

Э. Ю. ЛЕРНЕР

## КОНТРПРИМЕРЫ МАЛОГО РАЗМЕРА ДЛЯ ТРЕХМЕРНОЙ ЗАДАЧИ ПОИСКА УСТОЙЧИВЫХ МЭТЧИНГОВ С ЦИКЛИЧЕСКИМИ ПРЕДПОЧТЕНИЯМИ

*Аннотация.* Рассмотрим  $n$  мужчин,  $n$  женщин и  $n$  собак, каждый мужчина имеет полный список предпочтений женщин, каждая женщина полный список предпочтений собак и каждая собака имеет полный список предпочтений мужчин (мы рассматриваем так называемую 3D-CYC problem — трехмерную задачу с циклическими предпочтениями). Трисочетание есть набор  $n$  непересекающихся троек, содержащих по одному представителю каждого гендера. Трисочетание называется устойчивым (так называемым stable matching (SM)), если не существует мужчины, женщины и собаки из разных троек предпочитающих друг друга партнерам в своих тройках. Гипотеза Eriksson, Söstrand и Strimling (2006) состояла в том, что задача отыскания SM (так называемая 3DSM-CYC задача) всегда имеет решение. Постепенно гипотеза была доказана для всех  $n \leq 5$ . Однако, Lam и Plaxton (2019) предложили алгоритм конструирования матриц предпочтений для 3DSM-CYC размера  $n = 90$ , при которых SM не существует. Вопрос о существовании контрпримеров меньшего размера оставался открытым. В этой работе мы построим наглядный контрпример для 3DSM-CYC размера  $n = 24$ .

*Ключевые слова:* устойчивое паросочетание, матрица предпочтений, циклические предпочтения, ориентированный взвешенный граф, устойчивый мэтчинг, контрпример.

УДК: 519.152, 519.173.5

DOI:

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Эта работа возникла из попыток переформулировать в терминах теории графов результаты С.-К. Lam и С. G. Plaxton [11], опровергающие гипотезу К. Eriksson, J. Söstrand и Р. Strimling [5]. Такая переформулировка делает их гораздо нагляднее. Это вторая работа (после [14]) из серии работ, связанной с этой темой. Работу [14] в рамках рассматриваемой задачи можно рассматривать как подготовительную, она решает отдельную проблему, поставленную Р. Biró и Е. McDermid [1]. Мы дадим все необходимые определения и вводные замечания; мы также передокажем результат из [14], используемый здесь. Мы старались сделать эту работу доступной для неподготовленного читателя.

Пусть у нас имеется  $n$  мужчин и  $n$  женщин, у каждого из них есть списки предпочтений (вообще говоря, неполные) представителей противоположного пола. Паросочетанием

---

Поступила в редакцию 30.08.2021, после доработки 13.12.2021. Принята к публикации \_\_. \_\_.202\_\_.

Благодарности. Автор выражает искреннюю благодарность рецензенту за многочисленные конструктивные замечания, существенно преобразившие работу. Работа выполнена в рамках реализации Программы развития Научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа (соглашение № 075-02-2021-1393).

называется разбиение множества мужчин и женщин на гетеросексуальные семьи, отметим, что при неполных списках предпочтений, некоторые из мужчин и женщин могут оставаться одиночками. Паросочетание называется устойчивым, если не существует мужчин и женщин, предпочитающих друг друга своим партнерам (а одинокие не могут “отбить” обручённых или находиться в списках предпочтений друг у друга). Д. Гейл и Л. Шепли доказали существование устойчивого паросочетания. В [6] они предложили алгоритм сложности  $O(n^2)$ , позволяющий найти устойчивое паросочетание для полных списков предпочтений. Заметим, что почти тот же алгоритм применим и для неполных списков предпочтений, он, в частности, применяется при наборе абитурантов в ВУЗы во многих странах (но, увы, в некоторых странах чиновники, видимо, не знают о его существовании). Практика использования этого алгоритма была отмечена при вручении Нобелевской премии по экономике Ллойдю Шепли и Элвину Рота в 2012-м году. Небольшая модификация алгоритма Гейла-Шепли (см., например, [10]) позволяет также в случае неполных списков предпочтений найти полное устойчивое паросочетание (без одиноких персон) или доказать его отсутствие.

В конце книги [10], впервые изданной в 1976-м году, Д. Э. Кнут отметил ряд открытых проблем, связанных с алгоритмом Гейла-Шепли и рассматриваемой задачей. Например, взаимосвязь между задачами поиска устойчивого паросочетания и задачей о назначении [12]. Другая проблема, вызвавшая большой поток публикаций, — возможность обобщения теории устойчивых паросочетаний на случай трёх гендеров (так называемая, трёхмерная проблема поиска устойчивых мэтчингов — 3DSM).

Наиболее интересный вариант в  $k$ -гендерном случае возникает при циклическом характере предпочтений: представители 1-го гендера ранжируют представителей 2-го, представители 2-го гендера равнодушны к 3-му, и т.д., у каждого представителя  $k$ -го гендера имеется список симпатий по отношению к представителям 1-го гендера (об остальных вариантах  $k$ -гендерного случая см. [15, глава 5.6]). Кортёж, в котором содержится по одному представителю каждого гендера называется семьёй, а набор непересекающихся семей мэтчингом. Мэтчинг называется слабо устойчивым, если не найдётся не содержащейся в мэтчинге семьи, каждому члену которой станет “лучше”, когда они станут жить вместе. В дальнейшем, для краткости, мы будем употреблять термин устойчивый мэтчинг вместо термина слабо устойчивый мэтчинг.

