РАЗНОСТИ ИДЕМПОТЕНТОВ В C^*-АЛГЕБРАХ И КВАНТОВЫЙ ЭФФЕКТ ХОЛЛА, II. НЕОГРАНИЧЕННЫЕ ИДЕМПОТЕНТЫ

А.М. Бикчентаев, Махмуд Хадур
Airat.Bikchentaev@kpfu.ru, mahmoud.khadour.991@gmail.com

УДК 517.983, 517.986

Пусть алгебра фон Неймана $\mathcal{M}$ операторов действует в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, τ – точный нормальный полуконечный след на $\mathcal{M}$, $S(\mathcal{M},\tau)$ – *-алгебра τ-измеримых операторов и $L_1(\mathcal{M},\tau)$ – банахово пространство τ-интегрируемых операторов. Если $P, Q \in S(\mathcal{M},\tau)^{\mathrm{id}}$ и $P-Q \in L_1(\mathcal{M},\tau)$, то $\tau(P-Q) \in \mathbb{R}$. В частности, если $A = A^3 \in L_1(\mathcal{M},\tau)$, то $\tau(A) \in \mathbb{R}$. Пусть $A, B \in S(\mathcal{M},\tau)$ являются трипотентами. Если $A-B \in L_1(\mathcal{M},\tau)$ и $A+B \in \mathcal{M}$, то $\tau(A-B) \in \mathbb{R}$. Пусть $P, Q \in S(\mathcal{M},\tau)^{\mathrm{id}}$ с $P-Q \in L_1(\mathcal{M},\tau)$ и $PQ \in \mathcal{M}$. Тогда для всех $n \in \mathbb{N}$ имеем $(P-Q)^{2n+1} \in L_1(\mathcal{M},\tau)$ и $\tau((P-Q)^{2n+1}) = \tau(P-Q) \in \mathbb{R}$.

Ключевые слова: гильбертово пространство, алгебра фон Неймана, нормальный след, измеримый оператор, идемпотент, квантовый эффект Холла

Differences of idempotents in C^*-algebras and the quantum Hall effect, II. Unbounded idempotents

Let a von Neumann algebra $\mathcal{M}$ of operators act on a Hilbert space $\mathcal{H}$, τ be a faithful normal semifinite trace on $\mathcal{M}$, $S(\mathcal{M},\tau)$ be a *-algebra of τ-measurable operators and $L_1(\mathcal{M},\tau)$ be the Banach space of τ-integrable operators. If $P, Q \in S(\mathcal{M},\tau)^{\mathrm{id}}$ and $P-Q \in L_1(\mathcal{M},\tau)$, then $\tau(P-Q) \in \mathbb{R}$. In particular, if $A = A^3 \in L_1(\mathcal{M},\tau)$, then $\tau(A) \in \mathbb{R}$. Let $A, B \in S(\mathcal{M},\tau)$ be tripotents. If $A-B \in L_1(\mathcal{M},\tau)$ and $A+B \in \mathcal{M}$, then $\tau(A-B) \in \mathbb{R}$. Let $P, Q \in S(\mathcal{M},\tau)^{\mathrm{id}}$ be so that $P-Q \in L_1(\mathcal{M},\tau)$ and $PQ \in \mathcal{M}$. Then for all $n \in \mathbb{N}$ we have $(P-Q)^{2n+1} \in L_1(\mathcal{M},\tau)$ and $\tau((P-Q)^{2n+1}) = \tau(P-Q) \in \mathbb{R}$.

Keywords: Hilbert space, von Neumann algebra, normal trace, measurable operator, idempotent, quantum Hall effect

Пусть P, Q – идемпотенты в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Если $X = P-Q$ является ядерным оператором, то следы всех нечетных степеней X совпадают:

$$\operatorname{tr}(P-Q) = \operatorname{tr}((P-Q)^{2n+1}) = \dim\ker(X-I) - \dim\ker(X+I) \in \mathbb{Z}, \qquad (1)$$

где I – тождественный оператор в $\mathcal{H}$. Если X является компактным оператором, то правая часть (1) дает естественную “регуляризацию” для следа и показывает, что это всегда является целым числом [1]. В [2, теорема 3] установлен C^*-аналог этого утверждения: Пусть φ – след на унитальной C^*-алгебре $\mathcal{A}$, $\mathfrak{M}_\varphi$ – идеал определения следа φ и трипотенты $P, Q \in \mathcal{A}$. Если $P-Q \in \mathfrak{M}_\varphi$, то $\varphi(P-Q) \in \mathbb{R}$.

Работа выполнена в рамках реализации Программы развития Научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа (соглашение № 075-02-2022-882).

