & -8x_1x_2 \\ -8x_1x_2 & 12x_2^2 \end{pmatrix}$$

является неотрицательной на R^2 . Следовательно, имеем задачу выпуклого программирования, при этом функция $f(x)$ является гладкой. Поэтому по теореме 7 точкой глобального минимума в этой задаче может быть лишь критическая точка.

Имеем

$$\begin{cases} f'_{x_1} = 4x_1^3 - 4x_1x_2^2 = 0, \\ f'_{x_2} = -4x_1^2x_2 + 4x_2^3 - 4 = 0. \end{cases}$$

Таким образом, единственной критической точкой является точка $\bar{x} = (0, 1)$, представляющая точку глобального минимума в данной задаче.

Пример 2.2.

$$f(x) = x_1^4 - 2x_1^2x_2^2 + x_2^4 - 4x_2 \xrightarrow{x_1 \geq 2x_2} \inf.$$

Функция $f(x)$, как показано в примере 2.1, является выпуклой на R^2 . Множество $\Omega = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \geq 2x_2\}$ является выпуклым, так как задается линейным ограничением. Следовательно, имеем задачу выпуклого программирования. Точка глобального минимума $\bar{x}$ в данной задаче может быть внутренней или граничной точкой области Ω .

Если $\bar{x} \in \overset{\circ}{\Omega}$, то по следствию из теоремы 2.6 $f'(\bar{x}) = 0$. Тогда из предыдущего примера следует, что $\bar{x} = (0, 1) \notin \Omega$.

Пусть $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2) \in \partial\Omega$, т.е. $\bar{x}_1 = 2\bar{x}_2$. Очевидно,

$$f'(\bar{x}) = (3\bar{x}_1^3; -\frac{3}{2}\bar{x}_1^3 - 4)$$

и, следовательно, по теореме 2.6 имеем:

$$(f'(\bar{x}), x - \bar{x}) = 3\bar{x}_1^3(x_1 - \bar{x}_1) - \left(\frac{3}{2}\bar{x}_1^3 + 4\right) \cdot \left(x_2 - \frac{\bar{x}_1}{2}\right) \geq 0, \quad \forall (x_1, x_2) \in \Omega. \quad (2.4)$$

Поэтому неравенство (2.4) может быть выполнено лишь при условии, что

$$\frac{3}{2}\bar{x}_1^3 + 4 = 2 \cdot 3\bar{x}_1^3,$$

т.е. при $\bar{x}_1 = 2/9^{1/3}$.

Получили точку $\bar{x} = (2/9^{1/3}, 12/9^{1/3})$. Имеем для этой точки

$$(f'(\bar{x}), x - \bar{x}) = \frac{8}{3}(x_1 - 2x_2) \geq 0, \forall x \in \Omega.$$

Следовательно, $\bar{x} = (2/9^{1/3}, 12/9^{1/3})$ – точка глобального минимума.

Пример 2.3.

$$f(x) = \max(e^x, 1 - x) + 2x^2 - (e + 4)x \xrightarrow{x \in R^1} \inf.$$

Функция $f(x)$ является строго выпуклой и поэтому по теореме 2.2 данная задача выпуклого программирования имеет не более одной точки глобального минимума. Функция $f(x)$ на R^1 не является гладкой, она имеет одну точку недифференцируемости $\bar{x} = 0$.

Выясним сначала, могут ли точки дифференцируемости функции $f(x)$ быть точками глобального минимума. При этом пользуемся критерием оптимальности из теоремы 2.7.

При $x < 0$ имеем

$$f(x) = 2x^2 - (e + 5)x + 1$$

$$\text{и } f'(x) = 4x - (e + 5) < -7.$$

Если же $x > 0$, то

$$f(x) = e^x + 2x^2 - (e + 4)x$$

$$\text{и, следовательно, } f'(x) = e^x + 4x - (e + 4) = 0 \text{ при } x = 1.$$

Таким образом, точка дифференцируемости $x = 1$ является единственной точкой глобального минимума. Поэтому точку недифференцируемости $x = 0$ исследовать смысла нет.

Пример 2.4.

$$f(x) = \max(e^x, 1 - x) \xrightarrow{x \in R^1} \inf.$$

В этой задаче точки дифференцируемости функции $f(x)$ не могут быть точками минимума, так как

$$f'(x) = -1 \text{ при } x < 0; \quad f'(x) = e^x > 1 \text{ при } x > 0.$$

Остается исследовать единственную точку недифференцируемости $\bar{x} = 0$ функции $f(x)$ на точку минимума. Для этого по теореме 2.5 необходимо выяснить, имеет ли $f(x)$ в точке $\bar{x}$ нулевой субградиент. Поэтому нужно научиться находить субградиенты функции.

Пусть $\bar{\xi}$ есть произвольный субградиент функции $f(x)$ в точке $\bar{x}$. Тогда по определению субградиента в точке $\bar{x} = 0$ имеем:

$$\max(e^x, 1 - x) \geq 1 + \bar{\xi} \cdot x, \quad \forall x \in R^1. \quad (2.5)$$

Заметим, что в точке $\bar{x} = 0$ это неравенство превращается в равенство. Поэтому (2.5) должно выполняться в точках $x \neq 0$.

При $x < 0$ из неравенства (2.5) следует

$$(\bar{\xi} + 1)x \leq 0,$$

что влечет $\bar{\xi} \geq -1$. Если же $x > 0$, то (2.5) переходит в неравенство

$$e^x - 1 \geq \bar{\xi} \cdot x, \quad x > 0.$$

Отсюда, в силу независимости субградиента от точек $x > 0$, находим:

$$\bar{\xi} \leq \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

Таким образом, $\bar{\xi} \in [-1, 1]$ является субградиентом функции $f(x)$ в точке $\bar{x} = 0$, что, в свою очередь, означает, что $\bar{x}$ есть единственная точка глобального минимума.

Проанализируем теперь, как получено множество субградиентов $[-1, 1]$ функции $f(x)$ в точке недифференцируемости $\bar{x} = 0$. Субградиенты $\bar{\xi}^{(1)} = -1$ и $\bar{\xi}^{(2)} = 1$ представляют собой "крайние" субградиенты. При этом все множество субградиентов есть отрезок, соединяющий "крайние" субградиенты. Они могут быть получены просто при рассмотрении функции $f(x)$ в областях $\Omega_1 = \{x \mid x < 0\}$ и $\Omega_2 = \{x \mid x > 0\}$ следующим образом.

В области Ω_1 функция $f(x) = 1 - x$ и $\bar{\xi}^{(1)} = \lim_{x \rightarrow \bar{x}} f'(x) \equiv f'(\bar{x} - 0) = -1$. В области Ω_2 функция $f(x) = e^x$ и $\bar{\xi}^{(2)} = \lim_{x \rightarrow \bar{x}} f'(x) \equiv f'(\bar{x} + 0) = 1$.

Эту методику нахождения "крайних" субградиентов применим в следующих примерах.

Пример 2.5.

$$f(x) = |2x_1 - x_2| + x_1^2 - x_1 + 3x_2^2 \xrightarrow{x \in R^2} \inf.$$

В этой задаче выпуклого программирования точки недифференцируемости функции $f(x)$ лежат на прямой $2x_1 - x_2 = 0$. Эта прямая позволяет все множество точек дифференцируемости функции $f(x)$ разделить на две части:

$$\Omega_1 = \{(x_1, x_2) \mid 2x_1 - x_2 < 0\} \text{ и } \Omega_2 = \{(x_1, x_2) \mid 2x_1 - x_2 > 0\}.$$

На Ω_1 имеем:

$$f(x) = x_1^2 + 3x_2^2 - 3x_1 + x_2, \quad f'(x) = (2x_1 - 3; 6x_2 + 1).$$

Условие $f'(x) = 0$ дает точку $\bar{x} = (3/2, -1/6) \notin \Omega_1$. Последнее означает, что множество Ω_1 не содержит точек минимума.

На Ω_2 имеем:

$$f(x) = x_1^2 + 3x_2^2 + x_1 - x_2, \quad f'(x) = (2x_1 + 1; 6x_2 - 1).$$

Условие $f'(x) = 0$ дает точку $\bar{x} = (-1/2, 1/6) \notin \Omega_2$ и, следовательно, множество Ω_2 также не содержит точек минимума.

Остается исследовать точки недифференцируемости. Пусть $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ – произвольно фиксированная точка недифференцируемости: $2\bar{x}_1 - \bar{x}_2 = 0$. Найдем "крайние" субградиенты функции $f(x)$ в данной точке:

$$\bar{\xi}^{(1)} = \lim_{x \rightarrow \bar{x}-0} f'(x) = (2\bar{x}_1 - 3; 6\bar{x}_2 + 1) = (2\bar{x}_1 - 3; 12\bar{x}_1 + 1),$$

$$\bar{\xi}^{(2)} = \lim_{x \rightarrow \bar{x}+0} f'(x) = (2\bar{x}_1 + 1; 6\bar{x}_2 - 1) = (2\bar{x}_1 + 1; 12\bar{x}_1 - 1).$$

Тогда любой субградиент $\bar{\xi}$ задается формулой:

$$\bar{\xi} = \lambda \bar{\xi}^{(1)} + (1 - \lambda) \bar{\xi}^{(2)} = (2\bar{x}_1 - 4\lambda + 1; 12\bar{x}_1 + 2\lambda - 1), \lambda \in [0, 1].$$

Если $\bar{x}$ – точка минимума, то по теореме 2.5 должно выполняться условие $\bar{\xi} = 0$ при некотором $\lambda \in [0, 1]$.

Таким образом, для нахождения точки минимума имеем систему:

$$\begin{cases} 2\bar{x}_1 - 4\lambda + 1 = 0, \\ 12\bar{x}_1 + 2\lambda - 1 = 0, \\ 2\bar{x}_1 - \bar{x}_2 = 0. \end{cases} \quad \lambda \in [0, 1]$$

В результате получим точку $\bar{x} = (1/26, 1/13)$ – точку глобального минимума в данной задаче выпуклого программирования.

Пример 2.6.

$$f(x) = |2x_1 - x_2| + x_1^2 - x_1 + 3x_2^2 \xrightarrow{2x_1 - x_2 \leq -1} \inf.$$

Как было отмечено выше, точкой минимума может быть как внутренняя точка, так и граничная точка.