Пусть  $n$  — количество представителей каждого из гендеров. В [3] было доказано, что при полных списках предпочтений устойчивый мэтчинг всегда существует, если  $n \leq k$ . При  $k = 3$  этот результат был обобщен в [5] на случай  $n = k + 1 = 4$ . Там же была выдвинута гипотеза, что в трёхмерном случае устойчивый мэтчинг существует для любого  $n$  при полных списках предпочтений. Задачу нахождения устойчивого мэтчинга в этом случае принято называть задачей 3-DSM-CYC или просто 3DSM (а 3 рассматриваемых гендера мужчинами, женщинами и собаками). Используя переформулировку классической NP-полной задачи “вычислимость” и хорошо организованный полный компьютерный перебор, в работе [16] была доказана справедливость гипотезы К. Eriksson et al. для  $n = 5$ . В [17] было доказано, что при случайных списках предпочтений в задаче 3DSM среднее количество устойчивых мэтчингов растёт как  $\Omega(n^2 \ln^2(n))$ .

В случае неполных списков предпочтений в работе [1] было замечено отличие трёхмерного случая от двумерной ситуации. Рассматриваемая задача называется 3DSMI (3DSM with incomplete preference lists — трёхмерная задача поиска устойчивого мэтчинга с неполными списками предпочтений). Здесь (как и в двумерной ситуации, обсуждённой выше) некоторые агенты могут остаться одиночками. Р. Vigo и Е. McDermid заметили, что решение 3DSMI существует не всегда — ими был построен явный пример задачи 3DSMI размера  $n = 6$  без

устойчивого мэтчинга. Более того, было доказано, что задача определения разрешимости 3DSMI NP-полна.

Наконец, недавно в [11], вопреки ожиданиям, гипотеза К. Eriksson et al. была опровергнута. С.-К. Lam и С. G. Plaxton сопоставили задаче 3DSMI некоторую задачу 3DSM для значения  $n$  в 15 раз большего исходного, которая имеет решение тогда и только тогда когда имеет решение исходная задача 3DSMI. Таким образом, они доказали, что вопрос разрешимости задачи 3DSM — NP-полная проблема.

Заметим, что С.-К. Lam и С. G. Plaxton рассматривали случай произвольного  $k > 2$  (множитель 15 есть конкретизация множителя  $k((k - 1)^2 + 1)$  для  $k = 3$ ). Пример из статьи [1] позволяет построить пример задачи 3DSM для  $n = 90 = 6 \times 15$  без устойчивого мэтчинга. Вопрос о контрпримерах меньшего размера был поставлен в работе [11] в качестве открытой проблемы.

Очевидный способ снижения размера контрпримеров для 3DSM — решить задачу, поставленную Р. Vigó и Е. McDermid о поиске примеров задачи 3DSMI без устойчивых мэтчингов для  $n < 6$ . Эта задача была решена нами в работе [14]. Мы доказали отсутствие таких контрпримеров для  $n < 3$  и предъявили несколько контрпримеров для 3DSMI с  $n = 3$ . Таким образом, результаты работ [14] и [11] позволяют построить контрпример для 3DSM размера  $n = 45$ .

Другой подход заключается в снижении множителя 15 при конструировании неразрешимой 3DSM по неразрешимой 3DSMI. В этой работе мы докажем что каждому контрпримеру для 3DSMI размера  $n$  можно сопоставить контрпример для 3DSM размера  $8n$ . Благодаря этому размер контрпримера задачи 3DSM будет снижен до  $3 \times 8 = 24$ .

Оставшаяся часть статьи организована следующим образом. В разделе 2, мы представим задачи 3DSM-CYC и 3DSMI-CYC в терминах теории графов. В разделе 3 доказано что каждому примеру задачи 3DSMI размера  $n$  без устойчивых трисочетаний можно сопоставить пример задачи 3DSM размера  $8n$  с тем же свойством. В разделе 4 мы резюмируем полученные результаты и обсудим направления дальнейших исследований. В приложении приведено короткое доказательство используемой нами Теоремы 2 из [14].

## 2. ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ 3DSM (3DSMI) В ТЕРМИНАХ ТЕОРИИ ГРАФОВ

Пусть  $G$  — ориентированный граф,  $E$  (или  $E(G)$ ) — множество его рёбер, среди них нет кратных. Множество его вершин  $V$  разделено на 3 части: мужчин  $M$ , женщин  $F$  и собак  $D$ . Из любой вершины  $v \in M$  рёбра исходят в (некоторые) вершины из  $F$ , из любой вершины  $v \in F$  рёбра идут в (некоторые) вершины из  $D$ , и из любой вершины  $v \in D$  рёбра направлены в (некоторые) вершины из  $M$ . Считается, что  $|M| = |F| = |D|$ , если это не так, то соответствующая доля дополняется вершинами, не связанными с остальной частью графа. Число  $n = |M| = |F| = |D|$  называется размером задачи. Очевидно, что все циклы графа  $G$  имеют длину, кратную 3. Можно также заметить, что это условие является достаточным для возможности разбиения вершин любого оргграфа  $G$  на 3 части  $M, F, D$  так, чтобы все его рёбра имели ориентацию, описанную выше.

