Известия вузов. Математика *https://kpfu.ru/science/nauchnye-izdaniya/ivrm*
2022, № 5, с. 74–79 *e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru*

Краткое сообщение, представленное Р.З. Даутовым

О.А. ЗАДВОРНОВ, Г.О. ТРИФОНОВА

ИТЕРАЦИОННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ С ТОЧЕЧНЫМ ИСТОЧНИКОМ

Аннотация. В данной работе рассматривается первая краевая задача для нелинейного уравнения в ограниченной области с точечным источником. Решение задачи ищется в виде суммы трех функций. Первая функция представляется в явном виде и является решением линейного уравнения с точечным источником с постоянными коэффициентами. Вторая функция находится из решения линейной однородной краевой задачи с постоянными коэффициентами. Для поиска третьей функции используется итерационный процесс, сходящийся сильно в Соболевском пространстве со скоростью геометрической прогрессии.

Ключевые слова: точечный источник, нелинейная краевая задача, итерационный процесс.

УДК: 517.957

DOI: 10.26907/0021-3446-2022-5-74-79

Введение

Рассмотрим первую краевую задачу для квазилинейного уравнения в ограниченной области $\Omega \subset R^n$, $n \geqslant 2$, с источником интенсивности q, сосредоточенным в начале координат (нуль — внутренняя точка области):

$$-\operatorname{div} g(x, \nabla w(x)) = q\,\delta(x), \quad x \in \Omega, \tag{1}$$

$$w(x) = w_\gamma(x), \quad x \in \Gamma, \tag{2}$$

здесь Γ — Липшиц-непрерывная граница Ω, функция w_γ является следом некоторой функции из пространства Соболева $W_2^{(1)}(\Omega)$.

Задачу (1), (2) понимаем следующим образом: *найти функцию* $w \in W_1^{(1)}(\Omega)$, *удовлетворяющую условию* (2) *и вариационному уравнению*

$$\int\limits_\Omega (g(x, \nabla w(x)), \nabla \eta(x))\,dx = q\eta(0) \quad \forall \eta \in C_0^\infty(\Omega).$$

Поступила в редакцию 15.03.2022, после доработки 15.03.2022. Принята к публикации 08.04.2022.

Благодарности. Работа выполнена за счет средств Программы стратегического академического лидерства Казанского (Приволжского) федерального университета ("ПРИОРИТЕТ-2030"). Аффилиация: Институт вычислительной математики и информационных технологий, Казанский (Приволжский) федеральный университет.

Относительно функции $g : \Omega \times R^n \to R^n$ будем предпологать выполненными следующие условия:
1) сильная монотонность по λ для всех $x \in \Omega$:

$$(g(x,\lambda) - g(x,\mu)\,, \lambda - \mu\,) \geq m|\lambda - \mu|^2\,,$$

2) Липшиц–непрерывность по λ для всех $x \in \Omega$:

$$|g(x,\lambda) - g(x,\mu)| \leq M|\lambda - \mu|\,,$$

3) измеримость по $x \in \Omega$ для каждого $\lambda \in R^n$ и равенство

$$g(x,0) = 0 \qquad \forall\, x \in \Omega\,,$$

4) существуют постоянная α, удовлетворяющая неравенству

$$\alpha > \alpha^* = \frac{n-2}{2}\,, \qquad n \geqslant 2\,,$$

и симметричная, положительно определенная матрица G такие, что выполнено следующее условие:

$$|\,g(x,\lambda) - G\,\lambda\,| \leqslant c\,|\,x\,|^{\alpha}\,|\,\lambda\,| + C \qquad \forall\,\lambda \in R^n, \quad \forall\, x \in B_r(0) \subset \Omega,$$

где $r, c, C > 0$ – положительные постоянные, $B_r(y) = \{x \in R^n : |x-y| < r\}$.

Краевая задача (1), (2) при выполнении этих условий, как следует из [1], имеет решение, а в силу 1) оно единственно. Представим его в виде $w = \Phi + u_0 + u$, где функция u принадлежит пространству $\overset{\circ}{W}{}_2^{(1)}(\Omega)$, а функция $w_0 = \Phi + u_0$ из пространства $W_1^{(1)}(\Omega)$ удовлетворяет задаче

$$\int\limits_{\Omega} (G\nabla w_0(x), \nabla\eta(x))\;dx = q\eta(0) \quad \forall\,\eta \in C_0^{\infty}(\Omega), \tag{3}$$

$$w_0(x) = w_\gamma(x), \quad x \in \Gamma\,. \tag{4}$$

1. Решение линейной краевой задачи с точечным источником

Для поиска $w_0 = \Phi + u_0$ воспользуемся частным решением задачи (3) без учета краевых условий (4). Непосредственно подставляя, можно убедиться, что функция

$$\Phi(x) = -q\frac{\phi_n(G^{-1/2}x)}{\sqrt{\det G}} \tag{5}$$

удовлетворяет вариационному уравнению (3). Функция ϕ_n в формуле (5) — это фундаментальное решение оператора Лапласа:

$$\phi_2(x) = \frac{1}{2\pi}\ln(|x|), \quad \phi_n(x) = -\frac{1}{(n-2)\sigma_n|x|^{n-2}}, \quad n \geq 3,$$