Пусть $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ – точка минимума. Если $\bar{x} \in \overset{\circ}{\Omega}$, то она должна быть и точкой минимума в соответствующей безусловной задаче, рассмотренной в примере 2.5. Но полученная в предыдущем примере точка не является допустимой точкой. Последнее означает, что точкой минимума может быть лишь граничная точка, т.е. координаты точки $\bar{x}$ удовлетворяют условию

$$2\bar{x}_1 - \bar{x}_2 = -1.$$

Функция $f(x)$ в точке $\bar{x}$ дифференцируема, причем

$$f'(\bar{x}) = (2\bar{x}_1 - 3; 6\bar{x}_2 + 1) = (2\bar{x}_1 - 3; 12\bar{x}_1 + 7).$$

По критерию оптимальности (теорема 2.6) в точке $\bar{x}$ минимума выполняется неравенство

$$(f'(\bar{x}), x - \bar{x}) = (2\bar{x}_1 - 3)(x_1 - \bar{x}_1) + (12\bar{x}_1 + 7)(x_2 - \bar{x}_2) \geq 0,$$

справедливое для всех точек $x = (x_1, x_2)$ из области Ω : $2x_1 - x_2 \leq -1$.

Очевидно, это возможно лишь при условии выполнения соотношения:

$$(2\bar{x}_1 - 3) = -2(12\bar{x}_1 + 7),$$

т.е. при $\bar{x}_1 = -11/26$.

Тогда получим точку $\bar{x} = (-11/26, 2/13)$, при этом

$$(f'(\bar{x}), x - \bar{x}) = -\frac{50}{13} \cdot (x_1 + 11/26) + \frac{25}{13} \cdot (x_2 - 2/13) = -\frac{25}{13} \cdot (2x_1 - x_2 + 1) \geq 0, \forall x \in \Omega.$$

Таким образом, точка $\bar{x} \in \Omega$ является точкой глобального минимума в данной задаче выпуклого программирования.

Замечание. Точку минимума, принадлежащую границе области Ω , можно находить, рассматривая соответствующую задачу выпуклого программирования на границе области, т.е. переходя к задаче выпуклого программирования меньшей размерности.

В случае примера 2.6 будем иметь экстремальную задачу (с учетом $x_2 = 2x_1 + 1$):

$$2.6'. \quad g(x_1) = x_1^2 - x_1 + 3 \cdot (2x_1 + 1)^2 + 1 \xrightarrow{x_1 \in R^1} \inf.$$

Тогда точка глобального минимума в одномерной задаче определяется из условия:

$$g'(x_1) = 2x_1 + 12(2x_1 + 1) - 1 = 0.$$

Таким образом, находим первую координату $\bar{x}_1 = -11/26$ точки глобального минимума в задаче 2.6. Вторую координату находим из условия принадлежности точки границе области: $\bar{x}_2 = 2\bar{x}_1 + 1 = 2/13$.

§3. Задачи математического программирования

3.1. Элементы теории

Пусть X – фиксированное множество в R^n , $f(x), g_i(x), i = \overline{1, m}, h_j(x), j = \overline{1, l}$, – заданные функции на X .

Задачей математического программирования называется следующая экстремальная задача:

$$f(x) \xrightarrow{x \in \Omega} \inf, \quad (3.1)$$

где

$$\Omega = \{x \in X \mid g_i(x) \leq 0, i = \overline{1, m}, h_j(x) = 0, j = \overline{1, l}\}. \quad (3.2)$$

Задачу (3.1), (3.2) рассматриваем лишь на минимум, так как задача максимизации $f(x)$ на Ω эквивалентна задаче минимизации функции $-f(x)$ на том же множестве Ω .

Теорема 3.1 (теорема Джона). Пусть X – открытое множество, $\bar{x}$ – точка локального минимума в задаче (3.1), (3.2), $I(\bar{x}) = \{i \mid g_i(\bar{x}) = 0\}$. Пусть в точке $\bar{x}$ выполнены предположения:

- 1) $f, g_i, i \in I(\bar{x})$, – дифференцируемы;
- 2) $g_i, i \notin I(\bar{x})$, – непрерывны;
- 3) $h_j, j = \overline{1, l}$, – непрерывно-дифференцируемы.

Тогда существуют вещественные числа $u_0 \geq 0, u_i \geq 0, i \in I(\bar{x}), v_j, j = \overline{1, l}$, одновременно не равные нулю, такие, что

$$u_0 f'(\bar{x}) + \sum_{i \in I(\bar{x})} u_i g'_i(\bar{x}) + \sum_{j=1}^l v_j h'_j(\bar{x}) = 0. \quad (3.3)$$

Следствие. Пусть, в условиях теоремы 3.1, функции $g_i(x), i \notin I(\bar{x})$, также дифференцируемы в точке $\bar{x}$.

Тогда найдутся $u_i, i = \overline{0, m}, v_j, j = \overline{1, l}$, одновременно не равны нулю, такие, что в точке $\bar{x}$ необходимо выполняются:

- 1⁰) (условие стационарности):

$$u_0 f'(\bar{x}) + \sum_{i=1}^m u_i g'_i(\bar{x}) + \sum_{j=1}^l v_j h'_j(\bar{x}) = 0;$$

- 2⁰) (условия дополняющей нежесткости):

$$u_i g_i(\bar{x}) = 0, \forall i = \overline{1, m};$$

- 3⁰) (условия на множители): $u_0 \geq 0$ (inf!), $u_i \geq 0, i = \overline{1, m}$.

Следствие к теореме Джона позволяет сформулировать правило для решения гладких задач математического программирования. Это правило известно в литературе как **правило множителей Лагранжа**. При этом все ограничения должны быть записаны в стандартном виде (см. (3.2)), причем множество X – открытое (в простейшем случае $X = R^n$).

Это правило состоит в следующем. Выписываем функцию Лагранжа

$$\mathcal{L}(x) \equiv \mathcal{L}(x, \bar{u}, \bar{v}) = u_0 f(x) + \sum_{i=1}^m u_i g_i(x) + \sum_{j=1}^l v_j h_j(x)$$

и требуем выполнения условий:

- 1) (условие стационарности по X):

$$\mathcal{L}'(x) = 0 \ (x \in X) \sim u_0 f'(x) + \sum_{i=1}^m u_i g'_i(x) + \sum_{j=1}^l v_j h'_j(x) = 0 \ (x \in X);$$

- 2) (условия дополняющей нежесткости):

$$u_i g_i(x) = 0, \ i = \overline{1, m};$$

3) (условия на множители):

$$u_0 \geq 0(\inf), u_0 \leq 0(\sup), u_i \geq 0, i = \overline{1, m}, \sum_{i=0}^m u_i^2 + \sum_{j=1}^l v_j^2 \neq 0.$$

Условия 1)–3) дают множество всех критических точек в задаче математического программирования (3.1), (3.2). Из этих критических точек оставляем лишь допустимые критические точки, т.е. точки, принадлежащие области Ω .

Следует различать задачи, в которых это правило имеет место лишь при $u_0 = 0$ (так называемые задачи ненормального типа), и задачи с $u_0 \neq 0$ (нормальные задачи). Следующая теорема дает достаточные условия нормальности задачи.

Теорема 3.2 (теорема Куна–Таккера). *Пусть выполнены предположения теоремы 3.1. Пусть, кроме того, система числовых векторов-градиентов $\{g'_i(\bar{x}), i \in I(\bar{x}), h'_j(\bar{x}), j = \overline{1, l}\}$ линейно-независима.*

Тогда найдутся множители $u_i \geq 0, i \in I(\bar{x}), v_j, j = \overline{1, l}$, такие, что в точке $\bar{x}$ необходимо выполнено:

$$f'(\bar{x}) + \sum_{i \in I(\bar{x})} u_i g'_i(\bar{x}) + \sum_{j=1}^l v_j h'_j(\bar{x}) = 0.$$

Следствие. *Пусть, в условиях теоремы 3.2, дополнительно выполнено предположение: $\exists g'_i(\bar{x}), i \notin I(\bar{x})$.*

Тогда найдутся множители $u_i, i = \overline{1, m}, v_j, j = \overline{1, l}$, такие, что в точке $\bar{x}$ выполнены:

$$\begin{aligned} 1^0. & f'(\bar{x}) + \sum_{i=1}^m u_i g'_i(\bar{x}) + \sum_{j=1}^l v_j h'_j(\bar{x}) = 0; \\ 2^0. & u_i g'_i(\bar{x}) = 0, i = \overline{1, m}; \\ 3^0. & u_i \geq 0, i = \overline{1, m}. \end{aligned}$$

Отметим, что для достаточно гладких задач с $u_0 \neq 0$ имеются необходимые и достаточные условия второго порядка, позволяющие провести исследование допустимых критических точек на точки локального минимума (а также максимума) для корректного применения этих условий лучше не выделять множество X .

Пусть $\bar{x}$ – допустимая критическая точка в задаче (3.1), (3.2), которой отвечает набор множителей $u_0 = 1, u_i^*, i = \overline{1, m}, v_j^*, j = \overline{1, l}$.

Составим функцию Лагранжа

$$\mathcal{L}^*(x) \equiv \mathcal{L}(x, \bar{u}^*, \bar{v}^*) = f(x) + \sum_{i=1}^m u_i^* g_i(x) + \sum_{j=1}^l v_j^* h_j(x).$$

Предположим, что функции $f(x), g_i(x), i = \overline{1, m}, h_j(x), j = \overline{1, l}$, дважды непрерывно-дифференцируемы в точке $\bar{x}$.

Построим матрицу Гессе $(\mathcal{L}^*)''(\bar{x})$ и через нее – квадратичную форму:

$$\varphi(x) = (x, (\mathcal{L}^*)''(\bar{x})x).$$

Необходимое условие второго порядка. Если $\bar{x}$ – точка локального минимума, то

$$\varphi(x) \geq 0, \forall x \in K,$$

где $K = \{x \in R^n \mid (f'(\bar{x}), x) \leq 0, (g'_i(\bar{x}), x) \leq 0, i \in I(\bar{x}), (h'_j(\bar{x}), x) = 0, j = \overline{1, l}\}.$

Достаточное условие второго порядка. Пусть существует абсолютная положительная постоянная M , такая что

$$\varphi(x) \geq M \cdot (x, x), \forall x \in K.$$

Тогда допустимая критическая точка $\bar{x}$ является точкой локального минимума в задаче (3.1), (3.2).

Замечание. Если нормальная гладкая задача (3.1), (3.2) является задачей выпуклого программирования, то допустимые критические точки, найденные по правилу Лагранжа, представляют собой точки глобального минимума в этой задаче.

3.2. Примеры решения задач математического программирования

В этом пункте на конкретных примерах покажем применение правила Лагранжа. При этом исследование нами проводится сначала при $u_0 = 0$ (проверка задачи на нормальность), а затем – при $u_0 = 1$ (нормальная задача). Если есть ограничения типа неравенств, то исследование, с учетом условий дополняющей нежесткости, проводится в нескольких параллельных направлениях для упрощения выкладок по нахождению допустимых критических точек.

