

КАЗАНСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Институт вычислительной математики и
информационных технологий

Кафедра системного анализа и информационных технологий

Р.Х. Латыпов Е.Л. Столов

Тесты по курсу "Алгебра и геометрия"
Комплексные числа, матрицы и определители

Казань – 2023

УДК 512.6
ББК 22.143

*Принято на заседании учебно-методической комиссии ИВМИИТ
Протокол № 5 от 26 января 2023 года*

Рецензенты:

доктор физико-математических наук,
профессор кафедры системного анализа и информационных
технологий КФУ Ш.Т. Ишмухаметов;
кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры алгебры и математической логики КФУ М.М.
Ямалеев

Латыпов Р.Х., Столов Е.Л.

Тесты по курсу "Алгебра и геометрия"

Комплексные числа, матрицы и определители /

Р.Х. Латыпов, Е.Л. Столов. – Казань: Казанский федеральный
университет, 2023. – 40 с.

Данная книга основана на опыте применения тестирования для проверки знаний по предмету «Алгебра и геометрия», изучаемому на первом курсе университетов и технических вузов. Тестирование ориентировано на текущий контроль и может проводиться в автоматическом режиме. Тесты можно внедрить в платформы, созданные для сопровождения учебного процесса. Задачи предназначены для проверки теоретических знаний.

В данной книге представлены тесты по двум разделам: «Комплексные числа» и «Матрицы и определители». В начале каждой темы помещены обозначения.

© Латыпов Р.Х., Столов Е.Л., 2023

© Казанский федеральный университет, 2023

Предисловие

Объявленная правительством программа цифровизации должна затронуть и систему образования. Цель всей программы — автоматизация рутинных процедур с целью освободить человека для более плодотворной деятельности, в частности, предоставить время преподавателю для творческой работы. Данная книга основана на опыте применения тестирования для проверки знаний по предмету «Алгебра и геометрия», изучаемому на первом курсе университетов и технических вузов. Сразу же заметим, что тестирование не может заменить общение с преподавателем. Нам представляется, что экзамен должен принимать человек, а не машина. Тестирование не может определить лучшего в группе, однако оно отсеивает неподготовленных студентов. Прежде всего, тестирование ориентировано на текущий контроль и может проводиться в автоматическом режиме. Тесты можно легко внедрить в платформы, созданные для сопровождения учебного процесса. Только успешно прошедшего тест студента следует допускать к экзамену. Книга предназначена, прежде всего, для преподавателя. Авторы полагают, что она станет доступной для студентов, поэтому в ней отсутствуют ответы на большинство тестовых вопросов, за исключением вопросов, помеченных *, для которых в конце книги приведены подробные решения. Для преподавателя найти правильные ответы на тесты не составит труда. В то же время книга полезна и для студентов, поскольку может подготовить его к форме вопросов. Тесты построены так, что для правильного ответа не нужно делать сложных вычислений. Эти задачи предназначены для проверки теоретических знаний. Для правильного ответа часто нужно придумать контрпример к утверждению.

Многие существующие тесты требуют поиска единственного правильного ответа. В предлагаемом наборе используется более сложная схема. Количество правильных ответов варьируется от теста к тесту. Более того, правильный ответ может отсутствовать, поэтому во всех тестах присутствует ответ с номером 5. Он заменяет фразу «правильный ответ отсутствует».

Тесты разбиты на темы. В данной книге представлены тесты по

двум разделам: «Комплексные числа» и «Матрицы и определители». В начале каждой темы помещены обозначения.

1 Комплексные числа

Обозначения

Малые латинские буквы обозначают числа из множеств R, C (вещественных и комплексных чисел соответственно). Комплексное число $z = a + ib$ где $a, b \in R$, а $i^2 = -1$. Это алгебраическая форма записи комплексного числа, $a = Re(z)$, $b = Im(z)$ — вещественная и мнимая части числа, $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ — модуль комплексного числа. Другое представление $z = r(\cos(t) + i \sin(t))$ — тригонометрическая форма. Здесь $r \geq 0$ — модуль числа, $r = |z|$, а t — аргумент. На аргумент ограничений не накладывается. Сопряженное число задается формулой $\bar{z} = a - ib$. Комплексное число $z = a + i0$ и вещественное число a обозначаются одним и тем же символом a . На комплексной плоскости число $z = a + ib$ задаётся точкой с координатами (a, b) в прямоугольной системе координат и вектором, исходящим из начала координат в эту точку.

1.1 Тест

Известно, что $z \in R, z \neq 0$. Тогда:

1. $z = \bar{z}$;
2. $z = -\bar{z}$;
3. $z = |z|$;
4. $z^2 = |z|^2$;
5. .

1.2 Тест

Известно, что $z = \bar{z}$. Тогда:

1. $z = 0$;
2. $z = |z|$;
3. $z^2 = \bar{z}^2$;
4. $Re(z) = 0$;
5. .