Каждому ребру  $(v, v')$ ,  $v, v' \in V$  сопоставлено натуральное число  $r(v, v')$ , называемое *рангом* этого ребра. Для фиксированного  $v \in V$  все возможные ранги  $r(v, v_1), \dots, r(v, v_k)$  совпадают с  $\{1, \dots, k\}$ , где  $k$  — исходящая степень вершины  $v$  (неформально говоря, если  $r(v, v') = 1$ , то  $v'$  наиболее предпочтителен для  $v$ , и т.д.).

*Трисочетанием* назовём подграф  $H(V)$  графа  $G$ , в котором из каждой вершины  $v \in V$  исходит не более одного ребра, причём, если из вершины  $v$  исходит ребро, то оно лежит на цикле длины 3 графа  $H$ . Циклы длины 3 графа  $H$  называются *семьями*. Очевидно, что

любая семья с точностью до циклического сдвига имеет вид  $(m, f, d)$ , где  $m \in M$ ,  $f \in F$ ,  $d \in D$ . Заметим, что в дальнейшем при записи семьи нам будет удобно не фиксировать порядок гендеров внутри семьи — записи семьи в виде любой тройки, полученной циклическим сдвигом из исходной, мы будем считать эквивалентными.

Ниже мы будем иногда употреблять понятие семья в более широком смысле как любой цикл длины 3 графа  $G$ . Однако, в том случае, когда трисочетание  $H$  фиксировано, то другие циклы длины 3 мы будем описывать явно, употребляя термин “семья” только по отношению к циклам, входящим в трисочетание.

*Мэтчингом*  $\mu$  называется набор всех семей трисочетания  $H$ . Ранг  $R_\mu(v)$  вершины  $v$ ,  $v \in V$  в мэтчинге  $\mu$  определяется как ранг ребра, исходящего из этой вершины в подграфе  $H$ . Если в подграфе  $H$  из вершины  $v$  не исходит ребра, то  $R_\mu(v)$  полагается равным  $+\infty$ .

Тройка  $(v, v', v'')$  называется *блокирующей* для мэтчинга  $\mu$ , если это цикл графа  $G$  и

$$r(v, v') < R_\mu(v), \quad r(v', v'') < R_\mu(v'), \quad r(v'', v) < R_\mu(v'').$$

Мэтчинг  $\mu$  называется *устойчивым*, если для него не существует блокирующих троек.

Задача 3DSMI (3-dimension stable matching with incomplete preference lists) состоит в отыскании устойчивого мэтчинга для заданного графа  $G$ . Известно, что он не всегда существует. Более того, задача определения его существования для заданного графа  $G$  является NP-полной. Это, как уже говорилось во Введении, доказали P. Biró и E. McDermid. Они построили явный пример графа  $G$  размера 6, для которого устойчивого мэтчинга не существует.

Задача 3DSM представляет собой частный случай 3DSMI, в котором исходящая (и входящая) степень каждой вершины соответствующего графа равна размеру задачи  $n$ .

Введём ещё (такое же как в [15] и других работах) отображение на множестве агентов (вершин графа), обозначаемое тем же символом  $\mu$ , что и мэтчинг, по которому это отображение строится. Если агент  $x$  остаётся одиноким, то положим  $\mu(x) = x$ . Иначе  $\mu(x) = y$ , где  $y$  — вершина, в которую ведёт ребро в подграфе  $H$ , порождающем мэтчинг  $\mu$ , если таковое ребро в подграфе  $H$  имеется. Говоря неформально, в этом случае  $\mu(x)$  — партнёр  $x$  по семье, к которому “неравнодушен”  $x$ . Очевидно, что в 3DSM, в отличие от 3DSMI, равенство  $\mu(x) = x$  для устойчивого мэтчинга невозможно.

Везде ниже графы задач 3DSM, 3DSMI и их подграфы будем обозначать символами  $G$ ,  $H$  и, когда это будет уместно, символами  $H$  с различными нижними индексами. При этом, если мы одновременно рассматриваем подграфы  $H$  и подграф  $H$  с каким-либо нижним индексом, то это различные подграфы. Через  $H$  в таких ситуациях мы будем обозначать в некотором смысле “центральный” подграф, а через  $H$  с некоторым индексом — “периферийный” подграф, своим индексом характеризуемый. Вершины последнего подграфа будут иметь тот же нижний индекс, что и  $H$ .

### 3. СООТВЕТСТВИЕ МЕЖДУ НЕРАЗРЕШИМЫМИ ЗАДАЧАМИ 3DSMI И 3DSM

В этом разделе мы докажем, что каждой 3DSMI размера  $n$ , не имеющей устойчивого мэтчинга, соответствует 3DSM размера  $8n$ , обладающая тем же свойством. Как уже было отмечено во Введении, ранее аналогичный результат с множителем 15 был установлен С.-К. Lam и С. G. Plaxton [11]. Как следствие, используя результаты нашей работы [14] (см. Лемму 5 в Приложении), мы получаем конкретные примеры 3DSM размера 24, не имеющие устойчивого мэтчинга.

