

ТОПОЛОГИИ ЛОКАЛЬНОЙ СХОДИМОСТИ ПО МЕРЕ В АЛГЕБРАХ ИЗМЕРИМЫХ ОПЕРАТОРОВ

А. М. Бикчентаев

Аннотация. Пусть алгебра фон Неймана \mathcal{M} операторов действует в гильбертовом пространстве \mathcal{H} , τ — точный нормальный полуконечный след на \mathcal{M} , $S(\mathcal{M}, \tau)$ — *-алгебра τ -измеримых операторов. Получено достаточное условие положительности эрмитова оператора из $S(\mathcal{M}, \tau)$ в терминах топологии $t_{\tau l}$ τ -локальной сходимости по мере. Доказано, что *-идеал $\mathcal{F}(\mathcal{M}, \tau)$ элементарных операторов $t_{\tau l}$ -плотен в $S(\mathcal{M}, \tau)$. Если топология t_{τ} локально выпукла, то $t_{\tau l}$ локально выпукла; если топология $t_{\tau l}$ локально выпукла, то топология $t_{w\tau l}$ слабо τ -локальной сходимости по мере локально выпукла. Предложен метод построения F -нормированных идеальных пространств (далее F -НИП) на (\mathcal{M}, τ) , исходя из заданного F -НИП, сохраняющий (при наличии у исходного) полноту, локальную выпуклость, локальную ограниченность, нормируемость. Пусть \mathcal{X} и \mathcal{Y} — F -НИП на (\mathcal{M}, τ) и $A\mathcal{X} \subseteq \mathcal{Y}$ для некоторого оператора $A \in S(\mathcal{M}, \tau)$. Тогда мультипликатор $\mathbf{M}_A X = AX$, $\mathbf{M}_A : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$, непрерывен. В частности, при $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{Y}$ естественное вложение \mathcal{X} в \mathcal{Y} непрерывно. Исследованы свойства убывающей последовательности F -НИП на (\mathcal{M}, τ) .

DOI 10.33048/smzh.2060.01.001

Ключевые слова: гильбертово пространство, линейный оператор, алгебра фон Неймана, нормальный след, измеримый оператор, локальная сходимость по мере, локально выпуклое пространство.

Введение

Пусть алгебра фон Неймана \mathcal{M} операторов действует в гильбертовом пространстве \mathcal{H} , τ — точный нормальный полуконечный след на \mathcal{M} с $\tau(I) = +\infty$. Эта работа продолжает исследования свойств топологий $t_{\tau l}$ τ -локальной и $t_{w\tau l}$ слабо τ -локальной сходимости по мере на *-алгебре $S(\mathcal{M}, \tau)$ τ -измеримых операторов, начатые в [1–10]. Хорошо известно, что топологии $t_{\tau l}$ и $t_{w\tau l}$ лучше согласованы с порядковой структурой эрмитовой части *-алгебры $S(\mathcal{M}, \tau)$, чем классическая топология t_{τ} сходимости по мере [2, 6, 7, 9].

В данной работе установлено одно достаточное условие положительности эрмитова оператора из $S(\mathcal{M}, \tau)$ в терминах топологии $t_{\tau l}$ (теорема 1). Поиск таких условий является актуальной задачей и привлекает внимание большого числа исследователей (см., например, [11–13] и библиографию в них). Хорошо известно, что каждый τ -измеримый оператор является линейной комбинацией

Работа выполнена в рамках реализации Программы развития Научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа (соглашение № 075–02–2022–882).

четырёх положительных τ -измеримых операторов; для доказательства неравенства треугольника для F -нормированного идеального пространства (далее F -НИП) на (\mathcal{M}, τ) в силу операторного неравенства [14]

$$|X + Y| \leq U|X|U^* + V|Y|V^*, \quad X, Y \in S(\mathcal{M}, \tau), \quad |X| = \sqrt{X^*X},$$

$U, V \in \mathcal{M}$ — некоторые подходящие частичные изометрии, достаточно проверить неравенство треугольника для F -нормы только для пар положительных τ -измеримых операторов.

Доказано, что $*$ -идеал $\mathcal{F}(\mathcal{M}, \tau)$ элементарных операторов $t_{\tau l}$ -плотен в $S(\mathcal{M}, \tau)$ (теорема 2). Поэтому пространство $L_p(\mathcal{M}, \tau)$, $0 < p < \infty$, $t_{\tau l}$ -плотно в $S(\mathcal{M}, \tau)$ (следствие 1). Напомним, что t_{τ} -замыкания $*$ -идеала $\mathcal{F}(\mathcal{M}, \tau)$ и пространств $L_p(\mathcal{M}, \tau)$, $0 < p < \infty$, совпадают с $*$ -идеалом $S_0(\mathcal{M}, \tau)$ всех τ -компактных операторов.

Если топология t_{τ} локально выпукла, то $t_{\tau l}$ локально выпукла; если топология $t_{\tau l}$ локально выпукла, то $t_{w\tau l}$ локально выпукла (теорема 3). Предложен метод построения «весовых» F -НИП на (\mathcal{M}, τ) исходя из заданного F -НИП, сохраняющий (при наличии у исходного) полноту, локальную выпуклость, локальную ограниченность, нормируемость (теорема 4, следствия 4 и 5). «Весовые» F -НИП на абелевой алгебре фон Неймана (тогда $\mathcal{M} \simeq L^{\infty}(\Omega, \Sigma, \mu)$ и $\tau(f) = \int_{\Omega} f d\mu$, где (Ω, Σ, μ) — локализуемое пространство с мерой) естественным образом возникают при исследовании интегральных операторов.

Пусть \mathcal{X} и \mathcal{Y} — F -НИП на (\mathcal{M}, τ) и $A\mathcal{X} \subseteq \mathcal{Y}$ для некоторого оператора $A \in S(\mathcal{M}, \tau)$. Тогда мультипликатор $\mathbf{M}_A X = AX$, $\mathbf{M}_A : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$, непрерывен. В частности, при $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{Y}$ естественное вложение \mathcal{X} в \mathcal{Y} непрерывно (теорема 5), что дает новое доказательство (основной) леммы 4.3 из [15]. В теореме 6 исследованы свойства убывающей последовательности F -НИП на (\mathcal{M}, τ) .

Большая часть результатов являются новыми и для $*$ -алгебры $\mathcal{M} = \mathcal{B}(\mathcal{H})$ всех ограниченных линейных операторов в \mathcal{H} , снабженной каноническим следом $\tau = \text{tr}$.