Пример 3.1. $f(x) = x_1^2 - x_1x_2 + 2x_2^2 - 4x_1 - 2x_2 \xrightarrow{x \in \Omega} \text{extr},$

$$\Omega = \{x = (x_1, x_2) \mid x_1 \geq 0, -2x_1 + x_2^2 \leq 4\}.$$

Сначала перепишем ограничения в стандартном виде: $-x_1 \leq 0, -2x_1 + x_2^2 - 4 \leq 0$. Тогда функция Лагранжа имеет вид:

$$\mathcal{L}(x) = u_0(x_1^2 - x_1x_2 + 2x_2^2 - 4x_1 - 2x_2) - u_1x_1 + u_2(-2x_1 + x_2^2 - 4).$$

По правилу Лагранжа нахождения критических точек имеем:

$$1) \begin{cases} \mathcal{L}'_{x_1}(x) = u_0(2x_1 - x_2 - 4) - u_1 - 2u_2 = 0, \\ \mathcal{L}'_{x_2}(x) = u_0(-x_1 + 4x_2 - 2) + 2u_2x_2 = 0; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} u_1x_1 = 0, \\ u_2(-2x_1 + x_2^2 - 4) = 0; \end{cases}$$

$$3) u_0 \geq 0 (\text{inf}), u_0 \leq 0 (\text{sup}), u_1 \geq 0, u_2 \geq 0, u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 \neq 0.$$

Исследование проводим в двух случаях.

Случай I. $u_0 = 0$. Система из пункта 1) имеет следующий вид:

$$1) \begin{cases} -u_1 - 2u_2 = 0, \\ u_2x_2 = 0. \end{cases}$$

Отсюда, с учетом неотрицательности множителей u_1, u_2 , выводим $u_1 = u_2 = 0$. Из пункта 3) следует, что случай u_0 не дает критических точек.

Случай II. $u_0 \neq 0$. Остановимся здесь лишь на исследовании задачи минимизации. Возьмем $u_0 = 1$, при этом для упрощения выкладок, с учетом условий дополняющей нежесткости 2), будем рассматривать четыре направления:

IIa. $u_1 = 0, u_2 = 0$. Система из п. 1) имеет вид:

$$1) \begin{cases} 2x_1 - x_2 - 4 = 0, \\ -x_1 + 4x_2 - 2 = 0, \end{cases}$$

что дает точку $\bar{x} = (18/7, 8/7)$. Очевидно, она является *допустимой критической точкой* в задаче минимизации.

IIb. $u_1 = 0, -2x_1 + x_2^2 - 4 = 0$. Система из п. 1) имеет вид:

$$1) \begin{cases} (2x_1 - x_2 - 4) - 2u_2 = 0, \\ (-x_1 + 4x_2 - 2) + 2u_2x_2 = 0. \end{cases}$$

Исключив множитель u_2 в этой системе путем умножения первого уравнения на x_2 и последующего сложения его со вторым уравнением, получим уравнение

$$(2x_1 - x_2 - 1)x_2 + (-x_1 + 4x_2 - 2) = 0.$$

Таким образом, для нахождения критических точек имеем систему

$$\begin{cases} (2x_1 - x_2 - 4)x_2 + (-x_1 + 4x_2 - 2) = 0, \\ -2x_1 + x_2^2 - 4 = 0. \end{cases}$$

Складывая уравнения, находим связь между координатами точки:

$$x_1 = \frac{6}{2x_2 - 3}.$$

Заметим, что x_2 не может равняться $3/2$. Подставив во второе уравнение системы, найдем нелинейное уравнение для определения второй координаты:

$$2x_2^3 - 3x_2^2 - 8x_2 = 0.$$

Так как у допустимых точек первая координата положительна, последнее уравнение нужно решать при условии $x_2 > 3/2$. В результате приходим к квадратному уравнению $2x_2^2 - 3x_2 - 8 = 0$, что дает $x_2 = (3 + \sqrt{73})/4$.

Таким образом, получили допустимую точку $x = (12/(\sqrt{73} - 3), (3 + \sqrt{73})/4)$. Выясним, является ли полученная точка критической в задаче минимизации. Для этого необходимо убедиться в неотрицательности множителя u_2 . Из первого уравнения п. 1) находим:

$$2u_2 = 2x_1 - x_2 - 4 = \frac{8}{\sqrt{73} - 3} - 4 < 0.$$

Тем самым, нами показана, что *полученная точка не является критической*.

Ис. $x_1 = 0, u_2 = 0$. Система из п. 1) имеет вид:

$$1) \begin{cases} (x_2 + 4) + u_1 = 0, \\ 4x_2 - 2 = 0, \end{cases}$$

что приводит к условию $u_1 < 0$ и, следовательно, этот случай не дает допустимых критических точек.

$$Ид. \quad x_1 = 0, -2x_1 + x_2^2 - 4 = 0.$$

Имеем допустимые точки $x = (0, 2)$ и $y = (0, -2)$.

Система из п. 1) для точки x относительно множителей Лагранжа имеет вид

$$1) \begin{cases} -6 - u_1 - 2u_2 = 0, \\ 6 + 4u_2 = 0. \end{cases}$$

Видим, что условие неотрицательности множителей не выполняется и, следовательно, точка $x = (0, 2)$ не является критической точкой.

Система из п. 1) для точки y относительно множителей Лагранжа имеет вид

$$1) \begin{cases} -2 - u_1 - 2u_2 = 0, \\ -10 - 4u_2 = 0. \end{cases}$$

Видим, что условие неотрицательности множителей также не выполняется и, следовательно, точка $y = (0, -2)$ не является критической точкой.

Итак, в задаче минимизации мы получили единственную допустимую критическую точку $\bar{x} = (18/7, 8/7)$. Поскольку исходная задача является задачей выпуклого программирования, *полученная точка есть единственная точка глобального минимума*.

Замечание. Аналогично исследуется задача на максимум, взяв $u_0 = -1$.

Пример 3.2. $f(x) = x_1^2 - x_1x_2 + 2x_2^2 - 4x_1 - 2x_2 \xrightarrow{x \in \Omega} \inf,$

$$\Omega = \{x = (x_1, x_2) \mid x_1 \geq 0, -2x_1 + x_2^2 \leq -4\}.$$

Заметим, что пример 3.2 отличается от предыдущего примера областью Ω . При этом решение задачи минимизации из примера 3.1 не является допустимой точкой в задаче 3.2.

Критические точки задаются системой условий (заметим, что множитель $u_0 \neq 0$ и мы взяли $u_0 = 1$):

$$\begin{aligned} 1) \quad & \begin{cases} (2x_1 - x_2 - 4) - u_1 - 2u_2 = 0, \\ (-x_1 + 4x_2 - 2) + 2u_2x_2 = 0; \end{cases} \\ 2) \quad & \begin{cases} u_1x_1 = 0, \\ u_2(-2x_1 + x_2^2 + 4) = 0; \end{cases} \\ 3) \quad & u_1 \geq 0, u_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Условия дополняющей нежесткости из п. 2) задают три направления исследования (первое направление $u_1 = 0, u_2 = 0$, как уже выше отмечено, не дает допустимой критической точки).

b. $u_1 = 0, -2x_1 + x_2^2 + 4 = 0$. Система из п. 1) имеет вид:

$$1) \begin{cases} (2x_1 - x_2 - 4) - 2u_2 = 0, \\ (-x_1 + 4x_2 - 2) + 2u_2x_2 = 0. \end{cases}$$

Из этой системы получим уравнение $(2x_1 - x_2 - 1)x_2 + (-x_1 + 4x_2 - 2) = 0$. Таким образом, для нахождения критических точек имеем систему

$$\begin{cases} (2x_1 - x_2 - 4)x_2 + (-x_1 + 4x_2 - 2) = 0, \\ -2x_1 + x_2^2 + 4 = 0. \end{cases}$$

Складывая уравнения, имеем связь координат:

$$x_1 = -2/(2x_2 - 3).$$

Заметим, что $x_2 \neq 3/2$. Подставив выражение для x_1 во второе уравнение, получим уравнение для определения второй координаты:

$$\varphi(x_2) \equiv 2x_2^3 - 3x_2^2 + 8x_2 - 8 = 0.$$

Так как у допустимых точек первая координата положительна, последнее уравнение нужно решать при условии $x_2 < 3/2$. Имеем:

$$\varphi(1) = -1 < 0, \quad \varphi(3/2) = 4 > 0, \quad \varphi'(x_2) > 0.$$

Поэтому полученное алгебраическое уравнение имеет единственное решение $x_2 \in (1, 3/2)$. Значение второй координаты $x_2 \approx 1.12$.

Таким образом, получили допустимую точку $x \approx (2.63, 1.12)$. Выясним, является ли полученная точка критической в данной задаче. Для этого необходимо убедиться в неотрицательности множителя u_2 . Из первого уравнения п. 1) находим:

$$2u_2 = 2x_1 - x_2 - 4 = 5,26 - 1,12 - 4 > 0.$$

Тем самым нами показана, что *полученная точка является допустимой критической*.

c. $x_1 = 0, u_2 = 0$. Система из п. 1) имеет вид:

$$1) \begin{cases} (x_2 + 4) + u_1 = 0, \\ 4x_2 - 2 = 0, \end{cases}$$

что приводит к условию $u_1 < 0$ и, следовательно, этот случай не дает допустимых критических точек.

$$d. \quad x_1 = 0, -2x_1 + x_2^2 + 4 = 0.$$

Видим, что эти условия представляют несовместную систему.

Итак, в данной задаче нами получена единственная точка $\bar{x} \approx (2.63, 1.12)$, которую и только которую можно подозревать на точку минимума. Поскольку задача представляет задачу выпуклого программирования, полученная точка является точкой глобального минимума.

Пример 3.3. $f(x) = 3x_1x_2 - x_1^2 - x_2^2 + 10x_1 - 7x_2 \xrightarrow{x \in \Omega} \sup,$

$$\Omega = \{x = (x_1, x_2) \mid x_2 \leq -1, x_1^2 + x_2 = -1\}.$$

Отметим, что множество Ω не является выпуклым. Поэтому в этой задаче вывод о допустимой критической точке, который был сделан в предыдущих примерах, здесь уже не может быть сделан без дополнительного исследования.

Функция Лагранжа имеет вид:

$$\mathcal{L}(x) = u_0(3x_1x_2 - x_1^2 - x_2^2 + 10x_1 - 7x_2) + u_1(x_2 + 1) + v_1(x_1^2 + x_2 + 1).$$

По правилу Лагранжа нахождения критических точек имеем:

$$1) \begin{cases} \mathcal{L}'_{x_1}(x) = u_0(-2x_1 + 3x_2 + 10) + 2v_1x_1 = 0, \\ \mathcal{L}'_{x_2}(x) = u_0(3x_1 - 2x_2 - 7) + u_1 + v_1 = 0; \end{cases}$$

$$2) u_1(x_2 + 1) = 0;$$

$$3) u_0 \leq 0, u_1 \geq 0, u_0^2 + u_1^2 + v_1^2 \neq 0.$$

Исследование проводим в двух случаях.