1.3 Тест

Известно, что $z^{-1} = \bar{z}$. Тогда:

1. $z = \pm 1$;
2. $|z| = 1$;
3. $-z = \bar{z}$;
4. $|z + z^{-1}| \leq 1.5$;
5. .

1.4 Тест

Дано, что $z^2 = \bar{z}$. Тогда:

1. $z = \pm 1$;
2. $z = 0$;
3. Если $z \neq 0$, то $z^{-1} = \bar{z}$;
4. Если $z \neq 0$, то $|z^2 + z| < 2$;
5. .

1.5 Тест

Дано, что $z = -|z|$. Тогда:

1. $Re(z) > 0$;
2. $Im(z) > 0$;
3. Если $z \neq 0$, то $z^{-1} = z$;
4. Если $z \neq 0$, то $z^{-2} = |z|^{-2}$;
5. .

1.6 Тест

Дано, что $z = z^{-1}$. Тогда:

1. $|z| = 1$;
2. $Im(z) = 0$;
3. $z^{-1} = \bar{z}$;
4. $z^{-1} = |z|^{-1}$;
5. .

1.7 Тест

Дано, что $z = 1 + i$. Тогда:

1. z^2 — мнимое число;
2. $z^{-1} = \bar{z}$;
3. $|z^2| < 2$;
4. Существует натуральное n , для которого $z^n \in R$;
5. .

1.8 Тест

Дано, что $Re(z) = 0$. Тогда:

1. $z^2 \in R$
2. Если $z \neq 0$, то $Re(z^2) > 0$;
3. Если $z \neq 0$, то $z^{-1} = \bar{z}$;
4. Если $z \neq 0$, то $Im(z^2) > 0$;
5. .

1.9 Тест

Дано, что $z = -1 + i$. Тогда:

1. z^2 — мнимое число;
2. $z^{-1} = \bar{z}/2$;
3. $|z^{-1}| = 1/\sqrt{2}$;
4. Существует натуральное n , для которого $z^n \in R$ и $z^n < 0$;
5. .

1.10 Тест

Дано, что $z = -1 - i$. Тогда:

1. $z^4 \in R$;
2. $z^{-1} = \bar{z}/\sqrt{2}$;
3. $z(1 + i) \in R$;
4. Существует натуральное n , для которого $Re(z^n) = 0$;
5. .

1.11 Тест

Дано, что $z = r(\cos(t) + i \sin(t))$, $r > 0$. Тогда:

1. z однозначно определяет r и t ;
2. r и t однозначно определяют z ;
3. $z^{-1} = r(\cos(-t) + i \sin(-t))$;
4. $z^{-1} = r^{-1}(\cos(-t) - i \sin(-t))$;
5. .

1.12 Тест

Дано, что $z = r(\cos(t) + i \sin(t))$, $r > 0$, $z^2 = u(\cos(w) + i \sin(w))$, $u > 0$. Тогда:

1. $u = 2r$;
2. $w = 2t$;
3. $w - 2t$ кратно 2π ;
4. $2w - t$ кратно π ;
5. .

1.13 Тест

Дано, что $z = r(\cos(t) + i \sin(t))$, $r < 0$, $z = u(\cos(w) + i \sin(w))$, $u > 0$. Тогда:

1. $z^2 = r^2(\cos(2t) + i \sin(2t))$;
2. $w + t$ кратно π ;
3. $w - t$ кратно 2π ;

4. $z^2 = ru(\cos(t + w) + i \sin(t + w))$;

5. .

1.14 Тест *

Дано, что $z = -|z|(\cos(t) - i \sin(t))$. Тогда:

1. Аргумент z равен t ;

2. Аргумент z равен $-t$;

3. Аргумент z равен $t + \pi$;

4. Аргумент z равен $\pi - t$;

5. .

1.15 Тест

Дано, что $z = (-1 + i\sqrt{3})/2$. Тогда:

1. $z^{-1} = \bar{z}$;

2. $Re(z^2) > 0$;

3. $z^2 = \bar{z}$;

4. $Im(z^2) > 0$;

5. .

1.16 Тест

Дано, что $z = (1 + i\sqrt{3})/2$. Тогда:

1. $z^{-1} = \bar{z}$;

2. $Re(z^2) > 0$;

3. $z^2 = \bar{z}$;
4. $\operatorname{Im}(z^2) > 0$;
5. .

1.17 Тест

Дано, что z_1, z_2 разные корни уравнения $z^3 = 1$. Тогда:

1. $z_1 + z_2$ также корень этого уравнения;
2. $-z_1 - z_2$ также корень этого уравнения;
3. $z_1 - z_2$ также корень этого уравнения;
4. $z_1 + \bar{z}_2$ также корень этого уравнения;
5. .

1.18 Тест *

Дано, что z_1, z_2 разные корни уравнения $z^3 = -1$. Тогда:

1. $z_1 + z_2$ также корень этого уравнения;
2. $-z_1 - z_2$ также корень этого уравнения;
3. $z_1 - z_2$ также корень этого уравнения;
4. $z_1 + \bar{z}_2$ также корень этого уравнения;
5. .