1. Обозначения и определения

Пусть \mathcal{M} — алгебра фон Неймана операторов в гильбертовом пространстве \mathcal{H} , \mathcal{M}^{pr} — решетка проекторов ($P = P^2 = P^*$) в \mathcal{M} , I — единица \mathcal{M} , $P^{\perp} = I - P$ для $P \in \mathcal{M}^{\text{pr}}$, \mathcal{M}^+ — конус положительных элементов из \mathcal{M} . Проектор $P \in \mathcal{M}$ называется *минимальным* или *атомом*, если $Q \in \mathcal{M}^{\text{pr}}$, $Q \leq P$ влечет $Q = 0$ или $Q = P$. Алгебра фон Неймана \mathcal{M} называется *атомической*, если каждый ненулевой проектор в \mathcal{M} мажорирует ненулевой минимальный проектор.

Отображение $\varphi : \mathcal{M}^+ \rightarrow [0, +\infty]$ называется *следом*, если $\varphi(X+Y) = \varphi(X) + \varphi(Y)$, $\varphi(\lambda X) = \lambda\varphi(X)$ для всех $X, Y \in \mathcal{M}^+$, $\lambda \geq 0$ (при этом $0 \cdot (+\infty) \equiv 0$) и $\varphi(Z^*Z) = \varphi(ZZ^*)$ для всех $Z \in \mathcal{M}$. След φ называется *точным*, если $\varphi(X) > 0$ для всех $X \in \mathcal{M}^+$, $X \neq 0$; *полуконачным*, если $\varphi(X) = \sup\{\varphi(Y) : Y \in \mathcal{M}^+, Y \leq X, \varphi(Y) < +\infty\}$ для каждого $X \in \mathcal{M}^+$; *нормальным*, если $X_i \nearrow X$ ($X_i, X \in \mathcal{M}^+$) $\Rightarrow \varphi(X) = \sup \varphi(X_i)$ (см. [16, гл. V, § 2]).

Оператор в \mathcal{H} (не обязательно ограниченный или плотно определенный) называется *присоединенным к алгебре фон Неймана \mathcal{M}* , если он перестановочен с любым унитарным оператором из коммутанта \mathcal{M}' алгебры \mathcal{M} . Далее всюду τ — точный нормальный полуконачный след на \mathcal{M} , $\mathcal{M}_{\tau}^{\text{pr}} = \{P \in \mathcal{M}^{\text{pr}} : \tau(P) < \infty\}$.

Замкнутый оператор X , присоединенный к \mathcal{M} , имеющий всюду плотную в \mathcal{H} область определения $\mathcal{D}(X)$, называется τ -измеримым, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такой $P \in \mathcal{M}^{\text{pr}}$, что $P\mathcal{H} \subset \mathcal{D}(X)$ и $\tau(P^\perp) < \varepsilon$. Множество $S(\mathcal{M}, \tau)$ всех τ -измеримых операторов является $*$ -алгеброй относительно перехода к сопряженному оператору, умножению на скаляр и операций сильного сложения и умножения, получаемых замыканием обычных операций [17, гл. IX]. Для семейства $\mathcal{L} \subset S(\mathcal{M}, \tau)$ обозначим через \mathcal{L}^+ и \mathcal{L}^{h} его положительную и эрмитову части соответственно. Частичный порядок в $S(\mathcal{M}, \tau)^{\text{h}}$, порожденный собственным конусом $S(\mathcal{M}, \tau)^+$, будем обозначать через \leq . Если $X \in S(\mathcal{M}, \tau)$ и $X = U|X|$ — полярное разложение X , то $U \in \mathcal{M}$ и $|X| = \sqrt{X^*X} \in S(\mathcal{M}, \tau)^+$.

В $*$ -алгебре $S(\mathcal{M}, \tau)$ вводится топология t_τ сходимости по мере [17, гл. IX, § 2], фундаментальную систему окрестностей нуля которой образуют множества

$$\mathcal{U}(\varepsilon, \delta) = \{X \in S(\mathcal{M}, \tau) : \exists Q \in \mathcal{M}^{\text{pr}} (\|XQ\| \leq \varepsilon \text{ и } \tau(Q^\perp) \leq \delta)\}, \quad \varepsilon > 0, \delta > 0.$$

Известно, что $\langle S(\mathcal{M}, \tau), t_\tau \rangle$ является полной метризуемой топологической $*$ -алгеброй, причем \mathcal{M} плотно в $\langle S(\mathcal{M}, \tau), t_\tau \rangle$. Для обозначения сходимости сети $\{X_j\}_{j \in J} \subset S(\mathcal{M}, \tau)$ к $X \in S(\mathcal{M}, \tau)$ в топологии t_τ используется запись $X_j \xrightarrow{\tau} X$; при этом говорят, что $\{X_j\}_{j \in J}$ сходится к X по мере τ .

Через $\mu(X, t)$ обозначим перестановку оператора $X \in S(\mathcal{M}, \tau)$, т. е. невозрастающую непрерывную справа функцию $\mu(X, \cdot) : (0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, заданную формулой

$$\mu(X, t) = \inf\{\|XP\| : P \in \mathcal{M}^{\text{pr}}, \tau(P^\perp) \leq t\}, \quad t > 0.$$

Множество τ -компактных операторов $S_0(\mathcal{M}, \tau) = \{X \in S(\mathcal{M}, \tau) : \lim_{t \rightarrow \infty} \mu(X, t) = 0\}$ является идеалом в $S(\mathcal{M}, \tau)$, множество элементарных операторов $\mathcal{F}(\mathcal{M}, \tau) = \{X \in \mathcal{M} : (\exists s > 0) \mu(X, t) = 0 \forall t > s\}$ — идеалом в \mathcal{M} . Топология t_τ определяется и F -нормой $\rho_\tau(X) = \inf_{t > 0} \max\{t, \mu(X, t)\}$, $X \in S(\mathcal{M}, \tau)$.

Лемма 1 [18]. Пусть $X, Y, X_j \in S(\mathcal{M}, \tau)$, $j \in J$. Тогда

- (i) $\mu(X, t) = \mu(|X|, t) = \mu(X^*, t)$ для всех $t > 0$;
- (ii) $\mu(X^*X, t) = \mu(XX^*, t)$ для всех $t > 0$;
- (iii) если $|X| \leq |Y|$, то $\mu(X, t) \leq \mu(Y, t)$ для всех $t > 0$;
- (iv) если $X \in \mathcal{M}$, то $\lim_{t \rightarrow +0} \mu(X, t) = \sup_{t > 0} \mu(X, t) = \|X\|$;
- (v) $\mu(XY, t + s) \leq \mu(X, t)\mu(Y, s)$ для всех $t, s > 0$;
- (vi) $\mu(|X|^\alpha, t) = \mu(X, t)^\alpha$ для всех $\alpha > 0$ и $t > 0$;
- (vii) $X_j \xrightarrow{\tau} X \iff \mu(X_j - X, t) \rightarrow 0$ для каждого $t > 0$.

Пусть m — линейная мера Лебега на \mathbb{R} . Некоммутативное L_p -пространство Лебега ($0 < p < \infty$), ассоциированное с (\mathcal{M}, τ) , может быть определено как

$$L_p(\mathcal{M}, \tau) = \{X \in S(\mathcal{M}, \tau) : \mu(X, \cdot) \in L_p(\mathbb{R}^+, m)\}$$

с F -нормой (нормой для $1 \leq p < \infty$) $\|X\|_p = \|\mu(X, \cdot)\|_p$, $X \in L_p(\mathcal{M}, \tau)$.