Случай I. $u_0 = 0$. Система из пункта 1) имеет следующий вид:

$$1) \begin{cases} v_1x_1 = 0, \\ u_1 + v_1 = 0. \end{cases}$$

Очевидно, $v_1 \neq 0$. Поэтому $x_1 = 0$. Отсюда, с учетом допустимости точки, находим $x_2 = -1$.

Таким образом, получили допустимую критическую точку $\bar{x} = (0, -1)$.

Случай II. $u_0 \neq 0$. Возьмем $u_0 = -1$, при этом для упрощения выкладок будем рассматривать два направления.

Па. $u_1 = 0$. Система из п. 1) имеет вид:

$$1) \begin{cases} -(-2x_1 + 3x_2 + 10) + 2v_1x_1 = 0, \\ -(3x_1 - 2x_2 - 7) + v_1 = 0. \end{cases}$$

Умножив второе уравнение на $-2x_1$ и сложив полученное уравнение с первым, получим

$$6x_1^2 - 4x_1x_2 - 12x_1 - 3x_2 - 10 = 0.$$

С учетом условия допустимости точки приходим к системе:

$$\begin{cases} 6x_1^2 - 4x_1x_2 - 12x_1 - 3x_2 - 10 = 0, \\ x_1^2 + x_2 = -1. \end{cases}$$

Из второго уравнения следует, что $x_2 = -x_1^2 - 1$. После подстановки выражения для x_2 в первое уравнение, получим алгебраическое уравнение для определения первой координаты допустимой точки:

$$4x_1^3 + 9x_1^2 - 8x_1 - 7 = 0, \quad x_1 \leq -1.$$

Обозначим $\varphi(x_1) \equiv 4x_1^3 + 9x_1^2 - 8x_1 - 7$. Имеем:

$$\varphi(-2) > 0, \quad \varphi(-3) < 0, \quad \varphi'(x_1) > 0.$$

Поэтому данное алгебраическое уравнение имеет единственный вещественный корень, принадлежащий интервалу $(-3, -2)$: $x_1 \approx -2.7462$. Следовательно, имеем допустимую критическую точку $\bar{x} = (-2.7462, -8.5416)$.

IIb. $x_2 + 1 = 0$. В данном случае из условия допустимости точки имеем: $x_1^2 = -1 - x_2 = 0$, т.е. $x_1 = 0$. Получили точку $\bar{x} = (0, -1)$.

Система из п. 1) для этой точки несовместна.

Итак, в данной задаче мы получили две допустимые критические точки: одна из них, $\bar{x} = (0, -1)$, получена при $u_0 = 0$, а другая, $\bar{x} = (-2.7462, -8.5416)$, которой отвечает набор множителей $(u_0, u_1, v_1) = (-1, 0, 1.8446)$.

Очевидно, точка $\bar{x} = (-2.7462, -8.5416)$ является допустимой критической точкой в задаче

$$g(x) = -f(x) = -3x_1x_2 + x_1^2 + x_2^2 - 10x_1 + 7x_2 \xrightarrow{x \in \Omega} \inf,$$

при этом этой точке отвечает набор множителей $(u_0, u_1, v_1) = (1, 0, 1.8446)$.

Для проверки точки $\bar{x} = (-2.7462, -8.5416)$ на точку локального минимума воспользуемся приведенными в теоретической части необходимым и достаточным условиями второго порядка. Для этого запишем функцию Лагранжа с полученными для этой точки конкретными множителями:

$$\mathcal{L}(x) = (-3x_1x_2 + x_1^2 + x_2^2 - 10x_1 + 7x_2) + 1.8446 \cdot (x_1^2 + x_2 + 1).$$

Построим матрицу Гессе в точке $\bar{x}$:

$$(\mathcal{L}^*)''(\bar{x}) = \begin{pmatrix} 7.6892 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

По критерию Сильвестра матрица Гессе (главные миноры первого и второго порядков положительны!) положительна, а следовательно, положительно определена. В свою очередь, это означает, что квадратичная форма, построенная по этой матрице,

$$\varphi(x) = 7.6892x_1^2 - 6x_1x_2 + 2x_2^2, \quad x \in R^2,$$

является положительно определенной. Следовательно, на всей плоскости выполняется достаточное условие второго порядка.

Таким образом, точка $\bar{x} = (-2.7462, -8.5416)$ является точкой локального минимума в промежуточной задаче.

Для проверки этой точки на точку глобального минимума необходимо исследовать поведение функции $g(x)$ на бесконечности. С учетом условий допустимости таковыми точками являются $(\pm\infty, -\infty)$.

Имеем:

$$\lim_{\substack{x_1 \rightarrow \infty, x_2 \rightarrow -\infty \\ (x_1, x_2) \in \Omega}} g(x) = \lim_{x_1 \rightarrow \infty, x_2 \rightarrow -\infty} [x_1(x_1 - 1) + x_2(x_2 + 7) - 3x_1x_2] = +\infty,$$

$$\lim_{\substack{x_1 \rightarrow -\infty, x_2 \rightarrow -\infty \\ (x_1, x_2) \in \Omega}} g(x) = \lim_{x_1 \rightarrow -\infty} x_1^4 \left(1 + \frac{1}{x_1} - \frac{4}{x_1^2} - \frac{7}{x_1^3} - \frac{6}{x_1^4} \right) = +\infty.$$

Полученные предельные соотношения указывают на то, что вне некоторого компакта на плоскости функция $g(x)$ принимает значения большие, чем внутри этого

компакта. Поэтому по теореме Вейерштрасса о достижении непрерывной функцией на компакте минимального значения следует, что точка $\bar{x} = (-2.7462, -8.5416)$ является точкой глобального минимума в промежуточной задаче. Отсюда следует, что точка $\bar{x} = (-2.7462, -8.5416)$ является точкой глобального максимума в исходной задаче.

Заметим, что точку $\bar{x} = (0, -1)$ исследовать таким образом нельзя; ее нужно проверять на точку максимума, используя другие методики, например, исследуя поведение функции в некоторой достаточно малой для точки $\bar{x} = (0, -1)$ окрестности допустимых точек.

Возьмем произвольную допустимую точку $x = (\varepsilon, -1 - \varepsilon^2)$ из окрестности точки $\bar{x}$. Тогда

$$f(x) = -\varepsilon^4 - 3\varepsilon^3 + 4\varepsilon^2 + 7\varepsilon + 6 > 6 \text{ при достаточно малых } \varepsilon > 0.$$

Таким образом, точка $\bar{x} = (0, -1)$ не является точкой локального максимума в исходной задаче.

Замечание. С самого начала можно переходить к задаче минимизации для функции $-f(x)$, при этом найденные точки локального и глобального минимума будут представлять собой точки локального и глобального максимума в исходной задаче максимизации.

Рассмотрим теперь два примера, требующие построения конуса K в условиях второго порядка при проверке допустимой критической точки на точку локального экстремума.

Пример 3.4. $f(x) = 2x_1^2 + x_2^2/2 - x_1(x_2 + 1) \xrightarrow{x \in \Omega} \inf,$

$$\Omega = \{x = (x_1, x_2) \mid x_1 \geq 1, x_1 - 2x_2^2 = -4\}.$$

Функция Лагранжа имеет вид:

$$\mathcal{L}(x) = u_0(2x_1^2 + x_2^2/2 - x_1(x_2 + 1)) + u_1(1 - x_1) + v_1(x_1 - 2x_2^2 + 4).$$

По правилу Лагранжа нахождения критических точек имеем:

$$\begin{aligned} 1) \quad & \begin{cases} \mathcal{L}'_{x_1}(x) = u_0(4x_1 - x_2 - 1) - u_1 + v_1 = 0, \\ \mathcal{L}'_{x_2}(x) = u_0(-x_1 + x_2) - 4v_1x_2 = 0; \end{cases} \\ & 2) \quad u_1(1 - x_1) = 0; \\ & 3) \quad u_0 \geq 0, u_1 \geq 0, u_0^2 + u_1^2 + v_1^2 \neq 0. \end{aligned}$$

Случай I. $u_0 = 0$. Система из пункта 1) имеет следующий вид:

$$1) \quad \begin{cases} -u_1 + v_1 = 0, \\ v_1x_2 = 0. \end{cases}$$

Очевидно, $v_1 \neq 0$. Поэтому $x_2 = 0$. Отсюда, с учетом допустимости точки, находим $x_1 = -4$. Получили критическую точку $\bar{x} = (-4, 0)$, которая не является допустимой.

Случай II. $u_0 \neq 0$. Возьмем $u_0 = 1$ и рассмотрим два подслучая:

IIa. $u_1 = 0$. Система из п. 1) имеет вид:

$$1) \begin{cases} (4x_1 - x_2 - 1) + v_1 = 0, \\ (-x_1 + x_2) - 4v_1x_2 = 0. \end{cases}$$

Умножив первое уравнение на $4x_2$ и сложив полученное уравнение с первым, получим

$$(16x_1x_2 - x_1) - 4x_2^2 - 3x_2 = 0.$$

Очевидно, $x_2 \neq 1/16$ и поэтому из этого уравнения находим

$$x_1 = \frac{4x_2^2 + 3x_2}{16x_2 - 1}.$$

Тогда, с учетом условия допустимости точки, приходим к алгебраическому уравнению для определения координаты x_2 :

$$32x_2^3 - 6x_2^2 - 67x_2 + 4 = 0.$$

Данное алгебраическое уравнение имеет следующие корни:

$$x_2^{(1)} \approx -1.386, \quad x_2^{(2)} \approx 0.06, \quad x_2^{(3)} \approx 1.515.$$

Значения $x_2^{(1)}$ и $x_2^{(2)}$ не дают допустимых точек. В результате остается допустимая критическая точка $\bar{x} = (0.591, 1.515)$.

IIb. $1 - x_1 = 0$. В данном случае из условия допустимости точки имеем: $2x_2^2 = x_1 + 4 = 5$, т.е. $x_2 = \pm\sqrt{5/2}$. Получили две допустимые точки $\bar{x} = (1, \sqrt{5/2})$ и $\bar{x} = (1, -\sqrt{5/2})$.