Мы будем рассматривать подграфы взвешенного графа задачи 3DSM. Сначала мы докажем Ключевую Лемму 1 (разбив её доказательство на несколько самостоятельных частей). В ней рассматривается подграф, по экземпляру которого мы “прицепим” к каждой из вершин графа  $H$ , задающего 3DSMI, не имеющую устойчивого мэтчинга.

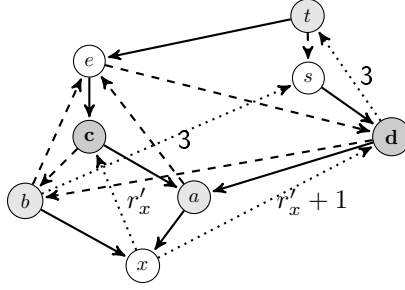


Рис. 1. Часть графа, задающего предпочтение, рассматриваемая в Лемме 1. Разные яркости вершин соответствуют разным гендерам, один из гендеров выделен также жирным шрифтом написания вершин. Сплошными линиями изображены рёбра ранга 1, штриховыми — ранга 2. Рёбра, изображённые пунктирными линиями, имеют ранги  $r'_x$ ,  $r'_x + 1$  или 3 (ранги этих рёбер подписаны).

**Лемма 1** (Ключевая лемма). Пусть некоторый подграф графа задачи 3DSM имеет следующий вид (см. Рис 1), в частности,

$$r(b, s) = r(d, t) = 3, \quad r(x, c) = r'_x, \quad r(x, d) = r'_x + 1, \quad (1)$$

где  $r'_x \in \{1, \dots, n - 1\}$ . Пусть  $\mu$  — устойчивый мэтчинг в этой задаче и  $y = \mu(x)$ . Тогда возможна лишь одна из двух альтернатив:

- А)  $y \in \{c, d\}$  и  $\mu(y) \in \{a, b, t\}$ ;
- Б)  $r(x, y) < r'_x$ .

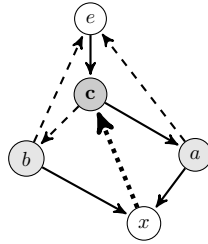


Рис. 2. Часть графа, задающего предпочтение, рассматриваемая в Лемме 2.

**Лемма 2.** Пусть некоторый подграф графа задачи 3DSM имеет следующий вид (см. Рис 2). Пусть  $\mu$  — устойчивый мэтчинг в этой задаче и  $\mu(x) = c$ . Тогда  $\mu(c) \in \{a, b\}$ .

*Доказательство Леммы 2.* Заметим, что по условию  $R_\mu(e) > 1$ . Предположим, что  $\mu(c) \notin \{a, b\}$ . Тогда  $R_\mu(c) > 2$ ,  $R_\mu(a) > 1$  и  $R_\mu(b) > 1$ . Рассмотрим тройку  $(c, a, e)$ . Имеем:  $r(c, a) < R_\mu(c)$ ,  $r(e, c) < R_\mu(e)$ ,  $r(a, e) \leq R_\mu(a)$ . Значит, тройка  $(c, a, e)$  не будет блокирующей, только если  $\mu(a) = e$ . Но тогда  $R_\mu(b) > 2$  и, следовательно,  $(c, b, e)$  — блокирующая тройка.  $\square$

В дальнейшем мы будем неоднократно использовать приём, применённый в доказательстве этой леммы, с помощью которого рассматривая потенциально блокирующую тройку  $(c, a, e)$ , мы вывели, что  $\mu(a) = e$ .

Заметим также, что согласно определению 3D-мэтчинга, для любых несовпадающих вершин  $h$  и  $g$  равенства  $\mu(h) = g$  и  $\mu(\mu(g)) = h$  эквивалентны. Иными словами, если  $\mu(u_2) = u_1$ , то тройка  $(u_1, v, u_2)$  не образует семьи из мэтчинга лишь тогда, когда  $\mu(u_1) \neq v$ .

**Лемма 3.** Пусть некоторый подграф графа задачи 3DSM имеет вид, представленный на Рис. 1. Пусть  $\mu$  — устойчивый мэтчинг в этой задаче и  $\mu(x) = d$ . Тогда  $\mu(d) \in \{a, b, t\}$ .

*Доказательство Леммы 3.* Заметим сначала, что по условию  $R_\mu(x) = r'_x + 1$ ,  $\mu(e) \neq d$ ,  $\mu(s) \neq d$ .

Будем доказывать от противного:  $\mu(d) \notin \{a, b, t\}$ . Тогда  $R_\mu(d) > 3$ . Кроме того,  $\mu(a) \neq x$ , иначе бы  $\mu(d) = \mu(\mu(x)) = a$ . Следовательно  $R_\mu(a) > 1$ . Аналогично  $R_\mu(b) > 1$ .

Следовательно,  $\mu(c) = a$ , иначе тройка  $(c, a, x)$  — блокирующая.