2. Топологии сходимости локально по мере на $S(\mathcal{M}, \tau)$

Топология t_τ сходимости по мере может быть локализована следующим образом. Для $\varepsilon, \delta > 0$ и $P \in \mathcal{M}_\tau^{\text{pr}}$ определим множества

$$\mathcal{V}(\varepsilon, \delta, P) = \{X \in S(\mathcal{M}, \tau) : \exists Q \in \mathcal{M}^{\text{pr}} (Q \leq P, \|XQ\| \leq \varepsilon \text{ и } \tau(P - Q) \leq \delta)\},$$

$\mathscr{W}(\varepsilon, \delta, P) = \{X \in S(\mathcal{M}, \tau) : (\exists Q \in \mathcal{M}^{\text{pr}}) (Q \leq P, \|QXQ\| \leq \varepsilon \text{ и } \tau(P - Q) \leq \delta)\}$.

Пространство $S(\mathcal{M}, \tau)$ становится топологическим векторным пространством относительно топологии $t_{\tau l}$ τ -локальной (соответственно $t_{w\tau l}$ слабо τ -локальной) сходимости по мере, базис окрестностей нуля которой образует семейство $\Theta = \{\mathscr{V}(\varepsilon, \delta, P)\}_{\varepsilon, \delta > 0; P \in \mathcal{M}_\tau^{\text{pr}}}$ (соответственно $\Theta = \{\mathscr{W}(\varepsilon, \delta, P)\}_{\varepsilon, \delta > 0; P \in \mathcal{M}_\tau^{\text{pr}}}$). Будем использовать символ $X_i \xrightarrow{\tau l} X$ (соответственно $X_i \xrightarrow{w\tau l} X$) для обозначения $t_{\tau l}$ -сходимости (соответственно $t_{w\tau l}$ -сходимости). С помощью стандартной техники редуцирования алгебр фон Неймана можно показать (см. также [3, 6]), что $X_i \xrightarrow{\tau l} X$ (соответственно $X_i \xrightarrow{w\tau l} X$) тогда и только тогда, когда $X_i P \xrightarrow{\tau} XP$, ср. с [1, с. 114] (соответственно $PX_i P \xrightarrow{\tau} PXP$, ср. с [1, с. 114; 2, с. 746]) для всех $P \in \mathcal{M}_\tau^{\text{pr}}$. Ясно, что $t_{w\tau l} \leq t_{\tau l} \leq t_\tau$ и $t_{w\tau l}$ -сходимость совпадает со сходимостью по мере относительно $\langle S(P\mathcal{M}P) = PS(\mathcal{M}, \tau)P, t_{\tau(P.P)} \rangle$ для всех $P \in \mathcal{M}_\tau^{\text{pr}}$. Топологии $t_{\tau l}$ и $t_{w\tau l}$ можно определить и в терминах невозрастающих перестановок. Семейство $\tilde{\Theta} = \{\tilde{\mathscr{V}}(\varepsilon, \delta, P)\}_{\varepsilon, \delta > 0; P \in \mathcal{M}_\tau^{\text{pr}}}$, где $\tilde{\mathscr{V}}(\varepsilon, \delta, P) = \{X \in S(\mathcal{M}, \tau) : \mu(XP, \delta) < \varepsilon\}$, также задает базис окрестностей нуля для $t_{\tau l}$. Если $\tau(I) < \infty$, то $t_\tau = t_{\tau l} = t_{w\tau l}$.

Если $\mathcal{M} = \mathcal{B}(\mathcal{H})$ — *-алгебра всех ограниченных линейных операторов в \mathcal{H} и $\tau = \text{tr}$ — канонический след, то $S(\mathcal{M}, \tau)$, $S_0(\mathcal{M}, \tau)$, $L_p(\mathcal{M}, \tau)$ и $\mathcal{F}(\mathcal{M}, \tau)$ совпадают с $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, с идеалом $\mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H})$ компактных операторов, с идеалом $\mathfrak{S}_p(\mathcal{H})$ Шаттена — фон Неймана и с идеалом $\mathcal{F}(\mathcal{H})$ конечномерных операторов в \mathcal{H} соответственно. Топология t_τ совпадает с топологией нормы $\|\cdot\|$, $t_{\tau l}$ (соответственно $t_{w\tau l}$) совпадает с топологией сильной (соответственно слабой) операторной сходимости. Имеем $\mu(X, t) = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(X) \chi_{[n-1, n)}(t)$, $t > 0$, где $\{s_n(X)\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность s -чисел вполне непрерывного оператора X ; χ_A — индикатор множества $A \subset \mathbb{R}$.

Если \mathcal{M} — абелева (т. е. коммутативна), то $\mathcal{M} \simeq L^\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$ и $\tau(f) = \int_\Omega f d\mu$, где (Ω, Σ, μ) — локализуемое пространство с мерой, алгебра $S(\mathcal{M}, \tau)$ совпадает с алгеброй всех измеримых комплексных функций f на (Ω, Σ, μ) , которые ограничены всюду, кроме множества конечной меры. При этом топология t_τ является обычной топологией сходимости по мере и $t_{\tau l}$ совпадает с $t_{w\tau l}$ и с известной топологией сходимости по мере на множествах конечной меры.

Теорема 1. Пусть $X, Y \in S(\mathcal{M}, \tau)$, $Y = Y^*$ и $X^n \xrightarrow{\tau l} 0$ при $n \rightarrow \infty$. Если $X^*YX \leq Y$, то $Y \geq 0$.

Доказательство. Предположение $X^*YX \leq Y$ влечет цепочку неравенств ■

$$Y \geq X^*YX \geq X^{*2}YX^2 \geq \dots \geq X^{*n}YX^n \geq \dots$$

Пусть $Y = Y_+ - Y_-$ — разложение Жордана на положительную и отрицательную части с $Y_+Y_- = 0$ и $|Y| = Y_+ + Y_-$. Для произвольного проектора $P \in \mathcal{M}_\tau^{\text{pr}}$ запишем равенства

$$PX^{*n}YX^nP = PX^{*n}Y_+X^nP - PX^{*n}Y_-X^nP, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Для каждого $t > 0$ в силу пп. (ii), (vi) и (v) леммы 1 имеем

$$\begin{aligned} \mu(PX^{*n}Y_+X^nP, t) &= \mu(\sqrt{Y_+}X^nP, t)^2 \\ &\leq \mu(\sqrt{Y_+}, t/2)^2 \mu(X^nP, t/2)^2 \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Следовательно, $X^{*n}Y_+X^n \xrightarrow{w\tau^l} 0$ при $n \rightarrow \infty$ (см. п. (vii) леммы 1). Аналогично получаем $X^{*n}Y_-X^n \xrightarrow{w\tau^l} 0$ при $n \rightarrow \infty$. В силу $t_{w\tau^l}$ -непрерывности операции сложения $(A, B) \mapsto A+B$ из $S(\mathcal{M}, \tau) \times S(\mathcal{M}, \tau)$ в $S(\mathcal{M}, \tau)$ имеем $X^{*n}YX^n \xrightarrow{w\tau^l} 0$ при $n \rightarrow \infty$. Таким образом, $Y \geq 0$. \square