Системы из п. 1) для этих точек имеют вид соответственно:

$$1) \begin{cases} (3 - \sqrt{\frac{5}{2}}) - u_1 + v_1 = 0, \\ (-1 + \sqrt{\frac{5}{2}}) - 4v_1 \cdot \sqrt{\frac{5}{2}} = 0; \end{cases}$$

$$1) \begin{cases} (3 + \sqrt{\frac{5}{2}}) - u_1 + v_1 = 0, \\ (-1 - \sqrt{\frac{5}{2}}) + 4v_1 \cdot \sqrt{\frac{5}{2}} = 0. \end{cases}$$

В этих системах значения u_1, v_1 равны соответственно:

$$u_1 = \frac{65 - 11\sqrt{10}}{20}, \quad v_1 = \frac{5 - \sqrt{10}}{20}; \quad u_1 = \frac{65 + 11\sqrt{10}}{20}, \quad v_1 = \frac{5 + \sqrt{10}}{20}.$$

Итак, имеем три допустимых критических точек:

$$\bar{x}^{(1)} = (0.591, 1.515) \text{ с набором множителей } (u_0, u_1, v_1) = (1, 0, 0.151);$$

$$\bar{x}^{(2)} = (1, \sqrt{\frac{5}{2}}) \text{ с набором множителей } (u_0, u_1, v_1) = \left(1, \frac{65 - 11\sqrt{10}}{20}, v_1 = \frac{5 - \sqrt{10}}{20}\right);$$

$$\bar{x}^{(3)} = (1, -\sqrt{\frac{5}{2}}) \text{ с набором множителей } (u_0, u_1, v_1) = \left(1, \frac{65 + 11\sqrt{10}}{20}, v_1 = \frac{5 + \sqrt{10}}{20}\right).$$

Запишем матрицу Гессе для соответствующей функции Лагранжа в каждой из полученных точек:

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}^*)''(\bar{x}^{(1)}) &= \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 0.396 \end{pmatrix} \\ (\mathcal{L}^*)''(\bar{x}^{(2)}) &= \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & \sqrt{10}/5 \end{pmatrix} \\ (\mathcal{L}^*)''(\bar{x}^{(3)}) &= \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & -\sqrt{10}/5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Для первых двух точек квадратичная форма, построенная по соответствующей матрице, является положительно определенной. Поэтому точки $\bar{x}^{(1)} = (0.591, 1.515)$ и $\bar{x}^{(2)} = (1, \sqrt{5}/2)$ являются точками локального минимума в данной задаче.

Квадратичная форма

$$\varphi(x) = 4x_1^2 - 2x_1x_2 - \frac{\sqrt{10}}{5}x_2^2, \quad x \in R^2,$$

построенная по третьей точке, не является неотрицательной. Поэтому для проверки точки $\bar{x}^{(3)} = (1, -\sqrt{5}/2)$ необходимо построить конус K :

$$\begin{aligned} K &= \{x = (x_1, x_2) \mid (f'(\bar{x}^{(3)}), x) \leq 0, (g'(\bar{x}^{(3)}), x) \leq 0, (h'(\bar{x}^{(3)}), x) = 0\} = \\ &= \{(x_1, x_2) \mid (3 + \sqrt{\frac{5}{2}})x_1 - (1 + \sqrt{\frac{5}{2}})x_2 \leq 0, -x_1 \leq 0, x_1 + 4\sqrt{\frac{5}{2}}x_2 = 0\} = \{(0, 0)\}. \end{aligned}$$

Здесь $g(x) = 1 - x_1$, $h(x) = x_1 - 2x_2^2 + 4$. На вырожденном конусе K для квадратичной формы $\varphi(x)$ достаточное условие второго порядка выполняется с любой положительной постоянной M .

Таким образом, третья точка также является точкой локального минимума.

Для проверки этих точек на точку глобального минимума исследуем поведение функции $f(x)$ на бесконечности. С учетом условий допустимости таковыми точками являются $(\infty, \pm\infty)$.

Имеем:

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{x_1 \rightarrow \infty, x_2 \rightarrow -\infty \\ (x_1, x_2) \in \Omega}} f(x) &= \lim_{x_1 \rightarrow \infty, x_2 \rightarrow -\infty} [2x_1^2 + x_2^2/2 - x_1(x_2 + 1)] = +\infty, \\ \lim_{\substack{x_1 \rightarrow -\infty, x_2 \rightarrow -\infty \\ (x_1, x_2) \in \Omega}} f(x) &= \lim_{x_1 \rightarrow \infty, x_2 \rightarrow \infty} [2x_1^2 + x_2^2/2 - x_1(x_2 + 1)] = \\ &= \lim_{x_1 \rightarrow \infty, x_2 \rightarrow \infty} [(x_1 - x_2/2)^2 + x_2^2/4 + x_1(x_1 - 1)] = +\infty. \end{aligned}$$

Полученные предельные соотношения указывают на то, что вне некоторого компакта на плоскости функция $f(x)$ принимает значения большие, чем внутри этого

компакта. Следовательно, по теореме Вейерштрасса о достижении непрерывной функцией на компакте своего минимального и максимального значений следует, что данная экстремальная задача имеет решение. Для выявления точек глобального минимума нам достаточно сравнить значения в полученных точках локального минимума.

Имеем:

$$f(\bar{x}^{(1)}) \approx 0.361; f(\bar{x}^{(2)}) = 2.25 - \sqrt{5/2} \approx 0.67; f(\bar{x}^{(3)}) = 2.25 + \sqrt{5/2} \approx 3.83.$$

Таким образом, в данной задаче точкой глобального минимума является точка $\bar{x}^{(1)} = (0.591, 1.515)$.

Пример 3.5. $f(x) = x_1^2 + 2x_2^2 - x_1x_2 + x_2 \Rightarrow_{x \in \Omega} \inf$,

$$\Omega = \{x = (x_1, x_2) \mid x_2 \leq 0, x_1^2 + x_2^2 \geq 1\}.$$

Функция Лагранжа имеет вид:

$$\mathcal{L}(x) = u_0(x_1^2 + 2x_2^2 - x_1x_2 + x_2) + u_1x_2 + u_2(1 - x_1^2 - x_2^2).$$

По правилу Лагранжа нахождения критических точек имеем:

$$1) \begin{cases} \mathcal{L}'_{x_1}(x) = u_0(2x_1 - x_2) - 2u_2x_1 = 0, \\ \mathcal{L}'_{x_2}(x) = u_0(-x_1 + 4x_2 + 1) + u_1 - 2u_2x_2 = 0; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} u_1x_2 = 0, \\ u_2(1 - x_1^2 - x_2^2) = 0; \end{cases}$$

$$3) u_0 \geq 0, u_1 \geq 0, u_2 \geq 0, u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 \neq 0.$$

Исследование проводим в двух случаях.

Случай I. $u_0 = 0$. Система из пункта 1) имеет следующий вид:

$$1) \begin{cases} u_2x_1 = 0, \\ u_1 - 2u_2x_2 = 0. \end{cases}$$

Очевидно, $u_2 \neq 0$. Поэтому $x_1 = 0$. Тогда из второго уравнения и условий дополняющей нежесткости следует, что $x_2 = \pm 1, u_1 = u_2 = 0$.

Таким образом, точки $x = (0, \pm 1)$ не являются критическими точками.

Случай II. $u_0 \neq 0$. Возьмем $u_0 = 1$, при этом, как и выше, рассмотрим четыре подслучая:

IIa. $u_1 = 0, u_2 = 0$. Система из п. 1) имеет вид:

$$1) \begin{cases} 2x_1 - x_2 = 0, \\ -x_1 + 4x_2 + 1 = 0. \end{cases}$$

Решив систему, найдем критическую точку $x = (-4/7, -2/7)$, которая не является допустимой.

IIb. $u_2 = 0, x_2 = 0$. Система из п. 1) в этом случае несовместна.

Ис. $u_1 = 0, x_1^2 + x_2^2 = 1$. Система из п. 1) имеет вид:

$$1) \begin{cases} (2x_1 - x_2) - 2u_2x_1 = 0, \\ (-x_1 + 4x_2 + 1) - 2u_2x_2 = 0. \end{cases}$$

Умножив первое уравнение на x_2 , второе – на $-x_1$, затем сложив полученные уравнения, будем иметь:

$$x_2(2x_1 - x_2) - x_1(-x_1 + 4x_2 + 1) = 0.$$

Перепишав уравнение в виде

$$(x_1^2 + x_2^2) - 2x_2^2 - 2x_1x_2 - x_1 = 0,$$

получим связь между координатами точки:

$$x_1(2x_2 + 1) = 1 - 2x_2^2.$$

Очевидно, $x_2 \neq -1/2$ и поэтому

$$x_1 = \frac{1 - 2x_2^2}{2x_2 + 1}.$$

Тогда условие допустимости точки приводит к алгебраическому уравнению:

$$8x_2^4 + 4x_2^3 - 7x_2^2 - 4x_2 = 0.$$

Корнями данного уравнения являются:

$$x_2^{(1)} = 0, x_2^{(2)} \approx -0.825, x_2^{(3)} \approx -0.63, x_2^{(4)} \approx 0.96.$$

Значение $x_2^{(4)} \approx 0.96$ не дает допустимой точки.

Таким образом, получим три допустимых критических точек:

$$\bar{x}^{(1)} = (1, 0) \text{ с набором множителей } (u_0, u_1, u_2) = (1, 0, 1);$$

$$\bar{x}^{(2)} \approx (0.556, -0.825) \text{ с набором множителей } (u_0, u_1, u_2) = (1, 0, 1.742);$$

$$\bar{x}^{(3)} \approx (-0.793, -0.63) \text{ с набором множителей } (u_0, u_1, u_2) = (1, 0, 0.37).$$

Ид. $x_2 = 0, x_1^2 + x_2^2 = 1$. Эти условия дают точки $(\pm 1, 0)$. Точка $(-1, 0)$ приводит к значению $u_1 = -2$. Поэтому здесь имеем снова точку $(1, 0)$ с тем же набором множителей, найденным выше.

Итак, в данной задаче мы получили три допустимых критических точек, подозрительных на точку минимума.

Для исследования полученных точек на точку локального минимума запишем матрицу Гессе для соответствующей функции Лагранжа в каждой из точек:

$$(\mathcal{L}^*)''(\bar{x}^{(1)}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(\mathcal{L}^*)''(\bar{x}^{(2)}) = \begin{pmatrix} -1.484 & -1 \\ -1 & 0.516 \end{pmatrix}$$

$$(\mathcal{L}^*)''(\bar{x}^{(3)}) = \begin{pmatrix} 1.26 & -1 \\ -1 & 3.26 \end{pmatrix}$$

Для третьей точки квадратичная форма, построенная по соответствующей матрице, является положительно определенной. Следовательно, точка $\bar{x}^{(3)} \approx (-0.793, -0.63)$ является точкой локального минимума в данной задаче.

Квадратичные формы, построенные для двух первых точек, этим свойством не обладают.