1.19 Тест

Дано, что z есть корень уравнения $z^4 = 1$. Тогда:

1. $z = \pm 1$;
2. $|z| = 1$;
3. z^3 также корень этого уравнения;
4. Сумма двух разных корней не может быть корнем этого уравнения;
5. .

1.20 Тест

Дано, что z есть корень уравнения $z^4 = -1$. Тогда:

1. $z = \pm i$;
2. $|z| = 1$;
3. Заменяя каждый корень сопряженным числом, получим то же самое множество чисел;
4. Сумма двух разных корней не может быть вещественным числом;
5. .

1.21 Тест

Дано, что z_1, z_2 есть разные корни уравнения $z^4 = -1$. Тогда:

1. $z_1 z_2$ корень того же уравнения;
2. $z_1 + z_2$ корень того же уравнения;

3. $Im(z_1)Im(z_2) \neq 0$;

4. $Re(z_1)Re(z_2) \neq 0$;

5. .

1.22 Тест

Дано уравнение $z^5 = 1$. Тогда:

1. Существуют пять разных корней этого уравнения;

2. Сумма всех корней равна 0;

3. Произведение всех корней равно -1;

4. Произведение всех корней равно 1;

5. .

1.23 Тест

Дано уравнение $z^5 = -1$. Тогда:

1. Произведение всех корней равно -1;

2. Сумма всех корней равна -1;

3. Сумма всех корней равна 1;

4. Произведение всех корней равно 1;

5. .

1.24 Тест

Пусть z удовлетворяет неравенству $|z - i| < 1$. Тогда:

1. \bar{z} удовлетворяет этому неравенству;
2. z^{-1} удовлетворяет этому неравенству;
3. $-z$ удовлетворяет этому неравенству;
4. Существуют вещественные числа, удовлетворяющие этому неравенству ;
5. .

1.25 Тест

Пусть z удовлетворяет равенству $|z + 1| = 1$ Тогда:

1. \bar{z} удовлетворяет этому равенству;
2. z^2 удовлетворяет этому равенству;
3. $-z$ удовлетворяет этому равенству;
4. Если $Im(z) = 0$, то $z = 0$.
5. .

1.26 Тест *

Пусть z_1, z_2 два числа, а угол между векторами, отвечающими этим точкам, равен $\pi/2$. Тогда:

1. $Re(z_1)Re(z_2) + Im(z_1)Im(z_2) = 0$;
2. $Re(z_1)Re(z_2) - Im(z_1)Im(z_2) = 0$;
3. $Re(z_1)Im(z_2) + Im(z_1)Re(z_2) = 0$;

4. $Re(z_1)Im(z_2) - Im(z_1)Re(z_2) = 0$;

5. .

1.27 Тест

Пусть z_1, z_2 два ненулевых числа, $|z_1| = |z_2|$, а угол между векторами, отвечающими этим точкам, равен π . Тогда:

1. $z_1 = z_2$;

2. $z_1 = -z_2$;

3. $Re(z_1)Im(z_2) + Im(z_1)Re(z_2) = 0$;

4. $Re(z_1)Im(z_2) - Im(z_1)Re(z_2) = 0$;

5. .

1.28 Тест

Пусть z_1, z_2 два ненулевых числа и $z_1/z_2 \in R$. Тогда:

1. $z_1, z_2 \in R$;

2. Разность аргументов чисел кратна π ;

3. Разность аргументов чисел кратна 2π ;

4. $\bar{z}_1 z_2 \in R$;

5. .

1.29 Тест

Пусть z_1, z_2 два ненулевых числа и $z_1 z_2 \in R$. Тогда:

1. $Re(z_1)Re(z_2) \leq 0$;

2. Сумма аргументов чисел кратна π ;
3. Сумма аргументов чисел кратна 2π ;
4. $\bar{z}_1/z_2 \in R$;
5. .

1.30 Тест

Пусть $z_1 = 1 + i$ и $z_1/z_2 \in R$. Тогда:

1. $\bar{z}_1 z_2 \in R$;
2. Разность аргументов чисел кратна π ;
3. Величина $t = 5\pi/4$ является допустимым значением для аргумента z_2 ;
4. $Im(z_1 \bar{z}_2) = 0$;
5. .

1.31 Тест

Пусть $z_1 = 1 - i$ и $z_1 z_2 \in R$. Тогда:

1. $\bar{z}_1/z_2 \in R$;
2. Разность аргументов чисел кратна 2π ;
3. Величина $t = -3\pi/4$ является допустимым значением для аргумента z_2 ;
4. $Re(z_1 \bar{z}_2) = 0$;
5. .

1.32 Тест

Пусть z_1, z_2 два ненулевых числа, лежащих на одном луче, выходящем из начала координат. Тогда:

1. $Re(z_1)Re(z_2) \geq 0$;
2. $z_1/z_2 \in R$;
3. $Im(z_1)Im(z_2) \geq 0$;
4. Равенство \bar{z}_1/z_2 невозможно;
5. .