Бикчентаев Айрат Мидхатович, д.ф.-м.н., внс, К(П)ФУ (Казань, Россия); Airat Bikchentaev (Kazan Federal University, Kazan, Russia)

Хадур Махмуд, аспирант, К(П)ФУ (Казань, Россия); Mahmoud Khadour (Kazan Federal University, Kazan, Russia)

Пары идемпотентов играют важную роль в квантовом эффекте Холла. Для идемпотентов P, Q, R с ядерными $P-Q$ и $Q-R$ из равенства $\mathrm{tr}(P-Q) = \mathrm{tr}(P-R) + \mathrm{tr}(R-Q)$ и (1) имеем

$$\mathrm{tr}((P-Q)^3) = \mathrm{tr}((P-R)^3) + \mathrm{tr}((R-Q)^3). \tag{2}$$

Физическое понимание аддитивности в (2) приходит из (1) и интерпретации $\mathrm{tr}((P-Q)^3)$ как *проводимости Холла* (the Hall conductance). Аддитивность (кубического) уравнения в (2) может быть рассмотрена как вариант закона Ома (the Ohm's law) об аддитивности проводимости [3].

В [4, теорема 1] получен C^*-аналог квантового эффекта Холла и доказана вещественность следа разностей широкого класса симметрий из C^*-алгебры. Здесь мы обобщаем эти результаты на неограниченные идемпотенты, трипотенты и симметрии, присоединенные к алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$, снабженной точным нормальным полуконечным следом τ. Пусть $S(\mathcal{M},\tau)^{\mathrm{id}} = \{A \in S(\mathcal{M},\tau) : \ A = A^2\}$.

Теорема 1. *Если $P, Q \in S(\mathcal{M},\tau)^{id}$ и $P-Q \in L_1(\mathcal{M},\tau)$, то $\tau(P-Q) \in \mathbb{R}$.*

В частности, если $A = A^3 \in L_1(\mathcal{M},\tau)$, то $\tau(A) \in \mathbb{R}$.

Следствие 1. *Пусть $A, B \in S(\mathcal{M},\tau)$ являются трипотентами. Если $A-B \in L_1(\mathcal{M},\tau)$ и $A+B \in \mathcal{M}$, то $\tau(A-B) \in \mathbb{R}$.*

Для каждого $P = P^2 \in S(\mathcal{M},\tau)$ существует единственное разложение $P = \tilde{P} + Z$, где $\tilde{P} \in \mathcal{M}^{\mathrm{pr}}$ и нильпотент Z принадлежит $S(\mathcal{M},\tau)$ с $Z^2 = 0$, причем $Z\tilde{P} = 0$, $\tilde{P}Z = Z$ [5, теорема 2.23].

Следствие 2. *Пусть $P \in S(\mathcal{M},\tau)^{id}$ и $P = \tilde{P} + Z$ – описанное выше разложение. Имеем эквивалентность $P \in L_1(\mathcal{M},\tau) \Leftrightarrow \tilde{P}, Z \in L_1(\mathcal{M},\tau)$, и при этом $\tau(P) = \tau(\tilde{P}) = \tau(\sqrt{|P|}|P^*|\sqrt{|P|}) = \tau(P^*) \in \mathbb{R}^+$.*

Следствие 3. *Пусть $U, V \in S(\mathcal{M},\tau)$ являются симметриями. Если $U-V \in L_1(\mathcal{M},\tau)$, то $\tau(U-V) \in \mathbb{R}$.*

Теорема 2. *Пусть $P, Q \in S(\mathcal{M},\tau)^{id}$ с $P-Q \in L_1(\mathcal{M},\tau)$ и $PQ \in \mathcal{M}$. Тогда для всех $n \in \mathbb{N}$ имеем $(P-Q)^{2n+1} \in L_1(\mathcal{M},\tau)$ и $\tau((P-Q)^{2n+1}) = \tau(P-Q) \in \mathbb{R}$.*

Следствие 4. *Если $P, Q, R \in S(\mathcal{M},\tau)^{id}$ с $P-Q, Q-R \in L_1(\mathcal{M},\tau)$ и операторы $PQ, QR, PR \in \mathcal{M}$, то $\tau((P-R)^{2n+1}) = \tau((P-Q)^{2n+1}) + \tau((Q-R)^{2n+1})$ для всех $n \in \mathbb{N}$.*

Следствие 5. *Пусть $U, V, W \in S(\mathcal{M},\tau)$ являются симметриями с $U-V, V-W \in L_1(\mathcal{M},\tau)$ и операторы $UV+U+V, UW+U+W, VW+V+W \in \mathcal{M}$. Тогда $\tau((U-W)^{2n+1}) = \tau((U-V)^{2n+1}) + \tau((V-W)^{2n+1})$ для всех $n \in \mathbb{N}$.*

Литература

1. *Avron J., Seiler R., Simon B.* The index of a pair of projections // J. Funct. Anal., **120**:1 (1994), 220-237.

2. *Бикчентаев А.М.* Разности идемпотентов в C^*-алгебрах // Сиб. матем. журн., **58**:2 (2017), 243-250.

3. *Gesztesy F.* (coordinating Editor) From Mathematical Physics to Analysis: a walk in Barry Simon's Mathematical Garden, II // Notices Amer. Math. Soc., **63**:8 (2016), 878-889.

4. *Бикчентаев А.М.* Разности идемпотентов в C^*-алгебрах и квантовый эффект Холла // ТМФ, **195**:1 (2018), 75-80.

5. *Бикчентаев А.М.* Об идемпотентных τ-измеримых операторах, присоединенных к алгебре фон Неймана // Матем. заметки, **100**:4 (2016), 492-503.