где $\sigma_n = \operatorname{mes} S$ — площадь единичной сферы $S = \{x \in R^n : |x| = 1\}$.

Функцию u_0 в разложении $w_0 = \Phi + u_0$ определим как решение следующей краевой задачи:

$$-\operatorname{div}(G\nabla u_0(x)) = 0, \quad x \in \Omega; \tag{6}$$

$$u_0(x) = w_\gamma(x) - \Phi(x), \quad x \in \Gamma\,. \tag{7}$$

В силу условия на w_γ, условий симметричности и положительной определенности на матрицу G и гладкости функции Φ в окрестности границы Γ существует единственное решение задачи (6), (7), и это решение из пространства $W_2^{(1)}(\Omega)$.

Таким образом, решение краевой задачи (3), (4) нами сведено к нахождению функции $\Phi(x)$ по формуле (5) и решению линейной эллиптичной (с постоянными коэффициентами) задачи (6) с условиями (7).

2. Итерационный процес для определения $u(x)$

Далее для поиска функции u (и тем самым функции w — решения задачи (1), (2)) рассмотрим итерационный процесс, интерпретируемый в дальнейшем, как метод простой итерации для операторного уравнения в гильбертовом пространстве. Зададим произвольно функцию $u^{(1)} \in \overset{\circ}{W}{}_2^{(1)}(\Omega)$ (можно положить $u^{(1)} \equiv 0$), а последовательность $\left\{u^{(k)}\right\}$ получим, решая вариационные задачи (η произвольная функция из $\overset{\circ}{W}{}_2^{(1)}(\Omega)$):

найти $u^{(k+1)} \in \overset{\circ}{W}{}_2^{(1)}(\Omega)$ *при* $k = 1, 2 \dots :$

$$\int\limits_{\Omega} \left(\nabla u^{(k+1)}\,,\,\nabla\eta\right)\,dx = \int\limits_{\Omega} \left(\nabla u^{(k)}\,,\,\nabla\eta\right)\,dx - \tau\int\limits_{\Omega} \left(g(x, \nabla u^{(k)} + \nabla w_0) - G\nabla w_0\,,\,\nabla\eta\right)\,dx.$$

Лемма 1. *Пусть относительно функции* $g(x,\lambda) : \Omega \times R^n \to R^n$ *выполнены условия* 1)–4), *функция* v *произвольная из пространства* $W_2^{(1)}(\Omega)$, *а* $w_0 = \Phi + u_0$. *Тогда вектор-функция* $P(x) \equiv g(x, \nabla v(x) + \nabla w_0(x)) - G\nabla w_0(x)$ *принадлежит пространству* $[L_2(\Omega)]^n$.

Таким образом, интегралы, входящие в определение итерационного метода для поиска функции u, ограничены.

С целью исследования введенного итерационного процесса сформулируем его в операторном виде. Для этого введем скалярное произведение и норму на пространстве $V = \overset{\circ}{W}{}_2^{(1)}(\Omega)$:

$$(u,\eta)_V = \int\limits_{\Omega} (\nabla u, \nabla\eta)\,dx\,, \quad \|u\|_V^2 = \int\limits_{\Omega} |\nabla u|^2\,dx \quad \forall u,\eta \in V.$$

Из леммы 1 следует, что для функции $u \in V$ и произвольной функции $\eta \in V$ определена линейная и непрерывная по η форма (функционал $l_u : V \to R^1$)

$$l_u(\eta) = \int\limits_{\Omega} (g(x, \nabla u + \nabla w_0) - G\nabla w_0\,,\,\nabla\eta)\,dx.$$

По теореме Рисса–Фишера существует элемент из пространства V (обозначим его $H(u)$) такой, что $(H(u),\eta)_V = l_u(\eta)$ для произвольной функции η из пространства V. Введем оператор $H : V \to V$:

$$(Hu,\eta)_V = \int\limits_{\Omega} (g(x, \nabla u + \nabla w_0) - G\nabla w_0\,,\,\nabla\eta)\,dx.$$

