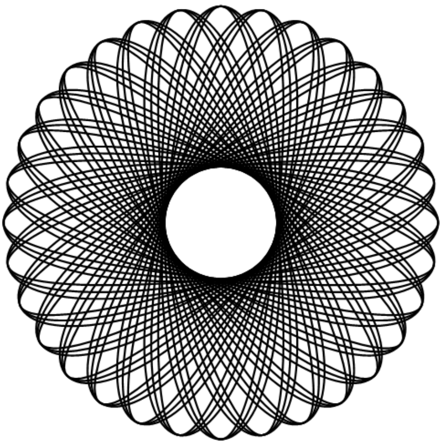
МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
КАЗАНСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ (ПОВОЛЖСКИЙ) УНИВЕРСИТЕТ
РЕСПУБЛИКАНСКИЙ ОЛИМПИАДНЫЙ ЦЕНТР РТ

Математические олимпиады школьников Татарстана

2017-2018 и 2018-2019



Казань – 2022

УДК 373.167.1:51
ББК 74.200.58:22.1

Печатается по решению учебно-методической комиссии
Института математики и механики КФУ
им. Н.И. Лобачевского

Киндер М.И.

Математические олимпиады школьников Татарстана. 2017-2018 и 2018-2019: Учебно-методическое пособие / Автор–составитель М.И. Киндер. — Казань: Казанский федеральный университет, 2022. — 136 с.

Брошюра предназначена для школьников, учителей, преподавателей математических кружков и просто любителей математики. В ней представлены задачи, предлагавшиеся в 2017-2018 и 2018-2019 учебных годах на муниципальном и региональном этапах математических олимпиад школьников Татарстана, а также задачи открытой олимпиады имени В. Р. Фридлендера, олимпиады «Путь к Олимпу», межрегиональной предметной олимпиады Казанского федерального университета и задачи Турнира юных математиков им. Н. И. Лобачевского для учеников 5-7 классов.

Все задачи приведены с подробными решениями, условия и решения геометрических задач сопровождаются рисунками.

2017-2018 учебный год

Муниципальный этап 44-й Всероссийской олимпиады по математике среди школьников Республики Татарстан состоялся 23 ноября 2017 г. В составлении задач муниципальной олимпиады принимали участие преподаватели Казанского университета:

И. С. Григорьева, М. И. Киндер, В. А. Сочнева.

Региональный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике состоялся 31 января – 1 февраля 2018 г.

С 9 по 10 января 2018 г. прошла республиканская математическая олимпиада «Путь к Олимпу», её основные участники – сельские школьники 8-11-х классов РТ.

7 апреля этого же года состоялась 8-я ежегодная городская математическая олимпиада, посвящённая памяти В. Р. Фридлендера. По традиции на неё были приглашены ученики 8-11 классов города Казани. Отличительная особенность этой олимпиады в том, что предлагавшиеся задачи были общими для всех участников. Победители олимпиады получили приглашение в летнюю школу «Квант». В составлении задач олимпиады принимали участие:

И. С. Григорьева, М. И. Киндер,
В. А. Сочнева, М. Д. Бронштейн.

8-го апреля 2018 года Институт математики и механики им. Н. И. Лобачевского, Региональный научно-образовательный математический центр КФУ совместно с лицеем имени Н. И. Лобачевского КФУ и IT-лицеем КФУ провели Турнир юных математиков имени Н. И. Лобачевского для учеников 5-7-х классов. В олимпиаде приняли участие более 1000 школьников Республики Татарстан. Составители задач Турнира юных математиков:

М. И. Киндер, М. В. Фалилеева.

Ниже представлены условия и подробные решения задач всех перечисленных олимпиад. Для Турнира юных математиков приведены условия и подробные решения только одного из четырёх вариантов, задачи других вариантов аналогичны. В скобках после условия задачи указана фамилия её автора.

Муниципальный этап

8 класс

1. Красная Шапочка решила сходить к бабушке, домик которой находился в 1 км ходьбы от ее дома. Волк ей в тот день не попался, поэтому туда и обратно она шла по одному и тому же маршруту. На горизонтальных участках ее скорость была 4 км/ч, в гору — 3 км/ч, а с горы — 6 км/ч. Сколько времени она была в пути?

2. Петя утверждает, что два спиннера дороже пяти мороженых, Вася — что три спиннера дороже восьми мороженых. Известно, что прав из них только один. Верно ли, что 7 спиннеров дороже 19 мороженых?

3. В выпуклом четырёхугольнике длины диагоналей равны 2 и 4 см. Найдите площадь четырёхугольника, зная, что длины отрезков, соединяющих середины противоположных сторон, равны.

4. Три прямые, пересекаясь, образуют 12 углов, причем n из них оказались равными. Каково может быть максимальное значение n?

5. Рассмотрим четыре последовательных числа n, $n+1$, $n+2$, $n+3$. Для каких n наименьшее общее кратное первых трёх чисел больше, чем наименьшее общее кратное последних трёх?

9 класс

6. При каких p один из корней уравнения $x^2 + px + 18 = 0$ вдвое больше другого?

7. Известно, что число $a = \dfrac{x}{x^2 - x + 1}$ рационально. Докажите, что число $b = \dfrac{x^2}{x^4 - x^2 + 1}$ — также рациональное.

8. Натуральное число n таково, что числа $2n + 1$ и $3n + 1$ являются квадратами. Может ли при этом число n быть простым?

9. Угол при вершине B равнобедренного треугольника ABC равен $108°$. Докажите, что биссектриса угла A вдвое больше биссектрисы угла B.

10. *а*) Какое *наибольшее* количество неперекрывающихся полосок 1×3 можно уместить на салфетке, изображенной на рисунке?

б) Какое *наименьшее* количество полосок 1×3 нужно, чтобы покрыть салфетку целиком, если полоски могут перекрываться? (*Киндер М.*)

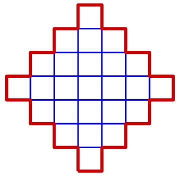


Рис. 1

10 класс

11. Известно, что $\sin(\alpha + \beta) = 0,2$ и $\cos(\alpha - \beta) = 0,3$. Вычислите $\sin(\alpha + 45°) \cdot \sin(\beta + 45°)$.

12. При каких q один из корней уравнения $x^2 - 12x + q = 0$ является квадратом другого?

13. Нечётные числа m и n взаимно просты. Найдите наибольший общий делитель чисел $m + n$ и $m^2 + n^2$.

14. Две окружности, радиусы которых относятся как $2 : 3$, касаются внутренним образом. Через центр меньшей окружности проведена прямая, перпендикулярная линии центров, из точек пересечения этой прямой с большей окружностью проведены касательные к меньшей окружности. Найдите углы между этими касательными.

15. *а*) Какое *наибольшее* количество неперекрывающихся полосок 1×3 можно уместить на салфетке, изображенной на рисунке 1?

б) Какое *наименьшее* количество полосок 1×3 потребуется, чтобы покрыть салфетку целиком, если полоски могут перекрываться? (*Киндер М.*)

11 класс

16. При каких p один из корней уравнения $x^2 - px + p = 0$ является квадратом другого? (Считаем, что корни уравнения различны.)

17. Петя нашёл сумму всех нечётных делителей некоторого чётного натурального числа n, а Вася — сумму всех его чётных делителей. Может ли произведение их результатов оказаться равным 2016? Если может, найдите все такие числа n. (*Киндер М.*)

18. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны стороны: $AB = 2$, $AC = 3$, $AA_1 = 4$. Найдите площадь сечения AMK, где M — середина BB_1 и K — середина DD_1.

19. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_{100}$ — некоторые числа, принадлежащие отрезку $[0; 1]$. Верно ли, что на этом отрезке найдётся такое число x, что

$$|\,x - x_1\,| + |\,x - x_2\,| + \ldots + |\,x - x_{100}\,| = 50\,?$$

20. На доске размером 10×10 стоят 10 небьющих друг друга ладей. Можно ли остальные клетки доски замостить доминошками? (Доминошка — прямоугольник размером 1×2 или 2×1.)

Олимпиада имени Л. Эйлера

8 класс

21. Разбейте какой-нибудь клетчатый квадрат на клетчатые квадратики так, чтобы не все квадратики были одинаковы, но квадратиков каждого размера было одно и то же количество.

(*Методкомиссия*)

22. Даны два ненулевых числа. Если к каждому из них прибавить единицу, а также из каждого из них вычесть единицу, то сумма обратных величин четырёх полученных чисел будет равна 0. Какое число может получиться, если из суммы исходных чисел вычесть сумму их обратных величин? Найдите все возможности.

(*С. Берлов*)

23. По кругу сидят 100 человек. Некоторые из них — рыцари, всегда говорящие правду, остальные — лжецы, которые всегда лгут. Для некоторого натурального числа $k < 100$ каждый из сидящих произнёс фразу: «Следующие k людей, сидящих за мной по часовой стрелке — лжецы». Чему могло быть равно число k?

(*С. Берлов*)

24. Внутри параллелограмма $ABCD$ выбрана точка E так, что $AE = DE$ и $\angle ABE = 90^\circ$. Точка M — середина отрезка BC. Найдите угол DME. (*А. Кузнецов*)

25. В Тридесятом царстве из каждого города выходит по 30 дорог, причём каждая дорога соединяет два города, не проходя через другие города. Тридесятый царь захотел разместить в некоторых городах по дорожно-эксплуатационному управлению (ДЭУ), обслуживающему все выходящие из города дороги, так, чтобы каждая дорога обслуживалась хотя бы одним управлением и управления были размещены не более чем в половине городов. Может ли так оказаться, что у царя существует ровно 2018 способов сделать это? (*С. Берлов, И. Богданов*)

26. На бесконечной ленте выписаны в порядке возрастания все натуральные числа с суммой цифр 2018. Какое число написано на 225-м месте? (*Методкомиссия*)

27. В полдень Вася положил на стол 10 вырезанных из бумаги выпуклых десятиугольников. Затем он время от времени брал ножницы, разрезал по прямой один из лежащих на столе многоугольников на два и клал оба получившихся куска назад на стол. К полуночи Вася проделал такую операцию 51 раз. Докажите, что в полночь среди лежащих на столе многоугольников был треугольник или четырёхугольник. (*И. Рубанов*)

28. На биссектрисе AL треугольника ABC выбрана точка D. Известно, что $\angle BAC = 2\alpha$, $\angle ADC = 3\alpha$, $\angle ACB = 4\alpha$. Докажите, что $BC + CD = AB$. (*А. Кузнецов*)

29. На клетчатой белой доске размером 25×25 клеток несколько клеток окрашено в чёрный цвет, причём в каждой строке и каждом столбце окрашено ровно 9 клеток. При каком наименьшем k заведомо можно перекрасить k клеток в белый цвет таким образом, чтобы нельзя было вырезать чёрный квадрат 2×2? (*С. Берлов*)

30. Докажите, что существует натуральное число n, большее 10^{100}, такое, что сумма всех простых чисел, меньших n, взаимно проста с n. (*Р. Салимов*)

Региональный этап

9 класс

31. Разбейте какой-нибудь клетчатый квадрат на клетчатые квадратики так, чтобы не все квадратики были одинаковы, но квадратиков каждого размера было одно и то же количество.

(*Методкомиссия*)

32. На доске написаны пять натуральных чисел. Оказалось, что сумма любых трёх из них делится на каждое из остальных. Обязательно ли среди этих чисел найдутся четыре равных?

(*С. Берлов, Д. Храмцов*)

33. Внутри параллелограмма $ABCD$ выбрана точка E так, что $AE = DE$ и $\angle ABE = 90^\circ$. Точка M — середина отрезка BC. Найдите угол DME. (*А. Кузнецов*)

34. Кондитерская фабрика выпускает n сортов конфет. На Новый год фабрика подарила каждому из 1000 учеников школы подарок, содержащий по конфете нескольких сортов (составы подарков могли быть разными). Каждый ученик заметил, что для любых 11 сортов конфет он получил конфету хотя бы одного из этих сортов. Однако оказалось, что для любых двух сортов найдётся ученик, получивший конфету ровно одного из этих двух сортов. Найдите наибольшее возможное значение n. (*Д. Храмцов*)

35. Числа x, y и z удовлетворяют условию $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Докажите, что

$$(x-y)(y-z)(x-z) \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

(*Л. Емельянов, методкомиссия*)

36. На бесконечной ленте выписаны в порядке возрастания все натуральные числа с суммой цифр 2018. Какое число написано на 225-м месте? (*Методкомиссия*)

37. Изначально по кругу расставлены 40 синих, 30 красных и 20 зелёных фишек, причём фишки каждого цвета идут подряд. За ход можно поменять местами стоящие рядом синюю и красную фишки, или стоящие рядом синюю и зелёную фишки. Можно ли за несколько таких операций добиться того, чтобы любые две стоящие рядом фишки были разных цветов? (*С. Берлов*)

38. Серёжа выбрал два различных простых числа p и q. Он считает натуральное число n *хорошим*, если число $p+q$ можно представить в виде суммы ровно q чисел, каждое из которых имеет вид n^k при целом неотрицательном k. (Например, если бы Серёжа выбрал $p=7$ и $q=3$, то он бы счёл число $n=2$ хорошим, поскольку $7+3=2^3+2^0+2^0$). Докажите, что Серёжа считает хорошими не более двух чисел. (*С. Волчёнков*)

39. В окружности ω с центром в точке O провели непересекающиеся хорды AB и CD так, что $\angle AOB = \angle COD = 120°$. Касательная к ω в точке A пересекает луч CD в точке X, а касательная к ω в точке B пересекает луч DC в точке Y. Прямая l проходит через центры окружностей, описанных около треугольников DOX и COY. Докажите, что l касается ω. (*А. Кузнецов*)

40. В компании 100 детей, некоторые дети дружат (дружба всегда взаимна). Известно, что при выделении любого ребёнка оставшихся 99 детей можно разбить на 33 группы по три человека так, чтобы в каждой группе все трое попарно дружили. Найдите наименьшее возможное количество пар дружащих детей.

(*С. Берлов, Н. Власова*)

10 класс

41. Разбейте какой-нибудь клетчатый квадрат на клетчатые квадратики так, чтобы не все квадратики были одинаковы, но квадратиков каждого размера было одно и то же количество.

(*Методкомиссия*)

42. Петя и Вася по очереди выписывают на доску натуральные числа, не превосходящие 2018 (выписывать уже имеющееся число запрещено); начинает Петя. Если после хода игрока на доске оказываются три числа, образующих арифметическую прогрессию, — этот игрок выигрывает. У кого из игроков есть стратегия, позволяющая ему гарантированно выиграть?

(*М. Дидин, П. Кожевников*)

43. Положительные числа x, y таковы, что $x^5 - y^3 \geqslant 2x$. Докажите, что $x^3 \geqslant 2y$. *(Н. Агаханов)*

44. Пусть O — центр окружности Ω, описанной около остроугольного треугольника ABC. На дуге AC этой окружности, не содержащей точку B, взята точка P. На отрезке BC выбрана точка X так, что $PX \perp AC$. Докажите, что центр окружности, описанной около треугольника BXP, лежит на окружности, описанной около треугольника ABO. *(И. Фролов)*

45. Дано нечётное число $n > 10$. Найдите количество способов расставить по кругу в некотором порядке натуральные числа $1, 2, 3, \ldots, n$ так, чтобы каждое число являлось делителем суммы двух соседних с ним чисел. (Способы, отличающиеся поворотом или отражением, считаются одинаковыми.) *(Д. Храмцов)*

46. Петя выбрал натуральное число n и выписал на доску следующие n дробей:

$$\frac{0}{n}, \frac{1}{n-1}, \frac{2}{n-2}, \frac{3}{n-3}, \ldots, \frac{n-1}{n-(n-1)}.$$

Пусть число n делится на натуральное число d. Докажите, что среди выписанных дробей найдётся дробь, равная числу $d-1$.

(Б. Обухов)

47. Из четырёх одинаковых треугольников сложен выпуклый четырёхугольник. Верно ли, что у этого четырёхугольника обязательно есть параллельные стороны? *(Методкомиссия)*

48. Дана клетчатая доска 1000×1000. Фигура *гепард* из произвольной клетки x бьёт все клетки квадрата 19×19 с центральной клеткой x, за исключением клеток, находящихся с x в одном столбце или одной строке. Какое наибольшее количество гепардов, не бьющих друг друга, можно расставить на доске?

(И. Богданов)

49. Докажите, что найдётся такое натуральное $n > 10^{2018}$, что сумма всех простых чисел, меньших n, взаимно проста с n.

(Р. Салимов)

50. Дан треугольник ABC, в котором $\angle A = \angle C = 30^\circ$. На его сторонах AB, BC и AC выбраны точки D, E и F соответственно так, что $\angle BFD = \angle BFE = 60^\circ$. Периметр треугольника ABC равен p, а периметр треугольника DEF равен p_1. Докажите, что $p \leqslant 2p_1$. (*А. Кузнецов*)

11 класс

51. Внутри выпуклого пятиугольника отметили точку и соединили её со всеми вершинами. Какое наибольшее число из десяти проведённых отрезков (пяти сторон и пяти отрезков, соединяющих отмеченную точку с вершинами пятиугольника) может иметь длину 1? (*А. Кузнецов*)

52. В каждую клетку таблицы 1001×1001 поставили 0 или 1. Оказалось, что в любом столбце нулей больше, чем единиц. Обязательно ли найдутся два столбца таких, что число строк, в пересечениях которых с этими двумя столбцами стоят только нули, больше числа строк, в пересечениях которых с этими двумя столбцами стоят только единицы? (*И. Богданов*)

53. Дан неравнобедренный треугольник ABC, в котором $\angle B = 135^\circ$. Пусть M — середина отрезка AC. Точка O — центр окружности Ω, описанной около треугольника ABC. Луч BM вторично пересекает окружность Ω в точке D. Докажите, что центр окружности Γ, описанной около треугольника BOD, лежит на прямой AC. (*А. Кузнецов*)

54. Изначально на доску выписали числа $1-\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$ и $1+\sqrt{2}$. Каждую минуту с доски стираются все три написанных на ней числа x, y и z, а вместо них на доску записываются числа $x^2 + xy + y^2$, $y^2 + yz + z^2$ и $z^2 + xz + x^2$. Могут ли в некоторый момент все три числа на доске оказаться рациональными? (*С. Кудря*)

55. Назовём *лодочкой*  трапецию с основаниями 1 и 3, получающуюся приклеиванием к противоположным сторонам единичного квадратика двух треугольничков (полуклеток). В квадрате 100×100 расположена невидимая лодочка (её можно поворачивать, она не выходит за границы квадрата, её средняя клетка целиком лежит на одной из клеток квадрата). Одним выстрелом можно накрыть любую треугольную половинку клетки. Если выстрел пересекается с внутренностью лодочки (то есть пересечение треугольника выстрела с лодочкой имеет ненулевую площадь), то она считается потопленной. Какого наименьшего количества выстрелов достаточно, чтобы наверняка потопить лодочку? (*С. Берлов, Н. Власова*)

56. Петя выбрал натуральное число n и выписал на доску следующие n дробей:

$$\frac{0}{n}, \frac{1}{n-1}, \frac{2}{n-2}, \frac{3}{n-3}, \ldots, \frac{n-1}{n-(n-1)}.$$

Пусть число n делится на натуральное число d. Докажите, что среди выписанных дробей найдётся дробь, равная числу $d-1$.

(*Б. Обухов*)

57. Функция $f(x)$, заданная на всей числовой оси, при всех действительных x и y удовлетворяет условию

$$f(x)+f(y)=2f\left(\frac{x+y}{2}\right)f\left(\frac{x-y}{2}\right).$$

Верно ли, что функция $f(x)$ обязательно чётная? (*О. Подлипский*)

58. Докажите, что найдётся такое натуральное $n > 10^{2018}$, что сумма всех простых чисел, меньших n, взаимно проста с n.

(*Р. Салимов*)

59. В компании 100 детей, некоторые дети дружат (дружба всегда взаимна). Известно, что при выделении любого ребёнка оставшихся 99 детей можно разбить на 33 группы по три человека так, чтобы в каждой группе все трое попарно дружили. Найдите наименьшее возможное количество пар дружащих детей.

(*С. Берлов, Н. Власова*)

60. На сфере ω_1 отмечена фиксированная точка A, а на сфере ω_2 — фиксированная точка B. На сфере ω_1 выбирается переменная точка X, а на сфере ω_2 — переменная точка Y так, что $AX \parallel BY$. Докажите, что середины всех построенных таким образом отрезков XY лежат на одной сфере. (*А. Кузнецов*)

Олимпиада имени В. Р. Фридлендера

61. Опытный дрессировщик может вымыть слона за 40 минут, а начинающий — за 2 часа. За сколько времени они вдвоем вымоют трёх слонов?

62. Отец привел сына в тир и купил ему 20 пулек. За каждый промах отец отбирал у сына одну пульку, а за каждое попадание давал одну дополнительную. Сын выстрелил 18 раз, после чего пульки у него кончились. Сколько раз он попал?

63. Найдите сумму всех шестизначных чисел, в десятичной записи которых присутствуют только цифры 3 или 7.

64. Пусть D — дискриминант трёхчлена ax^2+bx+c с целыми коэффициентами. Докажите, что дискриминант D не может быть равен ни 2018, ни 2019.

65. В выпуклом четырёхугольнике три стороны равны друг другу $AB = BC = CD$. На доске отметили середины этих сторон P, Q и R, остальное изображение стёрли. Восстановите исходный четырёхугольник с помощью циркуля и линейки.

66. Докажите, что на плоскости не существует равнобедренного треугольника с углом при вершине 45°, вершины которого находятся в точках с целыми координатами.

67. Даны три числа x, y и z, удовлетворяющие неравенствам $0 < x < y < z < x + y$. Гарантируют ли эти неравенства существование треугольника

а) с высотами, равными x, y и z?
б) с медианами, равными x, y и z?

68. Имеются в неограниченном количестве прямоугольные детали 1×2, 1×3, 1×4, и так далее. Пусть $T(n)$ — число способов покрыть этими деталями (без пустых мест и наложений друг на друга) полоску размера $1 \times n$, где n — натуральное число. Заполнения, отличающиеся размерами укладываемых деталей или порядком укладки деталей на листе, считаются разными. Докажите, что $T(n) + T(n + 1) = T(n + 2)$.

69. Произведение всех делителей числа n оканчивается на 2018 нулей. На сколько нулей может оканчиваться само число n?

70. В окружность радиуса 1 вписывается квадрат, в квадрат вписывается окружность, в эту окружность — 8-угольник, в него — снова окружность, в окружность — 16-угольник и так далее. Каждый раз в окружность с номером k вписывается 2^{k+1}-угольник, а в него — окружность с номером $k+1$. Пусть R_k — радиус k-ой окружности. Найдите $\lim_{n\to\infty} R_k$.

Турнир юных математиков им. Н. И. Лобачевского

5 класс

71. Две улитки ползут наперегонки. Первая проползает 7 метров за каждые 8 часов, а вторая — 8 метров за каждые 9 часов. Какая улитка ползёт быстрее?

72. В ящике лежат красные, синие, зелёные и белые шарики. Известно, что красных шариков в два раза больше, чем синих, синих в два раза больше, чем зелёных, а число белых шариков больше 10. Сколько шариков каждого цвета лежит в ящике, если всего их 30? (В ящике есть шарики каждого цвета.)

73. Марсианские шахматы отличаются от шахмат землян размерами доски и правилами ходов фигур. Например, марсианская ладья делает ходы, как и обычная ладья, но только длиной в *одну* или *три* клетки (вперёд, назад, влево или вправо). Может ли эта ладья обойти все клетки доски 7×7, побывав на каждой клетке ровно один раз, и вернуться в начальную клетку?

74. На деревьях, расположенных по кругу, сидят 50 чижей (на каждом дереве по одному), некоторые из них жёлтого цвета. Оказалось, что рядом с каждым чижом обязательно сидит хотя бы один жёлтый чиж. Какое наименьшее число жёлтых чижей может быть на деревьях?

75. Прямоугольник 4×6 разбит прямыми на 24 одинаковые квадратные клетки. В некоторых клетках проведена диагональ, при этом никакие две диагонали не имеют общей точки (даже общего конца). Каково наибольшее возможное число нарисованных диагоналей?

6 класс

76. Из числа 87654321 вычёркивается минимальное количество цифр так, чтобы оставшееся число делилось на 6. Какое число останется после вычёркивания цифр? Найдите все способы.

77. В ящике лежат красные, синие, зелёные и белые шарики. Известно, что красных шариков в три раза больше, чем синих, синих в три раза больше, чем зелёных, а число белых шариков больше 10. Сколько шариков каждого цвета лежит в ящике, если всего их 40? (В ящике есть шарики каждого цвета.)

78. Найдите *наименьшую* несократимую положительную дробь, при делении которой на каждую из дробей $\frac{77}{888}$ и $\frac{88}{777}$ получаются целые числа.

79. В наборе из 6 гирек ровно одна гирька имеет массу 3 *г* и ровно одна гирька — массу 6 *г*, масса каждой из остальных гирек — целое число граммов. Известно, что любой вес в целое число граммов от 1 *г* до 47 *г* можно взвесить с помощью этих гирь *единственным* образом. Найдите массы всех остальных гирек набора. Укажите все возможные наборы. (Гирьки можно ставить только на одну чашу весов.)

80. Марсианские шахматы отличаются от шахмат землян формой доски (рис. 2) и правилами ходов фигур. Например, марсианская ладья ходит так же, как и обычная ладья, — по вертикали и по горизонтали — но только на одну клетку (вперёд, назад, влево или вправо). Какое *наименьшее* число марсианских ладей нужно расставить на марсианской шахматной доске так, чтобы они били все остальные клетки доски?

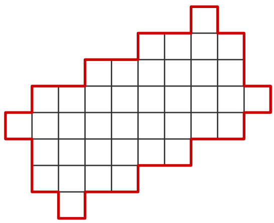


Рис. 2

7 класс

81. Из числа 987654321 вычёркивается минимальное количество цифр так, чтобы оставшееся число делилось на 12. Какое число останется после вычёркивания цифр? Найдите все способы.

82. В наборе из 6 гирек есть две гирьки массой 3 *г*, а масса каждой из остальных гирек — целое число граммов. Известно, что любой вес в целое число граммов от 1 *г* до 35 *г* можно взвесить с помощью этих гирь *единственным* образом. Найдите массы всех остальных гирек набора. Укажите все возможные наборы. (Гирьки можно ставить только на одну чашу весов.)

83. На конференцию по вопросам магии и волшебства приехало 900 фей и ведьм. Среди участниц конференции есть и феи, и ведьмы. Все они были рассажены за круглым столом. На вопрос «Верно ли, что рядом с вами сидит одна фея и одна ведьма?» все дружно ответили «Нет». Ведьмы всегда лгут, а феи всегда говорят правду. Сколько фей могло участвовать в конференции?

84. На отрезке AB отметили точку X, а затем построили два равносторонних треугольника AXY и BXZ по одну сторону от AB. Чему равен угол XYZ, если $AX = 1$ и $XB = 2$?

85. Прямоугольник 4×7 разбит прямыми на 28 одинаковых квадратных клеток. В некоторых клетках проведена диагональ, при этом никакие две диагонали не имеют общей точки (даже общего конца). Каково наибольшее возможное число нарисованных диагоналей?

Олимпиада «Путь к Олимпу»

8 класс

86. К чётному числу n прибавили его наибольший делитель, отличный от n. Может ли полученная сумма равняться 2018?

87. Собранный мёд заполняет несколько 50-литровых бидонов. Если его разлить в 40-литровые бидоны, то понадобится на 5 бидонов больше, но один из них останется неполным. Если собранный мёд разлить в 70-литровые бидоны, то понадобится на 4 бидона меньше, но снова один из них окажется неполным. Сколько 50-литровых бидонов заполняет собранный мёд?

88. Можно ли расставить числа от 1 до 7 по кругу так, чтобы любое из них делилось на разность своих соседей?

89. У Маши есть 45 гирек, массы которых — все натуральные числа от 1 до 45. Может ли Маша дать по 15 гирек своим подругам Саше и Даше так, чтобы выполнилось следующее условие: какие бы две своих гирьки ни положили на одну чашку весов Саша и Даша — по одной каждая, Маша сможет положить на другую чашку весов одну или две свои гирьки так, чтобы весы уравновесились?

90. Из вершины A треугольника ABC опущены перпендикуляры AK и AL на биссектрисы *внешних* углов B и C. Найдите отрезок KL, если периметр треугольника ABC равен 10.

9 класс

91. Два брата родились в один день, но в разные годы. Оказалось, что в 2017 году каждому из них исполнилось столько лет, какова сумма цифр его года рождения. Определите год рождения каждого из братьев.

92. Известно, что числа 2011 и 2017 — простые. Найдите хотя бы одно натуральное число, сумма всех делителей которого (не считая самого этого числа) равна 2017.

93. Докажите, что *при любых* a и b хотя бы одно из уравнений $x^2 + 2ax + ab = 0$ и $x^2 + 2bx + ab = 0$ имеет решение.

94. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C катет BC равен 12, а радиус вписанной окружности равен 5. Вписанная окружность касается катета AC в точке D. Найдите длину хорды, соединяющей точки пересечения прямой BD с окружностью.

95. В теннисном турнире принимают участие 10 участников. Сколькими способами можно составить расписание 5 матчей в первом круге турнира, так чтобы *каждый* участник играл только один раз?

10 класс

96. Четырёхзначное число является квадратом целого числа. Если стереть первую (слева) цифру, то оставшееся число будет кубом целого числа. Если после этого стереть ещё и следующую цифру, оно превратится в четвёртую степень целого числа. Каким могло быть первоначальное число?

97. Сумма действительных чисел x, y, z равна 2018, а сумма их обратных величин равна 2018^{-1}. Какие значения может принимать выражение $(x - 2018)(y - 2018)(z - 2018)$?

98. В теннисном турнире принимают участие 10 участников. Сколькими способами можно составить расписание 5 матчей в первом круге турнира, так чтобы *каждый* участник играл только один раз?

99. На катетах a и b прямоугольного треугольника выбираются точки A и B. Пусть A_1 и B_1 — основания перпендикуляров AA_1 и BB_1, опущенных на гипотенузу. Найдите наименьшее возможное значение суммы $A_1A + AB + BB_1$.

100. Для любых действительных чисел x и y, принадлежащих $[0;\,1]$, докажите:

$$\sqrt{x(1-y)} + \sqrt{y(1-x)} \leqslant 1.$$

11 класс

101. Собранный мёд заполняет несколько 50-литровых бидонов. Если его разлить в 40-литровые бидоны, то понадобится на 5 бидонов больше, но один из них останется неполным. Если собранный мёд разлить в 70-литровые бидоны, то понадобится на 4 бидона меньше, но снова один из них окажется неполным. Сколько 50-литровых бидонов заполняет собранный мёд?

102. Сумма действительных чисел x, y, z равна 2018, а сумма их обратных величин равна 2018^{-1}. Какие значения может принимать выражение $(x-2018)(y-2018)(z-2018)$?

103. В периодической десятичной дроби $0,1212\ldots$ первую цифру после запятой заменили на 3. Во сколько раз полученное число больше исходного?

104. На катетах a и b прямоугольного треугольника выбираются точки A и B. Пусть A_1 и B_1 — основания перпендикуляров AA_1 и BB_1, опущенных на гипотенузу. Найдите наименьшее возможное значение суммы $A_1A+AB+BB_1$.

105. Для любых действительных чисел x, y и z, принадлежащих $[0;\,1]$, докажите:

$$\sqrt{x(1-y)}+\sqrt{y(1-z)}+\sqrt{z(1-x)}\leqslant\frac{3}{2}\,.$$

2018-2019 учебный год

Муниципальный этап 45-й Всероссийской олимпиады по математике среди школьников Республики Татарстан состоялся 22 ноября 2018 г. В составлении задач муниципальной олимпиады принимали участие преподаватели Казанского университета:

И. С. Григорьева, М. И. Киндер, В. А. Сочнева.

Региональный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике состоялся 1 января – 2 февраля 2019 г.

14 января 2019 г. прошла открытая Межрегиональная предметная олимпиада КФУ по математике. Организатором олимпиады является Казанский (Приволжский) федеральный университет. Олимпиада проводится в два этапа: отборочный (дистанционно) и заключительный (очно). Победители и призеры очного этапа предметной олимпиады получают льготы при поступлении в Казанский федеральный университет.

С 15 по 16 января 2019 г. на базе «Дуслык» Республиканского олимпиадного центра Министерства образования и науки Республики Татарстан состоялся заключительный этап республиканской олимпиады школьников 8-11 классов «Путь к Олимпу» по математике. В олимпиаде приняли участие 229 обучающихся общеобразовательных организаций из 40 муниципальных районов республики, среди них призёрами стали 55 школьников.

Задачи для открытой Межрегиональной предметной олимпиады КФУ и республиканской олимпиады «Путь к Олимпу» составил *М. И. Киндер.*

6 апреля этого же года состоялась 9-я ежегодная городская математическая олимпиада, посвящённая памяти В. Р. Фридлендера. По традиции на неё были приглашены ученики 8-11 классов города Казани. Отличительная особенность этой олимпиады в том, что предлагавшиеся задачи были общими для всех участников. Победители олимпиады получили приглашение в летнюю школу «Квант». В составлении задач олимпиады принимали участие:

М. Д. Бронштейн, И. С. Григорьева, В. А. Сочнева.

21-го апреля 2019 года Институт математики и механики им. Н. И. Лобачевского, Региональный научно-образовательный математический центр КФУ совместно с лицеем имени Н. И. Лобачевского КФУ и IT-лицеем КФУ провели Турнир юных математиков имени Н. И. Лобачевского для учеников 5-7-х классов. В олимпиаде приняли участие более 1000 школьников Республики Татарстан. Составители задач Турнира юных математиков:

М. И. Киндер, М. В. Фалилеева.

Ниже представлены условия и подробные решения задач всех перечисленных олимпиад. Для Турнира юных математиков приведены условия и подробные решения только одного из четырёх вариантов, задачи других вариантов аналогичны. В скобках после условия задачи указана фамилия её автора.

Муниципальный этап

8 класс

106. На именины бабушки Зины пришло 16 гостей. Оказалось, что присутствующие съели 130 конфет, причем девочки съели по 13 штук, мальчики — по 5, взрослые гости — по 4, а сама бабушка Зина — 17. Сколько было среди гостей девочек, мальчиков и взрослых?

107. Миша задумал число n и сообщил его 10 друзьям. Первый из них рассказал, что n делится на все числа от 1 до 10, второй объявил, что оно делится на все числа от 2 до 10, третий — на все числа от 3 до 10, и так далее. Наконец, 10-й друг сообщил, что оно делится на 10. Могло ли оказаться, что ровно пятеро друзей сказали правду? (*Киндер М.И.*)

108. Нечётные числа m и n взаимно просты. Найдите наибольший общий делитель чисел $m+n$ и m^2+n^2.

109. Найдите площадь треугольника, медианы которого равны 12, 15 и 9.

110. Можно ли на окружности расположить числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 так, чтобы сумма любых трёх *соседних* чисел была больше *а*) 13; *б*) 11?