Докажем, что  $\mu(a) = e$ , то есть в мэтчинге  $\mu$  есть семья  $(c, a, e)$ . Действительно, если это не так, то  $R_\mu(a) > 2$ ,  $R_\mu(e) > 1$  и тройка  $(d, a, e)$  будет блокирующей.

Аналогично,  $\mu(b) = s$  (иначе тройка  $(d, b, s)$  будет блокирующей) (см. Рис. 3).

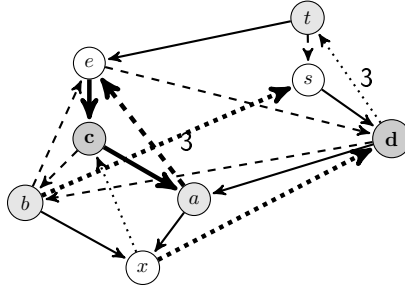


Рис. 3. Часть графа, задающего предпочтение, рассматриваемая в Лемме 3. Утолщением выделены рёбра, соответствующие парам, входящим в семьи мэтчинга  $\mu$ , если  $\mu(d) \notin \{a, b, t\}$ .

Так как  $\mu(t) \notin \{e, s\}$ , то  $R_\mu(t) > 2$ . Но тогда тройка  $(d, t, s)$  является блокирующей.  $\square$

**Лемма 4.** Пусть некоторый подграф графа задачи 3DSM имеет следующий вид (см. Рис 4). Пусть  $\mu$  — устойчивый мэтчинг в этой задаче,  $\mu(x) \notin \{c, d\}$ , Тогда  $R_\mu(x) < r'_x$ .

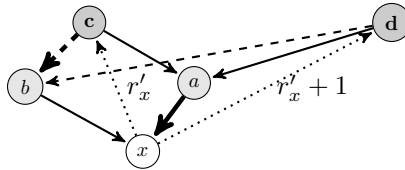


Рис. 4. Часть графа, задающего предпочтение, рассматриваемая в Лемме 4. Сплошными линиями изображены рёбра ранга 1, штриховыми — ранга 2. Рёбра, изображённые пунктирными линиями, имеют ранги  $r'_x$ ,  $r'_x + 1$  (ранги этих рёбер подписаны) Утолщением выделены рёбра, соответствующие парам, входящим в семьи мэтчинга  $\mu$  в ситуации  $R_\mu(x) \geq r'_x$ ,  $\mu(c) \neq a$ .

*Доказательство Леммы 4.* Будем доказывать утверждение леммы от противного. В этом случае  $R_\mu(x) > r'_x + 1$ .

Докажем сначала, что тогда  $\mu(c) = a$ . Допустим что это не так. Тогда  $R_\mu(c) > 1$ . Рассмотрим тройку  $(c, a, x)$ . Она не будет блокирующей, только если  $\mu(a) = x$ . Но тогда  $R_\mu(b) > 1$ . Кроме того, из условия Леммы получаем  $\mu^{-1}(a) \notin \{c, d\}$ , поэтому  $R_\mu(d) > 1$ ,  $R_\mu(c) > 1$ . Следовательно, тройка  $(c, b, x)$  не будет блокирующей, только если  $\mu(c) = b$  (см. Рис. 4).

Имеем  $R_\mu(d) > 2$ . Но тогда тройка  $(d, b, x)$  будет блокирующей.

Итак, мы доказали, что  $\mu(c) = a$ , следовательно  $R_\mu(d) > 1$ . При этом, по условию  $\mu(a) \neq x$ , откуда  $R_\mu(a) > 1$ . Тогда тройка  $(d, a, x)$  является блокирующей.  $\square$

Утверждение леммы 1, очевидно, следует из доказанных лемм 2, 3, 4.

**Замечание 1.** На всех рисунках мы будем выбирать цвета вершин, характеризующие гендеры, таким образом, чтобы рёбра изображённых графов шли только от тёмных вершин к серым, от серых к белым и от белых к тёмным. Однако, очевидно, что эти цвета можно “сдвигать по модулю 3”. Например, в графе на Рис. 1, можно считать, что все белые вершины имеют светло серый цвет. Тогда, конечно, все бывшие светло серые вершины придётся переокрасить в тёмно серый, а вершины  $c$  и  $d$  сделать белыми, но формулировка Леммы 1 при этом не изменится.

Пусть  $H$  — граф задачи 3DSMI. Для любой вершины  $v \in V(H)$  положим:

$$\rho_H(v) = \max_{(v, v') \in E(H)} r(v, v').$$

**Теорема 1.** Пусть у нас имеется граф  $H$  задачи 3DSMI размера  $n$ . Построим по нему граф  $G$  задачи 3DSM следующим образом.  $H$  является подграфом графа  $G$  (с теми же рангами рёбер). К каждой вершине  $x$  графа  $H$  “подвешена” своя копия  $H_x$  графа, изображённого на Рис. 1 с вершинами  $a_x, b_x, c_x, d_x, e_x, s_x, t_x \notin V(H)$  (все подграфы  $H_x$  попарно не пересекаются). Значение  $r'_x$  в формулах (1) определим как  $\rho_H(x) + 1$ . Ранги остальных рёбер графа  $G$  задачи 3DSM зададим произвольно. Тогда, если задача 3DSMI с графом  $H$  не имеет устойчивого мэтчинга, то это же верно и для задачи 3DSM с построенным графом  $G$ . При этом, размер рассматриваемой задачи 3DSM равен  $8n$ .