Теорема 2. **-Идеал $\mathcal{F}(\mathcal{M}, \tau)$ t_{τ^l} -плотен в $S(\mathcal{M}, \tau)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. ШАГ 1. Пусть $X \in S(\mathcal{M}, \tau)$ и $X = U|X|$ — полярное разложение. Если $(X_j)_{j \in J} \subset \mathcal{F}(\mathcal{M}, \tau)$ и $X_j \xrightarrow{\tau^l} |X|$, то в силу раздельной t_{τ^l} -непрерывности операции умножения [5, теорема 1] имеем $UX_j \xrightarrow{\tau^l} U|X| = X$. Поэтому достаточно доказать, что

$$\forall X \in S(\mathcal{M}, \tau)^+ \exists (Y_j)_{j \in J} \subset \mathcal{F}(\mathcal{M}, \tau) \quad (Y_j \xrightarrow{\tau^l} X).$$

ШАГ 2. Пусть $X \in S(\mathcal{M}, \tau)^+$ и $X = Y + Z$ с $Y \in \mathcal{M}^+$ и $Z \in S_0(\mathcal{M}, \tau)^+$ [19]. Если $Z = \int_0^\infty \lambda dE_\lambda$ — спектральное представление, то оператор $Z_n = \int_{1/n}^n \lambda dE_\lambda$ лежит в конусе $\mathcal{F}(\mathcal{M}, \tau)^+$ для каждого $n \in \mathbb{N}$. Имеем

$$Z - Z_n = \int_{[0, 1/n)} \lambda dE_\lambda + \int_{(n, \infty)} \lambda dE_\lambda \equiv Z_{n,1} + Z_{n,2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Очевидно, $\|Z_{n,1}\| \leq \frac{1}{n}$, поэтому $Z_{n,1} \xrightarrow{\tau} 0$ при $n \rightarrow \infty$. Пусть $s_r(A)$ — проектор на носитель оператора $A \in S(\mathcal{M}, \tau)^h$. Имеем $s_r(Z_{n,2}) = E_n^\perp$; по условию τ -измеримости оператора Z и в силу нормальности следа τ получаем, что $\tau(E_n^\perp) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Следовательно, $Z_{n,2} \xrightarrow{\tau} 0$ при $n \rightarrow \infty$. Таким образом, $Z_n \xrightarrow{\tau} 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Пусть $\mathcal{M}_\tau^{\text{pr}} = (P_j)_{j \in J}$, тогда $I = \bigvee_{j \in J} P_j$ в силу полуконечности следа τ .

Имеем $Y_j = YP_j \in \mathcal{F}(\mathcal{M}, \tau)$ для всех $j \in J$. Так как $P_j \xrightarrow{\tau^l} I$, для произвольного проектора $P \in \mathcal{M}_\tau^{\text{pr}}$ получаем $Y_j P \xrightarrow{\tau} YP$. Следовательно, $Y_j \xrightarrow{\tau^l} Y$ и утверждение теоремы следует из t_{τ^l} -непрерывности операции сложения в $S(\mathcal{M}, \tau)$. \square

Поскольку $\mathcal{F}(\mathcal{M}, \tau) \subset L_p(\mathcal{M}, \tau)$, $0 < p < \infty$, имеем

Следствие 1. *Каждое из пространств $L_p(\mathcal{M}, \tau)$, $0 < p < \infty$, t_{τ^l} -плотно в $S(\mathcal{M}, \tau)$.*

Теорема 3. (i) *Если топология t_τ локально выпукла, то и t_{τ^l} локально выпукла.*

(ii) *Если топология t_{τ^l} локально выпукла, то и $t_{w\tau^l}$ локально выпукла.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) Если топология t_τ локально выпукла, то она задается определяющим семейством $(p_j)_{j \in J}$ полунорм на $S(\mathcal{M}, \tau)$ [20, 1.10.1]. Тогда семейство $(p_{j,P})_{j \in J; P \in \mathcal{M}_\tau^{\text{pr}}}$ полунорм на $S(\mathcal{M}, \tau)$, где $p_{j,P}(X) = p_j(XP)$ для всех $j \in J$, $P \in \mathcal{M}_\tau^{\text{pr}}$ и $X \in S(\mathcal{M}, \tau)$, является определяющим семейством для топологии t_{τ^l} .

(ii) Если t_{τ^l} локально выпукла, то она задается определяющим семейством $(q_j)_{j \in J}$ полунорм на $S(\mathcal{M}, \tau)$ [20, 1.10.1]. Тогда семейство $(q_{j,P})_{j \in J; P \in \mathcal{M}_\tau^{\text{pr}}}$ полунорм на $S(\mathcal{M}, \tau)$, где $q_{j,P}(X) = q_j(PXP)$ для всех $j \in J$, $P \in \mathcal{M}_\tau^{\text{pr}}$ и $X \in S(\mathcal{M}, \tau)$, является определяющим семейством для топологии $t_{w\tau^l}$. \square

Напомним [19], что следующие условия эквивалентны:

- (i) $\mathcal{M} = S(\mathcal{M}, \tau)$;
- (ii) $\inf\{\tau(P) : P \in \mathcal{M}^{\text{pr}}, \tau(P) \neq 0\} > 0$;
- (iii) топология t_τ совпадает с $\|\cdot\|$ -топологией на \mathcal{M} .

Легко проверить, что при выполнении этих условий \mathcal{M} атомическая.

Следствие 2. Пусть алгебра фон Неймана \mathcal{M} атомическая с $\inf\{\tau(P) : P \in \mathcal{M}^{\text{pr}}, \tau(P) \neq 0\} = 0$. Если

$$\exists K > 0 \quad \sum_{\tau(P) < K, P - \text{атом}} \tau(P) < \infty, \quad (1)$$

то топологии $t_{\tau l}$ и $t_{w\tau l}$ локально выпуклы.

Доказательство. Утверждение вытекает из [21, теорема 3.2] и теоремы 3. \square

Следствие 3. Пусть абелева алгебра фон Неймана \mathcal{M} атомическая и выполнено одно из условий: (a) $\inf\{\tau(P) : P \in \mathcal{M}^{\text{pr}}, \tau(P) \neq 0\} > 0$ или (b) $\inf\{\tau(P) : P \in \mathcal{M}^{\text{pr}}, \tau(P) \neq 0\} = 0$ и условие (1). Тогда топология $t_{\tau l} = t_{w\tau l}$ локально выпукла.