9 класс

111. Миша задумал трёхзначное число n и сообщил его 10 друзьям. Первый из них рассказал, что n делится на все числа от 1 до 10, второй объявил, что оно делится на все числа от 2 до 10, третий — на все числа от 3 до 10, и так далее. Наконец, 10-й друг сообщил, что оно делится на 10. Миша знает, что из 10 друзей только трое сказали правду. Какое число задумал Миша? Укажите все возможные варианты. (*Киндер М.И.*)

112. Число умножили на сумму его цифр. Могло ли при этом получиться число $200\ldots0018$ (100 нулей)? (*Киндер М.И.*)

113. Окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B, причем дуга AB окружности ω_2 делит площадь окружности ω_1 пополам. Докажите, что длина этой дуги больше диаметра окружности ω_1.

114. Аня знает, что на дом задали квадратное уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0$. Она вспомнила, какие коэффициенты были у этого уравнения (они все положительны), но не помнит, на каком месте стоял каждый из них. На всякий случай она решила все 6 возможных вариантов уравнения и выписала их корни. Какое наибольшее количество различных чисел могло быть в полученном списке?

115. Изобразите на координатной плоскости множество точек (x, y), удовлетворяющих условию

$$\min(|\,x\,|, |\,y\,|) + 2\max(|\,x\,|, |\,y\,|) = 1.$$

10 класс

116. Миша задумал трёхзначное число n и сообщил его 10 друзьям. Первый из них рассказал, что n делится на все числа от 1 до 10, второй объявил, что оно делится на все числа от 2 до 10, третий — на все числа от 3 до 10, и так далее. Наконец, 10-й друг сообщил, что оно делится на 10. Могло ли оказаться, что хотя бы четверо друзей оказались правы? (*Киндер М.И.*)

117. Числа m и n взаимно просты. Какие значения может принимать наибольший общий делитель чисел $m + n$ и $m^2 + n^2$.

118. *а*) В окружность вписан многоугольник с $n = 2017$ сторонами. Известно, что все его углы равны. Будут ли равными его стороны?

б) Тот же вопрос, если $n = 2018$.

119. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $\sin^2 x + 2\sin x\cos x + 3\cos^2 x$.

120. Пусть a, b, c и d — действительные числа и $abcd = 1$. Докажите неравенство:

$$ab + bc + cd + da \leqslant \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{1}{d^2}.$$

(*Mircea Becheanu, Bucharest.*)

11 класс

121. Числа x_1 и x_2 — различные корни уравнения $x^2 + px + q = 0$, а $x_1 + 1$ и $x_2 + 1$ — корни уравнения $x^2 - p^2x + qp = 0$. Найдите p и q.

122. Пете и Коле дали два одинаковых картонных треугольника. Каждый из них разрезал свой треугольник на два равных треугольника. Могут ли полученные ими части быть разными?

123. Две окружности α и β касаются внутренним образом в точке A. Через точку M окружности α проведена хорда MN, касающаяся окружности в точке B. Прямая AB пересекает окружность α в точке T (отличной от A). Докажите, что $MT = NT$.

124. Предположим, что шахматный конь ходит буквой «Г», но не на 2 и 1 клетки, а на $n + 1$ и n клеток. За какое *наименьшее* число ходов он попадет на соседнюю клетку, находясь на бесконечной доске?

125. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $\sin^2 x + 10 \sin x \cos x - 23 \cos^2 x$.

Межрегиональная олимпиада КФУ

9 класс

126. Графики функций $y = x^2 + ax + b$ и $y = x^2 + cx + d$ пересекаются в точке с координатами $(1,\ 1)$. Вычислите $a^3 + b^3 + c^3 + d^3$.

127. Белоснежке на день рождения подарили 323 белые розы и 221 красную розу. Она решила сделать из *всех* этих цветов максимально возможное количество букетов — причём так, чтобы все букеты были одинаковы. Сколько букетов у неё получится?

128. Даны n различных положительных чисел. Из них составляются всевозможные суммы с числом слагаемых от 1 до n.

а) Какое наименьшее количество различных значений сумм можно получить?

б) Какое наибольшее количество различных значений сумм можно получить?

129. Точка K на медиане BM треугольника ABC такова, что углы AKM и MBC равны. Найдите отношение $AK : BC$.

10 класс

130. Белоснежке на день рождения подарили 323 белые розы и 221 красную розу. Она решила сделать из *всех* этих цветов минимально возможное количество букетов — причём так, чтобы во всех букетах было одно и то же количество роз и в каждом букете розы были бы одного цвета. Сколько букетов у неё получится?

131. Докажите, что для любых действительных x и y справедливо равенство

$$||x| - |y|| + |x| + |y| = |x - y| + |x + y|.$$

(*Киндер М.И.*)

132. Существует ли треугольник с углами A, B и C, для которых $\operatorname{tg} A = 1$, $\operatorname{tg} B = 2$, $\operatorname{tg} C = 3$?

133. В треугольнике ABC проведены две высоты AA' и CC'. Найдите величину угла B, если известно, что $AC = 2 \cdot A'C'$.

11 класс

134. Графики функций $y = x^2 + ax + b$ и $y = x^2 + cx + d$ пересекаются в точке с координатами $(1,\ 1)$. Вычислите $a^3 + b^3 + c^3 + d^3$.

135. Будем говорить, что число *полупростое*, если оно является произведением двух простых чисел. Какое наибольшее количество последовательных чисел могут быть полупростыми?

136. Функция $f(x)$ задана на всей числовой оси, причём для всех x выполняются неравенства: $f(x+2018) \leqslant f(x) \leqslant f(x+2019)$.

а) Придумайте хотя бы одну функцию $f(x)$, удовлетворяющую этим условиям.

б) Докажите, что функция $f(x)$ — периодическая.

(*Киндер М.И.*)

137. В треугольнике ABC проведены две высоты AA' и CC'. Найдите величину угла B, если известно, что $AC = 2 \cdot A'C'$.

Олимпиада имени Л. Эйлера

8 класс

138. Операция *удвоения цифры* натурального числа состоит в умножении этой цифры на 2 (если это произведение оказывается двузначным, то цифра в следующем разряде числа увеличивается на 1, как при сложении «в столбик»). Например, из числа 9817 удвоениями цифр 7, 1, 8 и 9 можно получить числа 9824, 9827, 10617 и 18817 соответственно. Можно ли из числа 22..22 (20 *двоек*) несколькими такими операциями получить число 22...22 (21 *двойка*)? (*Агаханов Н.*)

139. Каждый из 10 человек — либо рыцарь, который всегда говорит правду, либо лжец, который всегда лжёт. Каждый из них задумал какое-то натуральное число. Затем первый сказал: «Моё число больше 1», второй сказал: «Моё число больше 2», ..., десятый сказал: «Моё число больше 10». После этого они же, выступая в другом порядке, сказали (каждый по одной фразе): «Моё число меньше 1», «Моё число меньше 2», ..., «Моё число меньше 10». Какое наибольшее число рыцарей могло быть среди этих 10 человек? (*Подлипский О.*)

140. По кругу расставлены 100 натуральных чисел. Каждое из них разделили с остатком на следующее по часовой стрелке. Могло ли получиться 100 одинаковых ненулевых остатков?

(*Агаханов Н.*)

141. Имеется кубик, каждая грань которого разбита на 4 одинаковые квадратные клетки. Олег хочет отметить невидимыми чернилами 8 клеток так, чтобы никакие две отмеченные клетки не имели общей стороны. У Рустема есть детекторы. Если детектор помещён в клетку, чернила на ней делаются видимыми. Какое наименьшее число детекторов Рустем может поместить в клетки так, чтобы, какие бы клетки после этого Олег ни отметил, можно было определить все отмеченные клетки?

(*Женодаров Р., Дмитриев О.*)

142. Периметр треугольника ABC равен 2. На стороне AC отмечена точка P, а на отрезке CP — точка Q так, что $2AP = AB$ и $2QC = BC$. Докажите, что периметр треугольника BPQ больше 1. (*Кузнецов А.*)

143. Сумма четырех целых чисел равна 0. Числа расставили по кругу и каждое умножили на сумму двух его соседей. Докажите, что сумма этих четырёх произведений, умноженная на -1, равна удвоенному квадрату целого числа. (*Агаханов Н.*)

144. Будем называть две клетки клетчатой таблицы *соседями*, если у них есть общая сторона. Можно ли покрасить в белой таблице размером 10×10 клеток 32 клетки в чёрный цвет так, чтобы у каждой чёрной клетки было поровну чёрных и белых соседей, а у каждой белой клетки — не поровну? (*Южаков О.*)

145. Точка N — середина стороны BC треугольника ABC, в котором $\angle ACB = 60°$. Точка M на стороне AC такова, что $AM = BN$. Точка K — середина отрезка BM. Докажите, что $AK = KC$. (*Бакаев Е., Кузнецов А.*)

146. Имеется 70 переключателей и 15 ламп. Каждая лампа соединена с 35 переключателями. Никакие два переключателя не соединены с одним и тем же набором ламп. Нажатие на переключатель меняет состояние всех ламп, с которыми он соединён (включённые выключает и наоборот). Изначально все лампы выключены. Докажите, что можно нажать на какие-то 19 переключателей таким образом, чтобы включилось не менее восьми ламп. (*Берлов С.*)

147. Петя выбирает такие неотрицательные числа $x_1, x_2, \ldots, x_{11}$, что их сумма равна 1. Вася расставляет их в ряд по своему усмотрению, считает произведения соседних чисел и выписывает на доску наибольшее из получившихся десяти произведений. Петя хочет, чтобы число на доске оказалось как можно больше, Вася хочет, чтобы оно было как можно меньше. Какое число окажется на доске при наилучшей игре Пети и Васи? (*Храбров А.*)

Региональный этап

9 класс

148. Два приведённых квадратных трёхчлена $f(x)$ и $g(x)$ таковы, что каждый из них имеет по два корня, и выполняются равенства $f(1) = g(2)$ и $g(1) = f(2)$. Найдите сумму всех четырёх корней этих трёхчленов. (*Агаханов Н.*)

149. Каждый из 10 человек — либо рыцарь, который всегда говорит правду, либо лжец, который всегда лжёт. Каждый из них задумал какое-то целое число. Затем первый сказал: «Моё число больше 1», второй сказал: «Моё число больше 2», ..., десятый сказал: «Моё число больше 10». После этого все десять, выступая в некотором порядке, сказали: «Моё число меньше 1», «Моё число меньше 2», ..., «Моё число меньше 10» (каждый сказал ровно одну из этих десяти фраз). Какое максимальное количество рыцарей могло быть среди этих 10 человек? (*Подлипский О.*)

150. По кругу расставлены 100 различных натуральных чисел. Вася разделил каждое из них с остатком на следующее по часовой стрелке; при этом оказалось, что остатки, полученные Васей, принимают всего два различных значения. Петя разделил каждое из чисел с остатком на следующее против часовой стрелки. Докажите, что все остатки, полученные Петей, различны. (*Агаханов Н., Берлов С.*)

151. Высоты остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H. На отрезках BH и CH отмечены точки B_1 и C_1 соответственно так, что $B_1C_1 \parallel BC$. Оказалось, что центр окружности ω, описанной около треугольника B_1HC_1, лежит на прямой BC. Докажите, что окружность Γ, описанная около треугольника ABC, касается окружности ω. (*Кузнецов А.*)

152. Каждая грань куба $1000 \times 1000 \times 1000$ разбита на 1000^2 квадратных клеток со стороной 1. Какое наибольшее количество этих клеток можно закрасить так, чтобы никакие две закрашенные клетки не имели общей стороны? (*Долгих С.*)

153. Даны четыре последовательных натуральных числа, бóльших 100. Докажите, что из них можно выбрать три числа, сумма которых представляется в виде произведения трёх различных натуральных чисел, бо́льших 1. (*Агаханов Н.*)

154. На прямоугольном столе лежат несколько картонных прямоугольников. Их стороны параллельны сторонам стола. Размеры прямоугольников могут различаться, они могут перекрываться, но никакие два прямоугольника не могут иметь 4 общих вершины. Может ли оказаться, что каждая точка, являющаяся вершиной прямоугольника, является вершиной ровно трёх прямоугольников? (*Богданов И.*)

155. Дан треугольник ABC. На внешней биссектрисе угла ABC отмечена точка D, лежащая внутри угла BAC, такая, что $\angle BCD = 60^\circ$. Известно, что $CD = 2AB$. Точка M — середина отрезка BD. Докажите, что треугольник AMC — равнобедренный. (*Кузнецов А.*)

156. На доске нарисован выпуклый n-угольник ($n \geqslant 4$). Каждую его вершину надо окрасить либо в чёрный, либо в белый цвет. Назовём диагональ *разноцветной*, если её концы окрашены в разные цвета. Раскраску вершин назовём *хорошей*, если n-угольник можно разбить на треугольники разноцветными диагоналями, не имеющими общих точек (кроме вершин). Найдите количество хороших раскрасок. (*Берлов С.*)

157. Петя и Вася играют в следующую игру. Петя выбирает 100 (не обязательно различных) неотрицательных чисел x_1, x_2, $\ldots$, x_{100}, сумма которых равна 1. Вася разбивает их на 50 пар по своему усмотрению, считает произведение чисел в каждой паре и выписывает на доску наибольшее из 50 полученных произведений. Петя хочет, чтобы число на доске оказалось как можно больше, а Вася — чтобы оно было как можно меньше. Какое число окажется на доске при правильной игре? (*Храбров А.*)

10 класс

158. Каждый из 10 человек — либо рыцарь, который всегда говорит правду, либо лжец, который всегда лжёт. Каждый из них задумал какое-то число (не обязательно целое). Затем первый сказал: «Моё число больше 1», второй сказал: «Моё число больше 2», ..., десятый сказал: «Моё число больше 10». После этого все десять, выступая в некотором порядке, сказали: «Моё число меньше 1», «Моё число меньше 2», ..., «Моё число меньше 10» (каждый сказал ровно одну из этих десяти фраз). Какое максимальное количество рыцарей могло быть среди этих 10 человек? (*Подлипский О.*)

159. Дан выпуклый четырёхугольник периметра 10^{100}, у которого длины всех сторон — натуральные числа, а сумма длин любых трёх сторон делится на длину оставшейся четвёртой стороны. Докажите, что этот четырёхугольник — ромб. (*Кожевников П.*)

160. Клетки таблицы 2×2019 надо заполнить числами (в каждую клетку вписать ровно одно число) по следующим правилам. В верхней строке должны стоять 2019 действительных чисел, среди которых нет двух равных, а в нижней строке должны стоять те же 2019 чисел, но в другом порядке. В каждом из 2019 столбцов должны быть записаны два разных числа, причём сумма этих двух чисел должна быть рациональным числом. Какое наибольшее количество иррациональных чисел могло быть в первой строке таблицы? (*Кудря С.*)

161. Бесконечная последовательность ненулевых чисел a_1, $a_2, a_3, \ldots$ такова, что при всех $n \geqslant 2018$ число a_{n+1} является наименьшим корнем многочлена

$$P_n(x) = x^{2n} + a_1 x^{2n-2} + a_2 x^{2n-4} + \ldots + a_n \,.$$

Докажите, что существует такое N, что в бесконечной последовательности $a_N, a_{N+1}, a_{N+2}, \ldots$ каждый член меньше предыдущего. (*Богданов И.*)

162. В неравнобедренном треугольнике ABC проведена биссектриса BL. Продолжение медианы, проведённой из вершины B, пересекает окружность ω, описанную около треугольника ABC, в точке D. Через центр окружности, описанной около треугольника BDL, проведена прямая l, параллельная прямой AC. Докажите, что окружность ω касается прямой l. (*Кузнецов А.*)

163. Даны четыре последовательных натуральных числа, бóльших 100. Докажите, что из них можно выбрать три числа, сумма которых представляется в виде произведения трёх различных натуральных чисел, бóльших 1. *(Агаханов Н.)*

164. Даны действительные числа a и b, $b > a > 1$. Пусть

$$x_n = 2^n \left(\sqrt[2^n]{b} - \sqrt[2^n]{a}\right).$$

Докажите, что последовательность $x_1, x_2, \ldots$ убывает. *(Храбров А.)*

165. В остроугольном треугольнике ABC проведена высота BH. Точки M и N — середины отрезков AH и CH соответственно. В окружности Ω, описанной около треугольника BMN, проведён диаметр BB'. Докажите, что $BB' = CB'$. *(Кузнецов А.)*

166. На доске нарисован выпуклый n-угольник ($n \geqslant 4$). Каждую его вершину надо окрасить либо в чёрный, либо в белый цвет. Назовём диагональ *разноцветной*, если её концы окрашены в разные цвета. Раскраску вершин назовём *хорошей*, если n-угольник можно разбить на треугольники разноцветными диагоналями, не имеющими общих точек (кроме вершин). Найдите количество хороших раскрасок. *(Берлов С.)*

167. Последовательность натуральных чисел $a_1, a_2, \ldots,$ задана условиями: $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + a_{[\sqrt{n}]}$ при всех натуральных $n \geqslant 1$. Докажите, что для каждого натурального k в этой последовательности найдётся член, делящийся на k. (Как обычно, $[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x.) *(Голованов А.)*

11 класс

168. Каждый из 10 человек — либо рыцарь, который всегда говорит правду, либо лжец, который всегда лжёт. Каждый из них задумал какое-то целое число. Затем первый сказал: «Моё число больше 1», второй сказал: «Моё число больше 2», ..., десятый сказал: «Моё число больше 10». После этого все десять, выступая в некотором порядке, сказали: «Моё число меньше 1», «Моё число меньше 2», ..., «Моё число меньше 10» (каждый сказал ровно одну из этих десяти фраз). Какое максимальное количество рыцарей могло быть среди этих 10 человек? *(Подлипский О.)*

169. Известно, что каждый из трёхчленов x^2+ax+b и $x^2+ax+b+1$ имеет хотя бы по одному корню, и все корни этих трёхчленов целые. Докажите, что трёхчлен $x^2+ax+b+2$ корней не имеет. (*Агаханов Н.*)

170. Назовём *расстоянием* между двумя клетками клетчатой доски наименьшее количество ходов, за которое шахматный король может добраться от одной из них до другой. Найдите наибольшее количество клеток, которое можно отметить на доске 100×100 так, чтобы среди них не нашлось двух клеток, расстояние между которыми равно 15. (*Богданов И.*)

171. Бесконечная последовательность ненулевых чисел a_1, a_2, $a_3, \ldots$ такова, что при всех $n \geqslant 2018$ число a_{n+1} является наименьшим корнем многочлена

$$P_n(x) = x^{2n} + a_1x^{2n-2} + a_2x^{2n-4} + \ldots + a_n\,.$$

Докажите, что существует такое N, что в бесконечной последовательности a_N, a_{N+1}, $a_{N+2}, \ldots$ каждый член меньше предыдущего. (*Богданов И.*)

172. В тетраэдре $ABCD$ проведены высоты BE и CF. Плоскость α перпендикулярна ребру AD и проходит через его середину. Известно, что точки A, C, D и E лежат на одной окружности, и точки A, B, D и F также лежат на одной окружности. Докажите, что расстояния от точек E и F до плоскости α равны. (*Кузнецов А.*)

173. Даны четыре последовательных натуральных числа, бóльших 100. Докажите, что из них можно выбрать три числа, сумма которых представляется в виде произведения трёх различных натуральных чисел, бóльших 1. (*Агаханов Н.*)

174. Дано положительное число $a \neq 1$. Докажите, что последовательность x_1, x_2, $\ldots$, где $x_n = 2^n\left(\sqrt[2^n]{a}-1\right)$, убывает. (*Храбров А.*)

175. На сторонах AB и AC треугольника ABC нашлись соответственно точки D и E такие, что $DB = BC = CE$. Отрезки BE и CD пересекаются в точке P. Докажите, что окружности, описанные около треугольников BDP и CEP, пересекаются в центре окружности, вписанной в треугольник ABC. (*Женодаров Р.*)

176. В классе m учеников. В течение сентября каждый из них несколько раз ходил в бассейн; никто не ходил дважды в один день. Первого октября выяснилось, что все количества посещений бассейна у учеников различны. Более того, для любых двух из них обязательно был день, когда первый из них был в бассейне, а второй — нет, и день, когда, наоборот, второй из них был в бассейне, а первый — нет. Найдите наибольшее возможное значение m. (В сентябре 30 дней.) (*Храмцов Д.*)

177. Дано натуральное число $n \geqslant 2$. Петя и Вася играют в следующую игру. Петя выбирает $2n$ (не обязательно различных) неотрицательных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_{2n}$, сумма которых равна 1. Вася расставляет эти числа по кругу в некотором порядке по своему усмотрению. После этого он вычисляет произведения пар соседних чисел и выписывает на доску наибольшее из всех $2n$ полученных произведений. Петя хочет, чтобы число на доске оказалось как можно больше, а Вася — чтобы оно было как можно меньше. Какое число окажется на доске при правильной игре? (*Храбров А.*)

Олимпиада «Путь к Олимпу»

8 класс

178. К чётному числу n прибавили его наибольший делитель, отличный от n. Может ли полученная сумма равняться 2019?

179. Малыш и Карлсон по очереди из одного пакета берут конфеты: Малыш — одну конфету, а Карлсон — две, Малыш — три конфеты, а Карлсон — четыре, Малыш — пять, Карлсон — шесть и так далее. Когда конфет в пакете осталось меньше, чем должен взять тот, чья очередь наступила, он забрал все оставшиеся. Сколько конфет было в пакете, если у Малыша в итоге оказалась 101 конфета?

180. Все коэффициенты квадратного трёхчлена $ax^2 + bx + c$ — нечётные числа. Может ли этот квадратный трёхчлен иметь корень $\frac{1}{2019}$?

181. Имеется 40 внешне одинаковых монет, среди которых 3 фальшивых — они весят одинаково и легче, чем настоящие (настоящие монеты также весят одинаково). Как с помощью трёх взвешиваний на чашечных весах без гирь отобрать 16 настоящих монет?

182. В треугольнике ABC угол A равен $120°$, точка D лежит на биссектрисе угла A и $AD = AB + AC$. Найдите углы треугольника BCD.

9 класс

183. Три кренделя, пять коврижек и шесть баранок стоят вместе 24 пенса. Каждый крендель, коврижка или баранка стоит целое количество пенсов. Что дороже: крендель или баранка?

184. Сколько различных пятизначных чисел, кратных 4, можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5 (все цифры входят в запись числа)?

185. Найдите все пары целых чисел x, y, для которых выполняется равенство:

$$(x^4 + 1)(y^4 + 1) = 4x^2y^2.$$

186. Имеется 40 внешне одинаковых монет, среди которых 3 фальшивых — они весят одинаково и легче, чем настоящие (настоящие монеты также весят одинаково). Как с помощью трёх взвешиваний на чашечных весах без гирь отобрать 16 настоящих монет?

187. Точка M — середина стороны AC треугольника ABC, а точка N на отрезке AM такова, что $\angle NBM = \angle CBM$. На продолжении отрезка BN за точку N выбрана точка K, для которой $\angle BMK = 90°$. Докажите, что $AK + BK = BC$.

(*Глевинская А., Кузнецов А.*)

10 класс

188. Найдите наименьшее натуральное n такое, что сумма $1+3+\ldots+(2n-1)$ первых n нечётных натуральных чисел делится на 2019.

189. Обезьяна становится счастливой, когда съедает три разных фрукта. Какое наибольшее количество обезьян можно осчастливить, имея 20 груш, 30 бананов, 40 персиков и 50 мандаринов?

190. Восемь различных цифр от 1 до 8 расставлены в вершинах куба. На каждом ребре записан модуль разности цифр, находящихся в вершинах этого ребра. Может ли сумма всех 12 чисел на ребрах быть равной *а*) 40; *б*) 41?

191. В остроугольном треугольнике ABC провели высоты AA' и CC'. Найдите $A'C'$, если $\angle ABC = 60°$ и $AC = 10$.

192. Докажите, что для любых положительных чисел a, b и c справедливы неравенства:

$$\frac{2}{a+b} + \frac{2}{b+c} + \frac{2}{c+a} \leqslant \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

11 класс

193. Найдите наименьшее натуральное n такое, что сумма $2 + 4 + \ldots + 2n$ первых n чётных натуральных чисел делится на 2019.

194. Обезьяна становится счастливой, когда съедает три разных фрукта. Какое наибольшее количество обезьян можно осчастливить, имея 11 груш, 22 банана, 33 персика и 44 мандарина?

195. Дан набор из 2019 чисел. Известно, что если каждое число в этом наборе заменить на сумму остальных, то получится тот же самый набор чисел.

а) Докажите, что сумма всех чисел набора равна 0.

б) Какие значения может принимать произведение всех этих чисел?

196. В остроугольном треугольнике ABC провели высоты AA' и CC'. Найдите $A'C'$, если $\angle ABC = 60^\circ$ и $AC = 10$.

197. Сумма положительных чисел a, b и c равна 1. Докажите неравенство:

$$\frac{ab}{a+b} + \frac{bc}{b+c} + \frac{ca}{c+a} \leqslant \frac{1}{2}\,.$$

Олимпиада имени В. Р. Фридлендера

198. Пусть a, b, c, d положительные числа, причем $ab = cd$. Докажите, что

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{d} \geqslant 2\,.$$

199. Большое количество людей совместно пыталось умножить на 9 четырёхзначное число «тысяча с чем-то». При умножении столбиком материализовалась поговорка «шесть на ум пошло, семь с ума сошло»: как только шесть «шло на ум», так сходило с ума семь человек. Какое максимальное число людей могло сойти с ума в результате выполнения этой операции?

200. В произвольном треугольнике ABC на продолжении стороны AB за точку B отложили отрезок $BB_1 = AB$, на продолжении BC за точку C — отрезок $CC_1 = BC$ и на продолжении CA за точку A — отрезок $AA_1 = CA$. Найдите площадь треугольника $A_1B_1C_1$, если площадь исходного треугольника равна S.

201. На круглом велотреке на равном расстоянии друг от друга находятся три велосипедиста. Они стартуют одновременно и в одном направлении. Первый велосипедист догоняет второго через 12 минут, а третьего — через 18. Может ли оказаться, что третий велосипедист едет быстрее второго? Если да, через сколько минут от начала движения произойдет первый обгон?

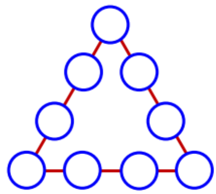


Рис. 3

202. Цифры от 1 до 9 расставили в кружки фигуры (рис. 3) так, что сумма чисел на каждой стороне треугольника равна 21. Докажите, что число 3 стоит в одной из вершин треугольника.

203. В равнобедренном треугольнике ABC ($AC = CB$) углы при основании равны $50°$. Внутри треугольника взята точка M так, что угол MAB равен $10°$, а угол MBA равен $30°$. Найдите угол MCB.

204. Решите уравнение $x^4 - 15x^2 + 6x + 8 = |\,3x - 1\,| - |\,x^2 - 3\,|$.

205. Докажите, что число $\frac{1}{5}(4^{2n-1} + 1)$ будет *а*) целым для $n > 0$ и *б*) составным для $n > 2$.

206. Вокруг круглого стола расставлены n стульев; k человек ($n > k$) по очереди рассаживаются на них. Первый человек садится куда угодно, а каждый последующий выбирает наибольший промежуток из незанятых стульев и садится посередине его (если промежуток состоит из чётного числа стульев, то выбирается любое из двух центральных мест). При каких k и n все люди окажутся на равном расстоянии от своих соседей?

207. Необычный шахматный конь ходит буквой «Г» на n клеток в одну сторону и на $n + 1$ клетку в перпендикулярном направлении (ход обычного коня получается при $n = 1$). За какое наименьшее число ходов необычный конь попадёт на соседнюю клетку (то есть клетку, имеющую общую сторону с исходной), находясь на бесконечной доске?

Турнир юных математиков им. Н. И. Лобачевского

5 класс

208. Две лестницы имеют одинаковую высоту, но разное число ступеней: у первой — 20 ступеней, у второй — 30 ступеней. У каждой лестницы ступеньки одинаковой высоты, но у первой лестницы каждая ступенька на 10 *см* выше каждой ступеньки второй лестницы. Найдите высоту лестниц.

209. В записи $4 * 5 * 6 * 7 * 44 * 45 * 46 * 47$ на месте каждой звездочки поставили знак $+$ или $-$ (по своему усмотрению) и подсчитали результат. Какое *наименьшее* натуральное число могло получиться в результате вычисления?

210. Можно ли разрезать клетчатый прямоугольник 5×11 по клеточкам на 10 прямоугольников *различной* площади? В ответе укажите все возможные значения этих площадей.

211. Вася записал трёхзначное число. Петя прибавил к первой слева цифре этого числа 2, ко второй цифре — 3, к третьей — 4, а затем перемножил полученные суммы. У Пети получилось число 195. Какое число могло быть записано Васей? Укажите все возможные варианты.

212. У Миши есть 15 гирек с массами $1, 2, 3, \ldots, 15$, и он хочет разложить их на несколько кучек разной массы так, чтобы выполнялось условие: чем тяжелее кучка, тем меньше в ней гирь. Сможет ли Миша разложить все гирьки *а*) на 3 кучки? *б*) на 4 кучки?

6 класс

213. В записи $3 * 4 * 5 * 6 * 12 * 13 * 14 * 15$ на месте каждой звездочки поставили знак $+$ или $-$ (по своему усмотрению) и подсчитали результат. Какое *наименьшее* натуральное число могло получиться в результате вычисления?

214. Однажды мышки подружились с кошками, и каждая мышка послала по открытке каждой кошке, так что все кошки вместе получили 100 открыток. Сколько было кошек и мышек вместе, если известно, что их было не больше 25? Укажите все возможные варианты.

215. У Пети есть несколько одинаковых игральных кубиков, у каждого кубика на каждой грани записано натуральное число, сумма чисел на противоположных гранях равна 7. Петя хочет склеить из них башню (см. рисунок 4) так, чтобы сумма чисел на каждой паре склеенных граней равнялась 6. Какой высоты башня у него может получиться? В ответе запишите количество кубиков в самой высокой башне и объясните, почему нельзя склеить более высокую башню.

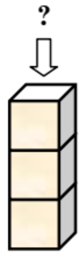


Рис. 4

216. Найдите наибольшее четырёхзначное число, в записи которого нет нулей и которое делится на трёхзначное число, полученное стиранием его первой слева цифры.

217. Можно ли разрезать клетчатый квадрат 6×6 по клеточкам на шесть прямоугольников *различной* площади, среди которых нет ни одного квадрата? А на семь таких прямоугольников?

7 класс

218. Однажды мышки подружились с кошками, и каждая мышка послала по открытке каждой кошке, так что все кошки вместе получили 100 открыток. Сколько было кошек и мышек вместе, если известно, что их было не больше 30? Укажите все возможные варианты.

219. Можно ли разрезать клетчатый квадрат 6×6 по клеточкам на восемь прямоугольников *различной* площади?

220. В таблице 6×7 расставлены натуральные числа так, что числа в *соседних* клетках (имеющих общую сторону или общую вершину) различны. Какое наименьшее значение может принимать сумма чисел во всей таблице?

221. Малыш и Карлсон обожают конфеты. Каждый день Малыш съедает на одну конфету больше, чем в предыдущий день, а Карлсон — на две конфеты больше, чем в предыдущий день. В первый день Малыш съел не менее одной конфеты, причём Карлсон в этот день съел на одну конфету больше, чем Малыш. Известно, что оба съели одинаковое число конфет, причём Карлсон съел свои конфеты за 9 дней. Сколько конфет съел Малыш? Укажите все возможные варианты.

222. В треугольнике ABC угол ABC равен $90°$, и на катете AB отмечена точка D так, что $AD = 2DB$, точка E — середина гипотенузы AC. Известно, что $DE = 1$. Найдите CD.

Решения задач

1. *Ответ: полчаса.*

Рассмотрим какой-нибудь наклонный участок пути длиной s. Проходя его в гору, Красная Шапочка потратит время $\frac{1}{3}s$, под гору — $\frac{1}{6}s$, всего — $s\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{2}s$. Значит, ее средняя скорость на этом участке составляет $2s : \frac{1}{2}s = 4$. Итак, средняя скорость на всех участках одинакова и равна 4 км/ч. Весь путь девочки составляет 2 км, так что она потратит на дорогу полчаса.

2. *Ответ: неверно.*

Обозначим цену спиннера через s, а мороженого — через m. Из первого утверждения следует, что $s > \frac{5}{2}m = \frac{15}{6}m$, из второго $s > \frac{8}{3}m = \frac{16}{6}m$. Если бы выполнялось второе условие, то выполнялось бы и первое, что противоречит условию. Значит, $s \leqslant \frac{8}{3}m$. Но тогда стоимость 7 спиннеров не превосходит $7 \cdot \frac{8}{3}m < 19m$, то есть меньше стоимости 19 мороженых.

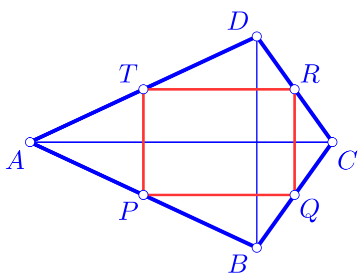


Рис. 5

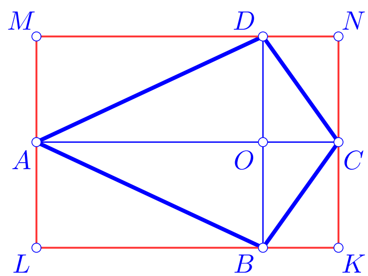


Рис. 6

3. *Ответ:* 4 *см*^{2}.

Отрезок, соединяющий середины смежных сторон четырехугольника, параллелен его диагонали — как средняя линия соответствующего треугольника (рис. 5). Поэтому четырехугольник $PQRT$ — параллелограмм. По условию диагонали этого параллелограмма равны, так что он является прямоугольником. Но тогда и диагонали AC и BD, параллельные его сторонам, перпендикулярны друг другу.

Проведем через вершины четырёхугольника $ABCD$ прямые, параллельные его диагоналям (рис. 6). В этом «описанном» прямоугольнике $KLMN$ отметим равные треугольники: AMD и ADO, CDN и CDO, и так далее. Ясно, что площадь $KLMN$ вдвое больше, чем площадь исходного четырёхугольника $ABCD$. Значит, искомая площадь равна $\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4 = 4$.

Замечание. Возможны и другие способы вычисления площади $ABCD$. Например, можно воспользоваться формулой $\frac{1}{2} AC \cdot BD \cdot \sin\alpha$, где $\alpha = 90^\circ$ — угол между диагоналями, или подсчитать удвоенную площадь $PQRT$.

4. *Ответ:* 6.

Три прямые ограничивают некоторый треугольник. Если этот треугольник — равносторонний, то из двенадцати углов шесть составляют 60°, а остальные шесть — 120°.

Может ли какой-нибудь внешний угол треугольника быть равным его внутреннему углу? Внешний угол треугольника равен сумме несмежных с ним внутренних углов, поэтому он больше каждого из несмежных. Значит, равным он может быть *только* смежному с ним. Тогда каждый из них составляет 90°, и таких углов четыре (у них общая вершина). Других прямых углов в этой конструкции нет. Но тогда другие внешние углы не равны внутренним. Равными могут быть только внутренние (и вертикальные к ним) или только внешние (и вертикальные к ним). Тогда равных углов каждого типа будет не более четырёх.

5. *Ответ: любое нечётное число, не меньшее* 5.