1.33 Тест

Пусть z_1, z_2 два ненулевых числа, лежащих на одной прямой, проходящей через начало координат. Тогда:

1. Если $Re(z_1) = Re(z_2) \neq 0$, то $z_1 = z_2$;
2. Если $Im(z_1) = Im(z_2)$, то $z_1 = z_2$;
3. Если $Im(z_1) = -Im(z_2)$, то $z_1 z_2 \in R$;
4. Если $z_1 z_2 \in R$, то $Im(z_1) = -Im(z_2)$;
5. .

2 Матрицы и определители

Обозначения

Матрицы обозначаются большими латинскими буквами. Для множеств вещественных и комплексных чисел резервируются символы R, C . Символ $A_{m,n}$ обозначает матрицу из m строк и n столбцов.

Если эти параметры не указаны в явной форме, то они подразумеваются по умолчанию. В квадратной матрице числа строк и столбцов совпадают, и это общее число называют порядком матрицы. Символом $A[i, j]$ обозначаем элемент матрицы стоящий на пересечении строки с номером i и столбца с номером j ; $A[i, *]$ — строку с номером i , $A[*, j]$ — столбец с номером j . Символ $A(i, j)$ обозначает матрицу, полученную из исходной вычеркиванием строки с номером i и столбца с номером j . В диагональной матрице все ненулевые элементы могут находиться только на главной диагонали; ее обозначение $D = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$. Единичная матрица это квадратная матрица вида $I = \text{diag}(1, 1, \dots, 1)$. Матрица, все элементы которой равны 0, называется нулевой и обозначается символом θ . A^T — транспонированная к A матрица. \bar{A} — комплексная матрица, все элементы которой заменены сопряженными числами. A^{-1} обратная к A матрица, $|A|$ или $\det(A)$ — определитель матрицы. Если $|A| \neq 0$, то матрица называется невырожденной. Матрица A верхнетреугольная, если $A[i, j] = 0, i > j$.

2.1 Тест

Даны две матрицы A, B . Тогда:

1. Если существуют произведения AB, BA , то обе матрицы квадратные;
2. Если существуют произведения AB, BA , и $AB = BA$, то обе матрицы квадратные;
3. Если A квадратная матрица и AB существует, то и BA существует;
4. Произведение двух квадратных матриц одного порядка существует всегда;
5. .

2.2 Тест

Даны две матрицы A, B . Тогда:

1. Если существуют произведения AB , то и произведение $A^T B^T$ существует;
2. Если существуют произведения $AB, A^T B^T$, то обе матрицы квадратные;
3. Если существуют произведения $AB, A^T B^T$, то $(A + B)^2$ существует;
4. Если существует $(A + B)^2$, то обе матрицы квадратные;
5. .

2.3 Тест

Известно, что $AB = \theta$. Тогда:

1. $A = \theta$ или $B = \theta$;
2. Обе матрицы нулевые;
3. Хотя бы одна матрица содержит нулевую строку или нулевой столбец;
4. Хотя бы одна матрица содержит нулевой элемент;
5. .

2.4 Тест

Даны две матрицы A, B . Тогда:

1. Если $(A + B)^2 = A^2 + B^2$, то $AB + BA = \theta$;
2. Если $AB + BA = \theta$, , то это квадратные матрицы;

3. Если матрицы квадратные, одного порядка и $AB = \theta$, то и $BA = \theta$;
4. Если $AB = BA = \theta$, хотя бы одна из матриц нулевая ;
5. .

2.5 Тест *

Дана $A_{2,2}$ матрица. Известно, что $A^2 = \theta$. Тогда:

1. $A = \theta$;
2. $A = A^T$;
3. A содержит нулевую строку или нулевой столбец;
4. A содержит нулевой элемент;
5. .

2.6 Тест

Для матрицы A определены две операции: $O_1(A)$ — к первой строке прибавляется вторая, а остальные строки не меняются; $O_2(A)$ — из последнего столбца вычитается предпоследний, а остальные не меняются. Тогда:

1. Равенство $O_1(O_2(A)) = O_2(O_1(A))$ выполнено всегда;
2. Это равенство справедливо всегда только для нулевой матрицы;
3. Это равенство справедливо всегда только для единичной матрицы;
4. Это равенство справедливо всегда только для диагональной матрицы;
5. .

2.7 Тест *

Для матрицы A определены две операции: $O_1(A)$ — к последней строке прибавляется все остальные, а другие строки не меняются; $O_2(A)$ — к последнему столбцу прибавляются все остальные, а другие столбцы не меняются. Тогда: :

1. Равенство $O_1(O_2(A)) = O_2(O_1(A))$ выполнено всегда;
2. Это равенство справедливо всегда только для нулевой матрицы;
3. Это равенство справедливо всегда только для единичной матрицы;
4. Это равенство справедливо всегда только для диагональной матрицы;
5. .