Доказательство вытекает из [21, следствия 3.5] и теоремы 3. \square

3. Последовательности F -НИП на (\mathcal{M}, τ)

Пусть τ — точный нормальный полуконечный след на алгебре фон Неймана \mathcal{M} . *-Линейал $\mathcal{X} \subset S(\mathcal{M}, \tau)$, снабженный F -нормой $\|\cdot\|_{\mathcal{X}}$, называется F -нормированным идеальным пространством (F -НИП) на (\mathcal{M}, τ) , если

- 1) $\|A\|_{\mathcal{X}} = \|A^*\|_{\mathcal{X}}$ для всех $A \in \mathcal{X}$;
- 2) из $A \in \mathcal{X}$, $B \in S(\mathcal{M}, \tau)$ и $|B| \leq |A|$ следует, что $B \in \mathcal{X}$ и $\|B\|_{\mathcal{X}} \leq \|A\|_{\mathcal{X}}$.

Естественное вложение $\langle \mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}} \rangle \subset S(\mathcal{M}, \tau)$ $t_{w\tau l}$ -непрерывно ([22, теорема 1], см. также [15]). Об идеальных пространствах τ -измеримых операторов см. [23, 24] и библиографию в них.

ПРИМЕР («весовое» F -НИП). Пусть $\langle \mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}} \rangle$ — F -НИП на (\mathcal{M}, τ) . Если $X \in \mathcal{X}$, $T \in \mathcal{M}$ и $\|T\| \leq 1$, то

$$\|TX\|_{\mathcal{X}} \leq \|X\|_{\mathcal{X}}, \quad \|XT\|_{\mathcal{X}} \leq \|X\|_{\mathcal{X}}; \quad (2)$$

для $Y \notin \mathcal{X}$ пишем $\|Y\|_{\mathcal{X}} = +\infty$. Если $A \in S(\mathcal{M}, \tau)^h$, то для

$$\|X\|_{\mathcal{X}(A)} \equiv \left\| \frac{AX + XA}{2} \right\|_{\mathcal{X}}, \quad X \in \mathcal{X}(A) = \{Y \in S(\mathcal{M}, \tau) : AY + YA \in \mathcal{X}\},$$

имеем

$$\|X^*\|_{\mathcal{X}(A)} = \left\| \frac{AX^* + X^*A}{2} \right\|_{\mathcal{X}} = \left\| \frac{(AX^* + X^*A)^*}{2} \right\|_{\mathcal{X}} = \|X\|_{\mathcal{X}(A)}.$$

Если еще $AZ = ZA$ для всех $Z \in S(\mathcal{M}, \tau)$ и $X, Y \in S(\mathcal{M}, \tau)$ с $|X| \leq |Y|$, то $|X| = T|Y|T^*$ для некоторого $T \in \mathcal{M}$ с $\|T\| \leq 1$ [25] и в силу (2) имеем

$$\begin{aligned} \| |X| \|_{\mathcal{X}(A)} &= \left\| \frac{A|X| + |X|A}{2} \right\|_{\mathcal{X}} = \|A|X|\|_{\mathcal{X}} = \|AT|Y|T^*\|_{\mathcal{X}} \\ &\leq \|AT|Y|\|_{\mathcal{X}} = \|T|Y|A\|_{\mathcal{X}} \leq \| |Y|A \|_{\mathcal{X}} = \| |Y| \|_{\mathcal{X}(A)}. \end{aligned}$$

Если вдобавок оператор A обратим в $S(\mathcal{M}, \tau)$ (об обратимости в $S(\mathcal{M}, \tau)$ см. [26, 27]), то $\langle \mathcal{X}(A), \|\cdot\|_{\mathcal{X}(A)} \rangle$ является F -НИП на (\mathcal{M}, τ) ; если $\|\cdot\|_{\mathcal{X}}$ — норма на \mathcal{X} , то $\|\cdot\|_{\mathcal{X}(A)}$ — норма на $\mathcal{X}(A)$. Для $\mathcal{U} \subset \mathcal{X}$ положим $A^{-1} \cdot \mathcal{U} \equiv \{A^{-1}U : U \in \mathcal{U}\}$. Очевидно, \mathcal{U} выпукло тогда и только тогда, когда $A^{-1} \cdot \mathcal{U}$ выпукло.

Теорема 4. Пусть оператор $A \in S(\mathcal{M}, \tau)^h$ обратим в $S(\mathcal{M}, \tau)$ и $AZ = ZA$ для всех $Z \in S(\mathcal{M}, \tau)$.

(i) F -НИП $\langle \mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}} \rangle$ полно тогда и только тогда, когда $\langle \mathcal{X}(A), \|\cdot\|_{\mathcal{X}(A)} \rangle$ полно.

(ii) $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ является базисом Шаудера в F -НИП $\langle \mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}} \rangle$ тогда и только тогда, когда $(A^{-1}X_n)_{n=1}^{\infty}$ является базисом Шаудера в $\langle \mathcal{X}(A), \|\cdot\|_{\mathcal{X}(A)} \rangle$.

(iii) $\mathcal{U} \subset \mathcal{X}$ — окрестность нуля в F -НИП $\langle \mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}} \rangle$ тогда и только тогда, когда $A^{-1} \cdot \mathcal{U}$ — окрестность нуля в $\langle \mathcal{X}(A), \|\cdot\|_{\mathcal{X}(A)} \rangle$.

(iv) $\mathcal{U} \subset \mathcal{X}$ ограничено в F -НИП $\langle \mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}} \rangle$ тогда и только тогда, когда $A^{-1} \cdot \mathcal{U}$ ограничено в $\langle \mathcal{X}(A), \|\cdot\|_{\mathcal{X}(A)} \rangle$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напомним, что $\mathcal{X}(A) = \{Y \in S(\mathcal{M}, \tau) : \mathbf{M}_A Y = AY \in \mathcal{X}\}$, $A, A^{-1} \in S(\mathcal{M}, \tau)^h$ и $AZ = ZA$, $A^{-1}Z = ZA^{-1}$ для всех $Z \in S(\mathcal{M}, \tau)$. Заметим, что $(\mathcal{X}(A))(A^{-1}) = \mathcal{X}$ и $\|\cdot\|_{(\mathcal{X}(A))(A^{-1})} = \|\cdot\|_{\mathcal{X}}$. Поэтому нужно установить только достаточность каждого из условий (i)–(iv).

