МЕТОДИКА ОЦЕНКИ ЗНАЧЕНИЯ ЧАСТОТЫ СРЕЗА И ЗАПАСА ПО ФАЗЕ В СИСТЕМЕ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Шихалёв Анатолий Михайлович
К(ПФУ) Инженерный институт

Ахметова Ирина Анатольевна
КГЭУ Институт цифровых технологий и экономики

Воронцов Дмитрий Петрович
К(ПФУ) Инженерный институт

Хафизов Ильдар Ильсурович
К(ПФУ) Инженерный институт

Кашапов Наиль Фаикович
К(ПФУ) Инженерный институт

Аннотация. На примере отдельного звена системы автоматического управления (САУ) приведён способ точного получения частоты среза и запаса по фазе на совместных логарифмических амплитудных и частотных характеристиках (ЛАЧХ и ЛФЧХ). Точное значение частоты среза по ЛАЧХ и соответствующее ему точное значение запаса по фазе позволяют установить степень устойчивости САУ к стандартным воздействиям в виде ступенчатой функции, импульсной функции и других. Требования на этапах анализа САУ и их проектирования к точности и показателям качества регулирования являются, как правило, противоречивыми и нуждаются в последующей оптимизации (рационализации). Важную их часть составляют корректное определение значений не только сопрягающих частот, но и частоты среза и соответствующего ей запаса по фазе.

Abstract. On the example of a separate part of automatic control system (ACS) we propose the method for the maximum precise crossover frequency and phase margin receiving at the joint logarithmic amplitude and frequency characteristics (BMD and LPFRC). The exact value of the Bode magnitude plot (BMD) and the corresponding exact value of the phase margin make it possible to estimate the degree of the ACS stability to such reference exposures like the unit step function, a (im)pulse function, etc. The requirements at the ACS analysis and design stages for the precision and control quality indicators are generally contradictory and need to be further optimized (rationalized). Its important part is the correct values determination not only for the corner frequencies, but also for the cut-off frequency and its corresponding phase margin.

Ключевые слова: апериодическое звено 1-го порядка, передаточные функции, частотные характеристики САУ, устойчивость системы, частоты сопряжения и срез.

Целью данной статьи является аналитическое определение частоты среза ωср для исследуемой САУ как совокупности звеньев автоматического регулирования, так и для отдельного звена. Известный пакет ПО MatLab (в отличие от иных решений [1]) располагает достаточно широкими, в т. ч.

графическими, возможностями для определения данного параметра. Графически это обозначает пересечение логарифмической амплитудной характеристики (ЛАЧХ) с осью абсцисс, на которой откладываются значения lg(ω). При этом главный интерес для исследователей представляет не только точное значение величины ωср, но и запаса по фазе Δφ(ωср). Если его абсолютное значение │Δφ(ωср) │> - π (или – 1800), то исследуемая САУ или её элемент – устойчивы. Если же модуль запаса по фазе│Δφ(ωср) │< - π – переходный процесс будет расходящимся; если │Δφ(ωср) │= - π – имеется так называемый «консервативный процесс» в режиме автоколебаний, или, согласно теореме об устойчивости систем Ляпунова (1892 г.) [2] он является «неопределённым». В данной связи аналитическая, т. е. возможно точная оценка значения частоты среза ωср с последующей оценкой величины Δφ(ωср) является для исследователей актуальной задачей. Рассмотрим САУ, состоящую из 1 апериодического звена 1-го порядка, представленного в [2], которую намеренно усложним введением в её контур некоторого безынерционного (усилительного звена) с коэффициентом передачи k1 так, чтобы по правилу структурных преобразований при следовании в САУ последовательно друг за другом: k1·k2 = k = 10 и T = 1 с в качестве конкретного примера. Примером выбрано апериодическое звено первого порядка передаточной функции (без явно несоответствующих вариантов как в [8]) после преобразований Лапласа при нулевых начальных условиях вида (1) и проследим, как эта функция могла получиться [3].