2.8 Тест

Определитель матрицы порядка n задается как сумма:

1. n слагаемых;
2. n^2 слагаемых;
3. $2n$ слагаемых;
4. n^n слагаемых;
5. .

2.9 Тест

При умножении матрицы порядка n на число a ее определитель:

1. Не меняется;

2. Умножается на a ;
3. Умножается на a^2 ;
4. Умножается на a^K , $K = n(n - 1)/2$;
5. .

2.10 Тест

При умножении матрицы A порядка $n > 1$ на число $c \in \mathbb{C}$ ее определитель не изменился. Тогда:

1. $c = 1$;
2. $|c| = 1$;
3. $\det(A) = 0$;
4. $c^n = 1$;
5. .

2.11 Тест

При умножении невырожденной матрицы A порядка $n > 1$ на число $c \in \mathbb{C}$ ее определитель не изменился. Тогда:

1. $c = \pm 1$;
2. $|c| = 1$;
3. $c^K = 1$, $K = n!$;
4. $c^n = 1$;
5. .

2.12 Тест

Пусть матрица A порядка n умножается на число c . Тогда справедливы соотношения:

1. $|cA| = c|A|$;
2. $|cA| = |c||A|$;
3. $|cA| = |c|^n|A|$;
4. $|cA| = c^n|A^T|$;
5. .

2.13 Тест

Имеются две квадратные матрицы A, B одного порядка. Тогда справедливы соотношения:

1. $|AB| = |B||A|$;
2. $|\bar{A}\bar{B}| = \overline{|A||B|}$;
3. $\overline{|AB|} = |\bar{A}||\bar{B}|$;
4. $|A\bar{B}| = |\bar{A}||B|$;
5. .

2.14 Тест

При транспонировании квадратной матрицы порядка n определитель:

1. Меняет знак;
2. Не меняется;

3. Умножается на $(-1)^n$;
4. Умножается на $(-1)^K$, $K = n(n - 1)/2$;
5. .

2.15 Тест

Имеются две квадратные матрицы A, B одного порядка $n > 1$. Тогда справедливы соотношения:

1. $|AB^T| = |B||A^T|$;
2. Если $|A| = |B|$, то $A = B$;
3. Равенство $|A + B| = |A| + |B|$ возможно для ненулевых матриц;
4. Если $|A + I| = |I|$, то $A = \theta$;
5. .

2.16 Тест

Имеются две вещественные квадратные матрицы A, B одного порядка $n > 1$. Тогда справедливы соотношения:

1. $|AA^T| \geq 0$;
2. Если матрицы не вырождены, то $|A + B| \neq 0$;
3. Если $|A| \neq 0$, то $|A + I| \neq 0$;
4. $|(A + B)^2| = |A|^2 + |B|^2 + 2|AB|$;
5. .

2.17 Тест

Пусть матрица B порядка n получается из матрицы A путем записи строк в обратном порядке. Тогда:

1. $|B| = |A|$;
2. $|B| = -|A|$, если n нечетное;
3. $|B| = (-1)^K |A|$, $K = n(n-1)/2$;
4. $|B| = (-1)^K |A|$, $K = n(n+1)/2$;
5. .

2.18 Тест

Пусть матрица B порядка n получается из матрицы A путем записи столбцов в обратном порядке. Тогда:

1. $|B| = |\det(A)|$;
2. $|B| = -|A|$, если n четное;
3. $|B| = (-1)^K |A|$, $K = n(n-1)/2$;
4. $|B| = 0$, если $|A| = 0$;
5. .

2.19 Тест

Пусть в матрице A порядка n первая строка $A[1, *]$ состоит из единиц. Положим $b_k = (-1)^k |A(1, k)|$. Тогда:

1. $|A| = \sum_k b_k$;
2. $-|A| = \sum_k b_k$;

3. $|A| = \sum_k b_k (-1)^k;$

4. $-|A| = n \sum_k b_k;$

5. .

2.20 Тест

Пусть в матрице A порядка n последний столбец $A[* , n]$ состоит из единиц. Положим $b_k = (-1)^k |A(k, n)|$. Тогда:

1. $|A| = \sum_k b_k;$

2. $|A| = \sum_k b_k$, если n четное;

3. $|A| = \sum_k b_k$, если n нечетное;

4. $-|A| = n \sum_k b_k;$

5. .

2.21 Тест

Пусть в матрице A порядка n $A[1, *], A[2, *]$ состоят из единиц. Положим $b_k = (-1)^k |A(k, n)|$. Тогда:

1. $|A| = \sum_k b_k;$

2. $|A| = \sum_k b_k$, если n четное;

3. $|A| = \sum_k b_k (-1)^k;$

4. $-|A| = n \sum_k b_k;$

5. .