*Доказательство.* Допустим противное, что для задачи 3DSM с графом  $G$  существует устойчивый мэтчинг  $\mu_G$ . Мы собираемся, пользуясь Леммой 1, по мэтчингу  $\mu_G$  построить мэтчинг  $\mu_H$  задачи 3DSMI, задаваемой графом  $H$ . Поскольку мэтчинг  $\mu_H$  неустойчив, то для него существует блокирующая тройка  $(v, v', v'')$  из вершин подграфа  $H$ . Мы докажем, что та же тройка  $(v, v', v'')$  будет блокирующей для  $\mu_G$ .

Приступим к реализации этого плана доказательства. По предположению, для любой вершины  $x \in V(H)$  выполнено утверждение Леммы 1. То есть, либо выполнена альтернатива А и  $y = \mu_G(x) \notin V(H)$  и  $\mu_G(y) \notin V(H)$ ; либо выполнена альтернатива Б и  $(x, y) \in E(H)$  и  $(y, \mu_G(y)) \in E(H)$  (нарушение последнего соотношения, то есть выполнение альтернативы А для подграфа  $H_y$ , ведёт к противоречию:  $\mu_G(\mu_G(y)) \in \{a_y, b_y, t_y\}$  и потому  $\mu_G(\mu_G(y)) \notin V(H)$ , но  $\mu_G(\mu_G(y)) = x$  является вершиной подграфа  $H$ , согласно исходному предположению).

Заметим, что в случае выполнения альтернативы А

$$\rho_H(x) < R_{\mu_G}(x). \quad (2)$$

Сопоставим мэтчингу  $\mu_G$  мэтчинг  $\mu_H$  задачи 3DSMI с графом  $H$ . Положим, что в случае альтернативы А имеем  $\mu_H(x) = x$  (агент  $x$  остаётся одиноким). В случае альтернативы Б положим:  $\mu_H(x) = \mu_G(x)$ .

По условию мэтчинг  $\mu_H$  неустойчив. Значит, существует блокирующая тройка  $(v, v', v'')$ , где  $v, v', v'' \in V(H)$ . Блокировка означает, что для каждой вершины этой тройки выполнено неравенство для рангов, например, для вершины  $v$  это неравенство выглядит так:  $r(v, v') < R_{\mu_H}(v)$ . Если  $\mu_H(v) \neq v$ , то  $\mu_G(v) = \mu_H(v)$ , и, следовательно,  $r(v, v') < R_{\mu_G}(v)$  (поскольку в рассматриваемом случае  $R_{\mu_G}(v) = R_{\mu_H}(v)$ ).

Если же  $\mu_H(v) = v$ , то  $R_{\mu_H}(v) = \infty$ . Однако, тогда мы можем воспользоваться неравенством (2), из которого следует, что  $r(v, v') < R_{\mu_G}(v)$ .

Аналогичные альтернативы имеют место для вершин  $v'$  и  $v''$ :  $r(v', v'') < R_{\mu_G}(v')$ ,  $r(v'', v) < R_{\mu_G}(v'')$ . Таким образом, тройка  $(v, v', v'')$  является блокирующей тройкой мэтчинга  $\mu_G$  задачи 3DSM.

Подсчитаем размер задачи 3DSM. Каждой тройке вершин графа  $H$ , относящихся к разным гендерам, соответствует три разных подграфа вида Рис. 1, раскрашенные так, как указано в Замечании 1. При этом в силу циклического сдвига раскрасок, к любой такой тройке вершин графа  $H$  добавляется по семь новых вершин каждого гендера графа  $G$ , то есть число вершин графа увеличивается в 8 раз.  $\square$

#### 4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В этой работе мы исследовали соответствие между задачами 3DSM1 и 3DSM без устойчивых мэтчингов. Эта идея рассматривалась в [11], где впервые был построен пример задачи 3DSM без устойчивого мэтчинга. Он имел размер  $n = 90$ . Мы использовали более наглядный язык теории графов. Нам, удалось сократить размер контрпримера для 3DSM до  $n = 24$ .

Ранее К. Pashkovich и L. Poirrier доказали, что в любой задаче 3DSM размера  $n \leq 5$  существует устойчивый мэтчинг. Развитие идей данной работы позволяет сократить размер контрпримера до  $n = 20$  [13]. Таким образом, минимальный размер 3DSM без устойчивого мэтчинга лежит в диапазоне от 6 до 20 включительно. Вопрос о точном значении остаётся открытым. Возможно, что компьютерные эксперименты с дополнением найденных нами ранее в [14] минимальных неразрешимых задач 3DSM будут полезны при поиске ответа на этот вопрос.

Отметим, что эвристические алгоритмы поиска устойчивого мэтчинга всегда достаточно быстро находят его в случайно сгенерированных задачах 3DSM при размере  $n$ , близком к 20 (при независимом равномерном распределении всевозможных перестановок в списках предпочтений). Наверное, примеры 3DSM без устойчивого мэтчинга достаточно редки. Об этом косвенно говорит и доказанное В. Pittel утверждение, что матожидание количества устойчивых мэтчингов растёт быстрее, чем  $n^2 \ln^2(n)$  при  $n \rightarrow \infty$  ([17]). Интересно выяснить, действительно ли доля неразрешимых задач 3DSM стремится к нулю при  $n \rightarrow \infty$ .