Рассмотрим тройку чисел n, $n+1$, $n+2$. Отметим, что каждые два соседних числа взаимно просты. Кроме того, если числа n и $n+2$ имеют общий делитель, то он является делителем их разности, то есть равен 1 или 2. Поэтому, если число n — нечётное, то все три числа n, $n+1$, $n+2$ попарно взаимно просты, так что $\text{НОК}(n, n+1, n+2) = n(n+1)(n+2)$. Если же n — чётное, то $\text{НОК}(n, n+1, n+2) = \frac{1}{2}n(n+1)(n+2)$. Ясно, что $\text{НОК}(n+1, n+2, n+3)$ может быть меньше $\text{НОК}(n, n+1, n+2)$, только если n — нечётное. Поэтому исследуемое неравенство принимает вид

$$n(n+1)(n+2) > \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{2},$$

или, после сокращения, $2n > n+3$. Окончательно $n > 3$, откуда в силу нечётности n получаем: $n \geqslant 5$.

6. *Ответ:* -9 *или* 9.

Пусть корни уравнения равны a и $2a$. По теореме Виета: $a + 2a = -p$, $a \cdot 2a = 18$. Из последнего уравнения находим $a = 3$ или $a = -3$. Поскольку $p = -3a$, отсюда получаем значения $p = -9$ или $p = 9$.

7. При $x = 0$ число $b = 0$ — рациональное, и утверждение доказано. Если же $x \neq 0$, то числа a и b также отличны от 0. Представим числа, обратные к исходным, в виде

$$\frac{1}{a} = x - 1 + \frac{1}{x}, \qquad \frac{1}{b} = x^2 - 1 + \frac{1}{x^2}.$$

Из первого равенства имеем $x + \frac{1}{x} = \frac{1}{a} + 1$. Возведем это равенство в квадрат: $x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{2}{a} + 1$, откуда $\frac{1}{b} = \frac{1}{a^2} + \frac{2}{a} - 2$, то есть

$$b = \frac{a^2}{1 + 2a - 2a^2}.$$

В силу рациональности a эта дробь также рациональна. Осталось только проверить, что b всегда существует. Знаменатель дроби мог бы обратиться в ноль при $a = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{3})$, однако это невозможно в силу рациональности a.

Замечание. Методом математической индукции можно доказать, что для любого натурального $n \geqslant 2$ рациональным будет также число

$$\frac{x^n}{x^{2n} - x^n + 1}.$$

8. *Ответ: нет, не может.*

Первое решение. Пусть $2n + 1 = a^2$ и $3n + 1 = b^2$, тогда

$$n = (3n + 1) - (2n + 1) = b^2 - a^2 = (b - a)(b + a).$$

Если n — простое, то $b - a = 1$ и $b + a = n$. Из этих равенств легко выразить числа a и b через n:

$$a = \frac{n - 1}{2} \quad \text{и} \quad b = \frac{n + 1}{2}.$$

Подставив выражение для a в исходное равенство $2n + 1 = a^2$, получим квадратное уравнение $n^2 - 10n - 3 = 0$, которое не имеет целых корней. Значит, такого простого числа n нет.

Второе решение. Прежде всего, легко проверить, что для простого числа $n = 2$ условие задачи не выполняется. Если же $n > 2$, то n — *нечётное* простое число. Но тогда $n = 2k + 1$, и значит, число $2n+1 = 2(2k+1)+1 = 4k+3$ при делении на 4 имеет остаток 3. Однако квадрат любого целого числа при делении на 4 даёт в остатке 0 или 1. Поэтому число $2n + 1$ не может быть квадратом, и значит, требуемого числа n не существует.

Замечание. Из этого решения следует, что условие «$3n + 1$ является квадратом целого числа», по сути, является избыточным.

9. Пусть AD и BE — биссектрисы в равнобедренном треугольнике ABC (рис. 7). Через точку E проведём отрезок EF параллельно AD, тогда EF — средняя линия треугольника ACD, и $EF = \frac{1}{2}AD$. Несложным подсчётом углов находим $\angle FBE = \angle EFB = 54°$, и значит, треугольник BEF — равнобедренный. Отсюда $BE = EF = \frac{1}{2}AD$, и поэтому $AD = 2 \cdot BE$.

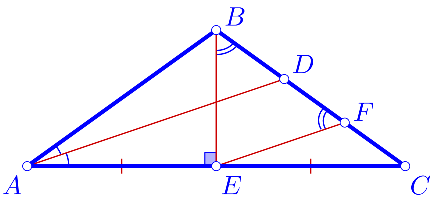


Рис. 7

10. *Ответ:* а) 7; б) 11.

а) Раскрасим клетки на салфетке, как показано на рисунке 8,*a* («диагональная» раскраска). Каждая полоска 1×3 не может содержать более одной чёрной клетки. Поскольку чёрных клеток всего 7, мы не можем уместить на салфетке более 7 полосок (*оценка*). На рисунке 8,*b* приведён пример 7 полосок, которые можно разместить на салфетке.

б) Раскрасим клетки на салфетке, как показано на рисунке 9,*a*. Каждая полоска 1×3 не может содержать более одной чёрной клетки. Поскольку чёрных клеток всего 11, для покрытия салфетки понадобится не менее 11 полосок (оценка). На рисунке 9,*b* приведен пример 11 полосок, которые целиком покрывают салфетку.

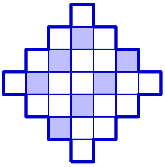


Рис. 8,*а*

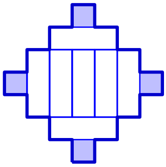


Рис. 8,*б*

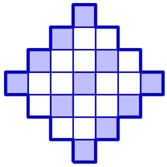


Рис. 9,*а*

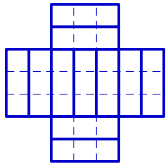


Рис. 9,*б*

11. *Ответ:* 0, 25.

По формуле для синуса суммы углов имеем

$$\sin(\varphi + 45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin\varphi + \cos\varphi),$$

и значит, $P = \sin(\alpha + 45^\circ) \cdot \sin(\beta + 45^\circ) = \frac{1}{2}(\sin\alpha + \cos\alpha)(\sin\beta + {} + \cos\beta)$. Раскрывая скобки и вновь используя формулы для синуса суммы углов и косинуса разности углов, получим

$$P = \frac{1}{2}(\sin(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)) = 0,25.$$

12. *Ответ:* -64 *или* 27.

Пусть корни уравнения равны a и a^2. По теореме Виета: $a + a^2 = 12$, $a \cdot a^2 = q$. Из первого уравнения находим $a = -4$ или $a = 3$. Поскольку $q = a^3$, отсюда получаем значения $q = -64$ или $q = 27$.

13. *Ответ:* 2.

Пусть d — общий делитель чисел $a = m + n$ и $b = m^2 + n^2$, тогда числа $ma - b = n(m - n)$ и $na - b = m(n - m)$ также делятся на d. Число d не может быть делителем обоих чисел m и n, поскольку m и n взаимно просты. Следовательно, число d будет делителем разности $c = m - n$, а значит, и чисел $a + c = 2m$, $a - c = 2n$. В силу взаимной простоты m и n число d должно быть делителем 2. Заметим также, что числа $m + n$ и $m^2 + n^2$ — чётные, так что НОД$(m + n, m^2 + n^2) = 2$.

14. *Ответ: все углы прямые.*

(Рис. 10.) По теореме Пифагора $O_2B = \sqrt{9 - 1} = 2\sqrt{2}$. Из прямоугольного треугольника O_2BM находим $BM = 2$. Значит, треугольник O_2BM равнобедренный, с углом $45°$. Аналогично и угол O_2BN равен $45°$. Итак, касательные, проведенные из точек A и B к меньшей окружности, перпендикулярны между собой.

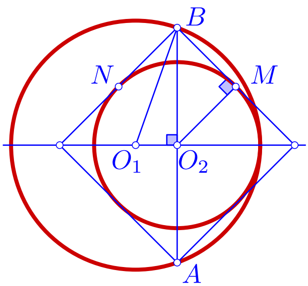


Рис. 10

15. Совпадает с задачей **10**.

16. *Ответ:* $2 \pm \sqrt{5}$.

Пусть корни уравнения равны a и a^2. По теореме Виета:

$$\begin{cases} a + a^2 = p, \\ a \cdot a^2 = p. \end{cases}$$

Значит, $a + a^2 = a^3$. Корень $a = 0$ не подходит, так как в этом случае $p = 0$ и исходное уравнение $x^2 = 0$ имеет совпадающие корни. Значит, $a \neq 0$, и тогда $1 + a = a^2$, корнями этого уравнения являются числа $(1 \pm \sqrt{5}) / 2$. При этом $p = a^2 + a$, и поскольку $a^2 = a + 1$, получаем $p = (a + 1) + a = 2a + 1 = 2 \pm \sqrt{5}$.

17. *Ответ:* 88 *и* 192.

Пусть $n = m \cdot 2^k$ — исходное чётное число, и m — его нечётный множитель. Сумма нечётных делителей числа n совпадает с суммой s всех делителей числа m, и значит, Петя получит число s. Сумма всех чётных делителей n состоит из суммы делителей, которые делятся только на 2, из суммы делителей, кратных только 4, и так далее, и наконец, из суммы делителей, кратных 2^k. Каждый нечётный делитель при умножении на 2 — это делитель, кратный только 2, поэтому первая сумма равна $2s$, вторая сумма — $4s$ и так далее. Следовательно, сумма всех чётных делителей будет $2s + 4s + \ldots + 2^k s = 2(2^k - 1)s$. Произведение результатов Пети и Васи равно $2s^2(2^k - 1) = 2016$, и значит, $s^2(2^k - 1) = 1008$.

Полученное равенство означает, что число $1008 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 7$ делится на квадрат натурального числа $s > 1$ и число вида $2^k - 1$. Среди разложений числа $1008 = 2^2 \cdot 252 = 3^2 \cdot 112 = 4^2 \cdot 63 = 6^2 \cdot 28 = 12^2 \cdot 7$, содержащих квадрат натурального числа, сомножитель вида $2^k - 1$ содержат только разложения $4^2 \cdot 63$ и $12^2 \cdot 7$. Значит, $s = 4, k = 6$, или $s = 12, k = 3$. В первом случае, $m = 3$, и значит, $n = 3 \cdot 2^6 = 192$; во втором — $m = 11$, и значит, $n = 11 \cdot 2^3 = 88$.

18. *Ответ:* $2\sqrt{22}$.

Построим искомое сечение (рис. 11). Пусть P — точка пересечения AM и A_1B_1. По условию, M — середина BB_1, поэтому треугольники ABM и PB_1M равны, и значит, $AB = PB_1 = A_1B_1$, то есть A_1P вдвое больше, чем A_1B_1. Аналогично строим точку Q, и доказываем $A_1Q = 2 \cdot A_1D_1$. Значит, прямая PQ параллельна прямой B_1D_1 и проходит через точку C_1. Итак, искомое сечение является параллелограммом AKC_1M. Заметим, что $KM = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$, $AM = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$, $AK = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$. Итак, треугольник AKM — равнобедренный, его высота равна $\sqrt{13-2} = \sqrt{11}$. Тогда площадь сечения составляет $2\sqrt{2} \cdot \sqrt{11} = 2\sqrt{22}$.

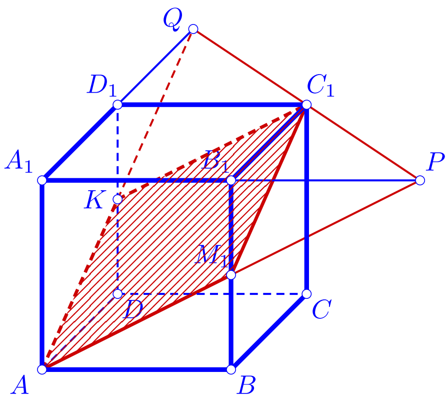


Рис. 11

19. *Ответ: верно.*

Рассмотрим функцию

$$f(x) = |x - x_1| + |x - x_2| + \ldots + |x - x_{100}| - 50,$$

непрерывную на отрезке $[0; 1]$. Так как неотрицательные числа x_i не превосходят 1, то $f(0) + f(1) = \sum x_i + \sum(1 - x_i) - 100 = 0$. Если числа $f(0)$ и $f(1)$ равны 0, то уравнение имеет, по крайней мере, два корня: 0 и 1. Если же одно из этих чисел отрицательное, то другое — положительное. Таким образом, f — непрерывная функция, принимающая значения разных знаков на отрезке $[0; 1]$, поэтому существует такое $x \in [0; 1]$, при котором $f(x) = 0$.

20. *Ответ: нельзя.*

Для каждой ладьи с номером i обозначим через s_i сумму номеров строки и столбца, в которых она стоит. Поскольку ладьи не бьют друг друга, то номера *всех* строк и столбцов встречаются ровно по одному разу. Сумма всех чисел s_i независимо от расстановки будет чётной и равна

$$\sum_{i=1}^{10} s_i = 2 \cdot (1 + 2 + \ldots + 10) = 110.$$

Из этого равенства, в частности, следует, что количество *нечётных* чисел s_i будет чётным. Таким образом, из 10 чисел s_i количества нечётных и чётных значений не совпадают.

Предположим левый нижний угол доски покрашен в чёрный цвет, тогда у всех чёрных клеток доски числа s_i чётные, а у белых клеток — нечётные. Поскольку количества нечётных и чётных значений s_i не совпадают, ладей на чёрных и белых клетках — разное количество. Значит, разными будут и количества белых и чёрных свободных от ладей клеток. Так как каждая доминошка закрывает по одной чёрной и белой клетке доски, то оставшиеся свободные клетки выложить доминошками не удастся.

21. Вот один из многих способов сделать это (рис. 12): разрежем квадрат размером 10×10 клеточек на 25 равных квадратов 2×2, а потом выберем из полученных квадратов любые пять и разрежем каждый из них на 4 клеточки. Получится 20 квадратов со стороной 2 и 20 квадратов со стороной 1.

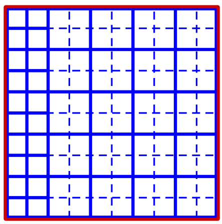


Рис. 12

22. *Ответ:* 0.

Пусть даны числа a и b. Преобразуем данную в условии сумму четырёх чисел:

$$0 = \frac{1}{a+1} + \frac{1}{a-1} + \frac{1}{b+1} + \frac{1}{b-1} = \frac{2a}{a^2-1} + \frac{2b}{b^2-1}.$$

Положим $x = \frac{a}{a^2-1} = -\frac{b}{b^2-1}$. Тогда

$$a - \frac{1}{a} + b - \frac{1}{b} = \frac{a^2-1}{a} + \frac{b^2-1}{b} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x} = 0.$$

23. *Ответ: любому из делителей числа* 100*, кроме* 1*, уменьшенному на* 1*:* 1*,* 3*,* 4*,* 9*,* 19*,* 24*,* 49*,* 99*.*

Если бы все сидящие были лжецами, все они сказали бы правду. Значит, среди них есть рыцарь. После него сидят k лжецов. У того из них, который сидит рядом с рыцарем, следующие $k-1$ человек — лжецы, и так как он лжёт, то k-ый по счёту после него — рыцарь. Рассуждая таким образом дальше, убеждаемся, что между двумя последовательными рыцарями за столом сидят k лжецов. Таким образом, все сидящие за столом разбиваются на группы по $k+1$ человеку, и потому 100 должно делиться на $k+1$. Обратно, если 100 делится на $k+1$, рассадка людей за столом группами из рыцаря и k сидящих за ним лжецов удовлетворяет условиям задачи.

24. *Ответ:* 90°*.*

Первое решение. Обозначим середину отрезка AD через N (рис. 13). Поскольку треугольник AED равнобедренный, его медиана EN будет и высотой, то есть $EN \perp AD$. Значит, $NE \perp BC$.

Поскольку $AD \parallel BC$ и $BM = MC = AN = ND = \frac{1}{2}AD$, четырёхугольники $ABMN$ и $BMDN$ — параллелограммы, откуда $AB \parallel MN$ и $BN \parallel DM$. Так как $\angle ABE = 90^\circ$ и $AB \parallel MN$, получаем $BE \perp MN$. Таким образом, E — точка пересечения высот треугольника BMN. Значит, откуда $ME \perp BN$. Наконец, из $BN \parallel DM$, получаем $ME \perp DM$, то есть $\angle DME = 90^\circ$.

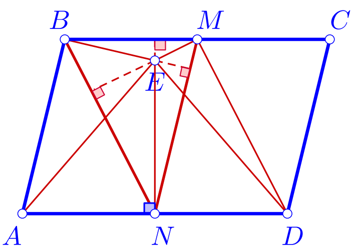


Рис. 13

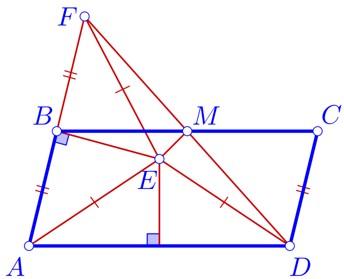


Рис. 14

Второе решение. На продолжении отрезка AB за точку B отметим точку F так, что $AB = BF$ (рис. 14). Тогда $BF = CD$ и $BF \parallel CD$, поэтому четырёхугольник $BDCF$ — параллелограмм. Точка M — середина диагонали BC этого параллелограмма, значит, M — середина его диагонали DF.

Прямая BE — серединный перпендикуляр к отрезку AF, откуда $AE = FE$. Из условия теперь получаем, что $DE = AE = FE$. Значит, точка E лежит и на серединном перпендикуляре к DF. Отсюда $\angle EMD = 90°$.

25. *Ответ: не может.*

Если желание царя невыполнимо, то всё уже доказано. Далее считаем, что оно выполнимо. Возьмём любое удовлетворяющее требованиям царя размещение ДЭУ. Пусть S — общее число дорог в царстве. Так как каждая дорога соединяет два города, число городов в царстве равно $\frac{2S}{30}$. Поэтому управлений должно быть не более, чем $\frac{S}{30}$. С другой стороны, так как каждое управление обслуживает 30 дорог, управлений должно быть не менее, чем $\frac{S}{30}$. Поэтому их ровно $\frac{S}{30}$, откуда следует, что каждая дорога обслуживается ровно одним управлением и управления находятся ровно в половине городов.

Закроем все ДЭУ в городах, где они есть, и откроем ДЭУ в каждом городе, где его не было. Тогда по-прежнему у каждой дороги один конец будет в городе с ДЭУ, а другой — в городе без ДЭУ, то есть каждая дорога будет обслуживаться ровно одним управлением, причём, как было доказано выше, городов с ДЭУ будет ровно половина. Очевидно, если проделать описанную процедуру второй раз, получится исходное расположение ДЭУ. Таким образом, все способы размещения ДЭУ разбиваются на пары.

Заметим теперь, что создание ДЭУ в одном городе однозначно определяет наличие или отсутствие ДЭУ во всех городах, в которые из него можно проехать по дорогам, так как на любом пути города с ДЭУ и без ДЭУ должны чередоваться. Поэтому если в царстве можно добраться от любого города до любого, то существует ровно два способа разместить ДЭУ. В противном случае царство можно разбить на графства так, что в каждом графстве от любого города можно добраться до любого, а между графствами дорог нет. В каждом графстве можно выбрать один из двух способов размещения ДЭУ независимо от остальных, и потому если графств n, ДЭУ можно разместить 2^n способами. Так как число 2018 не является степенью двойки, то ровно 2018 способов разместить ДЭУ быть не может.

26. *Ответ:* $399\ldots98$ (223 *девятки*).

Первое решение. Так как $2018 = 9 \cdot 224 + 2$, самым маленьким числом с суммой цифр 2018 будет $29\ldots9$ (224 девятки), а вторым по величине — число $389\ldots9$ (223 девятки). В 223 следующих по величине числах с суммой цифр 2018 восьмёрка «путешествует» из начала в конец ряда девяток, каждый раз смещаясь на один знак. Через 223 шага она окажется в конце числа, что и даёт нам ответ.

Второе решение. Поскольку $2018 = 224 \cdot 9 + 2$, наименьшее число с суммой цифр 2018 будет равняться $2\,999\ldots99$ (224 девятки). В этом числе 225 знаков. Рассмотрим 225-значные числа, у которых старшая цифра будет тройкой, а остальные цифры — девятки, за исключением ровно одной восьмёрки. Таких чисел в точности 224 (именно столько положений для восьмёрки) и у каждого из них сумма цифр 2018. Самым большим среди этих чисел будет число $n = 3\,999\ldots99\,8$ (223 девятки). Поскольку все остальные 225-значные числа с суммой цифр 2018 будут иметь старшую цифру не меньшую четырёх, они будут больше указанных чисел и, значит, n будет 225-ым по счёту числом с суммой цифр 2018.

27. Так как после каждого разрезания число многоугольников увеличивалось на 1, в полночь на столе лежал 61 многоугольник. Допустим, у каждого из этих многоугольников было не меньше пяти вершин. Тогда всего вершин у многоугольников на столе в полночь было по крайней мере $5 \cdot 61 = 305$. Но при каждом разрезании суммарное число вершин увеличивалось на 2 (если разрез проходил через две вершины), 3 (если разрез проходил через одну вершину и одну точку внутри стороны) или 4 (если разрез проходил через две точки внутри сторон). Поэтому общее число вершин за 51 разрезание могло увеличиться не больше, чем на $51 \cdot 4 = 204$, и потому суммарное число вершин в полночь не превосходило $100 + 204 = 304$. Противоречие.

28. На продолжении отрезка BC за точку C выберем точку E так, что $CD = CE$ (рис. 15). Тогда $\angle ACD = 180^\circ - \angle DAC - \angle ADC = 180^\circ - 4\alpha = \angle ACE$. Следовательно, треугольники ACD и ACE равны по двум сторонам и углу между ними, поэтому $\angle AEC = \angle ADC = 3\alpha$ и $\angle CAE = \angle CAD = \alpha$. Заметим, что

$\angle BAE = \angle BAC + \angle CAE = 3\alpha = \angle AEB$. Таким образом, треугольник ABE равнобедренный и $AB = BE = BC + CE = BC + CD$.

29. *Ответ:* 48.

Оценка. Заметим, что если в строчке закрашено 9 клеток, то можно перекрасить четыре из них так, чтобы никакие две закрашенные клетки не были соседними: достаточно перенумеровать закрашенные клетки слева направо и перекрасить клетки с чётными номерами. Если сделать такие перекрашивания со всеми чётными строками, то перекрасится 48 клеток и не будет закрашенных квадратов 2×2, поскольку не будет двух соседних закрашенных клеток в одной чётной строке.

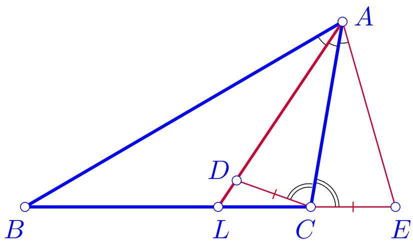


Рис. 15

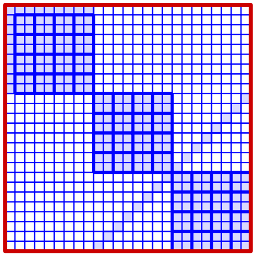


Рис. 16

Пример. Закрасим расположенные вдоль главной диагонали непересекающиеся квадраты: первый со стороной 9 и два со стороной 8 — и клетки, расположенные по незакрашенной главной диагонали квадрата 16×16, содержащего квадраты 8×8 (рис. 16). Тогда на доске можно будет выделить 48 не пересекающихся квадратов 2×2, все клетки которых закрашены. Поэтому в этом примере надо перекрасить не менее 48 клеток.

30. Обозначим через $S(n)$ сумму всех простых чисел, меньших n. Заметим, что

$$S(n) < 1 + 2 + \ldots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2} < n(n-1). \qquad (1)$$

Рассмотрим два последовательных простых числа $q > p > 10^{100}$. Допустим, $S(p)$ не взаимно просто с p, а $S(q)$ не взаимно просто с q. Тогда $S(p)$ делится на p, а $S(q)$ делится на q. Пусть $S(p) = kp$. Из неравенства (1) вытекает, что $k < p - 1$. Тогда, так как $S(q) = S(p) + p = p(k+1)$, и $S(q)$ делится на q, имеем $k + 1 \geqslant q$. Но $k < p - 1 < q - 1$. Противоречие.

31. Совпадает с задачей **21**.

32. *Ответ: да, обязательно.*

Пусть a, b, c, d и e — числа на доске в неубывающем порядке, то есть $a \leqslant b \leqslant c \leqslant d \leqslant e$. Тогда по условию $a + b + c$ и $b + c + d$ делятся на e. Следовательно, $d - a = (b+c+d) - (a+b+c)$ также делится на e. Поскольку $0 \leqslant d - a < d \leqslant e$, это возможно лишь при $d - a = 0$. Значит, $a = b = c = d$ (так как $a \leqslant b \leqslant c \leqslant d$).

Замечание. Можно показать, что условию задачи удовлетворяют только пятёрки чисел вида $(a;\ a;\ a;\ a;\ a)$ и $(a;\ a;\ a;\ a;\ 3a)$ (возможно, с переставленными числами).

33. Совпадает с задачей **24**.

34. *Ответ:* $n = 5501$.

Обозначим через $A_1, A_2, \ldots, A_n$ множества учеников, не получивших конфет соответственно 1-го, 2-го, …, n-го сортов. Согласно условию, все эти множества различны; кроме того, каждый ученик содержится не более, чем в десяти из них. Отсюда следует, что суммарное количество элементов в наших множествах не превосходит $1000 \cdot 10 = 10\,000$.

Пусть среди наших множеств ровно k одноэлементных. Тогда количество множеств из более, чем одного ученика, не превосходит $\frac{10000-k}{2}$, поэтому общее число всех непустых множеств не превосходит $\frac{10000-k}{2} + k = \frac{10000+k}{2} \leqslant \frac{11000}{2} = 5500$. С учётом того, что одно из множеств может быть пустым, получаем, что $n \leqslant 5501$.

Осталось показать, как описанная ситуация могла возникнуть при $n = 5501$. Сделаем множество A_{5501} пустым; различные множества $A_{4501}, \ldots, A_{5500}$ будут содержать по одному ученику. Осталось выбрать различные двухэлементные множества $A_1, \ldots, A_{4500}$ так, чтобы каждый из учеников был ровно в 9 из них. Для этого, например, можно разбить учеников на 100 групп по 10 человек и взять все пары детей, находящихся в одной группе (их получится как раз $100 \cdot \frac{10 \cdot 9}{2} = 4500$).

Замечание. Достраивать пример можно по-разному. Можно, в частности, выстроить детей по кругу и каждое двухэлементное множество составлять либо из пары противоположных учеников (таких пар 500), либо из пары учеников, между которыми стоят не больше трёх других детей.

35. Первое решение. Поскольку при любой перестановке переменных левая часть неравенства либо не меняется, либо меняет знак, достаточно проверить неравенство для любой перестановки чисел x, y и z, для которой левая часть неотрицательна. Поэтому можно считать, что $x \geqslant y \geqslant z$.

По неравенству о средних для двух чисел имеем

$$(x-y)(y-z) \leqslant \left(\frac{(x-y)+(y-z)}{2}\right)^2 = \left(\frac{x-z}{2}\right)^2.$$

Следовательно,

$$(x-y)(y-z)(x-z) \leqslant \frac{(x-z)^3}{4}.$$

и нам достаточно доказать, что $x - z \leqslant \sqrt{2}$ или, что тоже самое, $(x-z)^2 \leqslant 2$. Последнее уже просто; действительно,

$$(x-z)^2 = 2x^2 + 2z^2 - (x+z)^2 \leqslant 2x^2 + 2z^2 = 2 - 2y^2 \leqslant 2.$$

Второе решение. Как и в первом решении, мы считаем, что $x \geqslant y \geqslant z$. Обозначим $a = x - y \geqslant 0$, $b = y - z \geqslant 0$; тогда $y = x - a$, $z = y - b$. Равенство из условия задачи преобразуется к виду

$$\begin{aligned} 0 &= x^2 + (x-a)^2 + (x-a-b)^2 - 1 = \\ &= 3x^2 - 2(2a+b)x + (2a^2 + 2ab + b^2 - 1), \end{aligned} \tag{2}$$

а требуемое неравенство — к виду

$$ab(a+b) \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}. \tag{3}$$

Рассмотрим правую часть равенства (2) как квадратный трёхчлен от x. Поскольку он имеет корень, его дискриминант неотрицателен, то есть

$$0 \leqslant (2a+b)^2 - 3(2a^2 + 2ab + b^2 - 1) = 3 - 2(a^2 + ab + b^2),$$

откуда

$$a^2 + ab + b^2 \leqslant \frac{3}{2}. \tag{4}$$

Осталось показать, как из (4) следует (3) (при $a,\ b \geqslant 0$).

По неравенству о средних для двух чисел имеем $a^2+b^2+ab \geqslant$ $\geqslant 2ab + ab = 3ab$, откуда $ab \leqslant \frac{1}{2}$. Значит,

$$(a+b)^2 = (a^2 + ab + b^2) + ab \leqslant \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2,$$

то есть $a + b \leqslant \sqrt{2}$. Итак,

$$ab(a+b) \leqslant \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,,$$

что и требовалось.

Замечание. Число $\frac{1}{\sqrt{2}}$ в условии задачи нельзя заменить на меньшее, как показывает пример $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $y = 0$, $z = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

36. Совпадает с задачей **26**.

37. *Ответ: нет.*

Поскольку красные фишки не могут меняться местами с зелёными, их взаимный порядок всегда будет оставаться таким же, как исходный. Иначе говоря, если в любой момент убрать синие фишки, то останутся 30 красных фишек, стоящих подряд, и 20 зелёных, также стоящих подряд. Если требуемого удалось добиться, это означает, что мы удалили хотя бы по одной синей фишке с каждого из 29 интервалов между соседним красными фишками и с каждого из 19 интервалов между соседними зелёными фишками; но тогда синих фишек было бы не меньше, чем $29 + 19 = 48 > 40$, что не так. Значит, требуемое невозможно.

38. Пусть n является хорошим числом. Тогда $n > 1$, и для некоторых целых неотрицательных чисел $k_1,\ k_2,\ \ldots,\ k_q$ справедливо равенство

$$p + q = n^{k_1} + n^{k_2} + \ldots + n^{k_q}.$$

Рассмотрим остаток от деления правой части на $n-1$. Поскольку любая степень числа n дает остаток 1 при делении на $n-1$, правая часть сравнима с q по модулю $n-1$. Тогда с q сравнима и левая часть; следовательно, p делится на натуральное число $n-1$. Но у простого числа p только два натуральных делителя: 1 и p. Значит,

$n-1$ может равняться 1 и p. Стало быть, $n=2$ или $n=p+1$, и поэтому хороших чисел не больше двух.

Замечание. Число $n=p+1$ всегда является хорошим, поскольку $p+q = n^1 + \underbrace{n^0+n^0+\ldots+n^0}_{q-1 \text{ слагаемое}}$. А число $n=2$ может оказаться хорошим, а может и не оказаться. Например, для $p=59$ и $q=3$ число $p+q=62$ нельзя представить в виде суммы трёх степеней двойки, поскольку $2^5+2^4+2^3=56<62$.

39. Первое решение. Обозначим через Z точку пересечения лучей XA и YB (рис. 17). Прямые ZA и ZB касаются окружности ω, поэтому $\angle OAZ = \angle OBZ = 90°$. Тогда $\angle AZB = 360° - 90° - 90° - \angle AOB = 60°$. Поскольку окружность ω касается сторон угла XZY, её центр O лежит на биссектрисе этого угла, то есть $\angle XZO = 30° = \angle OZY$.

Из равнобедренного треугольника COD получаем $\angle OCD = \angle ODC = 30°$. Тогда $\angle OZX + \angle ODX = 30° + 180° - \angle ODC = 180°$, поэтому четырёхугольник $XDOZ$ вписан. Аналогично, вписан и четырёхугольник $YCOZ$. Таким образом, OZ — общая хорда окружностей, описанных около треугольников DOX и COY, поэтому l — серединный перпендикуляр к отрезку OZ.

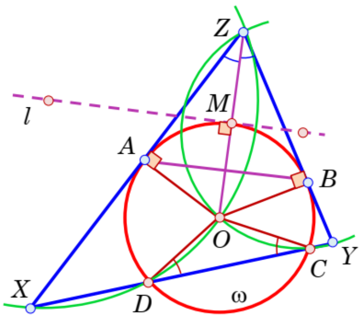


Рис. 17

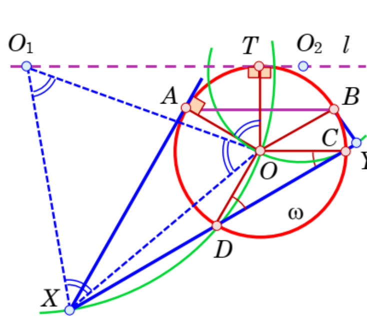


Рис. 18

Пусть M — середина OZ. Прямая l проходит через M и перпендикулярна OM; поэтому для завершения решения достаточно показать, что точка M лежит на ω. В прямоугольном треугольнике AZO имеем $\angle AZO = 30°$, поэтому $AO = \frac{1}{2}OZ = OM$, откуда и следует требуемое.

Второе решение. Пусть T — середина меньшей дуги AB окружности ω (рис. 18). Тогда $\angle AOT = 60°$ и $OA = OT$. В равнобедренном треугольнике COD имеем $\angle COD = 120°$, откуда $\angle ODC = \angle OCD = 30°$, и значит, $\angle ODX = \angle OCY = 150°$.

Пусть O_1 — центр окружности, описанной около треугольника DOX. Тогда $\angle OO_1X = 2(180° - \angle ODX) = 60°$. Значит, треугольник OO_1X — равносторонний, поэтому $\angle XOO_1 = 60° = \angle AOT$. Следовательно, $\angle TOO_1 = \angle AOX$. Кроме того, $OT = OA$ и $OO_1 = OX$, а значит, треугольники TOO_1 и AOX равны. Отсюда $\angle OTO_1 = \angle OAX = 90°$, то есть точка O_1 лежит на касательной к ω в точке T. Аналогично, центр O_2 окружности, описанной около $\triangle COY$, также лежит на этой касательной; значит, прямая l совпадает с этой касательной.

Замечание. Последний аргумент можно оформить по-другому. Поскольку треугольники AOT и XOO_1 равносторонние, при повороте с центром в точке O на $60°$ прямая AX переходит в прямую TO_1, а окружность ω переходит в себя. Так как прямая AX касается ω, то и прямая TO_1 также касается ω.

40. *Ответ:* 198.

Переведём задачу на язык графов, сопоставляя ребёнку вершину, а дружбе — ребро. Тогда нам известно, что в данном графе на 100 вершинах при удалении любой вершины оставшиеся можно разбить на 33 тройки так, что в каждой тройке вершины попарно соединены. Требуется же найти минимальное возможное число рёбер в таком графе.

Для начала построим пример ровно с 198 рёбрами. Разобьём 99 вершин, кроме вершины A, на 33 группы по 3 вершины. Соединим попарно вершины в каждой тройке; наконец, соединим A со всеми другими вершинами. Тогда условия задачи выполнены: при удалении A разбиение на тройки уже приведено, а при удалении любой другой вершины B в этом же разбиении достаточно заменить B на A. При этом в описанном графе всего $33 \cdot 3 + 99 = 198$ рёбер.