2.22 Тест

Пусть в матрице A порядка $n > 1$ $A[1, 1] = 1$, а все остальные элементы в первой строке нулевые. Тогда:

1. $|A| \neq 0$;
2. Если заменить элемент $A[n, 1]$ на $A[n, 1] + 1$, то определитель не изменится;
3. Если заменить элемент $A[n, 1]$ на $A[n, 1] + 1$, то определитель увеличится на 1;
4. Если заменить элемент $A[1, 1]$ на $A[1, 1] + 1$, то определитель увеличится вдвое;
5. .

2.23 Тест

Пусть в матрице A порядка $n > 1$ $A[n, n] = 2$, а все остальные элементы в последнем столбце нулевые. Тогда:

1. $|A| \neq 0$;
2. Если заменить элемент $A[n, 1]$ на $A[n, 1] + 1$, то определитель не изменится;
3. Если заменить элемент $A[n, 1]$ на $A[n, 1] + 1$, то определитель увеличится на 1;
4. Если заменить элемент $A[n, n]$ на $A[n, n] + 1$, то определитель увеличится вдвое;
5. .

2.24 Тест

Пусть в матрице A порядка $n > 1$ строка $A[1, *]$ состоит из двоек. Положим $b_k = (-1)^k |A(1, k)|$. Тогда:

1. $|A| = \sum_k b_k$;
2. $|A| = -2 \sum_k b_k$;
3. $-|A| = 2^n \sum_k b_k$;
4. $|A| = (-1)^n 2 \sum_k b_k$;
5. .

2.25 Тест

Пусть в матрице A порядка $n > 1$ строка $A[n, *]$ состоит из двоек. Положим $b_k = (-1)^k |A(n, k)|$. Тогда:

1. $|A| = \sum_k b_k$;
2. $|A| = -2 \sum_k b_k$;
3. $-|A| = 2^n \sum_k b_k$;
4. $|A| = (-1)^{n+1} 2 \sum_k b_k$;
5. .

2.26 Тест

Пусть в матрице A порядка $n > 1$ после циклической перестановки строк (первая строка стала последней) определитель не изменился. Тогда:

1. $|A| = 0$;
2. n — четное число;

3. n — нечетное число;
4. $n(n - 1)/2$ — четное число;
5. .

2.27 Тест

Пусть в матрице A порядка $n > 1$ $A[i, j] = 1$, $j > 1$, а остальные элементы i -ой строки нулевые. Положим $b_k = (-1)^k |A(i, k)|$. Тогда:

1. $|A| = \sum_k b_k$;
2. $|A| = (-1)^i \sum_k b_k$;
3. Если заменить элемент $A[i, j]$ на $A[i, j + |A|]$ то определитель увеличится (уменьшится) на $|A|^2$;
4. Если заменить элемент $A[i, j]$ на $A[i, j + 1]$ то определитель увеличится (уменьшится) на $|A|$;
5. .

2.28 Тест

Пусть в матрице A порядка $n > 1$ только n элементов отличны от 0. Тогда:

1. Равенство $|A| = 0$ возможно;
2. Неравенство $|A| \neq 0$ возможно;
3. Если к первой строке прибавить все остальные строки и строка станет ненулевой, то $|A| \neq 0$;
4. Если к первой строке прибавить все остальные строки и получившаяся строка не содержит нулей, то $|A| \neq 0$;
5. .

2.29 Тест

Пусть в матрице A порядка $n > 1$ только n элементов отличны от 0, и $|A| \neq 0$. Тогда:

1. Все ненулевые элементы стоят на главной либо побочной диагоналях;
2. Переставляя строки и столбцы, можно поместить все ненулевые элементы на главную диагональ;
3. Переставляя только строки, можно поместить все ненулевые элементы на главную диагональ
4. Если все ненулевые элементы положительны и расположены на побочной диагонали, то $|A| < 0$;
5. .

2.30 Тест

Пусть в матрице A порядка $n > 1$ только $n + 1$ элемент отличен от 0, и $|A| \neq 0$. Тогда:

1. Все элементы на главной либо побочной диагоналях ненулевые;
2. Переставляя строки и столбцы, можно поместить любые n ненулевых элементов на главную диагональ;
3. Переставляя только строки, можно поместить любые n ненулевых элементов на главную диагональ;
4. Всегда существует ненулевой элемент, меняя который нельзя изменить определитель;
5. .

2.31 Тест

Известно, что в матрице A порядка $n > 1$ только $n + 2$ элемента отличны от 0, и все они равны 1. Тогда:

1. Если главная диагональ матрицы заполнена единицами, то $|A| \neq 0$;
2. Пусть главная диагональ матрицы заполнена единицами. Прибавим к последней строке все остальные. Если новая строка содержит две двойки, то $|A| = 0$;
3. Прибавим к последней строке все остальные. Если новая строка содержит тройку, то $|A| = 0$;
4. Прибавим к последней строке все остальные. Если новая строка содержит три двойки, то $|A| = 0$;
5. .