Тогда итерационный процесс для нахождения функции u запишем в виде

$$(u^{k+1},\eta)_V = (u^k,\eta)_V - \tau(Hu^k,\eta)_V \quad \forall\eta \in V,$$

или, более коротко, в операторном виде

$$u^{k+1} = u^k - \tau H u^k. \tag{8}$$

Таким образом, рассматриваемый итрерационный метод есть метод простой итерации для решения уравнения $Hu = 0$. Запишем это уравнение в вариационном виде

$$\int_\Omega (g(x, \nabla u + \nabla w_0) - G\nabla w_0\,,\, \nabla\eta)\; dx = 0 \quad \forall \eta \in V. \tag{9}$$

Вспомним, что для поиска функции w_0 использовалось вариационное равенство (3), пользуясь (9), получим равенства

$$\int_\Omega (g(x, \nabla u + \nabla w_0)\,,\, \nabla\eta)\; dx = \int_\Omega (G\nabla w_0\,,\, \nabla\eta)\; dx = q\eta(0) \quad \forall \eta \in V.$$

Поскольку функция u из $\overset{\circ}{W}{}_2^{(1)}(\Omega)$, а w_0 удовлетворяет граничному условию (4), то функция $w = u + w_0$ является решением исходной задачи (1), (2).

Для оператора H справедлива

Лемма 2. *Пусть относительно функции $g(x,\lambda) : \Omega \times R^n \to R^n$ выполнены условия* 1)–4). *Тогда для оператора H выполнены условия*

сильной монотонности

$$(Hu - Hv, u - v)_V \geq m\|u - v\|_V^2,$$

Липшиц-непрерывности

$$\|Hu - Hv\|_V \leq M\|u - v\|_V.$$

Используя лемму 2 и рассуждения, аналогичные доказательству теоремы 3.4 ([2], с. 104), получаем ключевой результат настоящей работы.

Теорема. *Пусть относительно функции $g(x,\lambda) : \Omega \times R^n \to R^n$ выполнены условия* 1)–4). *Тогда итерационный процесс* (8) *сходится в норме V со скоростью геометрической прогрессии с показателем $q = q(\tau) = \sqrt{1 - 2m\tau + M^2\tau^2} < 1$, если τ выбрано из интервала* $(0, 2m/M^2)$ *справедлива оценка*

$$\|u^k - u\|_V \leq \frac{q^k\tau}{1-q}\|Hu^0\|_V.$$

Заключение

В данной работе решение краевой задачи (1), (2) представлено в виде $w = \Phi + u_0 + u$. Функция $\Phi(x) \in W_1^{(1)}(\Omega)$ имеет явный вид и является решением линейной эллиптичной (с постоянными коэффициентами) дифференциальной задачи с источником интенсивности q. Функция $u_0 \in W_2^{(1)}(\Omega)$ находится из решения эллиптичной однородной краевой задачи (6) с постоянными коэффициентами и краевыми условиями (7). Для поиска функции $u(x)$ использован итерационный процесс (8) (на каждом шаге необходимо решать уравнение Лапласа), сходящийся в норме $\overset{\circ}{W}{}_2^{(1)}(\Omega)$ со скоростью геометрической прогрессии.

В качестве примера краевой задачи (1), (2), для которой выполнены предположения 1)–4), приведем задачу из теории фильтрации несжимаемой жидкости в двух- и трех-мерном пространствах, следующей нелинейному закону

$$g(x,\lambda) = \frac{|\lambda| + \kappa(x)[\,|\lambda| - \mu(x)\,]_+}{|\lambda|}\,\lambda\,, \tag{10}$$

где функции $\mu, \kappa : \Omega \to R$ измеримы и ограничены, а функция $[\,\cdot\,]_+$ — "срезка":

$$0 \leqslant \mu(x) \leqslant \overline{\mu}, \quad -1 < \underline{\kappa} \leqslant \kappa(x) \leqslant \overline{\kappa}, \quad [\,s\,]_+ = \begin{cases} 0\,, & s < 0; \\ s\,, & s \geq 0. \end{cases}$$

Введем функцию $p(x,s) \equiv s + \kappa(x)[\,s - \mu(x)\,]_+$, тогда $g(x,\lambda) = p(x,|\lambda|)|\lambda|^{-1}\,\lambda$. Очевидно, для всех $x \in \Omega$ функция $p(x,s)$ сильно монотонна по $s \geq 0$ с константой $m = \min\{1, 1+\underline{\kappa}\}$ и Липшиц-непрерывна с константой $M = \max\{1, 1+\overline{\kappa}\}$. Тогда и функция $g(x,\lambda)$ для всех $x \in \Omega$ сильно монотонна и Липшиц-непрерывна по $\lambda \in R^n$ с теми же константами m и M. Таким образом, условия 1) и 2) выполнены, условие 3), очевидно, имеет место. Покажем теперь, что выполнено условие 4).