Осталось доказать, что это количество — наименьшее. Назовём граф на $3k+1$ вершинах *хорошим*, если при удалении любой вершины остальные $3k$ вершин разбиваются на k троек попарно соединённых. Докажем индукцией по k, что в хорошем графе на $3k+1$ вершинах хотя бы $6k$ рёбер; при $k = 33$ получим требуемую оценку. База при $k = 1$ несложна: так как при удалении любой вершины три остальных попарно соединены, любые две вершины должны быть соединены, то есть число рёбер равно $C_4^2 = 6$.

Докажем переход индукции. Если из каждой вершины выходит хотя бы по 4 ребра, общее количество рёбер не меньше, чем $(3k+1)\cdot 4/2 = 2(3k+1)$, что даже больше, чем требуемое $6k$. В противном случае найдётся вершина A, соединённая не более, чем с тремя другими. Если удалить любую вершину, кроме A, то A попадёт в какую-то тройку, а значит, она соединена хотя бы с двумя вершинами. Если удалить одну из этих вершин, у A останется не менее двух смежных, то есть было их не меньше трёх. Итак, A соединена ровно с тремя вершинами B, C и D. Тогда при удалении, скажем, B вершины A, C и D образуют тройку, то есть C и D соединены; аналогично получаем, что B, C и D попарно соединены.

Выбросим теперь из нашего графа вершины A, B, C и D, взамен добавив одну вершину X, соединённую со всеми, с кем была соединена хотя бы одна из вершин B, C и D. Заметим, что при этом количество рёбер уменьшилось хотя бы на 6 (то есть на количество рёбер между A, B, C и D). Покажем, что полученный *новый граф* хороший; отсюда будет следовать переход индукции, ибо тогда в новом графе будет не менее $6(k-1)$ рёбер, а значит, в исходном — не менее $6(k-1)+6 = 6k$ рёбер.

Пусть из нового графа удалена некоторая вершина $Y \neq X$. Если её удалить из исходного графа, остальные вершины разобьются на тройки; пусть при этом вершина A окажется, для определённости, в тройке с B и C, а вершина D — в другой тройке. Тогда можно разбить новый граф так же, поместив вершину X в ту тройку, где была вершина D. Наконец, если удалить из нового графа вершину X, можно проделать ту же операцию, считая, что из исходного графа удалена вершина D (тогда A, B и C автоматически окажутся в одной тройке). Таким образом, переход индукции доказан.

Замечание. Приведённый пример — не единственный. Рассуждение из второй части решения по сути показывает, что много различных оптимальных примеров можно построить следующим индуктивным образом. При $k = 1$ возьмём 4 вершины и соединим все пары рёбрами. При переходе от k к $k+1$ добавим три вершины B, C, D, соединим их попарно друг с другом, а также соединим их всех с какой-то уже имеющейся вершиной A.

В таком примере всегда будет $6k$ рёбер, и он будет удовлетворять условию задачи.

41. Совпадает с задачей **21**.

42. *Ответ: у Васи.*

Рассмотрим момент после третьего хода (когда выписаны три числа). Если к этому моменту никто еще не выиграл, то следующим ходом Вася выигрывает — ему достаточно найти два выписанных числа одной чётности и выписать своим ходом их среднее арифметическое (оно является целым числом).

Кроме того, заметим, что если три целых числа из множества 1, 2, 3, …, 2018 образуют арифметическую прогрессию, то её разность не больше 1008 (иначе разность между наибольшим и наименьшим числами будет не менее $2 \cdot 1009 = 2018$, что невозможно).

Теперь опишем выигрышную стратегию Васи.

Пусть первым ходом Петя выписал число a. Предположим, что $a \leqslant 1009$. Тогда Вася выписывает то из чисел 2017 или 2018, чётность которого отлична от чётности числа a (обозначим это число через b). После этого хода выписано два числа разной чётности; значит, они не могут быть первым и третьим членом прогрессии из целых чисел. А поскольку $b - a \geqslant 1009$, они также не могут быть соседними членами прогрессии. Тем самым, Петя не сможет выиграть третьим ходом. Но в этом случае, как мы видели ранее, следующим ходом Вася выиграет.

Если же $a \geqslant 1010$, то Вася отвечает, выписывая то из чисел 1 и 2, которое по чётности отличается от a. Дальнейшие рассуждения аналогичны первому случаю.

43. Требуемое неравенство равносильно такому: $x^9 \geqslant 8y^3$. По условию, $8(x^5 - 2x) \geqslant 8y^3$; значит, достаточно доказать неравенство $x^9 \geqslant 8x^5 - 16x$. Перенося в последнем неравенстве все члены в левую часть, получаем неравенство $x(x^4 - 4)^2 \geqslant 0$, которое верно для положительного x. Значит, и требуемое неравенство также верно.

44. Пусть G — центр окружности γ, описанной около треугольника BXP (рис. 19). Тогда $\angle BGP = BXP = 2\angle CXP$ (так как угол CXP — острый). Поскольку $GB = GP$ и $OB = OP$, треугольники GOB и GOP равны по трём сторонам, откуда $\angle BGO = \angle OGP = \frac{1}{2}\angle BGP = \angle CXP$. Наконец, из равнобедренного треугольника AOB получаем $\angle BAO = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle AOB = 90^\circ - \angle ACB = \angle CXP$. Итак, $\angle BGO = \angle CXP = \angle BAO$; это означает, что точки A, G, B и O лежат на одной окружности.

Замечание. Завершить решение можно по-другому, доказав, что точка G лежит на прямой AP (поскольку $\angle BPG = \angle BCA = \angle BPA$), и воспользовавшись равенством $\angle OGP = \angle CXP = \angle ABO$.

45. *Ответ: два способа.*

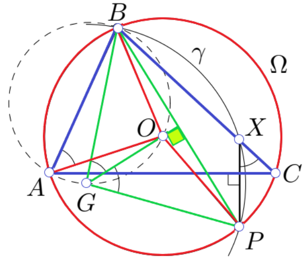


Рис. 19

Рассмотрим произвольную расстановку чисел от 1 до n, удовлетворяющую требованиям. Предположим, что два чётных числа x и y стоят рядом, а следующее за ними — число z. Так как $x + z$ делится на y, число z также чётно. Продолжая таким же образом движение по кругу, получим, что все числа в расстановке чётны, что невозможно.

Итак, никакие два чётных числа не стоят рядом; значит, некоторые два нечётных числа стоят рядом, а остальные чётные и нечётные чередуются.

Заметим, что оба соседа числа n не могут быть чётными; действительно, в противном случае их сумма делилась бы на $2n$, то есть была бы не меньше $2n$. Значит, у любого нечётного числа, меньшего n, либо оба соседа чётны, либо одним из соседей является число n.

Предположим, что числа n и $n-2$ — соседи, а другой сосед числа $n-2$ — число t. Число $t + n = (n-2) + (t+2)$ должно делиться на $n-2$, что возможно лишь при $t = n-4$. Но тогда три нечётных числа n, $n-2$, $n-4$ стоят подряд, что, как мы доказали, невозможно.

Итак, оба соседа нечётного числа $n-2$ чётны, а потому их сумма делится на $2(n-2)$, то есть эта сумма не меньше $2(n-2)$; это возможно лишь если эти соседи — $n-1$ и $n-3$. В частности, числа $n-1$ и $n-2$ — соседи. Если пара $n-1$, $n-2$ продолжается далее числами, идущими подряд по убыванию вплоть до числа 1, мы приходим к круговой расстановке $n-1$, $n-2$, $n-3$, $n-4$, $\ldots$, 3, 2, 1, n, которая, очевидно, удовлетворяет условию.

Предположим теперь, что пара $n-1$, $n-2$ продолжается далее числами, идущими подряд по убыванию, вплоть до числа $d > 1$, а после него следует число $x \neq d-1$. Итак, у нас имеются подряд идущие по окружности числа $n-1$, $n-2$, $\ldots$, $d+1$, d, x,

y, $\ldots$. Так как $x + (d + 1) = (x + 1) + d$ делится на d, то $x + 1$ делится на d, в частности, $x \geqslant d - 1$. Но x отлично от чисел $d - 1$, d, $\ldots$, $n - 2$, $n - 1$; значит, единственный оставшийся вариант — это $x = n$.

Пусть $n = 2k + 1$. Мы получили, что число $n + 1 = 2k + 2$ делится на d; так как $d < n$, имеем $d \leqslant k + 1$. С другой стороны, $y \leqslant d - 1 \leqslant k$ (так как все числа, большие $d - 1$, уже использованы). Отсюда $d + y \leqslant (k + 1) + k = n$. Так как $d + y$ должно делиться на $x = n$, приходим к единственной возможности: $d = k + 1$, $x = n$, $y = k$. Итак, у нас имеются подряд идущие по окружности числа $2k$, $2k - 1$, $2k - 2$, $\ldots$, $k + 2$, $k + 1$, $2k + 1$, k, a, $\ldots$.

Так как $a \leqslant k - 1$ (все числа, большие $k - 1$, уже использованы) и число $(2k + 1) + a = 2k + (a + 1)$ делится на k, однозначно находим $a = k - 1$. Аналогично, если последовательность продолжается далее числами $k - 1$, $k - 2$, $\ldots$, $b + 1$, b, идущими подряд по убыванию, а далее следует число y, однозначно находим $y = b - 1$ (поскольку $b + 1 + y$ делится на b, и $y \leqslant b - 1$). Итак, мы приходим к круговой расстановке $2k$, $2k - 1$, $2k - 2$, $\ldots$, $k + 2$, $k + 1$, $2k + 1$, k, $k - 1$, $k - 2$, $\ldots$, 1, которая, очевидно, удовлетворяет условию (и отлична от найденной ранее).

Замечание. Тем же методом, который использовался в решении, можно доказать, что в аналогичной задаче для чётного $n > 10$ расстановка n, $n - 1$, $n - 2$, $n - 3$, $n - 4$, $\ldots$, 3, 2, 1 — единственная, удовлетворяющая условию.

46. Пусть $n = kd$. Тогда на доске присутствует дробь

$$\frac{n - k}{k} = \frac{kd - k}{k} = d - 1,$$

что и требовалось.

47. *Ответ: неверно.*

Приведем один из возможных примеров. Из двух равных равнобедренных (но не равносторонних) треугольников составим дельтоид, приложив их друг к другу равными сторонами, как показано на рис. 20. Каждый из этих двух треугольников разобьем высотой на два равных треугольника. В результате дельтоид окажется составленным из четырёх равных прямоугольных треугольников.

Замечание. Существуют и другие примеры.

48. *Ответ:* 100 000.

Разобьём доску на 100^2 квадратов 10×10. Покажем, что в каждом квадрате может стоять не более 10 гепардов, не бьющих друг друга — отсюда будет следовать, что общее число гепардов не может превосходить $100^2 \cdot 10 = 100\,000$.

Рассмотрим произвольный квадрат Q размером 10×10 и произвольного гепарда g в нём. Гепард g бьёт все клетки квадрата, кроме клеток, лежащих с ним в одной строке или в одном столбце. Если один из остальных гепардов g' в квадрате Q стоит в одной строке с g, а ещё один, g'', — в одном столбце с g, то g' и g'' стоят в разных строках и столбцах и, следовательно, бьют друг друга; это невозможно. В противном случае, без ограничения общности, все гепарды в квадрате Q стоят в одной строке с g, то есть их не больше 10.

Таким образом, мы доказали, что общее число гепардов не может превосходить 100 000; осталось привести пример, когда эта оценка достигается. Пронумеруем столбцы доски подряд числами $1, 2, \ldots, 1000$. Расставим гепардов на все клетки столбцов, номера которых делятся на 10. Этих гепардов будет $1000 \cdot 100 = 100\,000$, и они не будут бить друг друга.

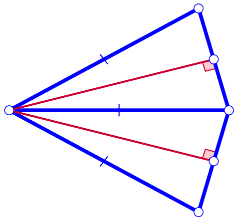


Рис. 20

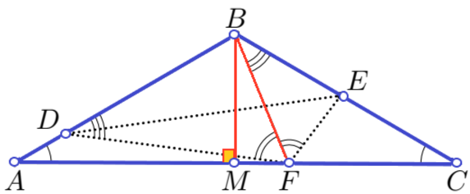


Рис. 21

49. Аналогична задаче **30**, у которой в условии $n > 10^{100}$.

50. (Рис. 21.) Пусть $\angle AFD = \alpha$. Поскольку угол BDF — внешний для треугольника ADF, то $\angle BDF = \angle DAF + \angle AFD = 30^\circ + \alpha$. Также угол BFA внешний для треугольника BFC, поэтому $60^\circ + \alpha = \angle BFA = \angle FBE + \angle FCB$. Следовательно, $\angle FBE = 30^\circ + \alpha = \angle FDB$. Тогда, так как $\angle BFD = \angle BFE = 60^\circ$, треугольники BDF и EBF подобны. Значит, $\frac{BF}{FE} = \frac{DF}{BF}$, или $BF^2 = FD \cdot FE$. Отсюда следует, что $DF + EF \geqslant 2\sqrt{DF \cdot EF} = 2\,BF$.

По теореме косинусов для треугольника DEF имеем

$$DE = \sqrt{DF^2 + EF^2 + DF \cdot EF} \geqslant \\ \geqslant \sqrt{2\,DF \cdot EF + DF \cdot EF} = BF\sqrt{3}.$$

Следовательно, $p_1 = DF + EF + DE \geqslant (2 + \sqrt{3}) \cdot BF$.

Пусть BM — высота равнобедренного треугольника ABC. Тогда легко видеть, что $p = (AB+BC)+AC = 4\,BM+2\sqrt{3}\,BM = 2(2+\sqrt{3})BM$. Осталось заметить, что $BF \geqslant BM$, поэтому

$$2p_1 \geqslant 2(2+\sqrt{3})BF \geqslant 2(2+\sqrt{3})BM = p.$$

51. *Ответ:* 9 *отрезков.*

Сначала докажем, что все 10 отрезков не могут иметь длину 1. Предположим противное. Пусть $ABCDE$ — пятиугольник, O — точка внутри него, и все 10 проведенных отрезков имеют длину 1 (рис. 22). Тогда треугольники OAB, OBC, OCD, ODE и OEA — правильные, поэтому $\angle AOB = \angle BOC = \angle COD = \angle DOE = \angle AOE = 60°$. Сумма же этих углов должна быть равна $360°$, однако $5 \cdot 60° = 300°$ — противоречие.

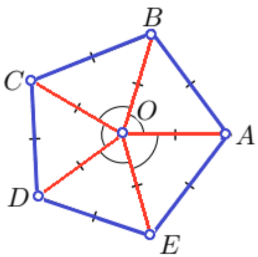


Рис. 22

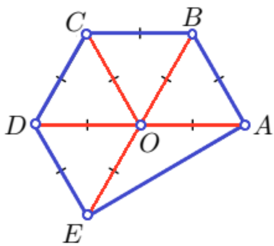


Рис. 23

Осталось привести пример, когда 9 отрезков имеют длину 1. Отметим на плоскости точки A и O на расстоянии 1 и выберем последовательно точки B, C, D и E так, чтобы треугольники AOB, BOC, COD и DOE были равносторонними (рис. 23). Тогда точка O лежит внутри пятиугольника $ABCDE$, и из 10 проведенных отрезков все, кроме AE, имеют длину 1.

Замечание. В приведённом примере точки A, B, C, D и E являются пятью вершинами правильного шестиугольника со стороной 1.

52. *Ответ: да, обязательно.*

Покажем, что требуемому условию удовлетворяют *любые* два столбца таблицы. Выкинем из таблицы все столбцы, кроме двух рассматриваемых. Общее число нулей в этих столбцах больше общего числа единиц; это значит, что нулей в них не меньше 1002. Если в полученной таблице k строк с двумя нулями, то есть ещё хотя бы $1002-2k$ строк с одним нулём — и, следовательно, не более $1001-k-(1002-2k)=k-1$ столбцов с двумя единицами. Осталось заметить, что $k-1<k$.

53. Так как $\angle ABC=135^\circ$, то $\angle AOC=90^\circ$. Так как OM — медиана в прямоугольном треугольнике AOC, имеем $OM=AM=MC$. На продолжении отрезка OM за точку M отметим точку E так, что $OM=ME$ (рис. 24). Поскольку четырёхугольник $ABCD$ вписанный, $BM\cdot MD=AM\cdot MC=OM\cdot ME$. Следовательно, точка E лежит на окружности Γ. Точка O лежит на серединном перпендикуляре к отрезку AC, поэтому $AC\perp OM$. Значит, прямая AC является серединным перпендикуляром к отрезку OE. Поскольку отрезок OE является хордой окружности Γ, её центр лежит на прямой AC.

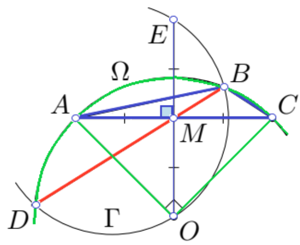


Рис. 24

54. *Ответ: нет, не могут.*

Рассмотрим попарные разности выписанных чисел. За одну операцию набор разностей $x-y$, $y-z$, $z-x$ переходит в набор $(y-x)(x+y+z)$, $(z-y)(x+y+z)$, $(x-z)(x+y+z)$. Так как в исходный момент эти разности равнялись $1-2\sqrt{2}$, -1 и $2\sqrt{2}$, в любой момент времени попарные разности будут иметь вид $A(1-2\sqrt{2})$, $-A$ и $2A\sqrt{2}$ при некотором A. Эти три разности могут быть одновременно рациональными лишь при $A=0$. Осталось показать, что этого не произойдёт.

Предположим, что после n-ой минуты число A впервые обнулилось. Из наших формул вытекает, что после $(n-1)$-ой минуты впервые обнулилась сумма выписанных чисел. Но изначально сумма выписанных чисел ненулевая, а после первой же минуты все они становятся неотрицательными, поскольку $a^2 + ab + b^2 = (a + \frac{b}{2})^2 + \frac{3}{4}b^2 \geqslant 0$, причем равенство достигается лишь при $a = b = 0$. Значит, после $(n-1)$-ой минуты все числа на доске оказались нулевыми. Но это противоречит тому, что после n-ой минуты значение A обнулилось впервые: ведь в этом случае после $(n-1)$-ой минуты все попарные разности чисел уже должны быть нулевыми.

Замечание. Приведём схему другого подхода к задаче. Ясно, что в каждый момент времени любое число на доске имеет вид $a+b\sqrt{2}$ для некоторых целых a и b. При этом чётности этих чисел после n-ой минуты зависят лишь от чётностей соответствующих чисел на предыдущей минуте. Заменяя теперь в каждом числе вида $a+b\sqrt{2}$ числа a и b на их остатки от деления на 2, получаем, что исходные числа имели вид $1+\sqrt{2}$, $0+\sqrt{2}$ и $1+\sqrt{2}$, после первой минуты полученные числа имеют вид $1+\sqrt{2}$, $1+0\sqrt{2}$ и $1+\sqrt{2}$, а на каждой следующей минуте из тройки чисел $1+\sqrt{2}$, $1+0\sqrt{2}$ и $1+\sqrt{2}$ получается такая же. Значит, на доске всегда найдётся число вида $a+b\sqrt{2}$ с нечётным (а значит, ненулевым) b.

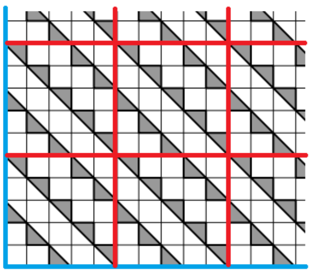


Рис. 25

Рис. 26

55. *Ответ:* 4000 *выстрелов.*

Первое решение. Будем называть лодочку *горизонтальной* или *вертикальной* в зависимости от того, горизонтальны или вертикальны её параллельные стороны.

Покажем сначала, что 4000 выстрелов хватит. Разобьём квадрат 100×100 на 400 квадратов размером 5×5, и в каждом квадрате произведем 10 выстрелов, как показано на рис. 25. Нетрудно видеть, что в каждой строке и в каждом столбце между соседними выстрелами нельзя вставить лодочку; значит, один из выстрелов обязательно потопит лодочку.

Осталось показать, что нельзя гарантированно потопить лодочку менее, чем за 4000 выстрелов. На сей раз разобьём доску на 2000 горизонтальных прямоугольников 1×5 и покажем, что в каждый такой прямоугольник надо сделать хотя бы два выстрела. Действительно, в левые три клетки прямоугольника нужно сделать хотя бы один выстрел, иначе в них могла расположиться непотопленная лодочка; то же верно для его правых трёх клеток. Значит, в этот прямоугольник могло быть сделано не более одного выстрела, только если единственный выстрел попал в центральную клетку прямоугольника. Без ограничения общности, этот выстрел был произведён в левый нижний треугольничек этой клетки; но тогда лодочка, расположенная как на рис. 26, не будет потоплена.

Второе решение. Приведём другое доказательство того, что потребуется хотя бы 4000 выстрелов. Разобьём квадрат на 100 горизонтальных полосок 1×100 и покажем, что даже для гарантированного затопления горизонтальной лодочки уже требуется не менее 40 выстрелов в каждую из полосок.

Посчитаем количество различных способов расположить горизонтальную лодочку в полоске. Центральная клетка такой лодочки может располагаться в любой клетке полоски, кроме крайних. Для каждой из этих 98 клеток возможны два варианта расположения горизонтальной лодочки именно с этой центральной клеткой. Итого, искомое количество способов равняется $98 \cdot 2 = 196$.

С другой стороны, выстрел в какой-либо из треугольников в полоске может потопить максимум пять из этих возможных лодочек. Действительно, если этот треугольник, скажем, левый верхний в своей клетке c, то он потопит любую из двух лодочек с центральной клеткой c, любую из двух, центральная клетка которых непосредственно слева от c, и одну из двух, центральная клетка которых непосредственно справа от c. (Заметим, что некоторые из этих лодочек могут выходить за края доски.)

Итак, если в полоску сделано менее 40 выстрелов, они могут потопить максимум $39 \cdot 5 = 195$ вариантов расположения лодочки, то есть найдётся вариант, который не будет потоплен. Поэтому в каждую полоску надо сделать не менее 40 выстрелов, итого не менее $40 \cdot 100 = 4000$ выстрелов.

Замечание. Подобный же аргумент можно применить и к любому прямоугольнику 1×5: в нём есть 6 способов расположения лодочки, а значит, в него надо сделать хотя бы два выстрела.

56. Совпадает с задачей **46**.

57. *Ответ: верно.*

Подставим в данное равенство $-y$ вместо y. Получим

$$f(x) + f(-y) = 2f\left(\frac{x-y}{2}\right) f\left(\frac{x+y}{2}\right).$$

Итак, $f(x) + f(y) = f(x) + f(-y)$, откуда для всех действительных y получим $f(y) = f(-y)$. Это и означает, что функция $f(x)$ чётная.

Замечание. Существуют непостоянные функции, удовлетворяющие условию — например, $f(x) = \cos x$.

58. Совпадает с задачей **49**.

59. Совпадает с задачей **40**.

60. Пусть O_1 и O_2 — центры сфер ω_1 и ω_2 соответственно. Отметим (фиксированные) середины S и K отрезков O_1O_2 и AB соответственно, а также (переменные) середины L, M и N отрезков BY, XY и AX соответственно (рис. 27). Так как отрезки AX и BY параллельны, отрезок KM также им параллелен. Как известно, четырёхугольник $KLMN$ — параллелограмм, поэтому отрезки KM и LN имеют общую середину T.

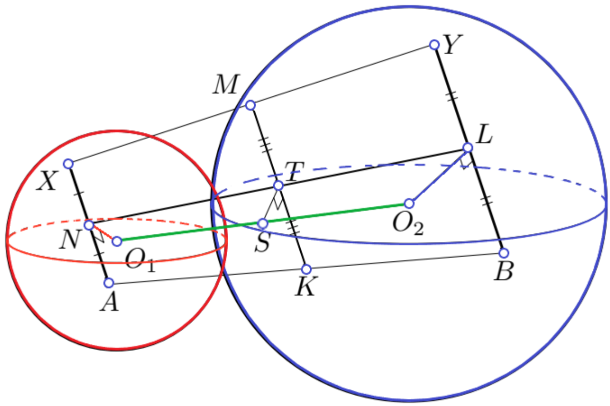


Рис. 27

Проведём плоскость α через T перпендикулярно AX; так как $KM \parallel AX$, все точки этой плоскости равноудалены от точек

K и M. Так как T — середина LN, точки L и N равноудалены от α и лежат по разные стороны от неё (либо обе лежат в α). Так как отрезки O_1N и O_2L перпендикулярны AX, они параллельны α; тогда точки O_1 и O_2 также равноудалены от α, поэтому середина S отрезка O_1O_2 лежит в α. Итак, $SK = SM$.

Таким образом, если точки S и K не совпадают, середина M отрезка XY лежит на сфере с центром в точке S и радиусом, равным длине отрезка SK. Если же $S = K$, то $S = M$, и середины всех отрезков XY совпадают. В этом случае условию удовлетворяет любая сфера, проходящая через точку S.

Замечание. Равенство $SK = SM$ можно установить и по-другому. При отражении относительно прямой, параллельной AX и BY, векторы $\overrightarrow{O_1A}$ и $\overrightarrow{O_2B}$ переходят в векторы, равные $\overrightarrow{XO_1}$ и $\overrightarrow{YO_2}$ соответственно. Значит, при таком отражении вектор $\overrightarrow{SK} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{O_1A} + \overrightarrow{O_2B})$ переходит в вектор, равный $\frac{1}{2}(\overrightarrow{XO_1} + \overrightarrow{YO_2}) = \overrightarrow{MS}$. Отсюда и следует, что $SK = MS$.

61. *Ответ:* $1,5$ *часа.*

За 2 часа опытный дрессировщик мог бы вымыть трёх слонов, а вместе с неопытным — четырёх. Значит, на каждого слона при совместной работе уйдёт полчаса, а на трёх слонов — полтора часа.

62. *Ответ:* 8.

После попадания число пулек не меняется, после промаха — уменьшается на две. Значит, сын промахнулся 10 раз, а попал, соответственно, $18 - 10 = 8$.

63. *Ответ:* 35 555 520.

В каждом из шести разрядов встречаются только две цифры — 3 и 7, поэтому всего имеется $2^6 = 64$ удовлетворяющих условию шестизначных числа: в каждом разряде будет ровно 32 тройки и 32 семёрки. Воспользуемся десятичной записью и представим эти числа в виде суммы степеней числа 10, тогда после сложения всех 64 чисел получим

$$32 \cdot (3 + 7) \cdot (1 + 10 + 10^2 + \ldots + 10^5) = 35555520.$$

64. Имеем $D = b^2 - 4ac$, так что $b^2 = 4ac + D$. Значит, у b^2 такой же остаток при делении на 4, как и у D. Известно, что квадрат целого числа может давать при делении на 4 только остатки 0 и 1; в то же время 2018 и 2019 имеют остатки 2 и 3 соответственно — противоречие.

65. В первую очередь надо построить вершины B и C так, чтобы расстояния PB, BQ, QC, CR были равными между собой. Значит, вершины B и C лежат на серединных перпендикулярах l и m к отрезкам PQ и QR соответственно (рис. 28). Кроме того, отрезок BC делится точкой Q пополам.

Такой отрезок можно построить многими способами. Например, проведем через Q прямые, параллельные l и m. Отрезок B_1C_1 параллелен искомому отрезку BC. Построение точек A и D очевидно.

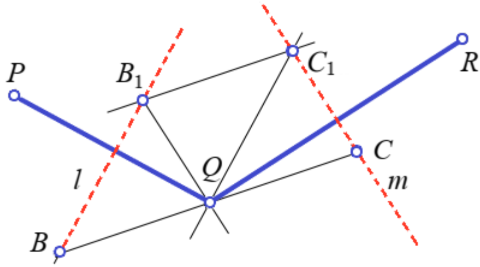


Рис. 28

66. Предположим противное. Опишем вокруг такого треугольника прямоугольник с целыми вершинами. Площадь треугольника можно получить, вычитая из площади прямоугольника площади трёх прямоугольных треугольников, то есть его площадь будет *рациональным* числом. С другой стороны, она равна иррациональному числу $\frac{1}{2}AB^2 \sin 45°$.

67. *Ответ: а) нет; б) да.*

а) Если такой треугольник со сторонами a, b и c существует, то $a = \frac{2S}{x}$, $b = \frac{2S}{y}$ и $c = \frac{2S}{z}$, где S — площадь треугольника. Для сторон треугольника должно выполняться неравенство $a < b + c$, которое равносильно $\frac{1}{x} < \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$. Последнее не выполняется, например, для чисел $x = 2$, $y = 5$ и $z = 6$.

б) Построим треугольник ABC со сторонами x, y и z. Проводим в нем медианы AM, BN и CL. Тогда треугольник со сторонами $\frac{4AM}{3}$, $\frac{4BN}{3}$ и $\frac{4CL}{3}$ является искомым.

68. Всевозможные замощения полосы размером $1 \times (n + 2)$ разобьём на две группы:

1) те, у которых замощение начинается с детали 1×2, то есть первый (слева) прямоугольник имеет размеры 1×2. Убрав эту деталь, получим допустимое покрытие полоски длиной n клеток. Число таких покрытий равно $T(n)$.

2) те, у которых замощение начинается с прямоугольника большего размера. Укоротим его на одну клетку, тогда получится допустимое покрытие полоски длиной $n+1$. Число таких покрытий, разумеется, равно $T(n+1)$.

Таким образом, общее число замощений полоски $1 \times (n+2)$ совпадает с $T(n) + T(n+1)$ и по определению равно $T(n+2)$.

69. *Ответ: на один нуль.*

Пусть в разложении числа n имеются a двоек и b пятерок, то есть $n = 2^a \cdot 5^b \cdot M$. Без ограничения общности можно считать, что $a \leqslant b$, и значит, число n оканчивается на a нулей.

Лемма. *Пусть $\tau(n)$ — количество всех натуральных делителей числа n, включая 1 и n. Тогда произведение всех его натуральных делителей равно $n^{\frac{1}{2}\tau(n)}$.*

Доказательство. Запишем в порядке возрастания все делители числа n: $1 = d_1 < d_2 < \ldots < d_m = n$, тогда произведение равноудалённых множителей будет равно n, то есть $d_1 \cdot d_m = d_2 \cdot d_{m-1} = \ldots = d_m \cdot d_1 = n$. Перемножим эти равенства:

$$(d_1 \cdot d_2 \cdot \ldots \cdot d_m)^2 = n^m,$$

то есть $d_1 \cdot d_2 \cdot \ldots \cdot d_m = \sqrt{n^m}$. Здесь $m = \tau(n)$, и отсюда получается требуемая формула произведения делителей числа n.

Поскольку n оканчивается a нулями, произведение всех его делителей оканчивается $a \cdot \frac{1}{2}\tau(n)$ нулями, и значит,

$$a \cdot \tau(n) = 2 \cdot 2018.$$

Все делители числа n имеют вид $2^\alpha 5^\beta \cdot d$, где $0 \leqslant \alpha \leqslant a$, $0 \leqslant \beta \leqslant b$ и d — произвольный делитель M. Здесь число α может принимать любое значение от 0 до a (всего $a+1$ значений), β — любое значение от 0 до b (всего $b+1$ значений). Наконец, количество возможных значений для d равно $\tau(M)$. Отсюда

$$\tau(n) = (a+1) \cdot (b+1) \cdot \tau(M),$$

и имеем равенство $a(a+1)(b+1)\tau(M) = 2\cdot 2\cdot 1009$. Заметим, что 1009 — простое, числа a и $a+1$ — последовательные, поэтому это равенство возможно *только* при $a = 1$, и значит, n может оканчиваться только одним нулём. Осталось показать, что такое число n существует. Действительно, при $a = 1$ имеем $(b+1)\tau(M) = 2\cdot 1009$. Можно взять, например, $b = 2017$, $M = 1$ и тогда $n = 2\cdot 5^{2017}$.

70. *Ответ:* $\frac{2}{\pi}$.

Несложно вычислить: $R_{k+1} = R_k \cos\frac{\pi}{2^{k+1}}$, и значит,

$$R_k = 1\cdot\cos\frac{\pi}{4}\cdot\cos\frac{\pi}{8}\cdot\ldots\cdot\cos\frac{\pi}{2^k}\,.$$

Для вычисления этого произведения умножим обе его части на $\sin\frac{\pi}{2^k}$ и несколько раз применим формулу синуса двойного угла. Получим, что $R_k\sin\frac{\pi}{2^k} = \frac{1}{2^{k-1}}\sin\frac{\pi}{2}$. Отсюда при $k\to\infty$ приходим к ответу; при этом нужно ещё воспользоваться *первым замечательным пределом*: $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$.

71. *Ответ: вторая.*

За 72 часа первая улитка проползает $7\cdot 9 = 63$ метра, а вторая — $8\cdot 8 = 64$ метра.

72. *Ответ:* $4, 2, 1, 23$ *или* $8, 4, 2, 16$.

По условию количество белых шариков не меньше 11, значит, остальных шариков не более чем $30 - 11 = 19$. Обозначим количество зелёных шариков через x, тогда количество синих шариков — $2x$, а количество красных — $4x$. Поскольку красных, синих и зелёных шариков не более 19, получаем $4x + 2x + x \leqslant 19$ или $7x \leqslant 19$, то есть $x \leqslant 2$. Если $x = 1$, то $2x = 2$ и $4x = 4$, то есть красных, синих и зелёных шариков соответственно 4, 2 и 1, тогда белых шариков $30 - (4 + 2 + 1) = 23$. Если же $x = 2$, то $2x = 4$ и $4x = 8$, то есть красных, синих и зелёных шариков соответственно 8, 4 и 2, тогда белых шариков $30-(8+4+2) = 16$.

73. *Ответ: не может.*

Раскрасим клетки марсианской доски 7×7 в «шахматном» порядке. Отметим, что каждым ходом длиной в одну или три клетки ладья меняет цвет клетки, на которой стоит. Значит, если ладья возвращается в исходную клетку, то количество её ходов (то есть пройденных клеток) чётно. Но количество клеток на такой доске равно 49, то есть нечётно. Значит, обойти все клетки она не может.

74. *Ответ:* 17.

Если в каком-нибудь месте сидят три нежёлтых чижа подряд, то для «среднего» чижа этой тройки нарушается условие задачи. Значит, в любой тройке чижей есть хотя бы один жёлтый. Так как всего чижей 50, то меньше, чем 17 жёлтых чижей быть не может. Ясно, что 17 жёлтых чижей хватит, чтобы выполнялось условие. Для этого посадим их на деревья с номерами 3, 6, 9, ..., 48 и 1. Тогда условие задачи будет выполнено.

75. *Ответ:* 14.

В каждом прямоугольнике 4×6 можно провести не более 7 диагоналей: на его «средней» линии всего восемь узлов, а каждая диагональ имеет один из них своим концом. Значит, в исходном прямоугольнике 4×6 можно провести не более $7 \cdot 2 = 14$ диагоналей. Осталось привести пример прямоугольника с 14-ю диагоналями (рис. 29).

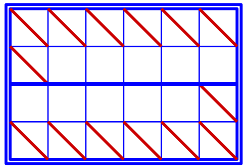


Рис. 29

Замечание. Возможны и другие примеры расположения диагоналей.

76. *Ответ:* 876432 *или* 765432.