2.32 Тест *

Известно, что в матрице A порядка $n > 1$ только $n + 2$ элемента отличны от 0, и все они равны 1. Тогда для определителя возможны значения:

1. 0;
2. ± 1 ;
3. ± 2 ;
4. ± 3 ;
5. .

2.33 Тест

Известно, что в матрице A порядка $n > 1$ только $n + 2$ элемента отличны от 0, и все они равны ± 1 . Тогда для определителя возможны значения:

1. 0;
2. ± 1 ;
3. ± 2 ;
4. ± 3 ;
5. .

2.34 Тест

Даны две квадратные матрицы A, B одного порядка, причем $AB = I$. Тогда:

1. Это единичные матрицы;
2. Если одна из них единичная матрица, то и вторая тоже;
3. $|A| = |B| = 1$;
4. $|A||B| = 1$;
5. .

2.35 Тест

Даны две квадратные матрицы A, B одного порядка, причем $AB = I$. Тогда:

1. $BA = I$;
2. $B^{-1}A^{-1} = I$;

3. $B^T A^T = I$;
4. $B^{T^{-1}} A^{-1T} = I$;
5. .

2.36 Тест

Даны две квадратные матрицы A, B одного порядка, причем $AB = I$. Тогда:

1. $BA = AB$;
2. $|A| \neq 0$;
3. $|B| = 1/|A|$;
4. $A^2 B^2 = I$;
5. .

2.37 Тест

Известно, что квадратная матрица A удовлетворяет уравнению $AA^T = I$. Тогда:

1. $A = A^T$;
2. $|A| = \pm 1$;
3. $A^2 = I$;
4. $AA^T A = A$;
5. .

2.38 Тест *

Известно, что квадратная матрица второго порядка удовлетворяет уравнению $A = A^{-1}$. Тогда:

1. $A = I$;
2. A — диагональная матрица;
3. $A = A^T$;
4. $|A| = \pm 1$;
5. .

2.39 Тест

Известно, что квадратная матрица второго порядка удовлетворяет уравнению $A = A^{-1}$. Тогда:

1. Если $|A| = 1$, то это диагональная матрица;
2. Если $|A| = -1$, то это диагональная матрица;
3. $A = A^T$;
4. Матрица содержит нулевые элементы;
5. .

2.40 Тест

Известно, что квадратная матрица порядка $n > 1$ удовлетворяет уравнению $A^2 = A$. Тогда:

1. $A = \theta$;
2. Если $|A| = 0$, то $A = \theta$;

3. Если $|A| \neq 0$, то $A = I$;
4. A — диагональная матрица;
5. .

2.41 Тест

Известно, что квадратная матрица A второго порядка удовлетворяет уравнению $A^3 = A$. Тогда:

1. Если $|A| = 1$, то $A = A^{-1}$;
2. Если $|A| = 0$, то $A = \theta$;
3. Если $|A| = -1$, то $A = A^T$;
4. Матрица содержит нулевые элементы;
5. .

2.42 Тест

Дана квадратная матрица A порядка $n > 1$. Пусть $B = A^{-1}$. Известно, что столбец $B[* , 1]$ состоит из единиц. Тогда :

1. Все элементы строки $A[1, *]$ равны между собой;
2. Если элементы строки $A[1, *]$ равны между собой, то $A[1, 1] = 1/n$;
3. $\sum_k A[i, k] = 0$, если $i > 1$;
4. Строка $A[i, *]$, $i > 1$ не может состоять из одинаковых элементов;
5. .

2.43 Тест

Дана квадратная матрица A порядка $n > 1$. Пусть $B = A^{-1}$. Известно, что строка $A[1, *]$ состоит из единиц. Тогда :

1. Все элементы столбца $B[*, 1]$ равны между собой;
2. $\sum_k B[k, 1] = 1$;
3. $\sum_k B[k, 2] = 0$;
4. Столбец $B[*, i]$, $i > 1$ не может состоять из одинаковых элементов;
5. .

2.44 Тест

Пусть A, B — две верхнетреугольные матрицы одного порядка. Тогда:

1. AB — также верхнетреугольная матрица ;
2. Если $|A| \neq 0$, то A^{-1} — тоже верхнетреугольная матрица;
3. Если $|A| \neq 0$, то $(A^T)^{-1}$ — тоже верхнетреугольная матрица
4. $A + B$ — тоже верхнетреугольная матрица;
5. .

2.45 Тест

Пусть A, B — две верхнетреугольные матрицы одного порядка $n > 1$. Тогда:

1. $|A + B| = |A| + |B|$;
2. $|A + I| = |A| + 1$;

3. Ситуация $|A| = 0, |B| = 0, |A + B| \neq 0$ невозможна;
4. Ситуация $|A| \neq 0, |B| \neq 0, |A + B| = 0$ невозможна;
5. .