Для первой точки квадратичная форма имеет вид:

$$\varphi(x) = 2x_2^2 - 2x_1x_2.$$

Построим конус K :

$$K = \{x = (x_1, x_2) \mid (f'(\bar{x}^{(1)}), x) \leq 0, (g'_1(\bar{x}^{(1)}), x) \leq 0, (g'_2(\bar{x}^{(1)}), x) \leq 0\} =$$

$$= \{(x_1, x_2) \mid 2x_1 \leq 0, x_2 \leq 0, -2x_1 \leq 0\} = \{(0, x_2) \mid x_2 \leq 0\}.$$

Здесь $g_1(x) = x_2$, $g_2(x) = 1 - x_1^2 - x_2^2$. На конусе K квадратичная форма

$$\varphi(x) = 2x_2^2 = 2\|x\|^2 \geq \gamma\|x\|^2, \quad x \in K,$$

с любой положительной постоянной $\gamma \leq 2$.

Таким образом, первая точка также является точкой локального минимума.

Квадратичная форма для второй точки имеет вид:

$$\varphi(x) = -1.484x_1^2 + 0.516x_2^2 - 2x_1x_2.$$

Построим конус K :

$$K = \{x = (x_1, x_2) \mid (f'(\bar{x}^{(2)}), x) \leq 0, (g'_2(\bar{x}^{(2)}), x) \leq 0\} =$$

$$= \{(x_1, x_2) \mid 1.937x_1 - 3.856x_2 \leq 0, -1.112x_1 + 1.65x_2 \leq 0\} =$$

$$= \{(x_1, x_2) \mid 1.48381295x_2 \leq x_1 \leq 1.99070728x_2, x_2 \geq 0\}.$$

В точке $x = (1.5, 1) \in K$ квадратичная форма

$$\varphi(x) = -5.823.$$

Следовательно, необходимое условие второго порядка не выполняется в точке $\bar{x}^{(2)} \approx (0.556, -0.825)$, свидетельствующее о том, что данная точка не является точкой локального минимума.

Таким образом, точками локального минимума в данной экстремальной задаче являются две точки: $\bar{x}^{(1)} = (1, 0)$ и $\bar{x}^{(3)} \approx (-0.793, -0.63)$.

Для проверки этих точек на точку глобального минимума исследуем поведение функции $f(x)$ на бесконечности. С учетом условий допустимости таковыми точками являются $(\pm\infty, -\infty)$.

Имеем:

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{x_1 \rightarrow \infty, x_2 \rightarrow -\infty \\ (x_1, x_2) \in \Omega}} f(x) &= \lim_{x_1 \rightarrow \infty, x_2 \rightarrow -\infty} (x_1^2 + 2x_2^2 - x_1x_2 + x_2) = +\infty, \\ \lim_{\substack{x_1 \rightarrow -\infty, x_2 \rightarrow -\infty \\ (x_1, x_2) \in \Omega}} f(x) &= \lim_{x_1 \rightarrow -\infty, x_2 \rightarrow -\infty} (x_1^2 + 2x_2^2 - x_1x_2 + x_2) = \\ &= \lim_{x_1 \rightarrow -\infty, x_2 \rightarrow -\infty} [(x_1 - x_2/2)^2 + x_2(7x_2/4 + 1)] = +\infty.\end{aligned}$$

Полученные предельные соотношения свидетельствуют также о разрешимости экстремальной задачи. Сравнение значений функции $f(x)$ в точках

$$f(\bar{x}^{(1)}) = 1, \quad f(\bar{x}^{(3)}) \approx 0.293$$

позволяет сделать вывод о том, что *точкой глобального минимума в данной задаче является точка $\bar{x}^{(3)} \approx (-0.793, -0.63)$* .

§4. Задачи линейного программирования

Задачами линейного программирования называются задачи исследования на минимум (максимум) линейной функции на симплексе из конечномерного евклидова пространства. Поскольку эти задачи представляют собой задачи выпуклого программирования, то в них точки локального экстремума являются точками глобального экстремума (кратко: решениями). Однако задачи линейного программирования с точки зрения решения существенно отличаются от задач выпуклого программирования, так как линейная функция достигает своего экстремального значения на границе. При этом учитываем, что граница симплекса состоит из гиперплоскостей и, следовательно, в качестве решения задачи можно брать специальную точку – так называемую угловую.

Рассмотрим задачу

$$f(x) = (c, x) \xrightarrow{x \in \Omega} \inf, \quad (4.1)$$

где

$$\Omega = \{x \in R^n \mid x \geq 0, Ax = b, \bar{A}x \geq \bar{b}\}. \quad (4.2)$$

Здесь $c \in R^n$, $b \in R^m$, $\bar{b} \in R^{\bar{m}}$ – заданные векторы, $A, \bar{A}$ – заданные матрицы размерности $m \times n, \bar{m} \times n$ соответственно.

Задача (4.1), (4.2) называется общей задачей линейного программирования, при этом рассматриваем лишь задачу минимизации.

Необходимо заметить, что эта задача является не самой общей: область Ω берется в "первой четверти" пространства. Это условие здесь выбрано для построения теории. Тем не менее более "общую" задачу всегда можно привести к задаче (4.1), (4.2) путем увеличения размерности задачи.

Особую роль играет частный случай – так называемая каноническая задача линейного программирования:

$$f(x) = (c, x) \xrightarrow{x \in \Omega} \inf, \quad (4.3)$$

где

$$\Omega = \{x \in R^n \mid x \geq 0, Ax = b\}. \quad (4.4)$$

К задаче (4.3), (4.4) общую задачу линейного программирования всегда можно привести. Для этого введем вектор $y = \bar{A}x - \bar{b}$. Тогда задача (4.1), (4.2) переписется в виде эквивалентной канонической задачи:

$$g(z) \equiv (c, x) \xrightarrow{z \in \tilde{\Omega}} \inf \quad (4.5),$$

$$\tilde{\Omega} = \{z = (x, y) \in R^n \times \mathbb{R}^{\bar{m}} \mid z \geq 0, Cz = d\}. \quad (4.6)$$

где $d = \begin{pmatrix} b \\ \bar{b} \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} A & \Theta \\ \bar{A} & -E \end{pmatrix}$, Θ – нулевая матрица размерности $m \times n$, а E – единичная матрица порядка $\bar{m}$.

Укажем связь между m и n в канонической задаче (4.3), (4.4). Возможны следующие случаи:

Случай 1) $m > n$. Система $Ax = b$ переопределенная и в общем случае несовместная. Поэтому, за исключением частных случаев, $\Omega = \emptyset$, т.е. имеем дело с несодержательным случаем.

Случай 2) $m = n$. Система $Ax = b$, если определитель A отличен от нуля, однозначно разрешима $\Rightarrow \Omega = \emptyset$, либо Ω – одноэлементное множество; снова имеем несодержательный случай.

Случай 3) $m < n$. Система $Ax = b$ является недоопределенной и, следовательно, $\Omega \neq \emptyset$, т.е. имеем содержательный случай.

Итак, в задаче (4.3), (4.4) всегда считаем $m < n$, $\text{rang}(A) \equiv r = m$.

Определение 4.1. Зафиксируем $\bar{x} \in \Omega$. Ее назовем угловой точкой области Ω , если $\forall x', x'' \in \Omega, \forall \lambda \in (0, 1)$ из соотношения $\bar{x} = \lambda x' + (1 - \lambda)x'' \Rightarrow x' = x''$.

Теорема (критерий для угловой точки). Пусть $m = r \equiv \text{rang}(A)$, $y = (y_1, \dots, y_n) \in \Omega$.

Для того, чтобы y была угловой точкой Ω , необходимо и достаточно, чтобы существовали r линейно-независимых векторов-столбцов матрицы A : $A_{j_1}, A_{j_2}, \dots, A_{j_r}$ такие, что

$$\sum_{i=1}^r A_{j_i} y_{j_i} = b, \quad y_s = 0, \forall s \neq j_i, i = \overline{1, r}.$$

Из теоремы следует, что угловых точек y области Ω может быть лишь конечное число. При этом систему векторов $\{A_{j_1}, \dots, A_{j_r}\}$ назовем кратко базисом угловой точки, векторы $A_{j_i}, i = \overline{1, r}$, – базисными векторами угловой точки y , $y_{j_i}, i = \overline{1, r}$, – базисными координатами угловой точки, остальные – небазисными координатами.

По критерию угловой точки все небазисные координаты угловой точки равны нулю.

Если $x \in R^n$ – произвольно фиксированная точка, то $x_i, i = \overline{1, r}$, отвечающие базисным координатам угловой точки y , будем называть базисными переменными, остальные координаты – небазисными переменными.

Введем в рассмотрение векторы: $\bar{y}_+ \equiv (y_{j_1}, y_{j_2}, \dots, y_{j_r})$, $\bar{x}_+ \equiv (x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_r})$, $\bar{c}_+ \equiv (c_{j_1}, c_{j_2}, \dots, c_{j_r})$.

Базисные векторы позволяют построить квадратную матрицу

$$B \equiv (A_{j_1}, A_{j_2}, \dots, A_{j_r})$$

r -го порядка. Она, очевидно, невырождена и, следовательно, существует обратная B^{-1} .

Образует величины

$$\Delta_i \equiv (\bar{c}_+, B^{-1}A_i) - c_i, \quad i = \overline{1, n},$$

где A_i – i -тый столбец матрицы A .

Введенные величины позволяют для угловой точки рассмотреть три ситуации, при этом, как и выше, считаем, что матрица A имеет размерность $r \times n$, где $r = \text{rang}(A)$ – ее ранг.

- 1) $\Delta_i \leq 0, i = \overline{1, n}$;
- 2) $\exists k : \Delta_k > 0, B^{-1}A_k \leq 0$;
- 3) $\forall k, \Delta_k > 0 : B^{-1}A_k \not\leq 0$.

Следующие теоремы исследуют угловую точку в этих трех случаях.

Теорема 4.1. Пусть y – угловая точка Ω с базисом $\{A_{j_1}, \dots, A_{j_r}\}$, и пусть все $\Delta_i \leq 0, i = \overline{1, n}$.

Тогда y – решение задачи (4.3), (4.4), т.е. точка глобального минимума.

Теорема 4.2. Пусть y – угловая точка Ω с базисом $\{A_{j_1}, \dots, A_{j_r}\}$, и пусть существует хотя бы один индекс k , для которого $\Delta_k > 0, B^{-1}A_k \leq 0$.

Тогда задача (4.3), (4.4) не имеет решения из-за неограниченности функции $f(x)$ снизу в области Ω .

Теорема 4.3. Пусть y – угловая точка Ω с базисом $\{A_{j_1}, \dots, A_{j_r}\}$, и пусть $\forall k$, для которого $\Delta_k > 0 : B^{-1}A_k \not\leq 0$.

Тогда от угловой точки y можно перейти к другой угловой точке x области Ω со свойством: $f(x) \leq f(y)$.

Для канонической задачи (4.3), (4.4) имеется универсальный метод исследования, известный как симплекс-метод.