Пусть существуют положительные постоянные r, c и $\beta > 0$ при $n = 2$, $\beta > 0.5$ при $n = 3$ такие, что выполнено условие

$$|\kappa(x) - \kappa(0)| \leq c\,|\,x\,|^{\beta} \quad \forall\, x \in B_r(0) \subset \Omega, \tag{11}$$

т. е. функция κ непрерывна по Гёльдеру в начале координат (в точке сосредоточения источника) с показателем β, тогда в окрестности нуля $B_r(0)$ справедлива оценка

$$|g(x,\lambda) - (1+\kappa(0))\lambda| = \left| \frac{(\kappa(x) - \kappa(0))[|\lambda| - \mu(x)]_+}{|\lambda|}\,\lambda + \frac{\kappa(0)([|\lambda| - \mu(x)]_+ - |\lambda|)}{|\lambda|}\,\lambda \right| \leqslant$$

$$\leqslant |\kappa(x) - \kappa(0)|\,|\lambda|\,\left| \frac{[|\lambda| - \mu(x)]_+}{|\lambda|} \right| + |\kappa(0)([|\lambda| - \mu(x)]_+ - |\lambda|)| \leqslant c\,|x|^{\beta}\,|\lambda| + |\kappa(0)|\,\overline{\mu}.$$

Таким образом, функция, определенная в (10), удовлетворяет условию 4) с $\alpha = \beta$ и матрицей $G = (1+\kappa(0))I$ (I — единичная матрица).

Частным случаем (10) является линейный закон. Пусть $g(x, \nabla w(x)) = c(x)\nabla w(x)$ и выполнено неравенство $0 < \underline{c} \leqslant c(x) \leqslant \overline{c}$. Тогда, положив $\mu(x) \equiv 0$, $\kappa(x) = c(x) - 1$, $\underline{\kappa} = \underline{c} - 1$, и предполагая выполненным условие Гёльдера (11) для функции $c(x)$ с указанными выше для $n = 2, 3$ показателями, получим условие 4) с матрицей $G = c(0)I$.

Другие примеры нелинейных краевых задач с точечным источником в правой части приведены в [3]–[5].

Литература

[1] Задворнов О.А. *Существование решения квазилинейной эллиптической краевой задачи при наличии точечных источников*, Учен. зап. Казанск. ун-та, Сер. Физ.-матем. науки **152** (1), 155–163 (2010).

[2] Гаевский Х., Грегер К., Захариас К. *Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения* (Мир, М., 1978).

[3] Задворнов О.А., Задворнова Г.О. *О решении нелинейной стационарной неоднородной задачи фильтрации при наличии точечного источника*, Дифференц. уравнения **50** (7), 984–988 (2014).

[4] Бадриев И.Б., Бандеров В.В., Задворнов О.А. *Существование решения задачи о равновесии мягкой сетчатой оболочки при наличии точечной нагрузки*, Учен. зап. Казанск. ун-та, Сер. Физ.-матем. науки. **152** (1), 93–102 (2010).

[5] Задворнов О.А. *Исследование нелинейной стационарной задачи фильтрации при наличии точечного источника*, Изв. вузов. Матем. (1), 25–30 (2005).

Олег Анатольевич Задворнов

Казанский федеральный университет,

ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия,

e-mail: Oleg.Zadvornov@kpfu.ruu

Галина Олеговна Трифонова

Казанский федеральный университет,
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия,

e-mail: GaOZadvornova@kpfu.ru

O.A. Zadvornov, G.O. Trifonova

Iterative method for solving a non-linear edge problems with a point source

Abstract. In this paper, we consider the first boundary value problem for a quasilinear equation in a bounded domain with a point source. The solution of the problem is sought in the form of the sum of three functions. The first function is represented explicitly and is the solution of a linear equation with a point source with constant coefficients. The second function is found from the solution of a linear homogeneous boundary value problem with constant coefficients. To search for the third function an iterative process is used that converges strongly in the Sobolev space at the rate of a geometric progression.

Keywords: point source, non-linear boundary value problem, iterative process.

Oleg Anatolevich Zadvornov

Kazan Federal University,
18 Kremlyovskaya str., Kazan, 420008 Russia,

e-mail: Oleg.Zadvornov@kpfu.ru

Galina Olegovna Trifonova

Kazan Federal University,
18 Kremlyovskaya str., Kazan, 420008 Russia,

e-mail: GaOZadvornova@kpfu.ru