2.46 Тест

Пусть A, B — две верхнетреугольные матрицы одного порядка $n > 1$. Тогда:

1. $|A + B| = |A| + |B|$;
2. $|A + I| = |A| + 1$;
3. Ситуация $|A| = 0, |B| = 0, |A + B| \neq 0$ невозможна;
4. Ситуация $|A| \neq 0, |B| \neq 0, |A + B| = 0$ невозможна;
5. .

2.47 Тест

Пусть A верхнетреугольная невырожденная матрица порядка $n > 1$, в которой только $n + 1$ ненулевой элемент. Тогда:

1. A^{-1} содержит только $n + 1$ ненулевой элемент;
2. $|A + A^{-1}| \neq 0$;
3. $|A^2 + A^{-2}| \neq 0$;
4. $|A^3 + A^{-2}| \neq 0$;
5. .

2.48 Тест

Пусть A верхнетреугольная матрица порядка $n > 1$, в которой все ненулевые элементы равны ± 1 . Тогда:

1. $|A| \neq 0$;
2. $|A + A^{-1}| \neq 0$;
3. $|A^2 + A^{-2}| \neq 0$;
4. $|A^3 + A^{-2}| \neq 0$;
5. .

3 Ответы

Тест 1.14

Решение. Приведем заданное число к стандартной тригонометрической форме: сначала внесем минус в скобки, получим $z = |z|(-\cos(t) + i \sin(t))$, а затем применим формулы приведения: $-\cos(t) = \cos(\pi - t)$, $\sin(t) = \sin(\pi - t)$. Получаем исходное число в стандартной тригонометрической форме $z = |z|(\cos(\pi - t) + i \sin(\pi - t))$.

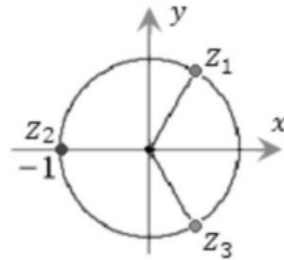
Правильный ответ: 4.

Тест 1.18

Решение. Корни исходного уравнения располагаются на окружности радиуса 1 в вершинах правильного треугольника:

Таким образом, сумма трех различных корней равна нулю: $z_1 + z_2 + z_3 = 0$. Поэтому любой из кубических корней из -1 можно выразить через пару оставшихся: $z_3 = -z_1 - z_2$. . Отрицательные ответы на другие возможности вытекают из приведенного рисунка.

Правильный ответ: 2.



Тест 1.26

Решение. Пусть t – аргумент первого числа в тригонометрической форме, а $\pi/2+t$ – аргумент второго числа. Тогда, применяя формулы приведения, представим первое число как $z_1 = r_1(\cos(t) + i \sin(t))$, а второе – как $z_2 = r_2(-\sin(t) + i \cos(t))$. Для проверки подставляем в приведенные в пунктах 1-4 выражения действительные и мнимые части этих чисел.

Правильный ответ: 1.

Тест 2.5

Решение. Нулевая матрица удовлетворяет условию задачи. Попробуем найти ненулевые решения.

Пусть $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ искомая ненулевая матрица. Возводим в квадрат, получаем нулевую матрицу $\begin{bmatrix} a^2 + bc & (a+d)b \\ (a+d)c & d^2 + bc \end{bmatrix}$, тогда b и c не могут одновременно равняться нулю. Отсюда, $a = -d$.

Если $b = 0, c \neq 0$, то получаем, например, матрицы вида $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{bmatrix}$.

Если $b \neq 0, c \neq 0$, то $a \neq 0, d \neq 0$ и получаем, например, матрицы вида $\begin{bmatrix} a & a^2/c \\ -c & -a \end{bmatrix}$. Последняя матрица не удовлетворяет ни одному из пунктов.

Правильный ответ: 5.

Тест 2.7

Любую линейную комбинацию строк матрицы A можно получить умножением ее на подходящую матрицу L слева, а линейную комбинацию столбцов — умножением на подходящую матрицу R справа. Умножение матриц ассоциативно: $(LA)R = L(AR)$.

Правильный ответ: 1.

Тест 2.32

Решение.

Если $n = 2$, то определитель равен 0, то есть пункт 1 возможен.

Пусть $n > 2$. Если имеются нулевые столбцы, то определитель равен 0 (пункт 1). В противном случае существует столбец с единственной 1. Вычеркивая строку и столбец с этой единицей получаем определитель меньшего порядка и с меньшим числом единиц. Повторяем процедуру и таким образом дело сводится к определителю второго порядка, в котором 1,2,3 или 4 единицы.

Правильные ответ: 1 и 2.

Тест 2.38

Решение. Из условия задачи получаем $A^2 = I$ или, переходя к определителям, $|A|^2 = 1$. Отсюда следует истинность пункта 4.

Матрица $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ удовлетворяет условию задачи, но не удовлетворяет пунктам 1,2 и 3.

Правильный ответ: 4.

Учебное издание

Латышов Рустам Хафизович, **Столов** Евгений Львович

Тесты по курсу "Алгебра и геометрия"
Комплексные числа, матрицы и определители

Учебное пособие