(i) Если $(X_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{X}(A)$ $\|\cdot\|_{\mathcal{X}(A)}$ -фундаментальна, то

$$\|X_n - X_m\|_{\mathcal{X}(A)} = \|A(X_n - X_m)\|_{\mathcal{X}} \rightarrow 0 \quad \text{при } n, m \rightarrow \infty,$$

т. е. последовательность $(AX_n)_{n=1}^{\infty}$ $\|\cdot\|_{\mathcal{X}}$ -фундаментальна. В силу полноты F -НИП $\langle \mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}} \rangle$ найдется оператор $X \in \mathcal{X}$ такой, что $\|AX_n - X\|_{\mathcal{X}} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Следовательно, $\|AX_n - A \cdot A^{-1}X\|_{\mathcal{X}} = \|X_n - A^{-1}X\|_{\mathcal{X}(A)} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

(ii) Пусть $(X_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{X}$ — базис Шаудера в \mathcal{X} [28, гл. II, § 5], т. е. для каждого $X \in \mathcal{X}$ существует единственное представление $X = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n X_n$ в виде $\|\cdot\|_{\mathcal{X}}$ -сходящегося ряда с $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$. Если $Y \in \mathcal{X}(A)$, то $AY \in \mathcal{X}$ и по предположению $AY = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n X_n$. Поскольку этот ряд $\|\cdot\|_{\mathcal{X}}$ -сходится, в силу [22, теорема 1] имеем

$$\sum_{n=1}^k \lambda_n X_n \xrightarrow{w\tau l} AY \quad \text{при } k \rightarrow \infty.$$

Отсюда ввиду раздельной $t_{w\tau l}$ -непрерывности операции умножения [5, теорема 1] получаем

$$A^{-1} \sum_{n=1}^k \lambda_n X_n = \sum_{n=1}^k \lambda_n A^{-1} X_n \xrightarrow{w\tau l} Y \quad \text{при } k \rightarrow \infty, \quad (3)$$

т. е. $Y = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n A^{-1} X_n$.

ЕДИНСТВЕННОСТЬ. Предположим, что оператор $Y \in \mathcal{X}(A)$ допускает два различных представления

$$Y = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n A^{-1} X_n = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n A^{-1} X_n.$$

Тогда по теореме 1 из [22] имеем

$$\sum_{n=1}^k \lambda_n A^{-1} X_n \xrightarrow{w\tau l} Y, \quad \sum_{n=1}^k \alpha_n A^{-1} X_n \xrightarrow{w\tau l} Y \quad \text{при } k \rightarrow \infty.$$

Отсюда в силу раздельной $t_{w\tau l}$ -непрерывности операции умножения [5, теорема 1] получаем (см. (3))

$$AY = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n X_n = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n X_n;$$

противоречие.

(iii) Пусть \mathcal{U} открыто в \mathcal{X} , т. е.

$$\forall X \in \mathcal{U} \exists \varepsilon = \varepsilon(X) > 0 \forall Y \in \mathcal{X} \quad (\|X - Y\|_{\mathcal{X}} < \varepsilon \Rightarrow Y \in \mathcal{U}). \quad (4)$$

Нужно доказать, что

$$\forall \tilde{X} \in A^{-1} \cdot \mathcal{U} \exists \tilde{\varepsilon} = \tilde{\varepsilon}(\tilde{X}) > 0 \forall \tilde{Y} \in \mathcal{X}(A) \quad (\|\tilde{X} - \tilde{Y}\|_{\mathcal{X}(A)} < \tilde{\varepsilon} \Rightarrow \tilde{Y} \in A^{-1} \cdot \mathcal{U}).$$

Для $\tilde{X}, \tilde{Y} \in A^{-1} \cdot \mathcal{U}$ найдутся такие $X, Y \in \mathcal{U}$, что $\tilde{X} = A^{-1}X$, $\tilde{Y} = A^{-1}Y$; с учетом (4) имеем

$$\|\tilde{X} - \tilde{Y}\|_{\mathcal{X}(A)} = \|A(A^{-1}X - A^{-1}Y)\|_{\mathcal{X}} = \|X - Y\|_{\mathcal{X}} < \varepsilon.$$

Можно взять $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon$.

(iv) Множество $\mathcal{U} \subset \mathcal{X}$ ограничено в $\langle \mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}} \rangle$ тогда и только тогда, когда для каждой окрестности нуля \mathcal{V} найдется такое число $\lambda > 0$, что $\mathcal{U} \subset \lambda\mathcal{V}$. Иначе говоря, $\|\alpha_n X_n\|_{\mathcal{X}} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ для всех последовательностей $(X_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{U}$ и $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$, $\alpha_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ [29, гл. 1, теорема 1.30]. Покажем, что множество $A^{-1} \cdot \mathcal{U}$ ограничено в $\langle \mathcal{X}(A), \|\cdot\|_{\mathcal{X}(A)} \rangle$. Пусть $(Y_n)_{n=1}^{\infty} \subset A^{-1} \cdot \mathcal{U}$ произвольна и $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$, $\alpha_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Тогда найдется такая последовательность $(X_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{U}$, что $Y_n = A^{-1}X_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и

$$\|\alpha_n Y_n\|_{\mathcal{X}(A)} = \|\alpha_n A^{-1}X_n\|_{\mathcal{X}(A)} = \|\alpha_n A A^{-1}X_n\|_{\mathcal{X}} = \|\alpha_n X_n\|_{\mathcal{X}} \rightarrow 0$$

при $n \rightarrow \infty$. \square

Очевидно, если F -нормированное пространство $\langle \mathcal{E}, \|\cdot\|_{\mathcal{E}} \rangle$ имеет базис Шаудера, то оно сепарабельно. Топологическое векторное пространство, содержащее ограниченную окрестность нуля, называется *локально ограниченным*.

Следствие 4. F -НИП $\langle \mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}} \rangle$ локально ограничено (соответственно локально выпукло) тогда и только тогда, когда $\langle \mathcal{X}(A), \|\cdot\|_{\mathcal{X}(A)} \rangle$ локально ограничено (соответственно локально выпукло).

Следствие 5. F -НИП $\langle \mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}} \rangle$ нормируемо тогда и только тогда, когда $\langle \mathcal{X}(A), \|\cdot\|_{\mathcal{X}(A)} \rangle$ нормируемо.

Доказательство. Топологическое векторное пространство нормируемо тогда и только тогда, когда в нем существует выпуклая ограниченная окрестность нуля [29, гл. 1, теорема 1.39]. \square

Лемма 2. Пусть \mathcal{X} и \mathcal{Y} — F -НИП на (\mathcal{M}, τ) и $\langle \mathcal{Y}, \|\cdot\|_{\mathcal{Y}} \rangle$ полно, \mathcal{Z} — всюду плотный в \mathcal{X} идеал. Пусть оператор $A \in S(\mathcal{M}, \tau)$ такой, что $A\mathcal{Z} \subseteq \mathcal{Y}$, причем мультипликатор $\mathbf{M}_A : \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{Y}$ непрерывен. Пусть $\overline{\mathbf{M}}_A : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ — продолжение \mathbf{M}_A по непрерывности на все пространство \mathcal{X} . Тогда $\overline{\mathbf{M}}_A$ также будет мультипликатором на оператор A .