Искомое число делится на 6, а значит, делится на 2 и на 3. Цифру 1 надо обязательно вычеркнуть, оставшееся число 8765432 имеет сумму цифр 35 и по признаку делимости не делится на 3. Таким образом, надо вычеркнуть ещё хотя бы одну цифру так, чтобы сумма оставшихся цифр делилась на 3. Этого можно добиться, вычёркивая только цифры 5 или 8. В результате получим кратное шести число 876432 или число 765432.

77. *Ответ:* $9, 3, 1, 27$ *или* $18, 6, 2, 14$.

По условию количество белых шариков не меньше 11, значит, остальных шариков не более чем $40 - 11 = 29$. Обозначим количество зелёных шариков через x, тогда количество синих шариков — $3x$, а количество красных — $9x$. Поскольку красных, синих и зелёных шариков не более 29, получаем $9x + 3x + x \leqslant 29$ или $13x \leqslant 29$, то есть $x \leqslant 2$. Если $x = 1$, то $3x = 3$ и $9x = 9$, то есть красных, синих и зелёных шариков соответственно 9, 3 и 1, тогда белых шариков $40 - (9 + 3 + 1) = 27$. Если же $x = 2$, то $3x = 6$ и $9x = 18$, то есть красных, синих и зелёных шариков соответственно 18, 6 и 2, тогда белых шариков $40-(18+6+2) = 14$.

78. *Ответ:* $\frac{616}{111}$.

Обозначим искомую дробь через x/y, где x и y — натуральные взаимно простые числа. Разделим её на каждую из данных дробей:

$$\frac{x}{y} : \frac{77}{888} = \frac{888x}{77y} \quad \text{и} \quad \frac{x}{y} : \frac{88}{777} = \frac{777x}{88y}\,.$$

Эти дроби должны быть целыми числами, поэтому $888x$ делится на $77y$, а $777x$ — на $88y$. Поскольку числа x и y — взаимно простые, отсюда следует, что x делится на 77 и 88, а y делит числа 777 и 888. Значит, x — общее кратное чисел 77 и 88, а y — общий делитель чисел 777 и 888. Искомая дробь x/y будет наименьшей, если её числитель — наименьший, а знаменатель — наибольший из всех возможных. Следовательно,

$$x = \text{НОК}(77,\, 88) = 616, \quad y = \text{НОД}(777,\, 888) = 111.$$

79. *Ответ:* 1 *г*, 1 *г*, 3 *г*, 6 *г*, 12 *г*, 24 *г*.

В наборе обязательно должна быть гирька массой 1 *г*, иначе вес в 1 грамм взвесить будет невозможно. Поскольку с помощью гирек можно также взвесить вес в 2 *г*, масса следующей гирьки набора равна либо 1 *г*, либо 2 *г*. Второй случай невозможен, иначе вес в 3 *г* можно будет взвесить двумя способами: $1+2$ и 3. Таким образом, известны массы трёх гирек набора — 1 *г*, 1 *г*, 3 *г*, с помощью которых можно взвесить любой вес от 1 *г* до $1+1+3=5$ *г* единственным образом.

Для взвешивания 6 граммов понадобится ещё одна гиря массой 3 *г* или 6 *г*. Масса в 3 *г* для 4-й гири не подходит, так как массы следующих гирь будут не более 9 *г* и 18 *г*, суммарный вес всех гирь — не более $1+1+3+3+9+18=35$ *г*, и значит, массу в 47 *г* будет взвесить невозможно. Набор гирек 1 *г*, 1 *г*, 3 *г*, 6 *г* позволяет взвесить любой вес в целое число граммов от 1 *г* до 11 *г*.

Для взвешивания 12 граммов нужна гиря массой 6 *г* или 12 *г*. В первом случае легко определяется масса 6-й гири: $47 - (11+6) = 30$ *г*, при этом будет невозможно взвесить массы от 18 *г* до 29 *г*. Значит, масса 5-й гирьки 12 *г*. Набор гирек 1 *г*, 1 *г*, 3 *г*, 6 *г*, 12 *г* позволяет взвесить любой вес в целое число граммов от 1 *г* до 23 *г*. (Массы от 1 *г* до 11 *г* взвешиваются ровно одним способом с помощью первых 4-х гирь, а массы от 12 *г* до 23 *г* получаются добавлением гири 12 *г* к соответствующему весу 1 *г* до 11 *г*.) Добавив к ним гирю массой в $47 - 23 = 24$ *г*, получаем требуемый набор из 6 гирь 1 *г*, 1 *г*, 3 *г*, 6 *г*, 12 *г*, 24 *г* общей массой 47 граммов.

80. *Ответ:* 8 *ладей.*

Разобьём марсианскую доску на 8 равных «крестов» из пяти клеток — крестообразных пентамино (рис. 30). В каждом таком «кресте» должна стоять хотя бы одна марсианская ладья, в противном случае его центральная клетка не бьётся никакой другой ладьей. Значит, общее число ладей не меньше 8 (*оценка*).

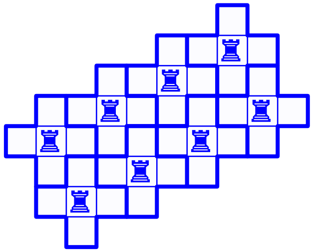


Рис. 30

С другой стороны, восьми ладей будет достаточно, если в центр каждого «креста» поставить одну ладью, как это показано на рисунке. Тогда каждая клетки доски окажется под боем одной из марсианских ладей (*пример*).

81. *Ответ:* 9876432 *или* 9765432.

Искомое число делится на 12, а значит, на 3 и на 4. Цифру 1 надо обязательно вычеркнуть, оставшееся число 98765432 делится на 4, имеет сумму цифр 44 и по признаку делимости не делится на 3. Таким образом, надо вычеркнуть ещё хотя бы одну цифру так, чтобы сумма оставшихся цифр делилась на 3. Этого можно добиться, вычёркивая только цифры 5 или 8. В результате получим кратное 12 число 9876432 или число 9765432.

82. *Ответ:* 1 *г*, 1 *г*, 3 *г*, 3 *г*, 9 *г*, 18 *г*.

В наборе обязательно должна быть гирька массой 1 *г*, иначе вес в 1 грамм взвесить будет невозможно. Поскольку с помощью гирек можно также взвесить вес в 2 *г*, масса следующей гирьки набора равна либо 1 *г*, либо 2 *г*. Второй случай невозможен, иначе вес в 3 *г* можно будет взвесить двумя способами: $1 + 2$ и 3.

Таким образом, известны массы четырёх гирек набора — 1 *г*, 1 *г*, 3 *г*, 3 *г*, с помощью которых можно взвесить любой вес от 1 *г* до $1 + 1 + 3 + 3 = 8$ *г* единственным образом.

Для взвешивания 9 граммов нужна гиря массой 3 *г* или 9 *г*. В первом случае легко определяется масса последней гири: 35 –

$-(8+3) = 24$ *г*, при этом будет невозможно взвесить массы от 12 *г* до 23 *г*. Значит, масса пятой гирьки 12 *г*. Набор гирек 1 *г*, 1 *г*, 3 *г*, 3 *г*, 9 *г* позволяет взвесить любой вес в целое число граммов от 1 *г* до 17 *г*. (Массы от 1 *г* до 8 *г* взвешиваются ровно одним способом с помощью первых четырёх гирь, а массы от 9 *г* до 17 *г* получаются добавлением гири 9 *г* к соответствующему весу от 1 *г* до 8 *г*.) Добавив к ним гирю массой в 18 *г*, получаем требуемый набор из 6 гирь 1 *г*, 1 *г*, 3 *г*, 3 *г*, 9 *г*, 18 *г* общей массой 35 граммов.

83. *Ответ:* 300.

Рядом с каждой феей сидят две феи (ФФФ) или две ведьмы (ВФВ). В первом случае рядом с каждой из фей должны сидеть тоже феи — ФФФФФ, но тогда и все участницы конференции обязательно феи, что невозможно. Во втором случае у каждой ведьмы с одной стороны сидит фея, а с другой — ведьма, то есть имеем ВВФВВ. Но тогда легко определяется положение остальных участниц конференции:

$$\ldots \text{ВВФВВФВВФВВ} \ldots .$$

Другими словами, каждая третья участница конференции — фея, и значит, общее количество фей $900 : 3 = 300$.

84. *Ответ:* 90°.

Треугольники AXY и BXZ — равносторонние, поэтому $XY = 1$ и $XZ = 2$, причём угол YXZ между этими отрезками равен 60°. Через точку Y проведём прямую, параллельную AB, до пересечения с XZ в точке T. Поскольку углы TYX и YXA равны как накрест лежащие, получаем $\angle TYX = \angle YXA = 60^\circ$, то есть треугольник TYX — равносторонний, и значит, $YT = XT = XY = 1$. Отсюда $TZ = XZ - XT = 1$, и значит, треугольник YTZ — равнобедренный ($YT = TZ$), причём угол при вершине T, смежный с углом $\angle YTX = 60^\circ$, равен 120°. Отсюда $\angle YZT = \angle TYZ = 30^\circ$. Значит, $\angle XYZ = \angle XYT + \angle TYZ = 90^\circ$.

85. *Ответ:* 16.

В каждом прямоугольнике 2×7 можно провести не более 8 диагоналей: на его «средней» линии всего восемь узлов, а каждая диагональ имеет один из них своим концом. Значит, в исходном прямоугольнике 4×7 можно провести не более $8 \cdot 2 = 16$ диагоналей. Осталось привести пример прямоугольника с 16-ю диагоналями (рис. 31).

Замечание. Возможны и другие примеры расположения диагоналей.

86. *Ответ: не может.*

Если $n = 2k$ — чётное число, то его наибольший делитель, отличный от n, равен k, а их сумма $2k + k = 3k$ делится на 3. Поскольку 2018 на 3 не делится, сумма не может равняться 2018.

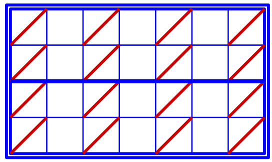


Рис. 31

87. *Ответ:* 17.

Пусть x — число 50-литровых бидонов, а количество собранного мёда — $50x$. Тогда 40-литровых и 70-литровых бидонов понадобится $x+5$ и $x-4$ соответственно. В каждом случае один из бидонов оказывается неполным, поэтому

$$\begin{cases} 40(x+4) < 50x < 40(x+5), \\ 70(x-5) < 50x < 70(x-4), \end{cases} \iff \begin{cases} 16 < x < 20, \\ 14 < x < 17{,}5. \end{cases}$$

Единственное целое решение этой системы неравенств — $x = 17$.

88. *Ответ: можно.*

Заметим, что нечётное число не делится на чётное, и значит, его соседи — числа разной чётности. Учитывая это, легко расположить числа по кругу требуемым образом — например, так: 1, 5, 6, 2, 7, 3, 4.

89. *Ответ: может.*

Приведём один из возможных примеров. Пусть Саша получила гирьки с массами 1, 4, 7, ..., 43, Даша — с массами 2, 5, 8, ..., 44, а у Маши остались гирьки с массами 3, 6, 9, ..., 45 (иначе говоря, массы Машиных гирек делятся на 3, массы Сашиных дают остаток 1, а массы Дашиных — остаток 2 при делении на 3). Тогда сумма масс двух гирек (Саши и Даши) будет делиться на 3, и будет принимать значения от $1+2 = 3$ до $43+44 = 87 = 29\cdot 3$. Массы от 3 до 45 Маша может уравновесить одной своей гирькой, а массы от $48 = 45+3$ до $87 = 45+42$ — двумя гирьками.

90. *Ответ:* 5.

Пусть M — точка пересечения прямых AK и BC, N — точка пересечения прямых AL и BC. В треугольнике ABM высота

BK является одновременно и биссектрисой, поэтому треугольник ABM — равнобедренный и $AB = BM$. Поскольку BK является и медианой, точка K — середина AM. Аналогично доказывается, что $AC = CN$ и L — середина AN. Таким образом, отрезок KL является средней линией треугольника AMN, причём сторона $MN = MB + BC + CN$ оказывается равной периметру треугольника ABC, то есть $MN = 10$. Отсюда $KL = \frac{1}{2} \cdot MN = 5$.

91. *Ответ:* 1994 *и* 2012.

Если кто-то из братьев родился в $\overline{19xy}$ году, то из условия имеем: $1900 + 10x + y + (1 + 9 + x + y) = 2017 \Leftrightarrow 11x + 2y = 107$. Отсюда следует, что x — нечётное число, и поскольку x и y — цифры, единственным решением будет $x = 9$ и $y = 4$.

92. *Ответ: например,* $5 \cdot 2011 = 10055$.

В самом деле, поскольку 5 и 2011 — простые, сумма делителей числа $5 \cdot 2011$, не считая самого числа, равна $1+5+2011 = 2017$.

93. Первое решение. Пусть оба уравнения не имеют решений. Это означает, что их дискриминанты отрицательны, то есть $4(a^2 - ab) < 0$ и $4(b^2 - ab) < 0$. Сложив эти неравенства, получим $4(a - b)^2 < 0$ — противоречие.

Второе решение. Если уравнения не имеют решений, то квадратные трёхчлены $x^2 + 2ax + ab$ и $x^2 + 2bx + ab$ с положительным старшим коэффициентом принимают только положительные значения. Значит, их сумма $2x^2 + 2(a+b)x + 2ab = 2(x+a)(x+b)$ тоже не должна обращаться в ноль, однако это очевидно не так.

94. *Ответ:* $\frac{120}{13}$.

Пусть M — точка пересечения вписанной окружности и прямой BD, отличная от D, и пусть N — точка касания окружности с катетом BC. По теореме Пифагора $BD^2 = BC^2 + CD^2 = 12^2 + 5^2$, и значит, $BD = 13$. По теореме о касательной $BN^2 = BM \cdot BD$. Отрезок касательной BN легко вычислить: $BN = BC - NC = BC - CD = 7$, поэтому $BM = BN^2/BD = 49/13$. Отсюда $MD = BD - BM = 120/13$.

95. *Ответ:* $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 = 945$.

Первое решение. Пусть P_n — количество разбиений $2n$ игроков на пары. Каждый из участников может встретиться в паре с любым из $2n-1$ игроков. Как только противник выбран, остается $2n-2=2(n-1)$ игроков, которые могут подобрать себе пару P_{n-1} способами. Следовательно, $P_n = (2n-1)\cdot P_{n-1}$. Из полученного рекуррентного соотношения легко выводится, что количество пар в первом круге может быть составлено

$$1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1) = (2n-1)!!$$

различными способами. При $n=5$ искомое количество способов равно $9!! = 1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9 = 945$.

Второе решение. Будем выбирать пары игроков последовательно, одну за другой. Первую пару игроков можно выбрать C_{2n}^2 способами, вторую — C_{2n-2}^2 способами, и так далее, наконец, последнюю пару можно выбрать $C_2^2 = 1$ способом. По правилу произведения число способов выбрать n пар игроков равно

$$C_{2n}^2\cdot C_{2n-2}^2\cdot \ldots \cdot C_2^2 = \frac{(2n)!}{2^n}\,.$$

Чтобы устранить упорядоченность выбора n пар, это произведение нужно разделить на $n!$, поэтому

$$P_n = \frac{(2n)!}{2^n\cdot n!}\,.$$

96. *Ответ:* 9216.

Рассмотрим две последние цифры искомого числа. Существуют лишь два натуральных числа, четвертая степень которых является двузначным числом: $2^4=16$ и $3^4=81$ ($4^4=256$). Подберем цифру сотен. Поскольку 10^3 — четырёхзначное число, проверим кубы натуральных чисел от 1 до 9, обращая внимание только на последнюю цифру. На цифру 1 оканчивается только 1^3, что не подходит, а на цифру 6 — только $6^3=216$. Найдем цифру тысяч. Искомое число является квадратом двузначного, и это число оканчивается либо на 4, либо на 6. Разберем обе возможности.

1) $(10n+4)^2 = 100n^2+80n+16$. Поскольку цифра десятков числа равна 1, $n=5$, но $54^2=2916$, что не годится.

2) $(10n+6)^2 = 100n^2+120n+36$. Из тех же соображений $n=9$, $94^2=9216$.

97. *Ответ:* 0.

Первое решение. Из второго равенства имеем: $2018(xy + yz + xz) = xyz$. Учитывая также, что $x + y + z = 2018$, получим:

$$(x-2018)(y-2018)(z-2018) = -(2018-x)(2018-y)(2018-z) = \\ = -2018^3 + (x+y+z)\cdot 2018^2 - (xy+yz+xz)\cdot 2018 + xyz = \\ = -2018^3 + 2018^3 - xyz + xyz = 0.$$

Второе решение. Пусть $xy + yz + xz = p$. Составим многочлен $f(t) = (t-x)(t-y)(t-z)$ с корнями x, y и z. Из условия задачи имеем: $f(t) = t^3 - (x+y+z)t^2 + (xy+yz+xz)t - xyz = t^3 - 2018t^2 + pt - 2018p$. Полученный кубический многочлен легко раскладывается на множители: $f(t) = (t^2+p)(t-2018)$, то есть одним из корней $f(t)$ является число 2018. Следовательно, хотя бы один из множителей искомого произведения равен нулю.

98. Совпадает с задачей **95**.

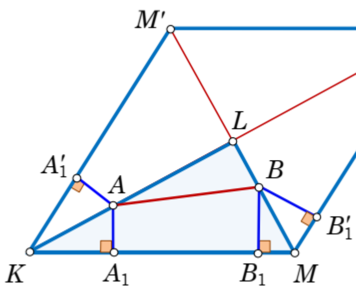


Рис. 32

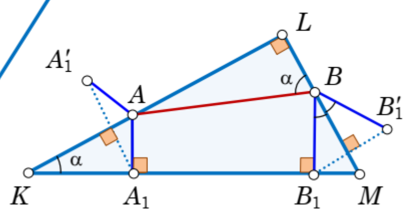


Рис. 33

99. *Ответ:* $\dfrac{2ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Первое решение. Пусть KLM — исходный треугольник с прямым углом L, и точки A и B лежат на катетах $a = KL$ и $b = LM$ соответственно (рис. 32). Рассмотрим симметрию относительно прямой KL, и пусть A_1' и M' — образы точек A_1 и M соответственно. Аналогично, рассмотрим симметрию относительно прямой ML, и пусть B_1' и K' — образы точек B_1 и K. Тогда $KM'K'M$ — ромб и $A_1A + AB + BB_1 = A_1'A + AB + BB_1'$.

Точки A_1' и B_1' лежат на параллельных прямых, причём $AA_1' \perp KM'$ и $BB_1' \perp MK'$, поэтому наименьшее значение полученной суммы достигается тогда и только тогда, когда точки A_1', A, B и B_1' принадлежат общему перпендикуляру к прямым KM' и MK'. Искомое значение суммы в этом случае равно расстоянию между этими прямыми, то есть длине *высоты ромба*, которая, в свою очередь, равна удвоенной высоте треугольника KLM:

$$h = \frac{2ab}{\sqrt{a^2+b^2}}\,.$$

Второе решение. Пусть A_1' и B_1' — точки, симметричные A и B относительно катетов KL и LM соответственно (рис. 33). Тогда $AA_1 = AA_1'$, $BB_1 = BB_1'$ и наименьшее значение суммы $AA_1 + AB + BB_1$ достигается тогда и только тогда, когда точки A_1', A, B и B_1' лежат на одной прямой.

Пусть $AB = x$, $\angle AKA_1' = \alpha$. Поскольку $\angle BAL = \angle A_1'AK = \angle A_1AK = 90^\circ - \alpha$, получаем $\angle ABL = \alpha$, и значит, $AL = x \cdot \sin\alpha$. Тогда $KA = KL - AL = a - x \cdot \sin\alpha$ и

$$AA_1 = AK \cdot \sin\alpha = a \cdot \sin\alpha - x \cdot \sin^2\alpha.$$

Аналогично, имеем $BB_1 = BM \cdot \cos\alpha = b \cdot \cos\alpha - x \cdot \cos^2\alpha$. Таким образом, искомое значение суммы равно

$$AA_1 + AB + BB_1 = a\sin\alpha - x\sin^2\alpha + x + b\cos\alpha - x\cos^2\alpha = \\ = a\sin\alpha + b\cos\alpha.$$

В прямоугольном треугольнике KLM имеем: $\sin\alpha = b \,/\, \sqrt{a^2+b^2}$ и $\cos\alpha = a \,/\, \sqrt{a^2+b^2}$, отсюда приходим к ответу.

100. Для каждого слагаемого в левой части запишем известное неравенство о среднем арифметическом и геометрическом:

$$\sqrt{x(1-y)} \leqslant \frac{x+(1-y)}{2} \quad \text{и} \quad \sqrt{y(1-x)} \leqslant \frac{y+(1-x)}{2}\,.$$

Складывая эти неравенства, получим требуемое утверждение.

101. Совпадает с задачей **87**.

102. Совпадает с задачей **97**.

103. *Ответ: в* $2,65$ *раз.*

Пусть $x = 0,1212\ldots$, тогда $100x = 12,1212\ldots = 12 + x$, и значит, $99x = 12$, то есть $x = \frac{4}{33}$. После замены первой цифры после запятой на **3** получим число $y = 0,\mathbf{3}21212\ldots$, и значит, $100y = 32,1212\ldots = 32 + x = 32 + \frac{4}{33}$, откуда $y = \frac{53}{165}$, и

$$\frac{y}{x} = \frac{53}{20} = 2,65.$$

104. Совпадает с задачей **99**.

105. Для каждого слагаемого в левой части запишем известное неравенство о среднем арифметическом и геометрическом:

$$\sqrt{x(1-y)} \leqslant \frac{x+(1-y)}{2},$$
$$\sqrt{y(1-z)} \leqslant \frac{y+(1-z)}{2},$$
$$\sqrt{z(1-x)} \leqslant \frac{z+(1-x)}{2}.$$

Складывая эти неравенства, получим требуемое утверждение.

106. *Ответ:* 5 *девочек,* 4 *мальчиков и* 7 *взрослых.*

Пусть k — число девочек, а m — число мальчиков. Тогда количество взрослых равно $16 - k - m$, и условие задачи можно записать в виде $13k + 5m + 4(16 - k - m) + 17 = 130$. После упрощения равенство приобретает вид $m = 49 - 9k$. При этом число взрослых гостей равно $16 - k - (49 - 9k) = 8k - 33$. Числа $49 - 9k$ и $8k - 33$ неотрицательны, и значит, $\frac{33}{8} \leqslant k \leqslant \frac{49}{9}$, так что k может быть равно только 5. Отсюда легко находится значение $m = 4$.

107. *Ответ: нет, не могло.*

Предположим, что пятеро друзей сказали правду. Если какой-то друг сказал правду, то все последующие друзья также правы. Значит, эти пятеро — друзья с номерами 6, 7, 8, 9, 10. По словам шестого друга n делится на 6, 7, 8, 9 и 10. Но тогда оно делится и на все числа, меньшие 6, то есть правы все 10 друзей.

108. *Ответ:* 2.

Пусть оба числа $m + n$ и $m^2 + n^2$ делятся на d. Тогда на d делится также число $(m - n)(m + n) = m^2 - n^2$. Значит, d будет делителем чисел $(m^2+n^2)-(m^2-n^2)=2n^2$ и $(m^2+n^2)+(m^2-$ $-n^2)=2m^2$. Но по условию у чисел m и n нет общих делителей, так что d — делитель числа 2. Заметим также, что числа $m+n$ и m^2+n^2 — чётные, так что НОД$(m+n,\, m^2+n^2)=2$.

109. *Ответ:* 72.

Пусть O — точка пересечения медиан данного треугольника ABC (рис. 34). Тогда площадь треугольника AOC составляет одну треть от площади треугольника ABC, так как у них общие основания, а высоты относятся как $1:3$. Продолжим медиану BM на отрезок $MD=OM$. Треугольники OMC и AMD равны по двум сторонам и углу M между ними. Значит, $S_{AOD}=S_{AOC}=S$.

Стороны треугольника AOD составляют $2/3$ от длин медиан, то есть равны 8, 10 и 6. Они образуют прямоугольный треугольник с гипотенузой 10 и катетами 6 и 8. Площадь его равна $S=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 8=24$. Искомая площадь в три раза больше S, то есть равна 72.

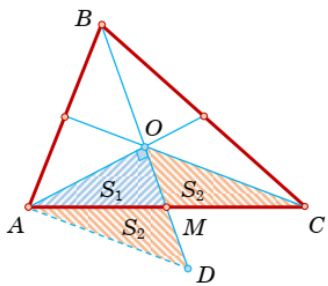


Рис. 34

110. *а) Ответ: нет.*

Пусть $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_8$ — числа, расставленные на окружности в порядке обхода. Если сумма любых трёх соседних чисел больше 13, то

$$\begin{aligned} &a_1+a_2+a_3\geqslant 14,\\ &a_2+a_3+a_4\geqslant 14,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &a_8+a_1+a_2\geqslant 14. \end{aligned}$$

Складывая эти неравенства, получим $3(a_1+a_2+\ldots+a_8)\geqslant$ $\geqslant 8\cdot 14=112$. С другой стороны, $a_1+a_2+\ldots+a_8=1+2+\ldots+8=$ $=36$. Получаем противоречие, $3\cdot 36\geqslant 112$.

б) Ответ: да.

Приведём пример требуемого расположения чисел:

$$\begin{array}{llll} a_1=1, & a_2=5, & a_3=6, & a_4=2,\\ a_5=4, & a_6=7, & a_7=3, & a_8=8. \end{array}$$

111. *Ответ:* 360 *или* 720.

Ясно, что задуманное Мишей число n делится на 10, в противном случае все 10 друзей сказали неправду. Аналогично получается, что n кратно 9 и 8, и значит, n делится на их НОК, то есть на 360. Но тогда n обязательно делится на все числа от 1 до 10 и не делится на 7. В этом случае первые 7 друзей ошиблись, а остальные сказали правду. Среди трёхзначных чисел только 360 и 720 делятся на 360.

112. *Ответ: нет, не могло.*

Сравним остатки чисел $n \cdot S(n)$ и $200\ldots0018$ при делении на 3. По признаку делимости число и сумма его цифр имеют равные остатки при делении на 3. Значит, произведение $n \cdot S(n)$ при делении на 3 даёт такой же остаток, что и $S^2(n)$. Сумма цифр числа $200\ldots0018$ равна 11, и значит, это число при делении на 3 даёт остаток 2. Таким образом, если равенство $n \cdot S(n) = 200\ldots0018$ возможно, то $S^2(n)$ имеет остаток 2 при делении на 3. Поскольку квадрат любого целого числа при делении на 3 может давать только остаток 0 или 1, требуемое равенство невозможно.

113. (Рис. 35.) Очевидно, что центр O окружности ω_1 лежит внутри дуги AB, так как половина площади окружности не может находиться в одном полукруге. Пусть M — точка пересечения диаметра AC с дугой AB. Дуга AM больше хорды AM, Кроме того, длина дуги MB больше отрезка CM. Действительно, построим вспомогательную окружность с центром в точке M радиуса MC. Она целиком лежит внутри окружности ω_1, значит, MB больше, чем радиус этой окружности.

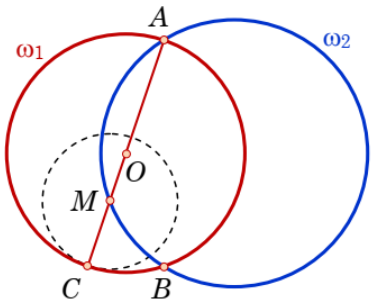


Рис. 35

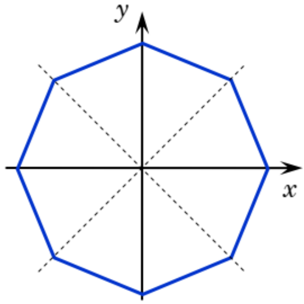


Рис. 36

114. *Ответ:* 8.

Может ли оказаться, что все 6 уравнений имеют корни? Рассмотрим пару уравнений $ax^2 + bx + c = 0$ и $cx^2 + bx + a = 0$. Их дискриминанты совпадают и равны $b^2 - 4ac$. Предположим, что дискриминанты всех 6 уравнений неотрицательны. Это сводится к трем соотношениям:

$$b^2 \geqslant 4ac, \quad a^2 \geqslant 4bc, \quad c^2 \geqslant 4ab.$$

Обе части каждого неравенства положительны, поэтому можно перемножить все три неравенства. Получим: $a^2b^2c^2 \geqslant 64a^2b^2c^2$, пришли к противоречию.

Итак, одновременно могут выполняться не более двух неравенств из трёх, то есть одна пара уравнений корней не имеет. Пусть для определенности выполняются первые два неравенства, тогда

$$c < \min\left(\frac{b^2}{4a}, \frac{a^2}{4b}\right).$$

Например, подойдет тройка $a = 9$, $b = 18$, $c = 1$. Найдем корни уравнений:

$$\begin{array}{rll}
9x^2 + 18x + 1 = 0, & x_1 = -1 - \frac{2\sqrt{2}}{3}, & x_2 = -1 + \frac{2\sqrt{2}}{3}; \\
x^2 + 18x + 9 = 0, & x_1 = -9 - 6\sqrt{2}, & x_2 = -9 + 6\sqrt{2}; \\
18x^2 + 9x + 1 = 0, & x_1 = -\frac{1}{3}, & x_2 = -\frac{1}{6}; \\
x^2 + 9x + 18 = 0, & x_1 = -6, & x_2 = -3.
\end{array}$$

Все они различны, поэтому наибольшее количество различных корней равно 8.

115. *Ответ: см. рисунок* 36.

Заметим, что условие задачи не меняется при замене x на $-x$ и y на $-y$, а также при одновременной замене x на y и y на x. Поэтому искомый график имеет несколько осей симметрии: вместе с точкой (x, y) в него входят $(-x, y)$ (симметрия относительно оси Oy), $(x, -y)$ (симметрия относительно Ox) и (y, x) (симметрия относительно прямой $y = x$). Значит, достаточно рассмотреть случай $0 \leqslant y \leqslant x$. При таких ограничениях уравнение принимает вид $y + 2x = 3$. График представляет собой отрезок этой прямой. Отражая его относительно всех осей симметрии, получим восьмиугольник.

116. *Ответ: нет, не могло.*

Предположим, что первый из сказавших правду друзей имеет номер k. Тогда друзья с последующими номерами также правы. Значит, правду сказали всего $10 - (k - 1) = 11 - k$ друзей. Поскольку таких друзей не меньше 4, получаем $11 - k \geqslant 4$, то есть $k \leqslant 7$. В частности, седьмой друг прав, и значит, n делится на 7, 8, 9 и 10, то есть на НОК$(7, 8, 9, 10) = 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 5 = 2520$. Значит, задуманное число не может быть трёхзначным, противоречие.

117. *Ответ:* 1 *или* 2.

Пусть оба числа $m + n$ и $m^2 + n^2$ делятся на d. Тогда на d делится также число $(m - n)(m + n) = m^2 - n^2$. Значит, d будет делителем чисел $(m^2 + n^2) - (m^2 - n^2) = 2n^2$ и $(m^2 + n^2) + (m^2 - n^2) = 2m^2$. По условию у m и n нет общих делителей, так что d — делитель числа 2, то есть НОД(m, n) равен 1 или 2. Оба случая реализуются. Если числа m, n нечётные, то $m + n$ и $m^2 + n^2$ — чётные, так что НОД$(m + n, m^2 + n^2) = 2$. Если же m, n разной чётности, то НОД$(m + n, m^2 + n^2) = 1$.

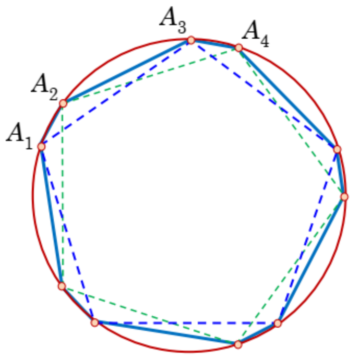


Рис. 37

118. *Ответ: а) да; б) не обязательно.*

Обозначим вершины многоугольника через A_i, $i = 1, \ldots, n$. Рассмотрим четыре вершины, идущие подряд, например, A_1, A_2, A_3 и A_4 (рис. 37). У треугольников $A_1A_2A_3$ и $A_2A_3A_4$ углы $A_1A_2A_3$ и $A_2A_3A_4$ совпадают по условию задачи, а углы $A_2A_1A_3$ и $A_2A_4A_3$ — как опирающиеся на одну дугу. Значит, равны треугольники $A_1A_2A_3$ и $A_2A_3A_4$ (по общей стороне и двум углам) и, следовательно, $A_1A_2 = A_3A_4$, то есть стороны равны через одну. Если число сторон нечётно, $n = 2017$, то $A_1A_2 = A_3A_4 = \ldots = A_{2017}A_1 = A_2A_3 = \ldots$, то есть у исходного многоугольника *все* стороны равны.

Если же n — чётно, то стороны могут и не совпадать между собой. Пример можно построить так: возьмём правильный многоугольник с $2018 / 2 = 1009$ сторонами. Повернем его на маленький угол и соединим старые и новые вершины. Получится многоугольник с 2018 сторонами, равными через одну, и равными углами.

119. *Ответ:* $2 + \sqrt{2}$ *и* $2 - \sqrt{2}$.

Используя тригонометрические формулы понижения степени, запишем исходное выражение в виде

$$\frac{1 - \cos 2x}{2} + \sin 2x + 3 \cdot \frac{1 + \cos 2x}{2} = 2 + \sin 2x + \cos 2x.$$

Сумму последних двух слагаемых можно переписать в виде

$$\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2x + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos 2x\right) = \sqrt{2}\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right).$$

Эта функция принимает значения от $-\sqrt{2}$ до $\sqrt{2}$, откуда и получаем ответ.

120. Сначала заметим, что для произвольных p, q, x, y справедливо неравенство $(px + qy)^2 \leqslant (p^2 + q^2)(x^2 + y^2)$ (скалярное произведение векторов не превосходит произведения их длин).

Используя равенство $abcd = 1$, запишем каждое слагаемое левой части в виде дроби, а затем воспользуемся записанным выше неравенством. Имеем

$$\begin{aligned} ab + cd + bc + da &= \frac{abcd}{cd} + \frac{abcd}{ab} + \frac{abcd}{da} + \frac{abcd}{bc} = \\ &= \left(\frac{1}{c} \cdot \frac{1}{d} + \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b}\right) + \left(\frac{1}{d} \cdot \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{c}\right) = \\ &\leqslant \sqrt{\frac{1}{c^2} + \frac{1}{a^2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{d^2} + \frac{1}{b^2}} + \sqrt{\frac{1}{c^2} + \frac{1}{a^2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{d^2} + \frac{1}{b^2}}. \end{aligned}$$

В правой части оба слагаемых одинаковы. Оценим их сумму с помощью неравенства о средних: $2\sqrt{xy} \leqslant x + y$, тогда

$$ab + bc + cd + da \leqslant 2\sqrt{\left(\frac{1}{c^2} + \frac{1}{a^2}\right)\left(\frac{1}{d^2} + \frac{1}{b^2}\right)} \leqslant \frac{1}{c^2} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{d^2} + \frac{1}{b^2},$$

что и требовалось доказать.

Комментарии. Требуемое неравенство можно получить сразу, используя неравенство Коши-Буняковского-Шварца для четырёх чисел:

$$ab + bc + cd + da = \frac{1}{c}\cdot\frac{1}{d} + \frac{1}{d}\cdot\frac{1}{a} + \frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b} + \frac{1}{b}\cdot\frac{1}{c} \leqslant$$
$$\leqslant \sqrt{\frac{1}{c^2} + \frac{1}{d^2} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{d^2} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}}.$$

Отсюда получаем требуемое неравенство. Знак равенства возможен только при условии $a = b = c = d = 1$.