Предположим, что y – угловая точка Ω , для которой $\{A_{j_1}, \dots, A_{j_r}\}$ является базисом. Пусть $\forall k$, для которого $\Delta_k > 0 : B^{-1}A_k \not\leq 0$.

Зафиксируем один из таких индексов k и перейдем от y к новой угловой точке x по правилу:

$$\begin{cases} x_k = \min_{i: (B^{-1}A_k)_i > 0} \frac{(y_+)_i}{(B^{-1}A_k)_i}, & x_s = 0, \forall s \neq k, s \neq j_i, i = \overline{1, r}, \\ \bar{x}_+ = \bar{y}_+ - B^{-1}A_k x_k. \end{cases} \quad (4.5)$$

Метод, при котором осуществляется переход от угловой точки y к новой угловой точке x по правилу (4.5), будем называть симплекс-методом.

Для нас здесь важна практическая сторона применения симплекс-метода. Остановимся на варианте, известном как метод искусственного базиса. При этом будем считать выполненными в задаче (4.3), (4.4) следующие условия:

- 1) $b \geq 0$;
- 2) $A = (A_1, \dots, A_n)_{m \times n}, m < n$.

Пусть $\exists A_{j_i} = \bar{e}_i, i = \overline{1, m}$. Тогда матрица B является единичной и, следовательно, $B^{-1} = E$. При этом алгоритм (4.5) симплекс-метода значительно упрощается.

Пусть теперь нет единичных векторов-столбцов матрицы A . Тогда добавляем в матрицу справа векторы-столбцы $A_{n+1} = \bar{e}_1, \dots, A_{n+m} = \bar{e}_m$, чтобы придти к первому случаю. Заметим, что добавление нового столбца A_{n+i} в матрицу A эквивалентно добавлению в i -тое уравнение неотрицательной переменной x_{n+i} , что, в свою очередь, означает увеличение размерности n задачи. Тогда алгоритм (4.5) применяется к задаче с расширенной матрицей, причем по-прежнему матрица $B = E$. Такой вариант симплекс-метода носит название "метод искусственного базиса".

Отметим, что итерационное правило (4.5) в общем случае может заиклиться. Это зависит от свойств канонической задачи.

Определение 4.2. Угловую точку y назовем невырожденной, если все ее базисные координаты отличны от нуля (а, следовательно, положительны). В случае равенства нулю хотя бы одной базисной координаты угловой точки, такую точку называют вырожденной.

Определение 4.3. Каноническую задачу (4.3), (4.4) назовем невырожденной, если все угловые точки области Ω невырожденные. Если же хотя бы одна угловая точка Ω вырожденная, то задачу (4.3), (4.4) будем называть вырожденной.

Теорема 4.4. Для каждой невырожденной задачи линейного программирования алгоритм (4.5) симплекс-метода завершит свою работу через конечное число шагов.

Теорема 4.5. В вырожденной задаче линейного программирования переход от одной угловой точки области Ω к другой по алгоритму (4.5) можно организовать так, что симплекс-метод завершит свою работу через конечное число шагов.

Метод, предотвращающий заикливание итерационного правила симплекс-метода, носит название *антициклин*.

Поскольку для задач линейного программирования имеются многочисленные учебные и учебно-методические пособия, мы ограничимся приведенными теоретическими сведениями.

В заключение приведем несколько примеров применения метода искусственного базиса для решения задач линейного программирования. При этом реализацию алгоритма симплекс-метода удобно проводить с помощью так называемой симплекс-таблицы.

Пример 4.1. $f(x) = x_1 - 2x_2 + x_3 \Rightarrow \inf,$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 - x_4 = 4, \\ 2x_1 + x_3 - 2x_4 = 6, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, 4}. \end{cases}$$

В данной канонической задаче матрица системы ограничений содержит единичную подматрицу второго порядка, составленную из столбцов A_2, A_3 . Поэтому можно применить симплекс-метод, начиная с начальной угловой точки $(0, 4, 6, 0)$ с базисом $\{A_2, A_3\}$.

Составим симплекс-таблицу, в которой содержатся:

- 1) C – строка коэффициентов целевой функции $f(x)$;
- 2) столбцы матрицы A ;
- 3) столбцы B из базисных векторов и A_0 из базисных координат угловой точки;
- 4) столбец $\overline{C}_B$;
- 5) строка Δ значений величин $\{\Delta_i\}$.

Столбцы 2)–4) и строка 5) заполняются на каждой итерации симплекс-метода.

В результате применения симплекс-метода будем иметь следующую симплекс-таблицу:

C			1	-2	1	0
$\overline{C}_+$	+	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4
-2	A_2	4	-1	1	0	-1
1	A_3	6	2	0	1	-2
Δ		-2	3	0	0	0
-2	A_2	7	0	1	1/2	-2
1	A_1	3	1	0	1/2	-1
Δ		-11	0	0	-3/2	3

В строке Δ значение $\Delta_4 = 3 > 0$, а в столбце A_4 нет положительных элементов. Согласно теории данная каноническая задача не имеет решения из-за неограниченности снизу целевой функции.

Пример 4.2. $f(x) = 2x_1 - 5x_2 - 3x_3 - x_4 \Rightarrow \inf,$

$$\begin{cases} 2x_2 + x_3 + x_4 = 6, \\ x_1 - x_2 - x_3 = 8, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, 4}. \end{cases}$$

В данной канонической задаче матрица системы ограничений также содержит единичную подматрицу второго порядка, составленную из столбцов A_4, A_1 (именно в таком порядке!). Поэтому можно применить симплекс-метод. Заполняя последовательно симплекс-таблицу, в итоге имеем:

C			2	-5	-3	-1
$\overline{C}_+$	+	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4
-1	A_4	6	0	2	1	1
2	A_1	8	1	-1	-1	0
Δ		10	0	1	0	0
-5	A_2	3	0	1	1/2	1/2
2	A_1	11	1	0	-1/2	1/2
Δ		7	0	0	-1/2	-1/2

В строке Δ нет положительных элементов (начиная со столбца A_1 !). Поэтому *найшли решение* задачи в виде угловой точки $x^* = (11, 3, 0, 0)$, при этом $f(x^*) = \Delta_0 = 7$.

Пример 4.3. $f(x) = x_1 + x_2 - 2x_3 \Rightarrow \inf$,

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 \geq 6, \\ x_2 + 2x_3 = 4, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, 3}. \end{cases}$$

Сначала приведем задачу к канонической, добавив в левую часть первого неравенства неотрицательную естественную переменную x_4 :

$$\tilde{f}(x) = x_1 + x_2 - 2x_3 \Rightarrow \inf,$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 6, \\ x_2 + 2x_3 = 4, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, 4}. \end{cases}$$

В полученной канонической задаче матрица системы ограничений

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

не содержит единичной подматрицы второго порядка. Поэтому добавляем столбец недостающего единичного вектора для получения единичной подматрицы второго порядка. Добавление единичного вектора эквивалентно добавлению во второе ограничение неотрицательной искусственной переменной x_5 . В результате придем к новой канонической задаче:

$$g(x) = x_1 + x_2 - 2x_3 + Mx_5 \Rightarrow \inf,$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 6, \\ x_2 + 2x_3 + x_5 = 4, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, 5}, \end{cases}$$

где M – достаточно большая положительная постоянная.

К последней задаче можно применить симплекс-метод. Заполняя последовательно симплекс-таблицу, в итоге имеем:

C			1	1	-2	0	M
$\overline{C}_+$	+	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
1	A_1	6	1	2	-1	-1	0
M	A_5	4	0	1	2	0	1
Δ		4M+6	0	M+1	2M+1	-1	0
1	A_1	8	1	5/2	0	-1	1/2
-2	A_3	2	0	1/2	1	0	1/2
Δ		4	0	1/2	0	-1	-M-1/2
1	A_2	16/5	2/5	1	0	-2/5	1/5
-2	A_3	2/5	-1/5	0	1	1/5	2/5
Δ		14/5	-1/5	0	0	-4/5	-M-3/5

В строке Δ нет положительных элементов. Поэтому *найми решение* расширенной канонической задачи в виде угловой точки $\bar{x}^* = (0, 16/5, 2/5, 0, 0)$.

Решение исходной задачи получим, убирая введенные естественную и искусственную переменные: $x^* = (0, 16/5, 2/5)$.

Отметим, что приведенные экстремальные задачи задают невырожденные канонические задачи линейного программирования. Поэтому в этих задачах заикливания итерационного процесса симплекс-метода не происходит.

В заключение приведем пример *вырожденной канонической задачи* линейного программирования из книги "Гасс С. Линейное программирование" (см. гл. 7, § 2).

Пример 4.4. $f(x) = -\frac{3}{4}x_1 + 150x_2 - \frac{1}{50}x_3 + 6x_4 \Rightarrow \inf,$

$$\begin{cases} \frac{1}{4}x_1 - 60x_2 - \frac{1}{25}x_3 + 9x_4 + x_5 = 0, \\ \frac{1}{2}x_1 - 90x_2 - \frac{1}{50}x_3 + 3x_4 + x_6 = 0, \\ x_3 + x_7 = 1, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, 7}. \end{cases}$$

Матрица системы ограничений имеет единичную подматрицу третьего порядка, поэтому можно составить симплекс-таблицу. При этом примем условие, что каждый раз при переходе к следующему шагу будем из базиса удалять вектор с наименьшим индексом.

Эта симплекс-таблица выглядит следующим образом (см. табл. 8 из книги):

C			-3/4	150	-1/50	6	0	0	0
$\overline{C}_+$	+	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7
0	A_5	0	1/4	-60	-1/25	9	1	0	0
0	A_6	0	1/2	-90	-1/50	3	0	1	0
0	A_7	1	0	0	1	0	0	0	1
Δ		0	3/4	-150	1/50	-6	0	0	0
-3/4	A_1	0	1	-240	-4/25	36	4	0	0
0	A_6	0	0	30	3/50	-15	-2	1	0
0	A_7	1	0	0	1	0	0	0	1
Δ		0	0	30	7/50	-33	-3	0	0
-3/4	A_1	0	1	0	8/25	-84	-12	8	0
150	A_2	0	0	1	1/500	-1/2	-1/15	1/30	0
0	A_7	1	0	0	1	0	0	0	1
Δ		0	0	0	2/25	-18	-1	-1	0
-1/50	A_3	0	25/8	0	1	-525/2	-75/2	25	0
150	A_2	0	-1/160	1	0	1/40	1/120	-1/60	0
0	A_7	1	-25/8	0	0	525/2	75/2	-25	1
Δ		0	-1/4	0	0	3	2	-3	0
-1/50	A_3	0	-125/2	21/2	1	0	50	-150	0
6	A_4	0	-1/4	40	0	1	1/3	-2/3	0
0	A_7	1	125/2	-21/2	0	0	-50	150	1
Δ		0	1/2	-120	0	0	1	-1	0
0	A_5	0	-5/4	210	1/50	0	1	-3	0
6	A_4	0	1/6	-30	-1/150	1	0	1/3	0
0	A_7	1	0	0	1	0	0	0	1
Δ		0	7/4	-330	-1/50	0	0	2	0
0	A_5	0	1/4	-60	-1/25	9	1	0	0
0	A_6	0	1/2	-90	-1/50	3	0	1	0
0	A_7	1	0	0	1	0	0	0	1
Δ		0	3/4	150	1/50	-6	0	0	0

Таким образом, на седьмой итерации получили таблицу из первого шага, что означает заикливание итерационного процесса.