Доказательство. Пусть $X \in \mathcal{X}$, $X_i \in \mathcal{Z}$ и $X_i \rightarrow X$ в $\langle \mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}} \rangle$. Тогда $\mathbf{M}_A X_i = \overline{\mathbf{M}}_A X_i \rightarrow \overline{\mathbf{M}}_A X$ в $\langle \mathcal{Y}, \|\cdot\|_{\mathcal{Y}} \rangle$. В силу [5, теорема 1] имеем $X_i \xrightarrow{w\tau l}$

X , а также $\mathbf{M}_A X_i \xrightarrow{w\tau l} \overline{\mathbf{M}}_A X$. Ввиду [22, теорема 1] мультипликатор $\mathbf{M}_A : S(\mathcal{M}, \tau) \rightarrow S(\mathcal{M}, \tau)$ $t_{w\tau l}$ -непрерывен. Поэтому $\mathbf{M}_A X_i \xrightarrow{w\tau l} \mathbf{M}_A X$, тем самым $\overline{\mathbf{M}}_A X = \mathbf{M}_A X = AX$. \square

Аналогичный результат верен и для мультипликатора $\mathbf{L}_A X = XA$.

Теорема 5. Пусть \mathcal{X} и \mathcal{Y} — F -НИП на (\mathcal{M}, τ) и $A\mathcal{X} \subseteq \mathcal{Y}$ для некоторого оператора $A \in S(\mathcal{M}, \tau)$. Тогда мультипликатор $\mathbf{M}_A X = AX$, $\mathbf{M}_A : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$, непрерывен. В частности, при $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{Y}$ естественное вложение \mathcal{X} в \mathcal{Y} непрерывно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проверим, что график оператора \mathbf{M}_A замкнут. Действительно, если $X_n \rightarrow X$ в \mathcal{X} и $AX_n \rightarrow Y$ в \mathcal{Y} , то $X_n \xrightarrow{w\tau l} X$ и $AX_n \xrightarrow{w\tau l} Y$ в силу [22, теорема 1]. Тогда $Y = AX$ ввиду раздельной $t_{w\tau l}$ -непрерывности операции умножения [5, теорема 1]. Остается применить теорему о замкнутом графике [29, гл. 2, теорема 2.15]. \square

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Топологическое пересечение не более чем счетного семейства F -НИП $\langle \mathcal{X}_n, \|\cdot\|_{\mathcal{X}_n} \rangle$ на (\mathcal{M}, τ) также является F -НИП на (\mathcal{M}, τ) с F -нормой

$$\|X\|_{\mathcal{X}} = \sum_{n \geq 1} 2^{-n} \frac{\|X\|_{\mathcal{X}_n}}{1 + \|X\|_{\mathcal{X}_n}}.$$

Напомним, что $\mathcal{X} = \bigcap_{n \geq 1} \mathcal{X}_n$; проективная (или инициальная) топология (см. [30, с. 35]), индуцируемая вложениями $\mathcal{X} \subset \mathcal{X}_n$, $n \in \mathbb{N}$, будет линейной топологией, базис окрестностей нуля которой образуют множества вида $\mathcal{U}_{n_1} \cap \dots \cap \mathcal{U}_{n_m} \cap \mathcal{X}$, где \mathcal{U}_n — окрестность нуля в \mathcal{X}_n . Пространство \mathcal{X} , наделенное этой топологией, называется *топологическим пересечением пространств* \mathcal{X}_n .

Теорема 6. Пусть $(\mathcal{X}_n)_{n \geq 1}$ — убывающая последовательность F -НИП на (\mathcal{M}, τ) таких, что пространство $\mathcal{X} = \bigcap_{n \geq 1} \mathcal{X}_n$ плотно в каждом \mathcal{X}_n , \mathcal{Y} — некоторое локально ограниченное F -НИП на (\mathcal{M}, τ) и $A \in S(\mathcal{M}, \tau)$. Тогда $A\mathcal{X} \subseteq \mathcal{Y}$ в том и только в том случае, когда $A\mathcal{X}_n \subseteq \mathcal{Y}$ при некотором $n \in \mathbb{N}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $A\mathcal{X} \subseteq \mathcal{Y}$. Из теоремы 5 и замечания 1 вытекает, что мультипликатор $\mathbf{M}_A : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ непрерывен. Пусть \mathcal{V} — ограниченная окрестность нуля в \mathcal{Y} . Существует набор окрестностей нуля $(\mathcal{U}_k \subset \mathcal{X}_k)_{k=1}^n$ такой, что $\mathbf{M}_A(\mathcal{X} \cap \mathcal{U}_1 \cap \dots \cap \mathcal{U}_n) \subseteq \mathcal{V}$. Из непрерывности вложений $\mathcal{X}_n \subset \mathcal{X}_k$, $k = 1, \dots, n$, следует, что существуют такие окрестности нуля \mathcal{W}_k в \mathcal{X}_k , что $\mathcal{W}_k \subset \mathcal{U}_k$, $k = 1, \dots, n$. Полагая $\mathcal{U} = \bigcap_{k=1}^n \mathcal{W}_k$, получаем окрестность нуля в \mathcal{X}_n , для которой $\mathbf{M}_A(\mathcal{U} \cap \mathcal{X}) \subseteq \mathcal{V}$. Ограниченность окрестности \mathcal{V} эквивалентна тому, что система ее растяжений $\varepsilon\mathcal{V}$ ($\varepsilon > 0$) образует фундаментальную систему окрестностей нуля в \mathcal{Y} . Так как для любого $\varepsilon > 0$ имеем $\mathbf{M}_A(\varepsilon\mathcal{U} \cap \mathcal{X}) \subseteq \varepsilon\mathcal{V}$, отображение $\mathbf{M}_A : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ непрерывно относительно топологии на \mathcal{X} , индуцируемой из \mathcal{X}_n . Продолжим это отображение по непрерывности до некоторого отображения из \mathcal{X}_n в \mathcal{Y} . В силу леммы 2 продолженное отображение также будет мультипликатором на A , следовательно, $A\mathcal{X}_n \subseteq \mathcal{Y}$. \square

Следствие 6. Пусть $(\mathcal{X}_n)_{n \geq 1}$, \mathcal{X} и \mathcal{Y} такие же, как в теореме 6. Тогда $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{Y} \iff \mathcal{X}_n \subseteq \mathcal{Y}$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применить теорему 6 к оператору $A = I$. \square

Прошу ссылку в [20] дать на раздел, а не на страницу!!!

Теорема 7 (ср. с [20, с. 608?]). Пусть $\mathcal{X}, \mathcal{Y}_1, \dots, \mathcal{Y}_n, \dots$ — произвольная последовательность F -НИП на (\mathcal{M}, τ) , причем $\langle \mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}} \rangle$ полно. Тогда $\mathcal{X} \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{Y}_n$ в том и только в том случае, когда $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{Y}_n$ при некотором $n \in \mathbb{N}$. ?!