121. *Ответ:* $p = 1$, $q < \frac{1}{4}$ *или* $p = -2$, $q = -1$.

По теореме Виета имеем $x_1 + x_2 = -p$, $x_1 \cdot x_2 = q$, $x_1 + x_2 + 2 = p^2$, $(x_1 + 1) \cdot (x_2 + 1) = pq$. Подставляя $x_1 + x_2$ и x_1x_2 из первой пары уравнений во вторую, получаем систему из двух уравнений

$$\begin{cases} -p + 2 = p^2, \\ q - p + 1 = pq. \end{cases}$$

Первое уравнение имеет корни $p = 1$ и $p = -2$.

Если $p = 1$, второе уравнение превращается в тождество, ему удовлетворяет любое q. Значит, достаточно потребовать, чтобы первое уравнение $x^2 + x + q = 0$ из условия задачи имело два корня. Для этого дискриминант $1 - 4q$ должен быть положительным, то есть $q < \frac{1}{4}$.

Если $p = -2$, то $q + 3 = -2q$, откуда $q = -1$, и тогда уравнение $x^2 - 2x - 1 = 0$ имеет два различных корня.

122. *Ответ: нет, все треугольники одинаковые.*

Предположим, что Петя разрезал треугольник ABC вдоль отрезка AP (рис. 38). Площади равных треугольников ABP и APC равны, а высота у них общая, поэтому равны и основания, $BP = PC$. Кроме того, эти треугольники имеют общую сторону AP, и значит, у них по две равные стороны. В силу равенства треугольников ABP и APC совпадают и третьи стороны, $AC = AB$. Следовательно, исходный треугольник ABC — равнобедренный.

Если Коля делал разрез по той же медиане AP, то у него получились такие же треугольники, как у Пети. Если по другой, например, BQ, аналогично получаем, что $AB = BC$, то есть исходный треугольник ABC — равносторонний, и все его половинки совпадают.

Комментарии. Возможны и другие решения, например, можно показать, что тупой угол APC не может совпадать ни с одним из углов треугольника ABP, так что условиям удовлетворяет только случай $AP \perp BC$.

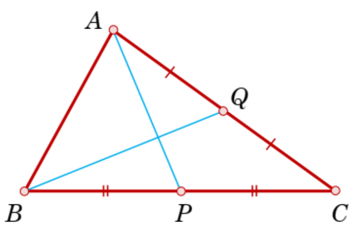


Рис. 38

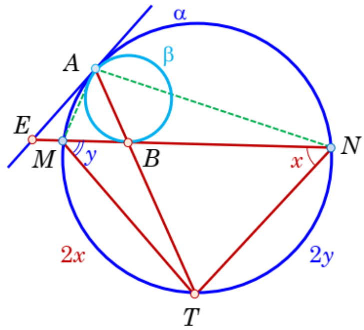


Рис. 39

123. Проведём через точку A общую касательную AE к окружностям, и пусть E — точка пересечения прямых MN и AE (рис. 39). Введём обозначения для углов: $\angle TNM = x$, $\angle TMN = y$ и $\angle MNA = z$.

Вписанные углы TAM и TNM опираются на одну и ту же дугу MT, поэтому $\angle TAM = \angle TNM = x$; аналогично $\angle TAN = \angle TMN = y$. По теореме о внешнем угле треугольника $\angle ABE = z + y$. Заметим, что угол $\angle MAE$ между касательной и хордой также равен z, поэтому $\angle EAB = z + x$.

Отрезки касательных EA и EB к окружности β равны, поэтому треугольник AEB — равнобедренный, и значит, $\angle EAB = \angle ABE$, то есть $z + x = z + y \Rightarrow x = y$. Значит, треугольник TMN — равнобедренный, и $MT = NT$.

В случае $AE \parallel MN$ прямая AB проходит через центры окружностей α и β, и так как радиус в точке касания перпендикулярен касательной, $AB \perp MN$ и AB делит MN пополам. Отсюда снова получается $MT = NT$.

124. *Ответ: за* $2n+1$ *ход.*

Оценка. Заметим, что после каждого хода конь меняет цвет клетки. Так как соседняя клетка имеет противоположный цвет, коню придется сделать нечётное число ходов, обозначим его через $2k+1$. Для определённости в качестве соседней возьмём клетку, расположенную выше исходной. При каждом ходе конь будет сдвигаться вправо или влево на n или $n+1$ клетку. Предположим, что вправо он сделал больше ходов (то есть $k+1$ или больше). Пусть L_1 — суммарный сдвиг вправо, очевидно, что $L_1 \geqslant n(k+1)$. Пусть L_2 — суммарный сдвиг влево; поскольку конь может влево сделать не более k ходов, $L_2 \leqslant (n+1)k$.

После всех ходов он должен остаться на той же вертикали, поэтому $L_1 = L_2$, и значит, $n(k+1) \leqslant (n+1)k$, откуда $n \leqslant k$.

Пример. Приведём пример с $k = n$. Сначала сдвигаемся за первые два хода на одну клетку по диагонали вправо и вниз. Повторив эту пару ходов n раз, окажемся на расстоянии n клеток по диагонали от исходной. Последним, $(2n+1)$-м ходом, становимся на соседнюю к исходной клетку.

125. *Ответ:* 2 *и* -24.

Используя тригонометрические формулы понижения степени, запишем исходное выражение в виде

$$\frac{1-\cos 2x}{2} + 5\sin 2x - 23\cdot\frac{1+\cos 2x}{2} = -11 + 5\sin 2x - 12\cos 2x.$$

Сумму последних двух слагаемых можно переписать в виде

$$\sqrt{5^2+12^2}\left(\frac{5}{13}\sin 2x - \frac{12}{13}\cos 2x\right) = 13\,\sin(2x-\alpha).$$

Здесь α — угол, такой, что $\cos\alpha = \frac{5}{13}$, $\sin\alpha = \frac{12}{13}$. Это выражение принимает значения от -13 до 13, откуда и получаем ответ.

126. *Ответ:* 0.

Так как графики проходят через точку $(1,\ 1)$, то $1 = 1+a+b$ и $1 = 1+c+d$, то есть $b = -a$ и $d = -c$. Следовательно, $a^3+b^3+c^3+d^3 = a^3-a^3+c^3-c^3 = 0$.

127. *Ответ:* 17.

Пусть всего будет k букетов, в каждом букете m белых и n красных роз. Тогда $mk = 323$ и $nk = 221$. Из этих равенств видно, что k является общим делителем чисел 323 и 221. По условию k должно быть максимально возможным, поэтому k — наибольший общий делитель, $k = \text{НОД}(323; 221)$. Отсюда $k = 17$, при этом в каждом букете будет 19 белых и 13 красных роз.

128. *а) Ответ:* $\frac{1}{2}n(n+1)$.

Можно считать, что исходные положительные числа расположены в порядке возрастания: $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$. Рассмотрим числа

$$\begin{array}{lllll} a_1, & a_2, & \ldots & a_{n-1}, & a_n\,, \\ a_1 + a_n, & a_2 + a_n, & \ldots & a_{n-1} + a_n\,, & \\ a_1 + a_{n-1} + a_n, & a_2 + a_{n-1} + a_n, & \ldots & & \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ a_1 + a_2 + \ldots + a_n\,. & & & & \end{array}$$

Очевидно, что здесь каждое число больше предыдущего, поэтому все выписанные числа различны, что соответствует требованиям задачи. Их количество равно $n+(n-1)+\ldots+1 = \frac{1}{2}n(n+1)$.

Осталось привести пример, в котором больше, чем $\frac{1}{2}n(n+1)$ различных сумм получить не удастся. Для этого подойдет набор из первых n натуральных чисел, из которых нельзя составить больше, чем $\frac{1}{2}n(n+1)$ различных сумм: эти суммы — все натуральные числа от 1 до $1 + 2 + \ldots + +n = \frac{1}{2}n(n+1)$.

б) Ответ: $2^n - 1$.

Числа $1,\ 10,\ 10^2,\ \ldots,\ 10^{n-1}$ дают пример n различных чисел, из которых можно образовать наибольшее количество различных сумм. Сумма любых k чисел этого набора — это число, в десятичной записи которого используются только 1 и 0. Каждая такая сумма может быть представлена в виде n-элементного упорядоченного набора из 0 и 1. Поскольку на каждом месте набора могут быть только две цифры, их общее количество равно $2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2 = 2^n$. Единственный невозможный набор, составленный из n нулей, необходимо исключить, поэтому общее количество допустимых наборов равно $2^n - 1$.

129. *Ответ:* $AK : BC = 1$.

(Рис. 40.) Пусть K' — точка, симметричная K относительно точки M. Тогда треугольники KMA и $K'MC$ равны, так как $AM = MC$, $KM = MK'$ и $\angle KMA = \angle K'MC$. Отсюда $\angle MK'C =$

$= \angle AKM = \angle MBC$, а также $CK' = AK$. Значит, треугольник BCK' — равнобедренный и $CK' = BC$, отсюда $AK = BC$.

Комментарии. Возможны и другие решения. Например, через точку C можно провести параллель к BM до пересечения с прямой AK в точке L. Тогда несложно доказать, что $BC = KL$. Поскольку KM — средняя линия в треугольнике ALC, получим $AK = KL = BC$.

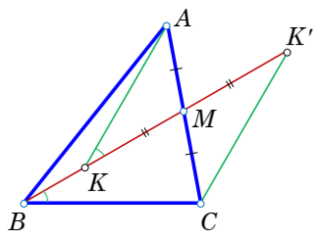


Рис. 40

130. *Ответ:* 32 *букета.*

Пусть p — количество цветов в каждом букете, q — число белых букетов, а r — число красных букетов. Тогда $pk = 323$ и $pr = 221$. Отсюда следует, что p — общий делитель чисел 323 и 221.В задаче требуется минимизировать число букетов $q + r$. Так как

$$q + r = \frac{323}{p} + \frac{221}{p} = \frac{544}{p}.$$

то число p нужно взять максимально возможным, то есть p — наибольший общий делитель 323 и 221, $p = 17$, при этом количество букетов будет равно $q + r = \frac{544}{17} = 32$, из них 19 белых и 13 красных.

131. Доказываемое тождество не меняется при замене x на $-x$, y на $-y$, а также при замене x на y. Поэтому его достаточно проверить при $x \geqslant y \geqslant 0$. В этому случае левая часть тождества равна $(x - y) + x + y = 2x$, а правая — $(x - y) + (x + y) = 2x$, то есть они совпадают. В силу указанной чётности и симметрии переменных равенство будет выполняться для *любых* x и y.

132. *Ответ: да, существует.*

Построим треугольник ABC, у которого тангенсы углов A и B равны 1 и 2 соответственно. Треугольник с этими углами легко нарисовать на клетчатой бумаге. Для этого возьмем точки A, B

и C с координатами (0; 0), (3; 0), (2; 2) соответственно, при этом $\operatorname{tg} A = 1$ и $\operatorname{tg} B = 2$. Тангенс угла $C = 180^\circ - A - B$ подсчитаем по формуле суммы тангенсов:

$$\operatorname{tg} C = -\operatorname{tg}(A+B) = -\frac{\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B}{1 - \operatorname{tg} A \cdot \operatorname{tg} B} = -\frac{1+2}{1-1\cdot 2} = 3,$$

то есть требуемый треугольник действительно существует.

Комментарии. Для тангенсов углов произвольного непрямоугольного треугольника ABC справедливо тождество: $\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C = \operatorname{tg} A \cdot \operatorname{tg} B \cdot \operatorname{tg} C$. Указанные в задаче значения тангенсов удовлетворяют этому равенству.

133. *Ответ:* 60° *или* 120°.

Построим на стороне AC как на диаметре окружность, которая пройдет через точки A' и C', так как $\angle AA'C = \angle AC'C = 90^\circ$. Из условия $AC = 2 \cdot A'C'$ следует, что отрезок $A'C'$ равен радиусу построенной окружности. Значит, дуга, стягиваемая хордой $A'C'$, составляет 60°. Отсюда угол $C'CA'$, опирающийся на эту дугу, равен 30°.

Далее, если угол B — острый, то $\angle B = 90^\circ - \angle C'CB = 60^\circ$ (рис. 41); если же угол B — тупой, то $\angle CBC' = 90^\circ - \angle BCC' = 60^\circ$ (рис. 42), и значит, $\angle B = 180^\circ - \angle CBC' = 120^\circ$.

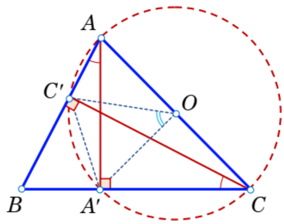


Рис. 41

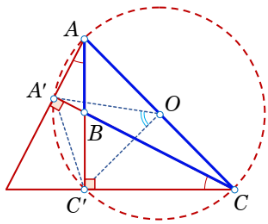


Рис. 42

134. Совпадает с задачей **126**.

135. *Ответ: три.*

Приведем пример трёх последовательных полупростых чисел:

$$33 = 3 \cdot 11, \qquad 34 = 2 \cdot 17, \qquad 35 = 5 \cdot 7.$$

Если бы существовали четыре последовательных полупростых числа, то одно из них делилось бы на 4, и значит, содержало бы два простых множителя: 2 и 2. Так как полупростое является произведением двух простых чисел, то оно может равняться только 4. В таком случае одно из чисел будет равно 5 или 3, которые не полупростые.

136. *а) Ответ: например,* $f(x) = |\sin(\pi x)|$.

б) Представим $x + 2019$ в виде $(x + 1) + 2018$ и применим первое неравенство из условия задачи, взяв в качестве x выражение $x + 1$. Тогда $f((x + 1) + 2018) \leqslant f(x + 1)$, и поскольку $f(x) \leqslant f(x + 2019)$, имеем $f(x) \leqslant f(x + 1)$. Подставив в это неравенство $x + 1$ вместо x, получим $f(x + 1) \leqslant f(x + 2)$, и значит, $f(x) \leqslant f(x + 1) \leqslant f(x + 2)$. Повторяя эти рассуждения, получим

$$f(x) \leqslant f(x+1) \leqslant \ldots \leqslant f(x+2018).$$

Но по условию $f(x + 2018) \leqslant f(x)$. Значит, в приведённой цепочке все неравенства обращаются в равенства, то есть $f(x) = f(x+1) = \ldots$ Другими словами, функция $f(x)$ имеет период 1.

137. Совпадает с задачей **133**.

138. *Ответ: можно.*

Трижды удвоим первую цифру числа $22\ldots22$ (20 *двоек*). Получим число $1622\ldots22$ (19 *двоек*). Теперь удвоим цифру 6 и получим искомое число $22\ldots22$ (21 *двойка*).

Замечание. Есть и другие способы.

139. *Ответ:* 8.

Те, кто в первой серии ответов сказали, что их числа больше 9 и 10, заведомо лжецы, потому что эти ответы несовместимы ни с каким из ответов второй серии. Значит, рыцарей не больше восьми. Пример, когда рыцарей ровно 8: у первых восьмерых в первой серии ответов задуманы числа 2, …, 9 соответственно, и они дают ответы «Моё число меньше 3», …, «Моё число меньше 10» во второй серии ответов. Каждый из двух лжецов задумал число 5, и они дают два последних ответа первой серии и два первых ответа второй серии.

140. *Ответ: не могло.*

Допустим, r — указанный в условии остаток. Тогда каждое из стоящих по кругу чисел больше r. Значит, неполное частное при каждом из делений с остатком больше 0, и потому каждое из чисел больше следующего за ним по часовой стрелке. Но такое невозможно, так как, начав с некоторого числа a и обойдя по часовой стрелке круг, мы обнаружим, что число, за которым по часовой стрелке следует a, меньше, чем a, а должно быть больше.

141. *Ответ:* 16.

Пример. Разобьём все 24 клетки на восемь троек, где в каждую тройку входят три клетки, примыкающие к одной вершине кубика. У любых двух клеток из одной тройки есть общая сторона. Поскольку отмеченных клеток столько же, сколько троек, в каждой тройке должна быть ровно одна отмеченная клетка. Разместим 16 детекторов так, чтобы в каждой тройке было два детектора. Если в данной тройке один из детекторов сработал, мы нашли отмеченную в этой тройке клетку, если не сработали оба детектора — отмечена клетка, где детектора нет.

Оценка. Пусть мы разместили меньше 16 детекторов. Тогда найдется тройка, где есть хотя бы две клетки без детекторов (назовем их «свободными») — отметим её клетки на развертке куба тёмными фоном (рис. 43). На этой же развёртке отметим 7 клеток буквой A так, как показано на рис. 43. Теперь заметим, что если отметить невидимыми чернилами семь клеток A и одну из свободных клеток, то детекторы не позволят нам узнать, какая именно из свободных клеток отмечена. Поэтому меньше, чем 16 детекторами, обойтись не удастся.

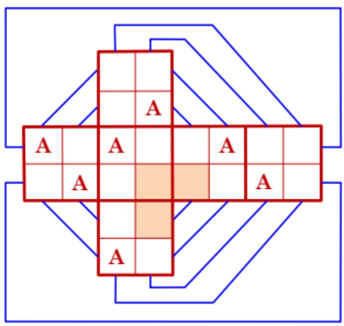


Рис. 43

142. Положим $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$. Нам требуется доказать, что $BP + BQ + PQ > 1 = \frac{1}{2}(a + b + c)$. Поскольку

$PQ = AC - AP - CQ = b - \frac{1}{2}(a+c)$, надо доказать, что

$$BP + BQ > \frac{a+b+c}{2} - b + \frac{a+c}{2} = a + c - \frac{b}{2}\,.$$

Обозначим через M и N середины сторон AB и BC соответственно, а через R и S такие точки на лучах AC и CA соответственно, что $AR = AB$, $CS = CB$. Заметим, что $BP = RM$ как медианы из вершин основания равнобедренного треугольника BAR. Аналогично, $BQ = SN$. Осталось заметить, что сумма $SN + RM$ диагоналей трапеции $RNMS$ больше суммы её оснований $SR+MN = (AR+CS-AC)+\frac{1}{2}AC = (c+a-b)+\frac{1}{2}b = a+c-\frac{1}{2}b$.

143. Пусть по кругу стоят (в указанном порядке) числа a, b, c, d. Тогда сумма четырёх произведений, умноженная на -1, равна

$$-a(b+d)-b(a+c)-c(b+d)-d(a+c) = -2(a+c)(b+d) = 2(a+c)^2,$$

что и требовалось доказать. Последнее равенство здесь вытекает из того, что по условию $a + c = -(b + d)$.

144. *Ответ: можно.*

Разделим таблицу на четыре квадрата 5×5 и в каждом покрасим чёрным 8 клеток, примыкающих по стороне или углу к его центральной клетке. К каждой чёрной клетке будет примыкать по две белых и две чёрных, и нетрудно проверить, что у каждой белой клетки примыкающих к ней чёрных и белых — не поровну.

145. Первое решение. Достроим треугольник MCN до параллелограмма $NCML$ (рис. 44). В треугольнике AML имеем: $LM = NC = BN = AM$, $\angle AML = \angle BCM = 60°$. Следовательно, треугольник AML — равносторонний. Отсюда $AL = NC$ и $\angle ALK = \angle ALM + \angle NLM = 60° + 60° = 120° = \angle KNC$. Кроме того, отрезок LM параллелен и равен отрезку BN, так что $BNML$ — параллелограмм, а K — точка пересечения его диагоналей, откуда $LK = KN$. Значит, треугольники ALK и CNK равны по двум сторонам и углу между ними, откуда $AK = KC$.

Второе решение. Достроим треугольник AMB до параллелограмма $AMTB$; тогда K — точка пересечения его диагоналей. Из параллельности имеем $\angle CBT = \angle BCA = 60°$; кроме того, $BT = AM = \frac{1}{2}BC$. Значит, треугольник BTC — прямоугольный с прямым углом T, то есть $TC \perp BT$. Поскольку $BT \parallel AC$, треугольник ACT тоже прямоугольный, и его медиана CK равна половине гипотенузы, то есть равна AK.

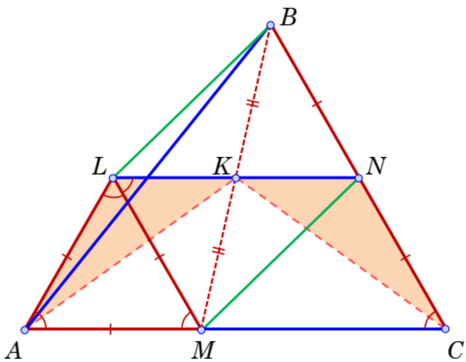


Рис. 44

146. Рассмотрим всевозможные наборы из 19 переключателей. Рассмотрим также любую лампочку. Разобьём все переключатели на 35 пар таким образом, чтобы в каждой паре ровно один переключатель был соединён с выбранной лампочкой. Заметим, что тогда все наборы по 19 переключателей тоже разбились на пары, получающиеся заменой всех переключателей на парные. Так как число 19 нечётно, в каждой паре наборов ровно один включает выбранную лампочку.

Составим таблицу, в которой строки соответствуют лампочкам, а столбцы — наборам из 19 переключателей, и отметим в каждой строке единицами наборы, включающие соответствующую лампочку. Из доказанного выше следует, что единицы в таблице занимают ровно половину клеточек. Значит, найдется столбец, в котором единицы занимают не меньше половины клеточек, то есть найдётся набор, который включает не менее половины всех лампочек. Следовательно, какой-то набор из 19 переключателей зажжёт не менее 8 лампочек.

147. *Ответ:* $\frac{1}{40}$.

Если Петя выберет числа $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{20}$, $\frac{1}{20}$, ..., $\frac{1}{20}$, то как бы ни расставлял эти числа Вася соседними числами окажутся $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{20}$. Значит, одно из произведений будет равно $\frac{1}{40}$, а остальные будут не больше его. Тогда на доске окажется $\frac{1}{40}$.

Покажем, как Вася может для любых чисел получить на доске число, не большее $\frac{1}{40}$. Перенумеруем числа в порядке убывания: $x_1 \geqslant x_2 \geqslant \ldots \geqslant x_{11}$. Расставим их в ряд следующим образом:

$$x_1,\ x_{11},\ x_2,\ x_{10},\ x_3,\ x_9,\ x_4,\ x_8,\ x_5,\ x_7,\ x_6\,.$$

Тогда произведениями соседних чисел будут: $x_1x_{11} \geqslant x_{11}x_2$, $x_2x_{10} \geqslant x_{10}x_3$, $x_3x_9 \geqslant x_9x_4$, $x_4x_8 \geqslant x_8x_5$, $x_5x_7 \geqslant x_7x_6$. Покажем, что они будут не больше $\frac{1}{40}$. Для этого будем пользоваться двумя соображениями: среднее арифметическое нескольких чисел не меньше наименьшего из них, и $x(1-x) \leqslant \frac{1}{4}$. Достаточно оценить x_1x_{11}, x_2x_{10}, x_3x_9, x_4x_8 и x_5x_7:

$$\begin{aligned}
x_1x_{11} &\leqslant x_1 \cdot \frac{x_2+x_3+\ldots+x_{10}}{10} = \frac{x_1(1-x_1)}{10} \leqslant \frac{1}{40}\,,\\
x_2x_{10} &\leqslant \frac{x_1+x_2}{2} \cdot \frac{x_3+x_4+\ldots+x_{10}}{8} \leqslant\\
&\leqslant \frac{(x_1+x_2)(1-(x_1+x_2))}{16} \leqslant \frac{1}{64} < \frac{1}{40}\,,\\
x_3x_9 &\leqslant \frac{x_1+x_2+x_3}{3} \cdot \frac{x_4+x_5+\ldots+x_9}{6} \leqslant\\
&\leqslant \frac{(x_1+x_2+x_3)(1-(x_1+x_2+x_3))}{18} \leqslant \frac{1}{72} < \frac{1}{40}\,,\\
x_4x_8 &\leqslant \frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4} \cdot \frac{x_5+x_6+\ldots+x_8}{4} \leqslant\\
&\leqslant \frac{(x_1+x_2+x_3+x_4)(1-(x_1+x_2+x_3+x_4))}{16} \leqslant \frac{1}{64} < \frac{1}{40}\,,\\
x_5x_7 &\leqslant \frac{x_1+x_2+\ldots+x_5}{5} \cdot \frac{x_6+x_7}{2} \leqslant\\
&\leqslant \frac{(x_1+x_2+\ldots+x_5)(1-(x_1+x_2+\ldots+x_5))}{10} \leqslant \frac{1}{40}\,.
\end{aligned}$$

148. *Ответ:* 6.

Первое решение. Пусть $f(x) = x^2 + ax + b$, $g(x) = x^2 + cx + d$. Тогда условия задачи запишутся в виде

$$1+a+b = 4+2c+d, \qquad 4+2a+b = 1+c+d.$$

Вычитая из первого равенства второе, получаем $-3-a = 3+c$, то есть $a+c = -6$. Но тогда по теореме Виета $-a$ — это сумма корней первого трёхчлена, а $-c$ — сумма корней второго трёхчлена, откуда и следует требуемое.

Второе решение. Рассмотрим вспомогательный квадратный трёхчлен $h(x) = g(3-x)$ (он тоже приведённый!). Тогда $h(x) - f(x)$ — линейный многочлен с корнями 1 и 2; значит, он тождественно нулевой, то есть $f(x) = g(3-x)$. Поэтому если x_0 является корнем $f(x)$, то $3 - x_0$ является корнем $g(x)$, и сумма этих двух корней равна 3. Аналогично, сумма двух остальных корней этих многочленов также равна 3.

149. *Ответ: 8 рыцарей.*

Докажем, что ни один из рыцарей не мог сказать ни одной из фраз «Моё число больше 9» и «Моё число больше 10». В самом деле, если бы это было возможно, то задуманное рыцарем целое число было бы не меньше 10. Но тогда он не мог сказать ни одной из фраз «Моё число меньше 1», «Моё число меньше 2», ... , «Моё число меньше 10». Значит, рыцарей было не больше восьми.

Покажем, что рыцарей могло быть 8. Пусть первый рыцарь загадал число 2, второй — 3, ... , восьмой — 9, а лжецы загадали числа 5 и 6. Тогда k-ый рыцарь мог сказать фразы «Моё число больше k» и «Моё число меньше $k+2$», а лжецы могли сказать фразы: один — «Моё число больше 9» и «Моё число меньше 1», а другой — «Моё число больше 10» и «Моё число меньше 2».

Комментарии. Приведённый пример перестаёт быть верным, если лжецы задумывают числа вне отрезка $[1; 10]$, так как тогда некоторые их высказывания становятся верными.

150. Пронумеруем числа по часовой стрелке $a_1, a_2, \ldots, a_{100}$ так, чтобы число a_{100} было наименьшим. Тогда остаток от деления a_{100} на a_1 будет равен $a = a_{100}$ (ибо $a_1 > a_{100}$), а остаток b от деления a_{99} на a_{100} будет меньше, чем a_{100}. Значит, $a > b$ — единственные остатки, полученные Васей.

Предположим, что $a_i < a_{i+1}$ при некотором $i < 100$. Тогда остаток от деления a_i на a_{i+1} равен a_i, что больше, чем a (и тем более — чем b). Это невозможно. Значит, $a_1 > a_2 > \ldots > a_{100}$.

Итак, Петя при делении a_{i+1} на a_i (при любом $i = 1, 2, \ldots, 99$) будет получать в остатке a_{i+1}, поскольку $a_{i+1} < a_i$. При делении же a_1 на a_{100} он получит остаток c, меньший a_{100}. Значит, все его остатки $c < a_{100} < a_{99} < \ldots < a_2$ различны.

151. Обозначим через Γ' окружность, описанную около треугольника BHC (рис. 45). На касательной к Γ' в точке H отметим точку X, лежащую внутри угла BCH. Тогда $\angle BHX = \angle BCH = \angle B_1C_1H$ (последнее равенство следует из того, что $BC \parallel B_1C_1$). Значит, окружность ω касается прямой HX и окружности Γ' в точке H.

Обозначим через H' точку, симметричную H относительно прямой BC (как известно, эта точка лежит на окружности Γ). Итак, при симметрии относительно BC окружность Γ' переходит в окружность Γ, а окружность ω — в себя, поскольку центр ω лежит на прямой BC. Поскольку ω касается Γ', она касается и Γ, что и требовалось доказать.

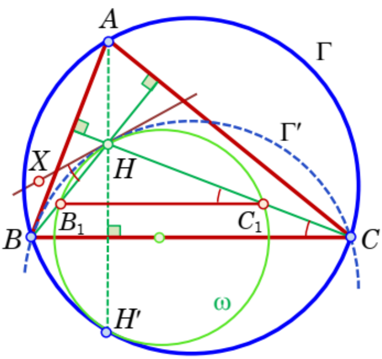


Рис. 45

152. *Ответ:* $3 \cdot 1000^2 - 2000 = 2\,998\,000$ *клеток.*

Рассмотрим произвольную закраску, удовлетворяющую условию. Разобьём все клетки поверхности на «каёмки» так, как показано на рисунке 46 — по 500 каёмок вокруг каждой из восьми вершин (одна из каёмок отмечена серым). Тогда в k-й каёмке, считая от вершины, будет $S_k = 6k - 3$ клеток. Так как никакие две закрашенные клетки не могут быть соседними, в этой каёмке будет не более $\left[\frac{S_k}{2}\right] = 3k - 2 = \frac{S_k - 1}{2}$ закрашенных клеток. Просуммировав по всем 4000 каёмкам и учтя, что их общая площадь равна $6 \cdot 1000^2$, получаем, что общее количество закрашенных клеток не превосходит $\frac{6 \cdot 1000^2 - 4000}{2} = 3 \cdot 10^6 - 2000$.

Осталось привести пример, показывающий, что столько клеток закрасить можно. Назовём две противоположные грани куба *верхней* и *нижней*, а остальные — *боковыми*. На каждой боковой грани половину клеток можно отметить шахматным образом. После этого на верхней и нижней гранях можно будет также окрасить половину клеток во всех строках, кроме двух крайних, оставив их пустыми (см. рисунок 47, где видны две боковых и верхняя грани). Нетрудно видеть, что при такой закраске в каждой каёмке будет наибольшее возможное количество закрашенных клеток. (Вместо проверки каждой каёмки можно заметить, что вся поверхность разбивается на полоски 1×100, четыре из которых — пустые, а в каждой из остальных закрашена ровно половина клеток.)

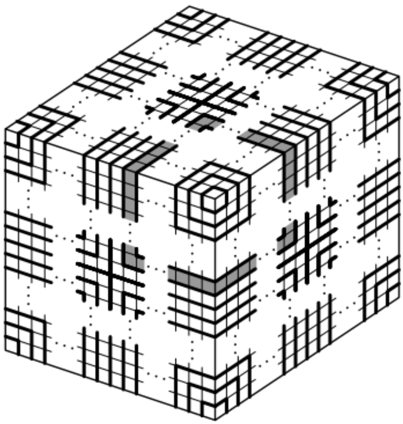


Рис. 46

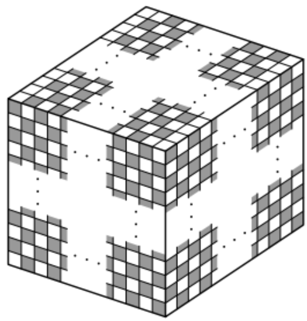


Рис. 47

Замечание. Существуют и другие оптимальные примеры. В частности, в приведённом примере закраску верхней грани можно изменить так: разобьём верхнюю грань диагоналями на 4 треугольника, и в каждом из них закрасим клетки шахматным образом (так, чтобы закраска этого треугольника согласовалась с закраской соседней боковой грани.

153. Пусть n, $n+1$, $n+2$, $n+3$ — данные числа. Сумма трёх наименьших из них равна $3n+3 = 3(n+1)$, а сумма трёх самых больших чисел равна $3(n+2)$. Но хотя бы одно из чисел $n+1$ и $n+2$ — чётно, то есть равно произведению чисел 2 и k, где $k > 3$. Значит, данная сумма и представима в виде произведения трёх различных натуральных чисел: 2, 3 и k.

154. *Ответ: да, может.*

На рисунке 48 показано, как можно получить три пары прямоугольников так, чтобы для каждой пары все точки A, B, C, D, E, F, G, H были вершинами ровно по разу. Одинаковыми точками отмечены вершины одного из прямоугольников пары.

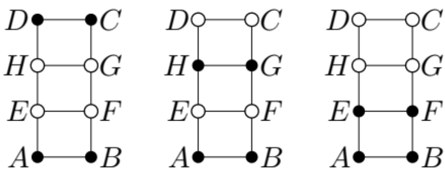


Рис. 48

Замечание. Существует много других примеров; один из них указан на рисунке 49.

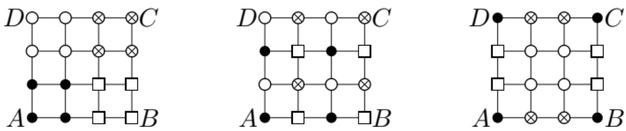


Рис. 49

155. Первое решение. Обозначим $\angle CBM = \alpha$. Так как BM — внешняя биссектриса угла ABC, то $\angle ABM = 180^\circ - \alpha$ и $\alpha < 90^\circ$ (рис. 50). Опустим из точки D перпендикуляр DH на прямую BC. Так как в треугольнике BCD углы при вершинах B и C острые, точка H лежит на отрезке BC. Поскольку DCH — прямоугольный треугольник с углом 60°, имеем $CH = \frac{1}{2}CD = AB$.

Треугольник BHD — прямоугольный, HM — его медиана, проведённая к гипотенузе, поэтому $HM = \frac{1}{2}BD = BM$. Следовательно, $\angle MHB = \angle HBM = \alpha$, откуда мы получаем, что $\angle MHC = 180^\circ - \alpha = \angle ABM$. Поскольку также $AB = CH$ и $BM = MH$, треугольники ABM и CHM равны. Таким образом, $AM = MC$, что и требовалось доказать.

Второе решение. Обозначим через A' точку, симметричную A относительно прямой BD (см. рис. 51). Поскольку BD — внешняя биссектриса угла ABC, точка A' лежит на продолжении отрезка CB за точку B. Пусть K — середина отрезка BC. Тогда MK — средняя линия треугольника BCD, поэтому $MK \parallel CD$ и $\angle MKB = \angle BCD = 60^\circ$, а также $MK = \frac{1}{2}CD = AB = A'B$. На отрезке $A'K$ отметим точку T так, что $MK = KT$. Тогда из того, что $TK = MK = A'B$, следует $A'T = BK = KC$. Заметим, что треугольник MKT равносторонний, так как $MK = KT$ и $\angle MKT = 60^\circ$. Тогда $MT = MK$ и $\angle MTA' = 120^\circ = \angle MKC$, а, как было доказано ранее, $A'T = CK$. Значит, треугольники MKC и MTA' равны, поэтому $CM = A'M = AM$.