$$W(p) = \frac{k}{Tp + 1}. \tag{1}$$

Пусть мы располагаем некоторой электрической R-L-C цепью (или некоторым инерционным звеном, например, двигателем с постоянным возбуждением обмотки якоря), поведение которой описывается дифференциальным уравнением (ДУ) вида:

$$T\frac{dx_{вых}}{dt} + x_{вых} = kx_{вх}. \tag{2}$$

По отображению Лапласа при нулевых начальных условиях заменяем: p = d/dt = jω. Тогда ДУ (2) примет вид алгебраического уравнения:

$$Tp\, x_{вых} + x_{вых} = kx_{вх}, \text{ или } x_{вых}\,(Tp + 1) = kx_{вх}, \tag{3}$$

Передаточная функция (ПФ) – есть отношение выходного сигнала хвых ко входному хвх, что из уравнения (3) приобретёт следующий вид:

$$W(p) = \frac{x_{вых}}{x_{вх}} = \frac{k}{Tp + 1}, \text{ как и приведено в выражении (1).} \quad (4)$$

Затем определим амплитудо- и фазо-частотные (АЧХ и ФЧХ) характеристики САУ, данной ниже. Подобные характеристики - основные показатели при анализе САУ [4]. Для нахождения амплитудно-фазовых характеристик (АФХ) рассмотрим отдельно АЧХ и ФЧХ. То есть АФХ – это совокупность АЧХ и ФЧХ [5]. Итак, для построения АФХ необходимо прежде заменить по Лапласу в выражении (1) или (4) оператор p = jω:

$$W(j\omega) = \frac{k}{T j\omega + 1}. \quad (5)$$

То есть преобразование Лапласа не только позволяет сводить дифференциальные уравнения при нулевых начальных условиях к алгебраическим. Для дальнейших расчётов необходимо разделить действительную часть P(ω) и мнимую Q(ω), что в общем виде можно записать как W(jω) = P(ω) + j Q(ω). (6)

Так, для построения АЧХ необходимо изначально разделить действительные и мнимые переменные выражения (5) так, чтобы привести его к виду (6). Для этого попытаемся умножить числитель и знаменатель (исходного для нас) выражения (5) на такой множитель, чтобы иметь комплексную переменную именно в числителе, а не в знаменателе, как в выражении (5). Располагая действительной и мнимой частью из выражений можно найти модуль искомого годографа вектора АЧХ. Если ось действительной оси принято изображать осью абсцисс, а мнимую – ординат, то модуль искомого годографа вектора (это и есть АЧХ) находится с помощью формулы Пифагора:

$$A(\omega) = \left| W(j\omega) \right| = (P^2(\omega) + Q^2(\omega))^{1/2} = \left(\frac{k^2}{(1 + (\omega T)^2)^2} + \frac{(k\omega T)^2}{(1 + (\omega T)^2)^2} \right)^{1/2} =$$

$$= \left(\frac{k^2 (1 + (\omega T)^2)}{(1 + (\omega T)^2)^2} \right)^{1/2} = \frac{k}{(1 + (\omega T)^2)^{1/2}}. \quad (7)$$

Выражение (7) означает вид АЧХ. Для нахождения ФЧХ достаточно воспользоваться определением тангенса, это будет отношение мнимой части Q(ω) к действительной части P(ω):

$$\operatorname{tg}\varphi(\omega) = \frac{Q(\omega)}{P(\omega)} = -\frac{k\omega T}{1+(\omega T)^2} : \frac{k}{1+(\omega T)^2} = (-\omega T).$$

$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg}(-\omega T) = -\operatorname{arctg}(\omega T). \tag{8}$$

Для отыскания частоты среза требуются ЛАЧХ и ЛФЧХ. Пусть постоянная времени T = 1 с и обобщённый коэффициент передачи k = k1 · k2 = 10. Постоянная времени для примера T = 1 с. Получить логарифмическую амплитудно-частотную характеристику можно на основе формулы (7), прологарифмировав её по основанию 10:

$$L(\omega) = \lg(W(j\omega)) = 20\lg k - 20\lg[(T^2\omega^2 + 1)^{1/2}]. \tag{9}$$