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $\mathcal{X}_n = \mathcal{X} \cap \mathcal{Y}_n$ имеем $\mathcal{X} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{X}_n$. Из теоремы Бэра о категории следует, что при некотором $n \in \mathbb{N}$ пространство \mathcal{X}_n является множеством второй категории в \mathcal{X} . Пространство \mathcal{X}_n , рассматриваемое как топологическое пересечение пространств \mathcal{X} и \mathcal{Y}_n , является F -НИП на (\mathcal{M}, τ) , причем вложение $\mathcal{X}_n \subset \mathcal{X}$ непрерывно. Из теоремы Банаха [31, гл. III, теорема 3] имеем $\mathcal{X}_n = \mathcal{X}$, т. е. $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{Y}_n$. \square

ЛИТЕРАТУРА

1. Ciach L. J. Some remarks on the convergence in measure and on a dominated sequence of operators measurable with respect to a semifinite von Neumann algebra // Colloq. Math. 1988. V. 55, N 1. P. 109–121.
2. Dodds P. G., Dodds T. K.-Y., Pagter de B. Noncommutative Köthe duality // Trans. Amer. Math. Soc. 1993. V. 339, N 2. P. 717–750.
3. Скворцова Г. Ш., Тихонов О. Е. Выпуклые множества в некоммутативных L^1 -пространствах, замкнутые в топологии локальной сходимости по мере // Изв. вузов. Математика. 1998. № 8. С. 48–55.
4. Скворцова Г. Ш. О слабой секвенциальной полноте факторпространств пространства интегрируемых операторов // Изв. вузов. Математика. 2002. № 9. С. 71–74.
5. Bikhchentaev A. M. The continuity of multiplication for two topologies associated with a semifinite trace on von Neumann algebra // Lobachevskii J. Math. 2004. V. 14. P. 17–24.
6. Dodds P. G., Dodds T. K.-Y., Sukochev F. A., Tikhonov O. Ye. A non-commutative Yosida-Hewitt theorem and convex sets of measurable operators closed locally in measure // Positivity. 2005. V. 9, N 3. P. 457–484.
7. Бикчентаев А. М. Локальная сходимостъ по мере на полуконечных алгебрах фон Неймана // Тр. Мат. ин-та РАН им. В. А. Стеклова. 2006. Т. 255. С. 41–54.
8. Бикчентаев А. М. Локальная сходимостъ по мере на полуконечных алгебрах фон Неймана. II // Мат. заметки. 2007. Т. 82, № 5. С. 783–786.
9. Bikhchentaev A., Sukochev F. When weak and local measure convergence implies norm convergence // J. Math. Anal. Appl. 2019. V. 473, N 2. P. 1414–1431.
10. Бикчентаев А. М. Сходимостъ по мере и τ -компактностъ τ -измеримых операторов, ассоциированных с полуконечной алгеброй фон Неймана // Изв. вузов. Математика. 2020. № 5. С. 89–93.
11. Cordero E., de Gosson M., Nicola F. On the positivity of trace class operators // Adv. Theor. Math. Phys. 2020. V. 23, N 8. P. 2061–2091.
12. Moslehian M. S., Kian M., Xu Q. Positivity of 2×2 block matrices of operators // Banach J. Math. Anal. 2019. V. 13, N 3. P. 726–743.
13. Бикчентаев А. М. Обратимостъ операторов в гильбертовом пространстве и идеалы в C^* -алгебрах // Мат. заметки. 2022. Т. 112, № 3. С. 350–359.
14. Akemann C. A., Anderson J., Pedersen G. K. Triangle inequalities in operator algebras // Linear Multilinear Algebra. 1982. V. 11, N 2. P. 167–178.
15. Бер А. Ф., Левитина Г. Б., Чилин В. И. Дифференцирования со значениями в квазинормируемых бимодулях локально измеримых операторов // Мат. тр. 2014. Т. 17, № 1. С. 3–18.
16. Takesaki M. Theory of operator algebras. I. Encyclopaedia of mathematical sciences, 124. Operator algebras and non-commutative geometry, 5. Berlin: Springer-Verl., 2002.
17. Takesaki M. Theory of operator algebras. II. Encyclopaedia of mathematical sciences, 125. Operator algebras and non-commutative geometry, 6. Berlin: Springer-Verl., 2003.
18. Fack T., Kosaki H. Generalized s -numbers of τ -measurable operators // Pacific J. Math. 1986. V. 123, N 2. P. 269–300.
19. Stroh A., West G. P. τ -Compact operators affiliated to a semifinite von Neumann algebra // Proc. Roy. Irish Acad. Sect. A. 1993. V. 93, N 1. P. 73–86.

20. Эдвардс Р. Функциональный анализ. Теория и приложения. М.: Мир, 1969.
21. Conradie J., Crowther Ch. The algebra of τ -measurable operators // Operator algebras, operator theory and applications . Basel: Birkhäuser Verl., 2010. P. 103–119. (Oper. Theory Adv. Appl.; V. 195).
22. Бикчентаев А. М. О минимальности топологии сходимости по мере на конечных алгебрах фон Неймана // Мат. заметки. 2004. Т. 75, № 3. С. 342–349.
23. Бикчентаев А. М. Идеальные пространства измеримых операторов, присоединенных к полуконечной алгебре фон Неймана // Сиб. мат. журн. 2018. Т. 59, № 2. С. 309–320.
24. Бикчентаев А. М. Перенормировки идеальных пространств измеримых операторов, присоединенных к полуконечной алгебре фон Неймана // Уфим. мат. журн. 2019. Т. 11, № 3. С. 3–9.
25. Yeadon F. J. Convergence of measurable operators // Proc. Cambridge Phil. Soc. 1973. V. 74, N 2. P. 257–268.
26. Tembo I. D. Invertibility in the algebra of τ -measurable operators // Operator algebras, operator theory and applications. Basel: Birkhäuser-Verl., 2010. P. 245–256. (Oper. Theory Adv. Appl.; V. 195).
27. Бикчентаев А. М. Существенно обратимые измеримые операторы, присоединенные к полуконечной алгебре фон Неймана, и коммутаторы // Сиб. мат. журн. 2022. Т. 63, № 2. С. 272–282.
28. Rolewicz S. Metric linear spaces. Second ed. Warsaw: D. Reidel Publ. Co. Dordrecht, 1984. PWN – Polish Sci. Publ.).
29. Рудин У. Функциональный анализ. М.: Мир, 1975.
30. Бурбаки Н. Общая топология. Основные структуры. М.: Наука, 1968.
31. Банах С. Теория линейных операций. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001.

Поступила в редакцию 29 марта 2022 г.

После доработки 28 октября 2022 г.

Принята к публикации 7 ноября 2022 г.

Бикчентаев Айрат Мидхатович (ORCID ?)
Институт математики и механики им. Н. И. Лобачевского
Казанского (Приволжского) федерального университета,
ул. Кремлевская, 18, Казань 420008
Airat.Bikchentaev@kpfu.ru

?!