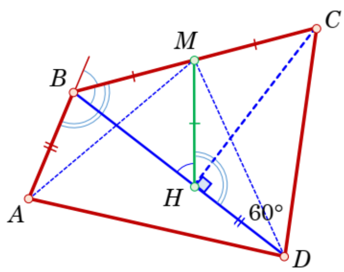


Рис. 50

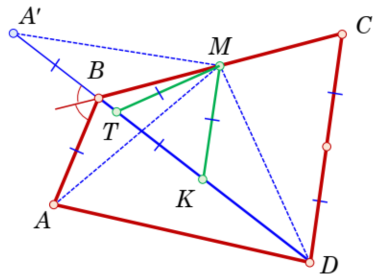


Рис. 51

Замечание. Вместо того, чтобы отмечать точку T, можно записать теорему косинусов для треугольников $A'KM$ и MCK. В них углы при вершине K равны 60° и 120° соответственно. Пусть $MK = A'B = a$ и $BK = KC = b$, тогда

$$A'M = \sqrt{(a+b)^2 + a^2 - a(a+b)} = \sqrt{a^2 + ab + b^2} = CM.$$

156. *Ответ:* $n^2 - n$.

Сразу же заметим, что раскраска всех вершин в один цвет хорошей не является; такие раскраски в дальнейшем решении не рассматриваются.

Назовём сторону многоугольника *разноцветной*, если её концы окрашены в разные цвета (то есть расширим определение разноцветности на стороны). Назовём раскраску вершин *упорядоченной*, если все чёрные вершины на границе многоугольника идут подряд (иначе говоря, у многоугольника есть ровно две разноцветных стороны).

Лемма. *Раскраска вершин n-угольника (при $n \geqslant 3$) является хорошей тогда и только тогда, когда она упорядочена.*

Доказательство. Индукция по n. При $n = 3$ доказывать нечего (напомним, что мы не рассматриваем одноцветные раскраски). Докажем теперь переход индукции. Пусть утверждение доказано для всех m таких, что $3 \leqslant m < n$, где $n \geqslant 4$.

Предположим, что раскраска является хорошей. Разобьём многоугольник на треугольники непересекающимися разноцветными диагоналями; рассмотрим одну из этих диагоналей AB. Она делит n-угольник на два многоугольника P_1 и P_2 с меньшим количеством сторон, причём каждый из них раскрашен хорошо — а значит, по предположению индукции, и упорядоченно. Пусть A — чёрный конец диагонали, а B — белый. Все чёрные вершины в P_1 — это несколько последовательных вершин, начиная с A (но не включая B). Аналогично с чёрными вершинами в P_2. Но тогда эти два блока чёрных вершин в объединении дают один связный блок в исходном многоугольнике, то есть раскраска вершин n-угольника также является упорядоченной.

Пусть теперь раскраска является упорядоченной. Нетрудно видеть, что тогда в многоугольнике есть разноцветная диагональ. Она делит многоугольник на два меньших, при этом, очевидно, каждый из них также раскрашен упорядоченно. По предположению индукции, каждый из них раскрашен хорошо, а значит, и исходный n-угольник — тоже.

Ввиду леммы, осталось лишь посчитать число упорядоченных раскрасок n-угольника. Для каждого возможного количества чёрных вершин (от 1 до $n - 1$) можно n способами выбрать расположение их блока среди всех n вершин, то есть число способов равно $n(n - 1)$.

157. *Ответ:* $\frac{1}{396}$.

Если Петя выберет числа $\frac{1}{2}, \frac{1}{198}, \frac{1}{198}, \ldots, \frac{1}{198}$, то как бы ни разбивал эти числа Вася, в паре с числом $\frac{1}{2}$ будет число $\frac{1}{198}$. Их произведение будет равно $\frac{1}{396}$, а остальные будут не больше его. Тогда на доске окажется число $\frac{1}{396}$.

Покажем, как Васе для любых Петиных чисел получить на доске число, не большее $\frac{1}{396}$. Перенумеруем числа в порядке невозрастания: $x_1 \geqslant x_2 \geqslant \ldots \geqslant x_{100}$. Разобьём числа на пары следующим образом: x_k в паре с x_{101-k}. Тогда произведениями чисел в парах будут

$$x_1x_{100},\ x_2x_{99},\ x_3x_{98},\ \ldots,\ x_kx_{101-k},\ \ldots,\ x_{50}x_{51}\,.$$

Покажем, что $a = x_kx_{101-k} \leqslant \frac{1}{396}$ при $k \leqslant 49$. Действительно, из неравенств $x_k \leqslant x_{k-1} \leqslant \ldots \leqslant x_2 \leqslant x_1$ следует, что $kx_k \leqslant x_1 + x_2 + \ldots + x_k$, поэтому

$$ka = kx_k \cdot x_{101-k} \leqslant (x_1 + x_2 + \ldots + x_k)\, x_{101-k}\,.$$

Аналогично из неравенств $x_{101-k} \leqslant x_{100-k} \leqslant x_{99-k} \leqslant \ldots \leqslant x_{k+1}$ следует, что

$$\begin{aligned}(101-2k)x_{101-k} &\leqslant x_{101-k} + x_{100-k} + \ldots + x_{k+1} \leqslant \\ &\leqslant x_{k+1} + x_{k+2} + \ldots + x_{100} = \\ &= 1 - x_1 - x_2 - \ldots - x_k\,.\end{aligned}$$

Поэтому

$$k(101-2k)a \leqslant (x_1+x_2+\ldots+x_k)(1-x_1-x_2-\ldots-x_k) = x(1-x),$$

где $x = x_1 + x_2 + \ldots + x_k$. Поскольку по неравенству о средних для двух чисел $x(1-x) \leqslant \left(\frac{x+(1-x)}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$, получаем неравенство $x_kx_{101-k} = a \leqslant \frac{1}{4k(101-2k)}$. Осталось доказать, что $k(101-2k) \geqslant 99$ при $k \leqslant 49$. Это неравенство можно переписать в виде

$$(k-1)(99-2k) \geqslant 0,$$

и обе скобки в последней формуле неотрицательны.

Осталось доказать, что $x_{50}x_{51} \leqslant \frac{1}{396}$. Поскольку $x_{50} \leqslant x_{49} \leqslant \leqslant x_{48} \leqslant \ldots \leqslant x_2 \leqslant x_1$, имеем

$$x_{50} \leqslant \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{50}}{50} \leqslant \frac{1}{50}$$

и, аналогично,

$$x_{51} \leqslant \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{51}}{51} \leqslant \frac{1}{51}\,.$$

Следовательно, $x_{50}x_{51} \leqslant \frac{1}{50\cdot 51} < \frac{1}{396}$.

158. *Ответ:* 9 *рыцарей.*

Оценка. Заметим, что ни один из рыцарей не мог сказать фразу «Моё число больше 10», иначе задуманное им число было бы в самом деле больше 10. Но тогда он не мог бы сказать ни одну из фраз «Моё число меньше 1», «Моё число меньше 2», …, «Моё число меньше 10». Значит, имеется хотя бы один лжец, а рыцарей не более 9.

Пример. Покажем, что рыцарей могло быть 9. Пусть первый человек загадал число 1,5, второй — 2,5, …, девятый — 9,5, а десятый человек загадал число 5. Тогда при $k = 1, 2, \ldots, 9$ k-ый человек мог сказать правдивые фразы «Моё число больше k» и «Моё число меньше $k+1$» (то есть он рыцарь), а десятый человек — лжец, говорящий фразы «Моё число больше 10» и «Моё число меньше 1».

Комментарии. Приведённый пример перестаёт быть верным, если десятый человек задумывает число вне интервала (0; 10), так как тогда ровно один из его ответов правдив.

159. Обозначим через a, b, c и d длины сторон четырёхугольника, и пусть $N = 10^{100}$.

Первое решение. Пусть d — наибольшая сторона. Согласно условию, $a + b + c$ делится на d, то есть $a + b + c = kd$ для некоторого натурального k. Ясно, что $a + b + c > d$ (длина отрезка меньше длины ломаной с теми же концами), поэтому $k > 1$. Кроме того, так как $a \leqslant d$, $b \leqslant d$ и $c \leqslant d$, имеем $a + b + c \leqslant 3d$, то есть $k \leqslant 3$.

Случай $k = 3$ возможен только при $a = b = c = d$. В этом случае наш четырёхугольник — ромб.

Иначе $1 < k < 3$, откуда $k = 2$. Но тогда имеем $N = a + b + c + d = 2d + d = 3d$. Таким образом получаем противоречие, поскольку N не делится на 3.

Второе решение. Из условия следует, что каждое из чисел a, b, c, d является делителем числа $N = a + b + c + d$. Значит, $a = N/t_a$, $b = N/t_b$, $c = N/t_c$, $d = N/t_d$ для некоторых натуральных $t_a > 1$, $t_b > 1$, $t_c > 1$, $t_d > 1$.

Заметим, что $t_a \neq 2$, иначе длина стороны a равна полупериметру, что невозможно, поскольку $a < b + c + d$.

Поскольку N не делится на 3, имеем $t_a \neq 3$, значит $t_a \geqslant 4$ и $a \leqslant N/4$. Аналогично, $b \leqslant N/4$, $c \leqslant N/4$, $d \leqslant N/4$. Тогда равенство $N = a + b + c + d$ возможно только в случае $a = b = c = d = N/4$, то есть в случае, когда наш четырёхугольник — ромб.

160. *Ответ:* 2016.

Оценка. Докажем, что в первой строке таблицы, в которой числа расставлены по правилам, не менее трёх рациональных чисел (и, соответственно, не более 2016 иррациональных чисел). Каждое из чисел, встречающихся в таблице, записано ровно в двух клетках, одна из которых находится в верхней строке, а другая — в нижней. Рассмотрим некоторый столбец, пусть в его верхней клетке стоит число a_1, а в нижней — a_2 (далее коротко обозначаем такой столбец (a_1, a_2)). Покрасим столбец (a_1, a_2). Найдём столбец, у которого число a_2 находится в верхней клетке, и покрасим его. Если этот столбец — (a_2, a_1), то завершим процесс. Иначе, если этот столбец (a_2, a_3), где $a_3 \neq a_1$, продолжим: покрасим столбец, у которого число a_3 находится в верхней клетке, и так далее — пока не дойдём до столбца, у которого в нижней клетке находится a_1. (Это обязательно произойдёт, поскольку числа, равные a_2, a_3, $\ldots$, красятся парами). По окончании процесса получим множество покрашенных столбцов (a_1, a_2), (a_2, a_3), $\ldots$, (a_k, a_1), которое назовём *циклом* длины k. Если остались ещё непокрашенные столбцы выделим ещё один цикл, и так далее. В конечном итоге множество всех столбцов таблицы разобьётся на непересекающиеся циклы. Так как сумма длин всех циклов равна 2019, найдётся цикл нечётной длины.

Рассмотрим этот цикл: (a_1, a_2), (a_2, a_3), $\ldots$, (a_{2t+1}, a_1), где $t \geqslant 1$. По условию $a_1 + a_2 = b_1$, $a_2 + a_3 = b_2$, $\ldots$, $a_{2t+1} + a_1 = b_{2t+1}$, где все b_i — рациональные числа. Тогда $2a_1 = (a_1+a_2)-(a_2+a_3)+(a_3+a_4)-\ldots-(a_{2t}+a_{2t+1})+(a_{2t+1}+a_1) = b_1-b_2+b_3-\ldots-b_{2t}+b_{2t+1}$ — рациональное число, поэтому a_1 рационально. Аналогично, все числа a_1, a_2, $\ldots$, a_{2t+1} рациональны, и их не менее $2t + 1 \geqslant 3$.

Пример. Приведём пример таблицы, заполненной по правилам, в верхней строке которой 2016 иррациональных чисел:

1	2	3	$1+\sqrt{2}$	$1-\sqrt{2}$	$2+\sqrt{2}$	$2-\sqrt{2}$	$\ldots$	$1008+\sqrt{2}$	$1008-\sqrt{2}$
2	3	1	$1-\sqrt{2}$	$1+\sqrt{2}$	$2-\sqrt{2}$	$2+\sqrt{2}$	$\ldots$	$1008-\sqrt{2}$	$1008+\sqrt{2}$

Комментарии. Заметим, что условие нечётности длины строки таблицы существенно. Для чётной длины строки нетрудно построить примеры таблиц, в которых все числа иррациональны.

Условие того, что число не стоит под самим собой также важно, иначе мог бы появиться цикл длины 1, и ответ в задаче стал бы равен 2018.

161. Пусть $n \geqslant 2018$. Заметим, что $P_n(a) = P_n(-a)$ при всех a. Значит, поскольку $P_n(x)$ имеет ненулевой корень, он имеет и отрицательный корень, и значит, наименьший корень $a_{n+1} < 0$.

Далее, поскольку $P_{n+1} = x^2 P_n(x) + a_{n+1}$, имеем

$$P_{n+1}(a_{n+1}) = a_{n+1}^2 P_n(a_{n+1}) + a_{n+1} = 0 + a_{n+1} < 0. \qquad (*)$$

Так как степень многочлена $P_{n+1}(x)$ чётна, а старший коэффициент положителен, при достаточно больших по модулю отрицательных x он принимает положительные значения. Теперь из $(*)$ следует, что у этого многочлена есть корень на интервале $(-\infty; a_{n+1})$. Значит, и $a_{n+2} < a_{n+1}$.

Итак, мы получили, что $a_{n+2} < a_{n+1}$ при всех $n \geqslant 2018$. Это означает, что последовательность $(a_{2019}, a_{2020}, a_{2021}, \ldots)$ — убывающая.

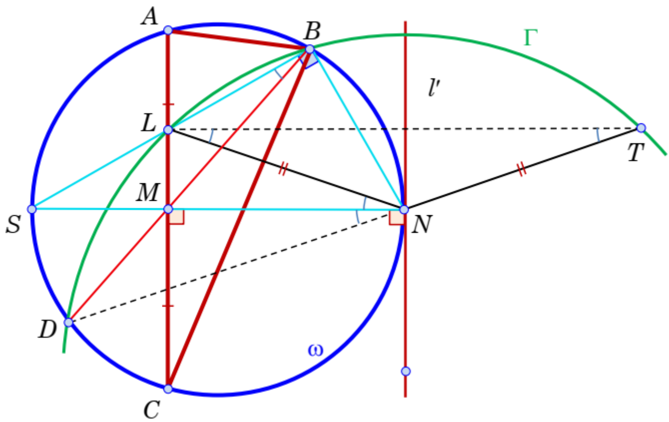


Рис. 52

162. Пусть M — середина отрезка AC, S — вторая точка пересечения прямой BL с окружностью ω, N — середина дуги ABC (рис. 52). Тогда S — середина меньшей дуги AC окружности ω, а точки M, S, N лежат на серединном перпендикуляре к отрезку AC. Прямая BN — внешняя биссектриса угла ABC, поэтому $BN \perp BL$. Тогда $\angle LBN + \angle LMN = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$, и значит, четырёхугольник $BLMN$ — вписанный. Обозначим $\angle MBL = \alpha$, тогда $\angle MNL = \alpha$. Поскольку $BNDS$ — тоже вписанный четырёхугольник, $\angle SND = \angle SBD = \alpha$.

На продолжении отрезка DN за точку N отметим точку T так, что $LN = NT$. Тогда $\angle LNT = 180^\circ - \angle LNM - \angle SND = 180^\circ - 2\alpha$, откуда следует, что $\angle LTN = \angle TLN = \alpha$. Значит, $\angle LTD = \alpha = \angle LBD$, поэтому точка T лежит на окружности Γ, описанной около треугольника BDL. Пусть l' — касательная в точке N к окружности ω. Поскольку SN — диаметр ω, то $l' \perp SN$ и $l' \parallel AC$. Как мы знаем, SN является внешней биссектрисой угла LNT, поэтому l' — биссектриса угла LNT. Так как $TL = TN$, получаем, что l' является серединным перпендикуляром к отрезку TL, а потому проходит через центр окружности Γ. Таким образом, прямые l и l' совпадают, и прямая l касается ω.

163. Совпадает с задачей **153**.

164. Докажем, что $x_n > x_{n+1}$. Пусть $A = \sqrt[2^{n+1}]{a}$ и $B = \sqrt[2^{n+1}]{b}$. Легко видеть, что $B > A > 1$, отсюда $\frac{1}{2}(A+B) > 1$. Тогда имеем

$$x_{n+1} = 2^{n+1}(B - A) > 0,$$

$$x_n = 2^n(B^2 - A^2) = 2^{n+1}(B - A)\frac{A+B}{2} = x_{n+1} \cdot \frac{A+B}{2} > x_{n+1},$$

что и требовалось доказать.

165. Пусть O — центр окружности Ω; иначе говоря, O — середина диаметра BB'. Обозначим через H' и P проекции точек B' и O соответственно на прямую AC (рис. 53). Так как O лежит на серединном перпендикуляре к MN, получаем, что P — середина MN. Поскольку O — середина BB', P является серединой HH'. Получаем, что H и H' симметричны относительно середины MN, откуда $HM = H'N$ и $H'M = HN$. Имеем $AH' = AM + H'M = HM + H'M = H'N + HN = H'N + CN = CH'$. Таким образом, $B'H'$ — серединный перпендикуляр к отрезку AC, следовательно, $AB' = CB'$, что и требовалось доказать.

166. Совпадает с задачей **156**.

167. Среди чисел a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, $\ldots$ выберем то, которое даёт *наименьший* остаток при делении на k. Пусть это число a_m, и пусть оно даёт остаток r при делении на k. Если $r = 0$, то a_m — нужный нам член последовательности. Предположим теперь, что $0 < r < k$.

Поскольку $m \geqslant k$, имеем $m^2 + k \leqslant m^2 + m < m^2 + 2m + 1 = (m+1)^2$, поэтому $\left[\sqrt{m^2+1}\right] = \left[\sqrt{m^2+2}\right] = \ldots = \left[\sqrt{m^2+k}\right] = m$. Отсюда $a_{m^2+1} = a_{m^2} + a_m$, $a_{m^2+2} = a_{m^2+1} + a_m$, $\ldots$, $a_{m^2+k} = a_{m^2+k-1} + a_m$, то есть $a_{m^2+t} = a_{m^2} + ta_m$ для $t = 1, 2, \ldots, k$.

Пусть a_{m^2} даёт остаток R при делении на k, тогда a_{m^2+t} даёт при делении на k такой же остаток, как и число $R + tr$. В ряду чисел R, $R + r$, $R + 2r$, $\ldots$, $R + kr$ найдём первое число, не меньшее k (такое число найдётся, так как $R < k$, а $R + kr \geqslant R + k \geqslant k$). Пусть это число $R + sr$. Тогда $R + s(r-1) < k \leqslant R + sr$, откуда $0 \leqslant (R + sr) - k < r$, поэтому у числа $R + sr$, а значит, и у числа a_{m^2+s}, остаток при делении на k строго меньше r, что противоречит нашему выбору.

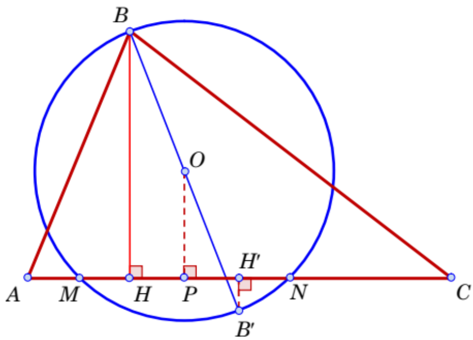


Рис. 53

Комментарии. Важный шаг в решении — обнаружение «длинной» арифметической прогрессии $a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots, a_{n+k}$ с разностью a_m. При некоторых ограничивающих условиях, например, если k — простое число, или если a_m взаимно просто с k, решение задачи завершается уже на этом шаге (поскольку если a_m взаимно просто с k, то в этой прогрессии встретятся все остатки при делении на k). Трудная часть задачи — рассмотрение ситуации, когда все a_n (при достаточно больших n) не взаимно просты с k.

168. Совпадает с задачей **149**.

169. Первое решение. Пусть D_1, D_2, D_3 — соответственно дискриминанты этих трёхчленов. Первые два уравнения имеют только целые корни, поэтому $D_1 = m^2$, $D_2 = n^2$, где числа m и n можно считать целыми неотрицательными. Вычитая из первого равенства второе, получим: $4 = m^2 - n^2$, то есть $4 = (m-n)(m+n)$.

Числа $m-n$ и $m+n$ — одной чётности, поэтому равенство будет выполняться, только если $m-n=m+n=2$. Но тогда $n=0$, и, значит, дискриминант третьего уравнения $D_3=n^2-4=-4$ — отрицательный.

Второе решение. По теореме Виета числа a и b целые.

Пусть x_1 и x_2 — корни трёхчлена $P_1(x)=x^2+ax+b$, а x_0 — любой из корней трёхчлена $P_2(x)=x^2+ax+b+1$. Поскольку $P_2(x)$ имеет хотя бы один корень, корни трёхчлена $P_1(x)=P_2(x)-1$ различны.

Имеем $P_1(x_0)=P_2(x_0)-1=-1$, откуда

$$1=P_1(x_1)-P_1(x_0)=(x_1^2+ax_1+b)-(x_0^2+ax_0+b)= \\ =(x_1-x_0)(x_1+x_0+a).$$

Поскольку оба множителя в правой части целые, они могут быть равны лишь ±1. Аналогично, $x_2-x_0=x_2+x_0+a=\pm1$. Так как $x_1\neq x_2$, отсюда следует, что $|\,x_2-x_1\,|=2$ и $x_0=\frac{1}{2}(x_1+x_2)$. Так как это рассуждение верно для произвольного корня x_0 трёхчлена $P_2(x)$, его корни совпадают, то есть $P_2(x)=(x-x_0)^2$. А тогда многочлен $P_2(x)+1=(x-x_0)^2+1$ положителен на всей оси, то есть корней не имеет.

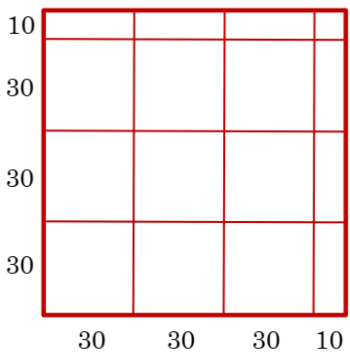


Рис. 54

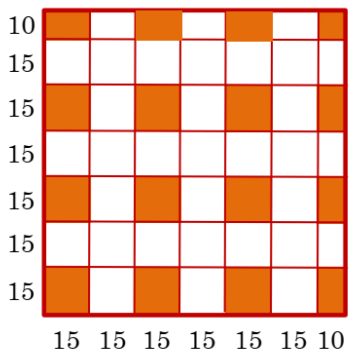


Рис. 55

170. *Ответ:* $55^2=3025$ *клеток.*

Разобьём доску на 9 квадратов 30×30, 6 прямоугольников 10×30 и один квадрат 10×10 (рис. 54). В каждом квадрате 30×30

клетки разбиваются на 15^2 четвёрок так, что расстояние между любыми клетками в одной четвёрке равно 15 (каждая четвёрка состоит из клеток с координатами $(a;b)$, $(a;b+15)$, $(a+15;b)$, $(a+15;b+15)$). Тогда в любой четвёрке может быть отмечено не более одной клетки, то есть общее число отмеченных клеток в таком квадрате не превосходит 15^2.

Аналогично, всякий прямоугольник 10×30 (скажем, с длинной горизонтальной стороной) разбивается на пары клеток, отстоящих друг от друга на 15 (с координатами $(a;b)$ и $(a+15;b)$) — поэтому в нём не более $15\cdot 10$ отмеченных клеток. Наконец, в квадрате 10×10 всего 10^2 клеток. Итого, отмеченных клеток не больше, чем $9\cdot 15^2+6\cdot 15\cdot 10+10^2=(3\cdot 15+10)^2=55^2$.

Пример с таким количеством отмеченных клеток показан на рисунке 55.

171. Совпадает с задачей **161**.

172. Прямая CF перпендикулярна плоскости ABD, поэтому $CF\perp AD$. Аналогично, $BE\perp AD$. Поэтому прямые CF и BE параллельны плоскости α и или лежат в ней. Точки B, C, E и F лежат на сфере ω, описанной около тетраэдра $ABCD$. Также, поскольку $\angle BEC=90^\circ=\angle BFC$, точки B, C, E и F лежат на сфере ω', построенной на отрезке BC как на диаметре.

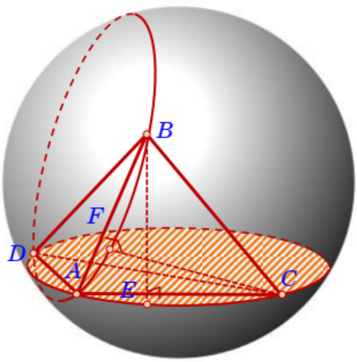


Рис. 56

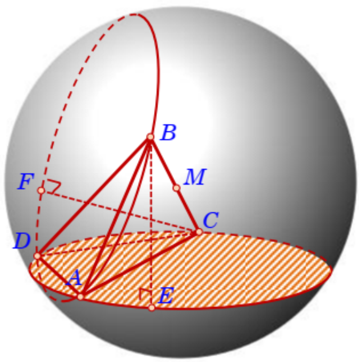


Рис. 57

Если сферы ω и ω' не совпадают, все их общие точки лежат в одной плоскости, обозначим её через β. В плоскости β лежат прямые BE и CF, каждая из которых параллельна плоскости α

или лежит в этой плоскости. Также прямые BE и CF не параллельны, поскольку они перпендикулярны пересекающимся плоскостям ACD и ABD. Таким образом, плоскость β параллельна плоскости α или совпадает с ней, а расстояния от точек E и F до α равны расстоянию между плоскостями α и β (рис. 56).

Если же сферы ω и ω' совпадают, то их общий центр M является серединой отрезка BC и лежит в плоскости α. Следовательно, расстояния от точек B и C до α равны. Поскольку прямая BE параллельна α, расстояния от B и E до α тоже равны, а тогда точки E и F равноудалены от α (рис. 57).

173. Совпадает с задачей **153**.

174. Пусть $t = \sqrt[2^{n+1}]{a}$. Заметим, что $t \neq 1$. Тогда $x_{n+1} = 2^{n+1}(t-1)$ и $x_n = 2^n(t^2-1)$. Следовательно,

$$\begin{aligned} x_n - x_{n+1} &= 2^n(t^2-1) - 2^{n+1}(t-1) = \\ &= 2^n(t^2-2t+1) = 2^n(t-1)^2 > 0, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Комментарии. При других подходах к решению неравенства могут выглядеть по-разному при $a > 1$ (когда члены последовательности положительны) и при $0 < a < 1$ (когда они отрицательны).

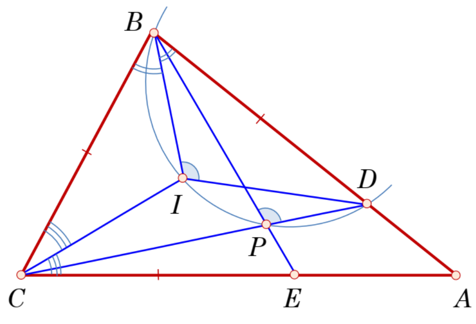


Рис. 58

175. Обозначим через I центр вписанной окружности треугольника ABC, точка I является точкой пересечения биссектрис. Докажем, что точки B, D, P, I лежат на одной окружности. Аналогично покажем, что точки C, E, P, I лежат на одной окружности, и задача будет решена.

Достаточно установить равенство $\angle BPD = \angle BID$. Биссектриса BI угла ABC является осью симметрии равнобедренного треугольника BDC, поэтому $\angle BID = \angle BIC = 180^\circ - \angle IBC - {} - \angle ICB = 180^\circ - \frac{1}{2}\angle B - \frac{1}{2}\angle C$ (рис. 58). Далее, $\angle BPD = \angle PBC + {} + \angle PCB = \angle EBC + \angle DBC$. Из равнобедренности треугольника BCE получаем $\angle EBC = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle C) = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle C$ и, аналогично, $\angle DCB = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle B$. Отсюда $\angle BPD = 180^\circ - \frac{1}{2}\angle B - \frac{1}{2}\angle C = {} = \angle BID$, что и требовалось доказать.

Комментарии. Точка I является так называемой *точкой Микеля* для четвёрки прямых AB, AC, BE, CD, то есть через I проходят окружности, описанные около каждого из треугольников, образованных тремя из четырёх перечисленных прямых.

176. *Ответ:* $m = 28$.

Для каждого натурального n обозначим $X_n = \{1, 2, \ldots, n\}$. Каждому ученику сопоставим множество всех дней, когда он ходил в бассейн (это будет подмножество в X_{30}). Итого, мы получили набор из m (согласно условию, непустых) подмножеств в X_{30}. Условие равносильно тому, что во всех подмножествах разные количества элементов, и ни одно из них не содержится в другом; назовём такой набор подмножеств *хорошим*. Таким образом, нам нужно найти максимальное число множеств в хорошем семействе подмножеств в X_{30}.

Докажем сначала, что такой набор не может содержать больше 28 множеств. Это очевидно, если в наборе есть 30-элементное подмножество, так как оно содержит любое другое. Значит, можно считать, что множества в наборе могут состоять лишь из $1, 2, \ldots, 29$ элементов (и их не больше 29). Пусть в хорошем наборе есть 29-элементное множество A и 1-элементное множество B. Так как B не содержится в A, они не пересекаются. Тогда любое другое подмножество в X_{30} либо содержит B, либо содержится в A. Значит, в этом случае хороший набор состоит лишь из двух подмножеств. Наконец, если в наборе нет 1- или 29-элементного подмножества, то в нём уже не более 28 множеств, что и требовалось.

Осталось предъявить пример хорошего набора из 28 подмножеств в X_{30}. Для этого покажем индукцией по $k \geqslant 2$, что существует хороший набор $A_1, A_2, \ldots, A_{2k-2}$ подмножеств в X_{2k}, причём A_i содержит $i+1$ элементов. В базовом случае $k = 2$ годятся подмножества $A_1 = \{1, 2\}$ и $A_2 = \{1, 3, 4\}$.

Пусть для некоторого k уже построен требуемый хороший набор $B_1, \ldots, B_{2k-2}$ подмножеств в X_{30}. Тогда требуемый хороший набор подмножеств в X_{2k+2} можно построить так. Положим $A_{i+1} = B_i \cup \{2k+2\}$ при $i = 1, 2, \ldots, 2k-2$; эти множества содержат 3, 4, … , $2k$ элементов соответственно. Наконец, положим $A_1 = \{2k+1, 2k+2\}$ и $A_{2k} = \{1, 2, \ldots, 2k+1\}$. Нетрудно проверить, что они образуют требуемый хороший набор. Тем самым переход индукции доказан.

Комментарии. Рассуждения из второго абзаца решения показывают, что в хорошем наборе подмножеств в X_n не больше, чем $n-2$ множеств, если $n \geqslant 4$. С другой стороны, действуя аналогично второй половине решения, можно построить и хороший набор из $2k-1$ подмножеств в X_{2k+1} при $k \geqslant 1$; базу индукции доставляет подмножество $A_1 = \{1, 2\}$.

Можно устроить и непосредственный переход индукции, позволяющий по хорошему набору из $n-2$ подмножеств в X_n построить хороший набор из $n-1$ подмножества в X_{n+1} (при $n \geqslant 5$). Для такого перехода полезно следующее соображение: если взять *дополнения* всех множеств хорошего набора, то также получится хороший набор.

177. *Ответ:* $\frac{1}{8(n-1)}$.

Если Петя выберет числа 0, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4(n-1)}$, $\frac{1}{4(n-1)}$, …, $\frac{1}{4(n-1)}$, то как бы ни расставлял эти числа Вася, число $\frac{1}{2}$ будет в одной паре с числом $\frac{1}{4(n-1)}$. Значит, одно из произведений будет равно $\frac{1}{8(n-1)}$, а остальные будут не больше его. Тогда на доске окажется число $\frac{1}{8(n-1)}$.

Покажем, как Вася может для любых чисел получить на доске число, не большее $\frac{1}{8(n-1)}$. Перенумеруем числа в порядке невозрастания: $x_1 \geqslant x_2 \geqslant \ldots \geqslant x_{2n}$. Поставим в какое-то место на круге число x_1, от него по часовой стрелке через пустые места числа x_2, x_3, …, x_n. Теперь поставим число x_{2n} между x_1 и x_n; дальше по часовой стрелке от x_{2n} расставим на пустых местах по очереди числа x_{2n-1}, x_{2n-2}, …, x_{n+1}.Тогда произведениями пар соседних чисел будут: $x_n x_{2n}$,

$$x_1 x_{2n},\ x_2 x_{2n-1},\ x_3 x_{2n-2},\ \ldots,\ x_k x_{2n-k+1},\ \ldots,\ x_n x_{n+1}$$

и

$$x_1 x_{2n-1},\ x_2 x_{2n-2},\ x_3 x_{2n-3},\ \ldots,\ x_k x_{2n-k},\ \ldots,\ x_{n-1} x_{n+1}\,.$$

Поскольку $x_k x_{2n-k+1} \leqslant x_k x_{2n-k}$, наибольшее произведение может быть лишь во второй строке.

Покажем, что $a = x_k x_{2n-k} \leqslant \frac{1}{8(n-1)}$ при $k \leqslant n-1$. Действительно, из неравенств $x_k \leqslant x_{k-1} \leqslant \ldots \leqslant x_2 \leqslant x_1$ следует, что $kx_k \leqslant x_1 + x_2 + \ldots + x_k$, поэтому

$$ka = kx_k \cdot x_{2n-k} \leqslant (x_1 + x_2 + \ldots + x_k)\, x_{2n-k}\,.$$

Аналогично из неравенств

$$x_{2n-k} \leqslant x_{2n-k-1} \leqslant x_{2n-k-2} \leqslant \ldots \leqslant x_{k+1}$$

следует, что

$$\begin{aligned}(2n-2k)x_{2n-k} &\leqslant x_{2n-k} + x_{2n-k-1} + \ldots + x_{k+1} \leqslant \\ &\leqslant x_{k+1} + x_{k+2} + \ldots + x_{2n} = \\ &= 1 - x_1 - x_2 - \ldots - x_k\,.\end{aligned}$$

Поэтому

$$2k(n-k)a \leqslant (x_1 + x_2 + \ldots + x_k)(1 - x_1 - x_2 - \ldots - x_k) = x(1-x),$$

где $x = x_1 + x_2 + \ldots + x_k$. Поскольку $x(1-x) \leqslant \frac{1}{4}$, получаем неравенство $x_k x_{2n-k} = a \leqslant \frac{1}{8k(n-k)}$. Осталось показать, что $k(n-k) \geqslant n-1$ при $k \leqslant n-1$. Но последнее неравенство можно переписать в виде $(k-1)(n-k-1) \geqslant 0$, и обе скобки в последней формуле неотрицательны.

Комментарии. Оптимальная расстановка для Васи не единственна. Однако можно доказать, что при любом $k = 1, 2, \ldots, n-1$ в любой Васиной расстановке среди произведений пар соседних чисел найдётся число, не меньшее $x_k x_{2n-k}$; поэтому оптимальными для Васи окажутся расстановки, в которых наибольшее произведение имеет такой вид.

178. *Ответ: да, может, и только для числа* 1346.

Если $n = 2k$ — чётное число, то его наибольший делитель, отличный от n, равен k, а их сумма $2k + k = 3k$ равна 2019. Значит, $k = 673$, и $n = 2k = 1346$.