Теперь будем в этой таблице переходить от одной угловой точки к другой по специальному правилу. Для этого добавим три столбца справа в симплекс-таблице, причем на первом шаге эти столбцы заполним значениями базисных векторов-столбцов. При этом заполнение этих столбцов производим по обычным правилам. Последние введенные столбцы помогают нам выбрать один способ перехода на каждой итерации. Для этого мы будем делить последовательно элементы этих столбцов к выбранным для ввода в базис векторов-строк и выбирать ту строку, которая обладает свойством минимальности отношения.

C			-3/4	150	-1/50	6	0	0	0			
$\overline{C}_+$	+	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9	A_{10}
0	A_5	0	1/4	-60	-1/25	9	1	0	0	1	0	0
0	A_6	0	1/2	-90	-1/50	3	0	1	0	0	1	0
0	A_7	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1
Δ		0	3/4	-150	1/50	-6	0	0	0			
0	A_5	0	0	-15	-3/100	25/3	1	-1/2	0	1	-1/2	0
-3/4	A_1	0	1	-180	-1/25	6	0	2	0	0	2	0
0	A_7	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1
Δ		0	0	-15	1/20	-21/2	0	-3/2	0			
0	A_5	3/100	0	-15	0	25/3	1	-1/2	3/100	1	-1/2	3/100
-3/4	A_1	1/25	1	-180	0	6	0	2	1/25	0	2	1/25
-1/50	A_3	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1
Δ		-1/20	0	-15	0	-21/2	0	-3/2	-1/20			

В строке Δ нет положительных элементов. Поэтому *найли решение* канонической задачи в виде угловой точки $x^* = (1/25, 0, 1, 0, 3/100, 0, 0)$.

Итак, мы избежали заикливания в этой вырожденной канонической задаче путем добавления дополнительных столбцов, количество которых равно числу строк матрицы A .

§5. Задачи для самостоятельного решения

I. Исследовать следующие задачи безусловной оптимизации:

1) $f(x) = (-2 + x_1)x_2 - (x_1 - 3)x_1 \xrightarrow{x \in R^2} \text{extr}$

2) $f(x) = x_1x_2x_3 \xrightarrow{x \in R^3} \text{rm extr}$

3) $f(x) = (x_1 - x_2 - x_3)^2 + x_1(x_2 - x_3) + x_1 - 2x_2 \xrightarrow{x \in R^3} \text{extr}$

4) $f(x) = \max(e^x, 1 - x) + 2x^2 - 3x \xrightarrow{x \in R^1} \inf$

5) $f(x) = |2x_1 - x_2| + x_1^2 - x_1 + 3x_2^2 \xrightarrow{x \in R^2} \inf$

6) $f(x) = |x_1 + x_2 - x_3| + 2(x_1 - 1)^2 - x_1 \xrightarrow{x \in R^3} \inf$

7) $f(x) = |x_1 - 2x_2 + x_3| + (x_1^2 + x_2^2)^2 + x_3^2 \xrightarrow{x \in R^3} \inf$

8) $f(x) = \|x\| + (x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 4x_4^2) - (x_1 - x_2) + 2(x_3 + 2x_4) \xrightarrow{x \in R^4} \inf,$

где $\|\cdot\|$ – евклидова норма.

II. Исследовать следующие задачи выпуклого программирования:

- 1) $f(x) = \max(e^x, 1 - x) + 2x^2 - 4x \Rightarrow \inf, \quad x \geq 1/2.$
- 2) $f(x) = |2x_1 + x_2| + x_1^2 - 2x_1 + 3x_2^2 + x_2 \Rightarrow \inf, \quad x_1 - 2x_2 \geq 1.$
- 3) $f(x) = |2x_1 - x_2| + x_1^2 - x_1 + 3x_2^2 \Rightarrow \inf, \quad x_1 + x_2 \leq 0.$
- 4) $f(x) = |x_1 + x_2 - 2x_3| + (x_1 - 2x_2)^2 + x_3^2 + 2x_3 \Rightarrow \inf, \quad x_1 + 2x_2 \geq 0.$

III. Исследовать следующие задачи математического программирования:

- 1) $f(x) = 2x_1^2 \circ x_1 x_2 + x_2^2 + 4x_1 \xrightarrow{x \in \Omega} \inf$

$$\Omega = \{x = (x_1, x_2) \mid x_2 \geq 1, x_1^2 + x_2 = 5\}.$$

- 2) $f(x) = x_1^2 + 4x_2^2 \circ 3(x_1 - 2x_2) \xrightarrow{x \in \Omega} \inf$

$$\Omega = \{x = (x_1, x_2) \mid x_1 \leq 1, 2x_2 + x_1^2 \geq 1\}.$$

- 3) $f(x) = x_1(2 - x_2) + x_2(3 \circ x_2) \xrightarrow{x \in \Omega} \text{extr}$

$$\Omega = \{x = (x_1, x_2) \mid x_2 \leq 0, x_2^2 + 2x_1^2 = 2\}.$$

- 4) $f(x) = x_1 x_2 - 3x_1^2 + 2x_2 \xrightarrow{x \in \Omega} \inf$

$$\Omega = \{x = (x_1, x_2) \mid x_1 \leq -4, 3x_1^2 - x_2 = 8\}.$$

- 5) $f(x) = x_1(2x_1 + x_2) \circ x_2 + x_2^2 \xrightarrow{x \in \Omega} \inf$

$$\Omega = \{x = (x_1, x_2) \mid x_1 \geq 1 - x_2, 4x_1 + x_2^2 \geq 6\}.$$

- 6) $f(x) = (x_2^2 + 2)x_1^2 + (x_1 + 2x_2)^2 - x_1 x_2 \xrightarrow{x \in \Omega} \inf$

$$3x_1 + x_2 \geq -1, \quad x_2^2 + 2x_1 = 1, \quad x_1 \leq 0.$$

- 7) $(4x_1 - x_2 + 2)^2 + (x_1^2 + 2)x_2^2 + 3(x_1 - 2x_2) \xrightarrow{x \in \Omega} \inf$

$$x_1 - 4x_2 = 4, \quad 2x_2^2 - x_1 \geq 6, \quad x_1 \geq 0.$$

- 8) $(x_2^2 + 2)x_1^2 + (x_1 + 2x_2)^2 - x_1 x_2 \xrightarrow{x \in \Omega} \inf$

$$3x_1 + x_2 \geq -1, \quad x_2^2 + 2x_1 = 1, \quad x_1 \leq 0.$$

IV. Исследовать следующие задачи линейного программирования:

1) $f(x) = -x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 \xrightarrow{x \in \Omega} \sup$

$$\Omega : \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 22, \\ -3x_1 + 5x_2 - 2x_4 \leq 2, \\ 4x_1 - x_2 + 6x_4 \geq 30, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, 4}. \end{cases}$$

2) $f(x) = x_1 + 3x_2 - 2x_5 \xrightarrow{x \in \Omega} \inf$

$$\Omega : \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_4 + 2x_5 = 34, \\ 4x_1 + x_3 + 2x_4 + x_5 \geq 20, \\ -2x_1 - x_3 + 3x_4 - 2x_5 \leq 10, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, 5}. \end{cases}$$

3) $f(x) = 3x_1 - 2x_2 - x_3 \xrightarrow{x \in \Omega} \sup$

$$\Omega : \begin{cases} -x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 \leq 8, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 \geq 6, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 10, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, 4}. \end{cases}$$

4) $f(x) = 4x_1 - 4x_2 + x_3 - 6x_4 \xrightarrow{x \in \Omega} \inf$

$$\Omega : \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 26, \\ x_1 - 2x_2 + 2x_4 \leq 32, \\ -2x_1 + 4x_2 + 5x_3 \geq 10, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, 4}. \end{cases}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Акулич И.Л.* Математическое программирование в примерах и задачах/ И.Л. Акулич. — М.: Высшая школа, 1986. — 319 с.
2. *Алексеев В.М.* Сборник задач по оптимизации. Теория. Примеры. Задачи: Учеб. пособие/ В.М. Алексеев, Э.М. Галеев, В.М. Тихомиров. — 2-е изд. — М.: Физматлит, 2005. — 256 с.
3. *Алексеев В.М.* Сборник задач по оптимизации. Теория. Примеры. Задачи: Учеб. пособие/ В.М. Алексеев, Э.М. Галеев, В.М. Тихомиров. — 2-е изд., перераб. и доп. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2011. 256 с. — ISBN 978-5-9221-0590-3. — Текст: электронный// Лань: электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/2097>.
4. *Ашманов С.А.* Теория оптимизации в задачах и упражнениях: Учеб. пособие/ С.А. Ашманов, А.В. Тимохов. — 2-е изд., стер. — СПб: Лань, 2021. — 448 с. — ISBN 978-5-8114-1366-9. — Текст: электронный// Лань: электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/168416>.
5. *Базара М.* Нелинейное программирование. Теория и алгоритмы/ М. Базара, К. Шетти. — М.: Мир, 1982. — 583 с.
6. *Васильев Ф.П.* Численные методы решения экстремальных задач: Учеб. пособие для вузов/ Ф.П. Васильев. — 2-е изд., перераб. и доп. — М.: Наука, 1988. — 552 с.
7. *Васильев Ф.П.* Методы оптимизации: Учеб. пособие/ Ф.П. Васильев. — М.: МЦНМО. — Книга 1. — 2011. — 624 с. — ISBN 978-5-94057-707-2. — Текст: электронный// Лань: электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/9304>.
8. *Васильев Ф.П.* Методы оптимизации: Учеб. пособие/ Ф.П. Васильев. — М.: МЦНМО. — Книга 2. — 2011. — 434 с. — ISBN 978-5-94057-708-9. — Текст: электронный// Лань: электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/9305>.
9. *Гасс С.* Линейное программирование. — М.: ГИФМЛ, 1961. — 304 с.
10. *Сухарев А.Г.* Курс методов оптимизации: Учеб. пособие/ А.Г. Сухарев, А.В. Тимохов, В.В. Федоров. — 2-е изд. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2011. — 384 с. — ISBN 978-5-9221-0559-0. — Текст: электронный// Лань: электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/2330>.