Множитель 20 [1] в формуле (9) введён из соображений масштабирования, тогда как по оси абцисс отображают не саму круговую частоту ω, но её десятичный логарифм. Так, мощность сигнала от P1 до P2 пропорциональна квадрату его амплитуды A. Изменение сигнала в 10 раз есть изменению его уровня на 20 дБ, так как lg (P2 /P1) = lg (A22 /A21) = 20lg(A2 /A1). По оси абсцисс откладывается частота ω в логарифмическом масштабе для расширения возможностей визуализации процесса, когда единичный промежуток (декада) соответствует изменению круговой частоты ω в 10 раз. А поскольку lg 0 = - ∞, то начало координат по оси абсцисс назначается произвольно. ЛФЧХ, получаемое из формулы (8) отличается от ФЧХ только масштабом по оси ω. Однако счёт по формуле (9) проводят отдельно до частоты сопряжения ωсопр = 1/T (здесь T = 1 с, поэтому ωсопр = 1/T = 1 с), что нашло своё представление формулы (9) в следующем виде:

$$L(\omega) = \begin{cases} 20\lg k \text{ при } \omega < \omega_{\text{сопр}}, \\ 20\lg k - 20\lg[(T^2\omega^2 + 1)^{1/2}] \text{ при } \omega \geq \omega_{\text{сопр}}. \end{cases} \tag{10}$$

Частота сопряжения ωсопр показывает, что при достижении её значения L(ω) в последующем изменяется на (- 20 дБ/дек). Там, где ЛАЧХ пересекает ось абсцисс, и находится частота среза ωср. Представляет практический интерес не только определения точного её значения, но и запаса по фазе Δφ(ωср) для оценки степени устойчивости анализируемой САУ. Чтобы найти её точное значение, необходимо второе уравнение системы уравнений (10) - из выводов следует ωсопр < ωср. Остаётся определить её точное значение. Расчёты по системе уравнений (10) показывают, что при ω = 10 (рад) значение L(ω) = -0,04. То есть пересечение с осью абсцисс уже произошло, но равенство L(ω) = 0 позволит отыскать его корень как уравнения: $20\lg k - 20\lg[(T^2\omega^2 + 1)^{1/2}] \to 0.$ (11)

Проведя операцию с логарифмом и разделив оба слагаемых, получим:

$$20\lg k = (1/2) \cdot 20\lg(T^2\omega_{\text{срез}}^2 + 1);\ 2 \cdot \lg k = \lg(T^2\omega_{\text{срез}}^2 + 1). \tag{12}$$

В равенстве (12) по определению логарифмов при известном основании можно записать: $10^{2\cdot \lg k} = (T^2\omega_{ср}{}^2 + 1)$, откуда $\omega_{срез} = [(10^{2\cdot \lg k} - 1) / T^2]^{1/2}$. (13)

Подставим в выражение (13) исходные данные для данного модельного примера, для которого k = 10; T = 1 с, и получим: $\omega_{срез} = [(10^{2\cdot \lg 10} - 1) / 1^2]^{1/2} = (10^2 - 1)^{1/2} = (99)^{1/2} = 9{,}9498743 \approx 9{,}95$.

Для проверки полученной частоты среза воспользуемся исходным уравнением (11), которое при подстановке значения частоты среза как его корня должно обратиться в ноль: 20lg10 - 20lg[(12ωср2 + 1)1/2] = 20 – 20 lg[(1 · 9,94987432 + 1)1/2] = 0,0000001 ≈ 0. Т. е., нами найдено аналитически значение частоты среза, равное 9,95 (с-1). Значение запаса по фазе на частоте среза можно определить из уравнения (8): φ(ωср) = - arctg (ωсрТ) = - arctg (9,95 · 1) = 1,471 рад = $84{,}3^0$. То есть до – π / 2 фазе «осталось» ещё $90^0 - 84{,}3^0 = 5{,}7^0$. Итого запас по фазе, учитывая его дополнительное расстояние до – π ещё – 90^0 , в данном модельном примере запас по фазе $|\Delta\varphi(\omega ср)| = 90^0 + 5{,}7^0 = 95{,}7^0$: исследуемая САУ (или её элемент) являются устойчивой (устойчивым).

Выводы. Проведённые расчёты по предложенной методике позволили определить не только точное значение характерной частоты среза, равной 9,95 рад, но и позволили оценить точный запас по фазе, равный 95,7 градуса по отношению к значению – π на данной частоте: исследуемая система является устойчивой.