179. *Ответ:* 211 *конфет.*

Малыш каждый раз брал нечётное число конфет, а Карлсон — чётное. Сумма первых десяти нечётных чисел $1+3+5+\ldots+19 = 100$ меньше 101, а сумма первых одиннадцати нечётных чисел $1+3+5+\ldots+21 = 121$ больше 101. Значит, Малыш десятым ходом забрал 19 конфет, а своим последним ходом — ещё 1 конфету. Но тогда у Карлсона $2+4+6+\ldots+20=110$, а всего $101+110=211$ конфет.

180. *Ответ: не может.*

Пусть трёхчлен ax^2+bx+c имеет корень $\frac{1}{2019}$. Подставив это число и домножив на 2019^2, получим $a+b\cdot 2019+c\cdot 2019^2 = 0$. Поскольку a, b, c — нечётные числа, левая часть — нечётное число, а правая — чётное. Противоречие.

181. Первое решение. Разделим все монеты на две части по 20 монет и взвесим. Так как фальшивых монет нечётное число, одна из кучек перевесит. Значит, в ней не более одной фальшивой монеты. Разделим ее на две кучки по 10 монет и взвесим их. Если чашки весов оказались в равновесии, то все 20 взвешиваемых монет — настоящие. Если одна из чашек перевесила, то на ней 10 настоящих монет, а среди других 10 монет ровно одна фальшивая. Разделим эти 10 монет на три кучки, состоящие из 4, 4 и 2 монет. Третьим взвешиванием сравним две кучки по 4 монеты. Если они уравновесятся, то все 8 монет — настоящие и мы нашли 18 настоящих монет. Если одна из кучек перевесит, то в ней 4 настоящих монеты, в другой кучке есть фальшивая, а 2 отложенных монеты — настоящие. Всего найдено 16 настоящих монет.

Второе решение. Разделим все монеты на пять равных кучек, в каждой из которых по 8 монет, и пронумеруем их. Положим на одну чашку весов 1-ю и 2-ю кучки, а на другую — 3-ю и 4-ю.

Рассмотрим первый случай — весы уравновесились. Тогда либо на каждой чашке находится по одной фальшивой монете, либо все монеты во взвешивании настоящие. Тогда взвесим 1-ю и 2-ю кучки, и если они оказались в равновесии, то все 16 монет настоящие. Если же одна из кучек перевесила, то в ней 8 настоящих монет. Третьим взвешиванием сравниваем 3-ю и 4-ю кучки и определяем следующие 8 настоящих монет.

Теперь рассмотрим второй случай — весы не уравновесились. Пусть, для определенности, перевесили 1-я и 2-я кучки, тогда среди них не более одной фальшивой монеты. Вторым взвешиванием сравним 1-ю и 2-ю кучки. Если они уравновесились, то все 16 монет настоящие. Если же одна из кучек перевесила, то в ней 8 настоящих монет, а в другой ровно одна фальшивая. Следовательно, в 3-й и 4-й кучках ровно две фальшивые монеты, а в 5-й кучке 8 настоящих монет. Значит, всего найдено 16 настоящих монет.

182. *Ответ: все углы равны* $60°$.

(Рис. 59.) Отметим на отрезке AD точку K такую, что $AK = AB$, и значит, $KD = AC$. Треугольник ABK — равносторонний, поскольку имеет две равные стороны и один из углов $60°$. Треугольники ABC и KBD равны по двум сторонам и углу между ними: $AB = KB$, $KD = AC$, $\angle BAC = \angle BKD = 120°$. Значит, $BC = BD$ и $\angle DBK = \angle CBA$. Добавив к обеим частям последнего равенства $\angle KBC$, получаем: $\angle DBC = \angle KBA$. Итак, треугольник DBC — равнобедренный с углом $60°$, то есть равносторонний, и все его углы равны $60°$.

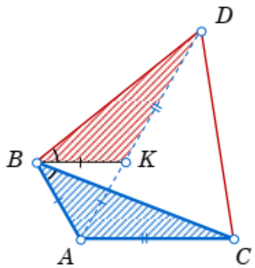


Рис. 59

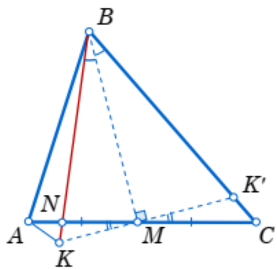


Рис. 60

183. *Ответ: одинаково.*

Пусть x, y и z — стоимость кренделя, коврижки и баранки соответственно. Тогда $3x + 5y + 6z = 24 \Longleftrightarrow 5y = 3(8 - x - 2z)$. Отсюда следует, что y кратно 3, то есть $y = 3, 6, 9, \ldots$. Случай $y \geqslant 6$ невозможен, так как тогда $5y \geqslant 30$, а вся покупка обошлась в 24 пенса. При $y = 3$ получаем, что $x + 2z = 3$. Это уравнение легко решается: $z < 2$, и значит, $z = 1$ и $x = 1$. Таким образом, коврижка стоит 3 пенса, а крендель и баранка стоят одинаково — 1 пенс.

184. *Ответ:* 24.

Если число делится на 4, то оно чётное, так что последней его цифрой может быть только 2 или 4. Как известно, число делится на 4 тогда и только тогда, когда число, составленное из двух его последних цифр, делится на 4. На 2 оканчиваются три таких числа: 12, 32 и 52, а на 4 — только 24. Оставшиеся 3 цифры можно переставлять в произвольном порядке, что дает по 6 вариантов на каждый рассмотренный случай. Всего получаем $4\cdot 6 = 24$ числа.

185. *Ответ:* $(1;\,1)$, $(-1;\,-1)$, $(1;\,-1)$, $(-1;\,1)$.

Первое решение. Раскроем скобки, перенесем все слагаемые в одну часть и сгруппируем:

$$x^4y^4 + x^4 + y^4 + 1 - 4x^2y^2 = 0,$$
$$(x^4y^4 - 2x^2y^2 + 1) + (x^4 - 2x^2y^2 + y^4) = 0,$$
$$(x^2y^2 - 1)^2 + (x^2 - y^2)^2 = 0.$$

Это равенство возможно только при $x^2y^2 = 1$ и $x^2 = y^2$. Отсюда $|\,x\,| = |\,y\,| = 1$.

Второе решение. Воспользуемся неравенством о средних: $x^4+1 \geqslant 2x^2$ и $y^2+1 \geqslant 2y^2$. Перемножив почленно эти неравенства и умножив полученное на 4, получим:

$$(x^4 + 1)(y^4 + 1) \geqslant 4x^2y^2,$$

причем равенство достигается тогда и только тогда, когда $x^4 = y^4 = 1$.

186. Совпадает с задачей **181**.

187. Пусть K' — точка, в которой продолжение отрезка KM за точку M пересекает отрезок BC (рис. 60). Тогда прямоугольные треугольники BMK и BMK' равны, откуда $BK = BK'$ и $MK = MK'$. А из равенств $MK = MK'$, $AM = CM$ и $\angle AMK = \angle CMK'$ следует, что равны треугольники AMK и CMK'. Поэтому $AK = CK'$ и $AK + BK = CK' + BK' = BC$.

188. *Ответ:* 2019.

Сумма первых n нечётных натуральных чисел равна

$$1 + 3 + \ldots + (2n - 1) = n^2.$$

Число $2019 = 3\cdot 673$ имеет только два простых делителя — 3 и 673, поэтому n делится и на 3, и на 673, а значит, и на $3 \cdot 673 = 2019$, то есть $n \geqslant 2019$. Таким образом, число $n = 2019$ — *наименьшее* натуральное, удовлетворяющее условию задачи.

189. *Ответ:* 45 *обезьян.*

Покажем, как осчастливить 45 обезьян. Составим 25 наборов из банана, персика и мандарина, 15 — из груши, персика и мандарина, и наконец, 5 наборов — из груши, банана и мандарина. Докажем теперь, что более 45 обезьян осчастливить нельзя.

Первое решение. Поделим фрукты на две группы: в первую включим груши, бананы и персики, а во вторую — мандарины. Во второй группе только один вид фруктов, поэтому в «счастливый» набор входит не менее двух фруктов первой группы. Но из фруктов первой группы можно составить не более $(20 + 30 + +40) : 2 = 45$ пар (и троек). Значит, более 45 обезьян осчастливить невозможно.

Второе решение. Так как общее количество фруктов $20 + + 30 + 40 + 50 = 140$ и в каждом наборе только три фрукта, то можно составить не более 46 наборов. Если в каждом из них будет по одному мандарину, то $50 - 46 = 4$ мандарина останутся неиспользованными. Поэтому при составлении наборов будет использовано не более $140 - 4 = 136$ фруктов, а из них можно получить не более 45 счастливых наборов.

190. *Ответ: а) может; б) не может.*

а) Расстановка цифр указана на рисунке 61.

б) Заметим, что каждая цифра входит в требуемую сумму три раза (со знаком + или −). Независимо от распределения знаков, сумма $S = 8 \pm 7 \pm 6 \pm 5 \pm 4 \pm 3 \pm 2 \pm 1$ содержит 4 нечётных числа, и значит, S — чётно. Поскольку искомое выражение — это сумма трёх таких чётных чисел, получить число 41 нельзя.

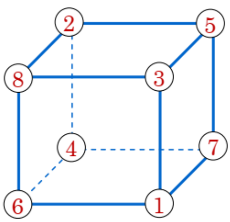


Рис. 61

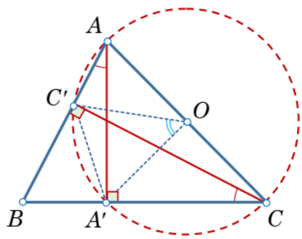


Рис. 62

191. *Ответ:* 5.

(Рис. 62.) Построим на стороне AC как на диаметре окружность, которая пройдет через точки A' и C', так как $\angle AA'C = \angle AC'C = 90^\circ$. Центр O этой окружности лежит в середине AC, а радиус равен $\frac{1}{2}AC = 5$. В прямоугольном треугольнике $AA'B$ угол ABA' равен 60°, поэтому $\angle BAA' = 30^\circ$, и значит, центральный угол $C'OA'$ равен $2\angle BAA' = 60^\circ$. Отсюда следует, что равнобедренный треугольник $C'OA'$ — равносторонний, поэтому $A'C'$ равен радиусу окружности, то есть $A'C' = 5$.

192. Сначала докажем для положительных чисел a и b вспомогательное неравенство:

$$\frac{2}{a+b} \leqslant \frac{a+b}{2ab}, \quad \text{то есть} \quad \frac{2}{a+b} \leqslant \frac{1}{2a} + \frac{1}{2b},$$

которое равносильно такому: $4ab \leqslant (a+b)^2 \iff 0 \leqslant (a-b)^2$. Последнее очевидно. Запишем доказанное неравенство для каждой пары переменных a и b, b и c, c и a, а затем сложим все три неравенства:

$$\frac{2}{a+b} + \frac{2}{b+c} + \frac{2}{c+a} \leqslant \left(\frac{1}{2a} + \frac{1}{2b}\right) + \left(\frac{1}{2b} + \frac{1}{2c}\right) + \left(\frac{1}{2c} + \frac{1}{2a}\right).$$

Из полученного неравенства легко получается требуемое.

193. *Ответ:* 672.

Сумма первых n чётных натуральных чисел равна

$$2 \cdot (1 + 2 + \ldots + n) = n(n+1).$$

Число $2019 = 3 \cdot 673$ имеет только два простых делителя — 3 и 673, поэтому одно из чисел n или $n+1$ делится на 673. Значит, n или $n+1$ не меньше 673, то есть $n \geqslant 672$. Поскольку $672 \cdot 673 = 224 \cdot 3 \cdot 673$ делится на 2019, число $n = 672$ — *наименьшее* натуральное, удовлетворяющее условию задачи.

194. *Ответ:* 33 *обезьяны.*

Покажем, как осчастливить 33 обезьяны. Составим 11 наборов из груши, персика и мандарина, и 22 набора — из банана, персика и мандарина. Докажем теперь, что более 33 обезьян осчастливить нельзя.

Первое решение. Поделим фрукты на две группы: в первую включим груши, бананы и персики, а во вторую — мандарины. Во второй группе только один вид фруктов, поэтому в «счастливый» набор входит не менее двух фруктов первой группы. Но из фруктов первой группы можно составить не более $(11 + 22 + 33) : 2 = 33$ пар (и троек). Значит, более 33 обезьян осчастливить невозможно.

Второе решение. Так как общее количество фруктов $11 + 22 + 33 + 44 = 110$ и в каждом наборе только три фрукта, то можно составить не более 36 наборов. Если в каждом из них будет по одному мандарину, то $44 - 36 = 8$ мандаринов останутся неиспользованными. Поэтому при составлении наборов будет использовано не более $110 - 8 = 102$ фруктов, а из них можно получить не более $102 : 3 = 34$ счастливых наборов. Теперь у нас 36 мандаринов, и значит, при составлении наборов, по крайней мере $36 - 34 = 2$ мандарина снова не будут использованы. Из оставшихся $102 - 2 = 100$ фруктов нельзя получить 34 набора.

195. *Ответ: б*) 0.

а) Пусть сумма всех чисел набора равна S. По условию для любого x из набора число $S - x$ также входит в набор. Так как наборы чисел $x, y, z, \ldots$ и $S - x, S - y, S - z, \ldots$ совпадают, то их суммы равны: $x + y + z + \ldots = (S - x) + (S - y) + (S - z) + \ldots$, или $S = 2019 \cdot S - S$, откуда $S = 0$.

б) Для любого x число $S - x = -x$ входит в набор, то есть все числа в наборе разбиваются на *пары* противоположных. Поскольку число 2019 — нечётное, одно из чисел набора, не имеющее пары, обязано равняться 0. Отсюда следует, что произведение всех 2019 чисел равно 0.

196. Совпадает с задачей **191**.

197. Сначала докажем для положительных чисел a и b вспомогательное неравенство:

$$\frac{ab}{a+b} \leqslant \frac{a+b}{4},$$

которое равносильно такому: $4ab \leqslant (a+b)^2 \iff 0 \leqslant (a-b)^2$. Последнее очевидно. Запишем доказанное неравенство для каждой пары переменных a и b, b и c, c и a, а затем сложим все три неравенства:

$$\frac{ab}{a+b}+\frac{bc}{b+c}+\frac{ca}{c+a}\leqslant\frac{a+b}{4}+\frac{b+c}{4}+\frac{c+a}{4}=\frac{a+b+c}{2}.$$

Поскольку $a+b+c=1$, отсюда получаем требуемое неравенство.

198. Пусть $\frac{a}{c}=x$, тогда $\frac{b}{d}=\frac{1}{x}$, и требуемое неравенство равносильно такому:

$$x+\frac{1}{x}-2\geqslant 0 \quad\Longleftrightarrow\quad \left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2\geqslant 0.$$

199. *Ответ:* 21.

При умножении четырёхзначного числа что-то «шло на ум» не более четырёх раз. Однако, поскольку первая цифра четырёхзначного числа единица, последний раз «на ум» могла идти только единица. Таким образом, «шесть шло на ум» не более трёх раз, и значит, «с ума сошло» $3\cdot 7=21$ человек. Такое возможно, например, если на 9 умножалось 1667.

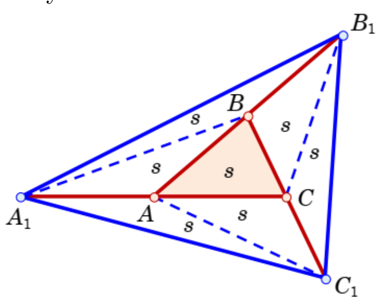


Рис. 63

200. *Ответ:* $7S$.

В треугольнике A_1BC отрезок BA — медиана, и значит, делит треугольник на две равновеликие части. Поэтому площадь треугольника A_1BA равна площади ABC и составляет S (рис. 63). В треугольнике AA_1B_1 медиана A_1B делит треугольник на две равновеликие части, поэтому площадь A_1B_1B равна площади A_1BA и тоже составляет S. Таким образом, площадь «добавочного» треугольника AA_1B_1 составляет $2S$. Для двух остальных треугольников BB_1C_1 и CC_1A_1 рассуждение аналогичное.

201. *Ответ: да, может; через* 9 *минут.*

Обозначим скорости велосипедистов через v_i, условие обгона имеет вид $v_i \cdot t = v_j \cdot t + S_{ij}$, где S_{ij} — расстояние, на которое i-ый велосипедист на старте отстает от j-го. Пусть расстояния на старте равны S. Для решения важно, в каком порядке пронумерованы велосипедисты на старте: по ходу движения или против (рис. 64). В первом случае соотношения имеют вид:

$$\begin{aligned}(v_1 - v_2) \cdot 12 &= S,\\ (v_1 - v_3) \cdot 18 &= 2S,\\ (v_3 - v_2) \cdot t &= 2S.\end{aligned}$$

Из первых двух находим $v_2 = v_1 - \frac{1}{12}S$ и $v_3 = v_1 - \frac{1}{9}S$, откуда следует, что $v_3 < v_2$. Этот вариант нам не подходит. Проверим второй случай. Соотношения в этом случае имеют вид

$$\begin{aligned}(v_1 - v_2) \cdot 12 &= 2S,\\ (v_1 - v_3) \cdot 18 &= S,\\ (v_3 - v_2) \cdot t &= S.\end{aligned}$$

Отсюда $v_2 = v_1 - \frac{1}{6}S$ и $v_3 = v_1 - \frac{1}{18}S$, и значит, $v_3 - v_2 = \frac{1}{9}S$. Подставляя в третье соотношение, получим $t = 9$. Это число меньше и 12, и 18.

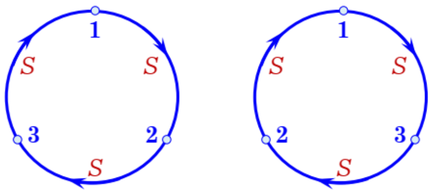


Рис. 64

202. Просуммируем значения по трём сторонам, $3 \cdot 21 = 63$. Сумма всех чисел в кружках составляет $1+2+\ldots+9 = 45$, разница образовалась из-за того, что значения в вершинах посчитаны дважды. Значит, сумма чисел в вершинах составляет $63-45 = 18$.

Предположим, что тройка стоит не в вершине, например, $b = 3$ (рис. 65,a). Обозначим значение в противолежащей вершине через a. Тогда в вершинах нижней стороны сумма равна $18 - a$, следовательно, $3 + c = 21 - (18 - a) = 3 + a$, то есть $a = c$, противоречие. Решение задачи с тройкой в углу существует (рис. 65,*б*).

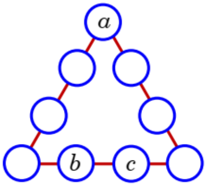


Рис. 65,*а*

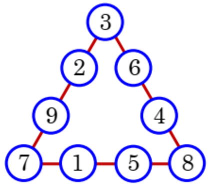


Рис. 65,*б*

203. *Ответ:* 10°.

Первое решение. Обозначим через O точку пересечения BM с биссектрисой угла C треугольника ABC (рис. 66,*а*). Треугольники AOC и BOC равны по двум сторонам и углу между ними, поэтому $\angle OAC = \angle OBC = \angle ABC - \angle MBA = 50° - 30° = 20°$. Тогда $\angle COB = \angle COA = 180° - \angle CBO - \frac{1}{2}\angle C = 120°$.

Поэтому $\angle MOA = 360° - \angle COA - \angle COB = 120°$, $\angle OAM = \angle CAB - \angle OAC - \angle MAB = 20°$. Треугольники CAO и MAO равны по общей стороне OA и двум углам: $\angle MOA = \angle COA$, $\angle OAM = \angle OAC$, поэтому $OC = OM$ и треугольник COM — равнобедренный. Отсюда получаем: $\angle OCM = \frac{1}{2}(180° - 120°) = 30°$, поэтому $\angle MCB = \angle OCB - \angle OCM = 40° - 30° = 10°$.

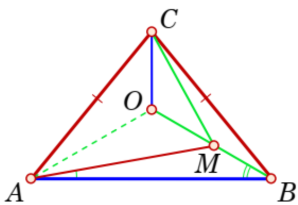


Рис. 66,*а*

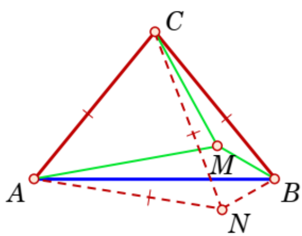


Рис. 66,*б*

Второе решение. Построим на стороне AC равносторонний треугольник CNA (рис. 66,*б*). В треугольнике ABC угол C равен 80°, поэтому $\angle BCN = 80° - 60° = 20°$. Поскольку $CB = CA = CN$, $\angle CBN = \frac{1}{2}(180° - 20°) = 80°$. Отсюда $\angle ABN = \angle CBN - \angle CBA = 80° - 50° = 30° = \angle ABM$, и $\angle BAN = \angle CAN - \angle CAB = 60° - 50° = 10° = \angle MAB$. Треугольники

BAM и BAN равны по общей стороне и двум углам, и значит, $BM = BN$. Поскольку $\angle MBN = \angle ABM + \angle ABN = 60°$, треугольник MBN — равносторонний и $MN = MB$. Треугольники MCN и MCB равны по трём сторонам, поэтому $\angle MCB = \angle MCN = \frac{1}{2}\angle BCN = 10°$.

204. *Ответ:* -4, 1, $\frac{1}{2}(3 \pm \sqrt{17})$.

Введем обозначения $u = |\,3x - 1\,|$, $v = |\,x^2 - 3\,|$. Тогда $u^2 = 9x^2 - 6x + 1$ и $v = x^4 - 6x^2 + 9$, так что уравнение имеет вид $v^2 - u^2 = u - v$, откуда $(v - u)(v + u + 1) = 0$.

Заметим, что второй сомножитель положителен, поэтому уравнение приводится к виду $u = v$, то есть $|\,3x - 1\,| = |\,x^2 - 3\,|$. Модули двух чисел равны только в том случае, когда сами числа совпадают или отличаются знаком, то есть $3x - 1 = \pm(x^2 - 3)$.

Решая эти квадратные уравнения, получаем четыре корня.

205. *а*) Представим число 4^{2n-1} в виде $4 \cdot 16^{n-1}$. Поскольку остаток от деления числа 16 на 5 равен единице, произведение $4 \cdot 16^{n-1}$ даёт остаток 4 при любом $n \geqslant 1$. Прибавив к этому произведению единицу, получим число, делящееся на 5, что и требовалось.

б) Выделим в числителе дроби полный квадрат:

$$4^{2n-1} + 1 = (4^{2n-1} + 2 \cdot 2^{2n-1} + 1) - 2 \cdot 2^{2n-1} =$$
$$= (2^{2n-1} + 1)^2 - 2^{2n} = (2^{2n-1} + 1 - 2^n) \cdot (2^{2n-1} + 1 + 2^n).$$

В получившемся произведении оба множителя больше 5 при любом $n > 2$, поэтому после сокращения дроби на 5 получится произведение двух натуральных чисел, больших 1, то есть получится составное число.

206. *Ответ: $k = 2^i$ и $n = m \cdot k$, где $i \geqslant 0$, $m \geqslant 2$ — целые.*

Заполнение промежутков из незанятых стульев происходит методом «деления пополам», поэтому для того, чтобы в конце все сидели на равном расстоянии друг от друга необходимо, чтобы k было степенью двойки. Когда все рассядутся, между соседями будет по $l > 0$ стульев (неравенство строгое, так как стульев больше, чем людей). Значит, общее их количество равно $k \cdot (l + 1)$, то есть n кратно k, причём частное от деления n на k не меньше, чем 2.

207. Совпадает с задачей **124**.

208. *Ответ:* 6 *метров.*

20 ступенек первой лестницы выше 20 ступенек второй на $20 \cdot 10 = 200$ *см*. Поскольку высота лестниц одна и та же, остальные 10 ступенек второй лестницы должны иметь высоту 200 *см*, и значит, высота каждой ступеньки второй лестницы $200 : 10 = 20$ *см*. Отсюда высота лестниц $30 \cdot 20 = 600$ *см*.

209. *Ответ:* 2.

Искомая сумма состоит из 4-х нечётных чисел 5, 7, 45, 47 и 4-х чётных. Поскольку сумма или разность двух нечётных чисел всегда чётна, при любой расстановке знаков у 4-х нечётных слагаемых получится чётная сумма. Значит, сумма S всех 8 чисел всегда будет чётной, и не может быть равна 1, поэтому $S \geqslant 2$. Значение $S = 2$ получается, например, так: $(4 - 5 - 6 + 7) - 44 + 45 - 46 + 47 = 2$.

210. *Ответ: можно, рисунок 67.*

В прямоугольнике $5 \cdot 11 = 55$ клеток. Сумма 10 различных *наименьших* чисел $1 + 2 + 3 + \ldots + 10$ равна 55, поэтому разрезать можно только на прямоугольники с такими площадями.

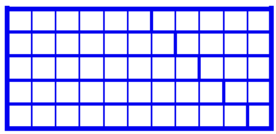


Рис. 67

211. *Ответ:* 129 *или* 309.

Разложим 195 в произведение простых чисел: $195 = 3 \cdot 5 \cdot 13$. Наибольший сомножитель 13 можно получить только из 9 после операция добавления 4, значит, цифра единиц числа Васи равна 9. Сомножитель 3 можно получить только в двух случаях: $1 + 2$ или $0 + 3$. И значит, у Васи было число 129 или 309.

212. *Ответ: а) сможет; б) не сможет.*

а) Это можно сделать, например, так. Составим кучку из первых 7 гирек и ещё одной гири массой 9; общая масса этих 8 гирек равна $1 + 2 + \ldots + 7 + 9 = 37$. Вторую кучку составим из 4 гирек 8, 10, 11 и 12 общей массой $8 + 10 + 11 + 12 = 41$, и, наконец, в третью кучку возьмём оставшиеся 3 гири с общей массой $13 + 14 + 15 = 42$.

б) Предположим, что можно разложить гирьки требуемым образом. Общая масса всех гирек равна $1 + 2 + \ldots + 15 = 120$. Значит, масса самой тяжёлой кучки будет не меньше $120 : 4 = 30$.

Масса двух самых тяжёлых гирек $14+15 < 30$, поэтому в тяжёлой кучке не меньше трёх гирек. Но тогда в следующей, более лёгкой, кучке не меньше 4 гирек, в следующей — не меньше 5 гирек, и так далее. Тогда общее количество гирек не меньше $3+4+5+6 > 15$, противоречие.

213. *Ответ:* 2.

Искомая сумма состоит из 4-х нечётных чисел 3, 5, 13, 15 и 4-х чётных. Поскольку сумма или разность двух нечётных чисел всегда чётна, при любой расстановке знаков у 4-х нечётных слагаемых получится чётная сумма. Значит, сумма S всех 8 чисел всегда будет чётной, и не может быть равна 1, поэтому $S \geqslant 2$. Значение $S = 2$ получается, например, так: $(3 - 4 - 5 + 6) - 12 + 13 - 14 + 15 = 2$.

214. *Ответ:* 20 *или* 25.

Пусть мышек было m, а кошек — k. Каждая мышка послала всем кошкам k открыток, поэтому общее число открыток равно $m \cdot k = 100$, и значит, m и k — делители числа 100 и $m + k \leqslant 25$. Выпишем все разложения числа 100 на два множителя: $10 \cdot 10 = 20 \cdot 5 = 25 \cdot 4 = 50 \cdot 2 = 100 \cdot 1$, и оставим только первые два, для которых сумма делителей не более 25. Значит, кошек и мышек вместе было $10 + 10 = 20$ или $20 + 5 = 25$.

215. *Ответ:* 6 *кубиков.*

Пусть x — число на нижней грани нижнего кубика. Тогда на противоположной (верхней) грани этого кубика будет число $7-x$. Сумма чисел на склеенных гранях равна 6, поэтому число на нижней грани второго снизу кубика равно $x-1$. Тогда на противоположной (верхней) грани этого кубика будет число $8 - x$. Рассуждая таким образом, получим следующее распределение чисел на нижних и верхних гранях кубиков, считая от основания башни:

$$(x; 7 - x), (x - 1; 8 - x), (x - 2; 9 - x), (x - 3; 10 - x),$$
$$(x - 4; 11 - x), (x - 5; 12 - x), \ldots .$$

Все выписанные числа положительны, поэтому $7 - x \geqslant 1$, то есть $x \leqslant 6$. Если в башне есть ещё 7-й кубик, то на его нижней грани будет число $x - 6 \leqslant 0$, противоречие. Для самой высокой башни из 6 кубиков получаем: (6; 1), (5; 2), (4; 3), (3; 4), (2; 5), (1; 6).

216. *Ответ:* 9375.

Если четырёхзначное число $\overline{abcd}$ делится на $\overline{bcd}$, полученное стиранием первой цифры a, то на $\overline{bcd}$ делится и число $\overline{abcd}-\overline{bcd} = 1000a$. Ясно, что исходное число будет наибольшим, если его первая цифра a равна 9. Значит, число $\overline{bcd}$ следует искать среди трёхзначных делителей числа $1000a = 9 \cdot 2^3 \cdot 5^3$. Если $\overline{bcd}$ не содержит пятёрок в своём разложении, то $\overline{bcd} \leqslant 9 \cdot 2^3$, то есть $b = 0$, что невозможно. Если же в его разложении есть пятёрки, то не должно быть двоек; иначе $\overline{bcd}$ делится на 10, и значит, в записи числа $\overline{abcd}$ есть нули. Итак, $\overline{bcd}$ — наибольший трёхзначный делитель числа $9 \cdot 5^3$, то есть $\overline{bcd} = 375$.

217. *Ответ: на* 6 *можно; на* 7 *нельзя.*

На рисунке 68 приведён пример разрезания квадрата 6×6 на 6 прямоугольников с площадями 2, 3, 4, 5, 10, 12, среди которых нет квадратов.

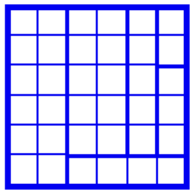


Рис. 68

Докажем, что разрезание на 7 прямоугольников невозможно. Отметим, что в разрезании не могут участвовать прямоугольники площади 7 и 9. В первом случае такой прямоугольник должен иметь размеры 1×7 или 7×1, а во втором — 1×9, 9×1 или 3×3, что невозможно в квадрате 6×6 и по условию задачи. Аналогично, в разрезании не может быть прямоугольника площади 1. Рассмотрим сумму 7 различных *наименьших* натуральных слагаемых, среди которых нет 1, 7 и 9: $2+3+4+5+6+8+10 = 38$. Это больше площади квадрата 6×6, поэтому разрезать не удастся.

218. *Ответ:* 20, 25 *или* 29.

Пусть мышек было m, а кошек — k. Каждая мышка послала всем кошкам k открыток, поэтому общее число открыток равно $m \cdot k = 100$, и значит, m и k — делители числа 100, и $m + k \leqslant 30$. Выпишем все разложения числа 100 на два множителя: $10 \cdot 10 = 20 \cdot 5 = 25 \cdot 4 = 50 \cdot 2 = 100 \cdot 1$, и оставим только первые три, для которых сумма делителей не более 30. Значит, кошек и мышек вместе было $10 + 10 = 20$, $20 + 5 = 25$ или $25 + 4 = 29$.

219. *Ответ: нельзя.*

Если разрезание возможно, общая площадь всех восьми прямоугольников или квадратов равна $6 \times 6 = 36$ и не меньше суммы первых восьми натуральных чисел $1 + 2 + \ldots + 8 = 36$. Значит, эти площади равны 1, 2, ..., 8. Среди них есть прямоугольник площади 7, стороны которого могут выражаться только целыми числами 1 и 7. Сторона длины 7 больше стороны исходного квадрата, противоречие.

220. *Ответ:* 99.

Оценка. В каждом квадрате 2×2 стоят различные натуральные числа, поэтому сумма чисел в квадрате 2×2 не меньше $1 + 2 + 3 + 4 = 10$. В таблице 6×6 есть 9 таких квадратов 2×2. Значит, сумма чисел в таблице 6×6 не меньше $9 \cdot 10 = 90$. Оставшиеся 6 клеток образуют прямоугольник 1×6, который можно разбить на три прямоугольника 1×2 («доминошки»), в каждом из них сумма чисел не меньше, чем $1 + 2 = 3$, поэтому сумма чисел во всей таблице не меньше $90 + 3 \cdot 3 = 99$.

1	2	1	2	1	2
3	4	3	4	3	4
1	2	1	2	1	2
3	4	3	4	3	4
1	2	1	2	1	2
3	4	3	4	3	4
1	2	1	2	1	2

Рис. 69

Пример. На рисунке 69 приведён пример таблицы, в которой сумма чисел равна 99.

221. *Ответ:* 126, 198 *или* 405 *конфет.*

Пусть Малыш съел в первый день x конфет, а Карлсон — $(x + 1)$ конфет. Во второй день они съели $x + 1$ и $x + 3$ конфет соответственно, и значит, за эти два дня Карлсон съел на $1 + 2 = 3$ конфеты больше, чем Малыш. Продолжая рассуждения, получим, что за 9 дней Карлсон съел на $1 + 2 + \ldots + 9 = 45$ конфет больше. Поскольку обжоры съели конфет поровну, в следующие дни Малыш съел ровно 45 конфет, причём за 10-ый день он съедает $x + 9 \geqslant 10$ конфет, за 11-ый день — не менее 11 конфет, и так далее. Число 45 можно представить в виде суммы слагаемых (из которых первое не меньше 10) только тремя способами: $14 + 15 + 16$, $22 + 23$ и 45. Другими словами, Малыш съел свои конфеты за 12, 11 или 10 дней. В первом случае, $x + 9 = 14$, $x = 5$, и он всего съел $5 + 6 + \ldots + 16 = 126$ конфет. Во втором случае, $x + 9 = 22$, $x = 13$, и значит, он съел $13 + 14 + \ldots + 23 = 198$ конфет. В третьем случае, $x + 9 = 45$, $x = 36$, и значит, он съел $36 + 37 + \ldots + 45 = 405$ конфет.

222. *Ответ:* 2.

Первое решение. Продолжим отрезок DE за точку E и отложим $EF = DE$ (рис. 70,*а*). Треугольники AED и CEF равны по двум сторонам и углу между ними, поэтому $FC = AD$. В треугольнике CDF проведём высоту DH. В четырёхугольнике $CBDH$ все углы прямые, поэтому $CBDH$ — прямоугольник. Тогда $HC = DB = \frac{1}{2}AD = \frac{1}{2}FC$, то есть высота DH будет и медианой. Значит, треугольник CDF — равнобедренный, и $CD = DF = 2DE = 2$.

Второе решение. Продолжим отрезок AB за точку B и отложим $BF = BD$ (рис. 70,*б*). В треугольнике CDF высота BC будет и медианой, поэтому CDF — равнобедренный, и значит, $CD = CF$. Поскольку $AD = 2DB = DF$ и $AE = EC$, отрезок DE является средней линией треугольника ACF, и $CF = 2DE = 2$. Тогда $CD = CF = 2$.

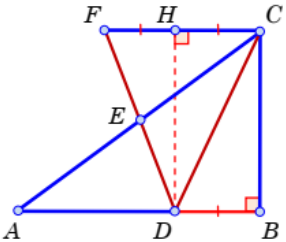


Рис. 70,*а*

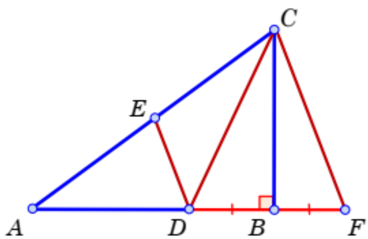


Рис. 70,*б*

Оглавление