Устойчивые паросочетания в классической задаче 2DSM не только всегда существуют, но и, после введения естественного отношения порядка, образуют дистрибутивную решётку. Этот факт был замечен Дж. Х. Конвеем и Д. Э. Кнудом (см. [10]). Позже было доказано, что соответствие между дистрибутивными решётками и устойчивыми паросочетаниями взаимно однозначное ([2, 8]). Было также дано явное описание частично упорядоченного множества (ЧУМа), идеалы которого определяют рассматриваемую дистрибутивную решётку. Элементы этого ЧУМа представляют собой так называемые ротации — циклы, включающие в себя поочередно мужчин и женщин, позволяющие из одного устойчивого паросочетания, получать следующее за ним (см. [9], более подробно ротации и их связь с дистрибутивной решёткой описана в книге [7]).

Хотелось бы найти “правильную” постановку задачи в случае трёх гендеров (3G), в которой бы устойчивые мэтчинги имели бы столь же красивую комбинаторную структуру.



Известно, что устойчивые мэтчинги всегда существуют в 3GSM с иерархически организованными предпочтениями [4]. Другой вариант постановки, в котором устойчивые мэтчинги всегда существуют: определим 6 матриц попарных предпочтений между гендерами и назовём мэтчинг устойчивым, если не существует тройки, не входящей в мэтчинг, в которой у каждой пары из тройки их попарные отношения “не ухудшаются”. Однако, вопрос о комбинаторной структуре устойчивых мэтчингов в “правильной” трёхгендерной задаче ещё ждёт исследования.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Biró P., McDermid E. *Three-sided stable matchings with cyclic preferences*, Algorithmica **58**, 5–18 (2010).

[2] Blair C. *Every finite distributive lattice is a set of stable matchings*, Journal of Combinatorial Theory, Series A **37** (3), 353–356 (1984).

[3] Boros E., Gurvich V., Jaslar S., Krasner D. *Stable matchings in three-sided systems with cyclic preferences*, Discrete Math. **289** (1–3), 1–10 (2004).

[4] Danilov V. I. *Existence of stable matchings in some three-sided systems*, Mathematical Social Sciences **46** (2), 145–148 (2003).

[5] Eriksson K., Söstrand J., Strimling P. *Three-dimensional stable matching with cyclic preferences*, Math. Soc. Sci. **52**, 77–87 (2006).

[6] Gale D., Shapley L. S. *College admissions and the stability of marriage*, Am. Math. Mon. **69**, 9–15 (1962).

[7] Gusfield D., Irving R. W. *The Stable Marriage Problem—Structure and Algorithms* (The MIT Press, Cambridge, MA, 1989).

[8] Gusfield D., Irving R. W., Leather P., Saks M. *Every finite distributive lattice is a set of stable matchings for a small stable marriage instance*, J. Combinatorial Theory **A44**, 304–309 (1987).

[9] Irving R. W., Leather P. *The complexity of counting stable marriages*, SIAM Journal on Computing **15** (3), 655–667 (1986).

[10] Knuth D. E. *Stable marriage and its relation to other combinatorial problems: an introduction to the mathematical analysis of algorithms*, CRM Proceedings and Lecture Notes **10** (American Mathematical Society, 1996) (Издан перевод на русский язык: Кнут Д. Э. *Устойчивые паросочетания и другие комбинаторные задачи. Введение в математический анализ алгоритмов* (МЦНМО, М., 2014)).

[11] Lam C.-K., Plaxton C. G. *On the Existence of Three-Dimensional Stable Matchings with Cyclic Preferences*, in: *Algorithmic Game Theory*, Lecture Notes in Comput. Sci. **11801**, 329–342 (Springer, 2019), URL: <https://arxiv.org/abs/1905.02844>.

[12] Lerner E. Yu. *Relationship between matching and assignment problems*, Russian Mathematics (Izvestiya VUZ. Matematika) **55** (11), 27–32 (2011) (Оригинал на русском языке: Лернер Э. Ю. *Соответствие задач об устойчивом паросочетании и о назначении*, Изв. вузов. Матем. **55** (11), 34–40 (2011)).

[13] Lerner E. Yu. *Instances of small size with no weakly stable matching for three-sided problem with complete cyclic preferences*, arXiv:2107.10102v1 (2021).

[14] Lerner E. Yu., Lerner R. E. *Minimal instances with no weakly stable matching for three-sided problem with cyclic incomplete preferences.*, arxiv:2101.08223v2 (2021) (submitted to Discrete Mathematics, Algorithms and Applications).

[15] Manlove D. F. *Algorithmics of matching under preferences*. (Theor. Comput. Sci. World Scientific, 2013).

[16] Pashkovich K., Poirrier L. *Three-dimensional stable matching with cyclic preferences*, Optimization Letters **14**, 2615–2623 (2020).

[17] Pittel B. *On random stable matchings: Cyclic ones with strict preferences and two-sided ones with partially ordered preferences*, Advances in Appl. Math. **120** (3), 1–27 (2020).