Литература

1. Кашапов Н.Ф., Шихалѐв А.М., Воронцов Д.П., Ахметова И.А., Хамидуллина Г.Р. Многокритериальная оценка районов региона РФ, перспективных для расположения логистических объектов (на примере РТ) // Материалы IX МНТК «ИМТОМ-2018», Ч. 2. - Казань: Фолиант, 2018. - С. 283-287.

2. Интернет-ресурс. Понятие частотных характеристик. URL: https://www.toehelp.ru/theory/tau/letures6.htm (дата обращения 16.10.2022).

3. Интернет-ресурс. Типовые звенья САУ. URL: Studwood.ru/1678987 (дата обращения 16.10.2022).

4. Шишмарёв В.Ю. Основы автоматического управления / учебное пособие для академического бакалавриата / В.Ю. Шишмарёв. – М.: Юрайт, 2018. – 350 с.

5. Интернет-ресурс. Апериодическое звено 1 порядка. URL: Tk.uistu.ru/lib/method/tau_kurs.pdf, Ульяновск, 2002 (дата обращения 16.10.2022).

6. Бесекерский В.А., Попов Е.П. Теория систем автоматического регулирования. – М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1975. – 768 с.

7. Интернет-ресурс. Логарифмические амплитудно-фазовая частотная… URL: ru/wikipedia.org.wiki/АФЧХ (дата обращения 16.10.2022).

8. Shikhalev A.M., Akhmetova I.A., Vorontsov D.P., Khamidullina G.R., Kashapov N.F., Rozhko O.N. The multicriteria estimation of the Russian Federation region districts promising for the logistic objects placement (on the Republic of Tatarstan example) // 2019 IOP Conference Series: Materials Science and Engineering, Volume 570, URL:https://doi.org/10.1088/1757-899X/570/1/012095.

ПРИМЕНЕНИЕ ЧЕТЫРЁХПОЛЬНЫХ ТАБЛИЦ ВЗАИМНОЙ СОПРЯЖЕННОСТИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ШКАЛЫ Т. СААТИ В ТЕРМИНАХ ЛИНГВИСТИЧЕСКИХ ПЕРЕМЕННЫх

Шихалёв Анатолий Михайлович, Инженерный институт КФУ, Казань, Россия;
Воронцов Дмитрий Петрович, Инженерный институт КФУ, Казань, Россия;
Ахметова Ирина Анатольевна, Институт управления экономикой и финансами КФУ, Казань, Россия.

Аннотация. В работе рассмотрены вопросы переходы от интервальной (количественной) шкалы в порядковую (лингвистическую), развивая тем самым некоторые предложения, указанные в [1], [2], [3]. В качестве примера выступают ожидания от автомобилиста: 10,0 км или 10,5 км – велика ли разница? В статье даётся определённый ответ на заданный вопрос: разница получилась в ранге «слабой», что и следовало ожидать. Апробирована предлагаемая схема кластеризации всё возрастающих модельных расстояний и установлено, что с 10,0 км до 10,5 км расстояния по шкале Т. Саати отличаются друг от друга со степенью «нет различий». Также в соответствии с таблицей Т. Саати остальные различия по расстояниям были отображены в соответствующие классы: различия «нет различий», «слабые различия», «существенные», «сильные» и «абсолютные». Иначе говоря, осуществлена кластеризация модельных расстояний, превышающих расстояние в 10,0 км.

Abstract. In our research we are considering some issues of transitions from the interval (quantitative) scale to the ordinal (linguistic) scale, thereby developing some proposals from the [5], [6], [7]. As an example we look at the expectations in a driver’s case: 10.0 km or 10.5 km - is there a big difference? Our study gives a definitive answer to this question: the difference has the "weak" rank which has been expected. Then in the article is tested the proposed clustering scheme for the increasing model distances and we have found that from 10.0 km to 10.5 km the distances on the T. Saati’s scale differ from each other with a "no difference" degree. According to T. Saati's table the rest of the differences on the distance were mapped into its respective classes: "no difference", "weak differences", "essential", "strong" and "absolute" differences. In other words, the cluster analysis for the model distances exceeding 10.0 km has been realized in this paper.

Ключевые слова: лицо, принимающее решения (ЛПР), критерий согласия хи-квадрат Пирсона, параметры связи четырёхпольных ТВС,