ПРИЛОЖЕНИЕ. ПРИМЕР ЗАДАЧИ 3DSMI РАЗМЕРА  $n = 3$  БЕЗ УСТОЙЧИВОГО МЭТЧИНГА

**Лемма 5** ([14], Теорема 2). *Задача 3DSMI, задаваемая графом  $G$  на Рис. 5 не имеет устойчивого мэтчинга.*

*Доказательство.* Существует 7 семей, формирующих мэтчинги этой задачи:  $(0, 1, 5)$ ,  $(0, 7, 8)$ ,  $(1, 2, 3)$ ,  $(1, 5, 3)$ ,  $(2, 3, 4)$ ,  $(3, 4, 5)$  и  $(4, 8, 6)$ .

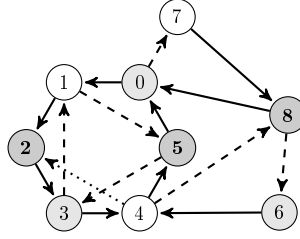


Рис. 5. Граф  $H$  задачи 3DSMI размера 3, не имеющей устойчивого мэтчинга. Вершины  $H$  нам удобно обозначить числами  $v$ ,  $v = 0, 1, \dots, 8$ . Значение  $v \bmod 3$  определяет гендер, к которому относится вершина  $v$ . Рёбра, изображённые сплошными линиями, имеют ранг 1. Штриховыми линиями изображены рёбра ранга 2. Ребро  $(4, 2)$  имеет ранг 3.

Назовем, мэтчинг  $\mu$  задачи 3DSMI, задаваемой графом  $G$ , *дополняемым*, если существует тройка вершин  $(v, v', v'')$ , такая, что  $\mu(v) = v$ ,  $\mu(v') = v'$ ,  $\mu(v'') = v''$  и  $\{(v, v'), (v', v'')(v'', v)\} \subseteq E(G)$ .

Очевидно, что любой дополняемый мэтчинг не является устойчивым, он блокируется тройкой  $(v, v', v'')$  из предыдущего абзаца. Поэтому отсутствие устойчивого мэтчинга будет доказано, если мы найдем блокирующие тройки для всех недополняемых мэтчингов. Для графа на Рис. 5 существует 8 недополняемых мэтчингов. Ниже мы приведем их полный список вместе с блокирующими тройками (в каждой из них, кроме 6-й, всего одна вершина  $x$ , для которой  $R_\mu(x) < \infty$ ):

- 1)  $\{(0, 1, 5), (2, 3, 4)\}$ , блокирующая тройка  $(4, 8, 6)$ ;
- 2)  $\{(0, 1, 5), (4, 8, 6)\}$ , блокирующая тройка  $(1, 2, 3)$ ;
- 3)  $\{(0, 7, 8), (1, 2, 3)\}$ , блокирующая тройка  $(3, 4, 5)$ ;
- 4)  $\{(0, 7, 8), (1, 5, 3)\}$ , блокирующая тройка  $(2, 3, 4)$ ;
- 5)  $\{(0, 7, 8), (2, 3, 4)\}$ , блокирующая тройка  $(0, 1, 5)$ ;
- 6)  $\{(0, 7, 8), (3, 4, 5)\}$ , блокирующая тройка  $(0, 1, 5)$ ;
- 7)  $\{(1, 2, 3), (4, 8, 6)\}$ , блокирующая тройка  $(0, 7, 8)$ ;
- 8)  $\{(1, 5, 3), (4, 8, 6)\}$ , блокирующая тройка  $(0, 7, 8)$ .

□

Эдуард Юльевич Лернер

Казанский федеральный университет,  
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия,

e-mail: eduard.lerner@gmail.com

E. Yu. Lerner

**Instances of small size with no stable matching for three-sided problem with complete cyclic preferences**

*Abstract.* Given  $n$  men,  $n$  women, and  $n$  dogs, each man has a complete preference list of women, while each woman does a complete preference list of dogs, and each dog does a complete preference list of men. We understand a matching as a collection of  $n$  nonintersecting triples, each of which contains a man, a woman, and a dog. A matching is said to be nonstable, if one can find a man, a woman, and a dog which belong to different triples and prefer each other to their current partners in the corresponding triples. Otherwise the matching is said to be stable (a weakly stable matching in 3DSM-CYC problem). According to the conjecture proposed by Eriksson, Söstrand, and Strimling (2006), the 3DSM-CYC problem always has a stable matching. However, Lam and Paxton (2019) have proposed an algorithm for constructing preference lists in the 3DSM-CYC problem of size  $n = 90$ , which has allowed them to disprove the mentioned conjecture. The question on the existence of counterexamples of a lesser size remains open. In this paper, we construct an demonstrative instance of the 3DSM-CYC problem with no stable matching, whose size  $n = 24$ .

*Keywords:* stable marriage, preference matrix, cyclic preferences, directed weighted graph, stable matching, counterexample.

*Mathematics Subject Classification:* 05C22, 05C90, 91B68.

*Eduard Yulevich Lerner*

*Kazan Federal University,*

*18 Kremlyovskaya str., Kazan, 420008 Russia,*

*e-mail:* eduard.lerner@gmail.com